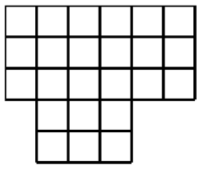
Вариант 1. Все задания по 7 баллов.

Критерии оценивания заданий.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное (верное) решение
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после рассмотрения небольших исправлений или дополнений
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

***Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям.**

1. Сколькими различными способами можно замостить фигуру, представленную на рисунке, прямоугольниками 1×3?



Решение. На левой стороне фигуры находятся три клетки. Если эти три клетки не образуют полоску 1×3, три полоски, содержащие их, образуют квадрат 3×3. Оставшаяся часть фигуры распадается на прямоугольник 2×3 и квадрат 3×3. Первый разбивается единственным способом, второй двумя способами. Значит, мы получили два способа разбиения. Если же эти три клетки образуют прямоугольник 1×3, рассмотрим нижние три клетки. Если они не образуют прямоугольник 1×3, оставшаяся фигура разбивается однозначно. Если они образуют прямоугольник 1×3, а находящиеся над ними три клетки не образуют, остальная фигура также разбиваются однозначно. Это ещё 2 способа. Аналогично получаем ещё 2 способа, рассматривая самые правые клетки. Если же все указанные клетки образуют 4 прямоугольника 1×3, остаётся квадрат 3×3, который разбивается двумя способами.

Ответ: 8 способов.

Комментарий. *Полное обоснованное решение (в том числе, и непосредственный перебор) – 7 баллов. Найдена только часть способов – 2-3 балла. Приведен только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

2. Натуральное число N делится на 500. Докажите, что сумма всех нечётных собственных натуральных делителей N меньше, чем сумма всех чётных. (Собственный делитель числа – всякий его делитель, отличный от самого числа.)

Решение. Число N – чётное, поскольку делится на 500, и, более того, по этой же причине число N делится на 4. Если d – нечётный делитель числа N, то число $2d$ тоже является делителем числа N, причем $2d \neq N$, так как $2d$ не делится на 4. Получается, что вместе с каждым нечётным делителем d также имеется ровно в два раза больший делитель $2d$. Поэтому сумма нечётных чисел не просто меньше, чем сумма чётных, а, по крайней мере, в два раза меньше.

Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. В решении присутствует идея рассмотрения делимости на 2 и 4 – 3 балла. Замечено, что задуманное число делится на 4 без дальнейших продвижений – 1 балл. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

3. В трапеции $ABCD$ точка K — середина основания AD. Отрезки BD и CK пересекаются в точке L, причем $AL \perp BD$. Докажите, что $BC = LC$.

Решение. По свойству медианы прямоугольного треугольника $KL = KD$, следовательно, $\angle KDL = \angle KLD$. Заметим, что $\angle KDL = \angle LBC$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC, $\angle KLD = \angle BLC$ как вертикальные. Таким образом, в треугольнике BLC углы B и L равны, значит, $BC = CL$.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 7 баллов. В верном доказательстве имеются не вполне очевидные и не обоснованные переходы – 5 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений 2–3 балла.*

4. Вася задумал натуральное число n и высказал три утверждения:

1) n – четное число;

2) $n < 198$;

3) уравнение $x^2 + 28x + n = 0$ имеет хотя бы один корень.

Известно, что из трех этих утверждений ровно два верных. Какое наибольшее число мог задумать Вася?

Ответ. 195.

Решение. Рассмотрим условие 3. Для того чтобы квадратное уравнение имело хотя бы один корень, нужно, чтобы дискриминант был неотрицательным, т.е. $D = 28^2 - 4n \geq 0$, а значит, $n \leq 196$. Если число, написанное на доске, не меньше 198, то утверждения 2 и 3 неверны. Поэтому написанное число не больше 197. Если написанное число равно 197, то неверны утверждения 1 и 3, т.е. число 197 не подходит. Если написанное число равно 196, то верны все три утверждения. Значит, число 196 не подходит. Если написанное число равно 195, то верны ровно два утверждения – 2 и 3. Значит, наибольшее возможное число – 195.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 7 баллов. Доказано, что написанное число не больше 197 – 4 балла; показано, что числа 197 и 196 не подходят – по 1 баллу за каждое число; объяснено, почему число 195 подходит – 1 балл, баллы суммируются. При отсутствии решения за потенциально полезные идеи – до 2 баллов. Приведен только верный ответ – 1 балл. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

5. Дачница Нина вырастила на огороде 45 тыкв. Их массы равны 1 кг, 2 кг, …, 45 кг. Могла ли Нина дать по 15 тыкв соседкам Гале и Лене каждой так, чтобы было выполнено условие: какие бы две свои тыквы ни положили на одну чашу весов Галя и Лена (по одной каждая), Нина сможет положить на другую чашу весов одну или две свои тыквы так, чтобы весы уравновесились?

Ответ. Да, могла.

Решение. Приведём один из возможных примеров. Пусть Галя получила тыквы с весами: $1, 4, 7, \dots, 43$, Лена – с весами $2, 5, 8, \dots, 44$, а у Нины остались тыквы с весами $3, 6, 9, \dots, 45$ (иначе говоря, веса тыкв Нины делятся на 3, веса тыкв Гали при делении на 3 дают остаток 1, а веса тыкв Лены – остаток 2). Тогда сумма весов двух тыкв (Гали и Лены) будет делиться на 3 и будет принимать значения от $1 + 2 = 3$ до $43 + 44 = 87 = 29 \cdot 3$. Веса от 3 до 45 Нина может уравновесить одной своей тыквой, а веса от $48 = 45 + 3$ до $87 = 45 + 42$ – двумя тыквами.

Комментарий. *Полное обоснованное решение – 7 баллов. Тыквы распределены верно, но не для всех значений показано, как уравновесить весы – 5-6 баллов. При отсутствии решения за потенциально полезные идеи – до 2 баллов. Приведен только верный ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

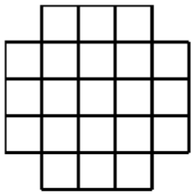
Вариант 2. Все задания по 7 баллов.

Критерии оценивания заданий.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное (верное) решение
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после рассмотрения небольших исправлений или дополнений
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

***Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям.**

1. Сколькими различными способами можно замостить фигуру, представленную на рисунке, прямоугольниками 1×3?



Решение. На каждой из сторон фигуры находится по три клетки. Если каждые такие клетки образуют полоску из трёх клеток, оставшийся квадрат 3×3 можно разбит двумя способами. Если же на какой-то стороне три клетки не образуют полоску, оставшаяся часть фигуры разбивается однозначно.
Ответ: 6 способов.
Комментарий. *Полное обоснованное решение (в том числе, и непосредственный перебор) – 7 баллов. Найдена только часть способов – 2-3 балла. Приведен только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

2. Натуральное число N делится на 740. Докажите, что сумма всех нечётных собственных натуральных делителей N меньше, чем сумма всех чётных. (Собственный делитель числа – всякий его делитель, отличный от самого числа.)
Решение. Число N – чётное, поскольку делится на 740, и, более того, по этой же причине число N делится на 4. Если d – нечётный делитель числа N, то число $2d$ тоже является делителем числа N, причем $2d \neq N$, так как $2d$ не делится на 4. Получается, что вместе с каждым нечётным делителем d также имеется ровно в два раза больший делитель $2d$. Поэтому сумма нечётных чисел не просто меньше, чем сумма чётных, а, по крайней мере, в два раза меньше.
Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. В решении присутствует идея рассмотрения делимости на 2 и 4 – 3 балла. Замечено, что задуманное число делится на 4 без дальнейших продвижений – 1 балл. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

3. Диагонали трапеции $KLMN$ ($KN \parallel LM$) пересекаются в точке P. Прямая, проходящая через точку P перпендикулярно LN, пересекается с прямой KN в точке Q. Известно, что $QK = KN$. Докажите, что $LM = PM$.
Решение. По свойству медианы прямоугольного треугольника $KP = KN$, следовательно, $\angle KNP = \angle KPN$. Заметим, что $\angle KNP = \angle PLM$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых KN и LM, $\angle KPN = \angle LPM$ как вертикальные. Таким образом, в треугольнике LPM углы L и P равны, значит, $LM = PM$.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 7 баллов. В верном доказательстве имеются не вполне очевидные и не обоснованные переходы – 5 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений 2–3 балла.*

4. Вася задумал натуральное число n и высказал три утверждения:
1) n – четное число;
2) $n < 258$;
3) уравнение $x^2 + 32x + n = 0$ имеет хотя бы один корень.
Известно, что из трех этих утверждений ровно два верных. Какое наибольшее число мог задумать Вася?
Ответ. 255.
Решение. Рассмотрим условие 3. Для того чтобы квадратное уравнение имело хотя бы один корень, нужно, чтобы дискриминант был неотрицательным, т.е. $D = 32^2 - 4n \geq 0$, а значит, $n \leq 256$. Если число, написанное на доске, не меньше 258, то утверждения 2 и 3 неверны. Поэтому написанное число не больше 257. Если написанное число равно 257, то неверны утверждения 1 и 3, т.е. число 257 не подходит. Если написанное число равно 256, то верны все три утверждения. Значит, число 256 не подходит. Если написанное число равно 255, то верны ровно два утверждения – 2 и 3. Значит, наибольшее возможное число – 255.
Комментарий. *Верное обоснованное решение – 7 баллов. Доказано, что написанное число не больше 257 – 4 балла; показано, что числа 257 и 256 не подходят – по 1 баллу за каждое число; объяснено, почему число 255 подходит – 1 балл, баллы суммируются. При отсутствии решения за потенциально полезные идеи – до 2 баллов. Приведен только верный ответ – 1 балл. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

5. Дачница Нина вырастила на огороде 60 тыкв. Их массы равны 1 кг, 2 кг, …, 60 кг. Могла ли Нина дать по 20 тыкв соседкам Гале и Лене каждой так, чтобы было выполнено условие: какие бы две свои тыквы ни положили на одну чашу весов Галя и Лена (по одной каждая), Нина сможет положить на другую чашу весов одну или две свои тыквы так, чтобы весы уравновесились?
Ответ. Да, могла.
Решение. Приведём один из возможных примеров. Пусть Галя получила тыквы с весами: $1, 4, 7, \ldots, 58$, Лена – с весами $2, 5, 8, \ldots, 59$, а у Нины остались тыквы с весами $3, 6, 9, \ldots, 60$ (иначе говоря, веса тыкв Нины делятся на 3, веса тыкв Гали при делении на 3 дают остаток 1, а веса тыкв Лены – остаток 2). Тогда сумма весов двух тыкв (Гали и Лены) будет делиться на 3 и будет принимать значения от $1 + 2 = 3$ до $58 + 59 = 117 = 39 \cdot 3$. Веса от 3 до 60 Нина может уравновесить одной своей тыквой, а веса от $63 = 60 + 3$ до $117 = 60 + 57$ – двумя тыквами.
Комментарий. *Полное обоснованное решение – 7 баллов. Тыквы распределены верно, но не для всех значений показано, как уравновесить весы – 5-6 баллов. При отсутствии решения за потенциально полезные идеи – до 2 баллов. Приведен только верный ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*