Задача Коши для уравнения теплопроводности. Формула Пуассона

Рассмотрим в $\Pi_{[0,T]}$ задачу

$$u_t = u_{xx}, \qquad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{0.1}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \qquad x \in E_1. \tag{0.2}$$

Всюду ниже предполагается, что выполняется условие

$$|\varphi(x)| \le Me^{\alpha|x|}, \qquad x \in E_1, \qquad M, a - const > 0. \tag{0.3}$$

Условие (0.3) - условие на рост функции $\varphi(x)$ при $x \to \infty$. Функция $\varphi(x)$ растет не быстрее, чем $e^{\alpha|x|}$. Ниже мы докажем, что решение задачи (0.1), (0.2) дается формулой Пуассона [?]

$$u(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}} \varphi(\xi)\, d\xi. \tag{0.4}$$

Лемма 3. При выполнении условия (0.3) интеграл (0.4) сходится при $(t,x) \in \Pi_{(0,+\infty)}$ и

$$|u(t,x)| \le 2Me^{a^2 t} e^{a|x|}. \tag{0.5}$$

Сходимость равномерная по $t, x \in G$, где G - произвольная ограниченная область из $\Pi_{(0,T]}$.

Доказательство леммы 3 следует из соотношений

$$|u(t,x)| = \left| \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\dfrac{(\xi-x)^2}{4t}} \varphi(\xi)\, d\xi \right| \le$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\dfrac{(\xi-x)^2}{4t}} |\varphi(\xi)|\, d\xi \le \{\frac{\xi - x}{2\sqrt{t}} = \eta\} = \frac{M}{\sqrt{\pi}} e^{a|x|} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2 + a|\eta| 2\sqrt{t}}\, d\eta =$$

(в силу четности подынтегральной функции) =

$$\frac{2M}{\sqrt{\pi}}e^{a|x|}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2+a|\eta|2\sqrt{t}-a^2t}e^{a^2t}\,d\eta = \frac{2M}{\sqrt{\pi}}e^{a|x|}e^{a^2t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\eta-a\sqrt{t})^2}\,d\eta <$$

$$< \{\eta - a\sqrt{t} = z, -a\sqrt{t} < z < +\infty\} < \frac{2Me^{a|x|}e^{a^2t}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\,dz =$$

(из анализа известно, что интеграл Пуассона $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\,dz = \sqrt{\pi}$) $=$

$$= 2Me^{a|x|}e^{a^2t}.$$

Сходимость равномерная в любой ограниченной области G переменных t, x, принадлежащей $\Pi_{(0,T]}$.

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. При выполнении условия (0.3) функция $u(t,x)$ имеет производные по t, x любого порядка при $t > 0$ и

$$\frac{\partial^{n+m}u(t,x)}{\partial t^m \partial x^n} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^{n+m}}{\partial t^m \partial x^n}\left[e^{-\dfrac{(\xi-x)^2}{4t}}\frac{1}{\sqrt{t}}\right]\varphi(\xi)\,d\xi. \qquad (0.6)$$

При этом интеграл в правой части (0.6) сходится равномерно в любом прямоугольнике $R_{[t_0,T,r]} = \{(t,x)|0 < t_0 \leq t \leq T, |x| < r\}$.

Доказательство. Рассмотрим подынтегральное выражение при $(t,x) \in R_{[t_0,T,r]}$.

$$\frac{\partial^{n+m}}{\partial t^m \partial x^n}\left[e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}}\frac{1}{\sqrt{t}}\right] = \left[\sum_{\text{конечная}} \frac{(\xi-x)^{\text{степень}}}{t^{\text{степень}}}\right]e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}} =$$

(выражение $\sum\limits_{\text{конечная}} \dfrac{(\xi-x)^{\text{степень}}}{t^{\text{степень}}}$ можно записать как некоторый полином $P(t,x,\xi)$ от неизвестной переменной ξ при фиксированных t, x)$=$ $P(t,x,\xi)e^{-\dfrac{(\xi-x)^2}{4t}}$. Здесь $P(t,x,\xi)$ - многочлен степени k, где k зависит от m, n.

Имеет место неравенство

$$|P(t,x,\xi)| \le C(t_0,T,r)(1+|\xi|^k).$$

Здесь постоянная c зависит лишь от t_0, T, r и не зависит от ξ. Так как $e^{|\xi|} = 1+|\xi|+\frac{|\xi|^2}{2!}+\dots+\frac{|\xi|^k}{k!}+\dots$ и $(1+|\xi|^k) \le e^{|\xi|}k!$, то $|P(t,x,\xi)| \le Ne^{|\xi|}$, где $N = k!C(t_0,T,r)$, и $|\varphi(\xi)P(t,x,\xi)| \le \widetilde{M} < e^{(a+1)|\xi|}$, $\widetilde{M} = NM$.

В силу леммы 3 интеграл (0.6) сходится. Здесь вместо φ, M, a берутся φP, $\widetilde{M}$, $a+1$. Сходимость равномерная по $(t,x) \in R(t_0,T,r)$. По теореме о дифференцируемости несобственных интегралов [**?**] функция $u(t,x)$ имеет непрерывные производные $\dfrac{\partial^{n+m}}{\partial t^m \partial x^n}$ и выполняется равенство (0.6).

Лемма 5. Функция $u(t,x)$, заданная соотношением (0.4), является решением уравнения (0.1) при $t>0$, $x \in (-\infty,+\infty)$.

Доказательство. Из (0.6) следует, что

$$u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}} \right\} \varphi(\xi)\, d\xi.$$

Прямым вычислением легко проверить, что $\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}} = 0$ при $(t,x) \in \Pi_{(0,T]}$. Таким образом, в $\Pi_{(0,T]}$ выполняется $u_t - u_{xx} = 0$ и лемма 5 доказана.

Лемма 6. Пусть x^0 - точка непрерывности функции $\varphi(x)$. Тогда
$$\lim_{\substack{t \to +0 \\ x \to x^0}} u(t,x) = \varphi(x^0).$$

Доказательство. Так как $\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}} \varphi(x^0)\, d\xi$ = (замена η =

$$\frac{\xi - x}{2\sqrt{t}}) = \frac{\varphi(x^0)}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2}\, d\eta = \varphi(x^0), \text{ то}$$

$$|u(t,x) - \varphi(x^0)| = \left| \tfrac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4t}} (\varphi(\xi) - \varphi(x^0))\, d\xi \right| \leq$$

$$\tfrac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4t}} |\varphi(\xi) - \varphi(x^0)|\, d\xi = \left(\text{замена}\, \zeta = \frac{\xi - x}{2\sqrt{t}} \right) =$$

$$= \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\zeta^2} |\varphi(x + 2\sqrt{t}\zeta) - \varphi(x^0)|\, d\zeta =$$

$$\tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{-N} e^{-\zeta^2} |\varphi(x + 2\sqrt{t}\zeta) - \varphi(x^0)|\, d\zeta + \int\limits_{N}^{+\infty} e^{-\zeta^2} |\varphi(x + 2\sqrt{t}\zeta) - \varphi(x^0)|\, d\zeta + \right.$$

$$\left. \int\limits_{-N}^{N} e^{-\zeta^2} |\varphi(x + 2\sqrt{t}\zeta) - \varphi(x^0)|\, d\zeta \right\} = I_1 + I_2 + I_3.$$

Подынтегральная функция в I_1 (и в I_2) удовлетворяет тому же условию роста, что и функция $\varphi(x)$. Пусть G - ограниченная область в $\Pi_{(0,T]}$ и $(t, x^0) \in G$. По лемме 3 интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\zeta^2} |\varphi(x + 2\sqrt{t}\zeta) - \varphi(x^0)|\, d\zeta$ сходится равномерно по t и x в G, в силу чего при выборе достаточно большого N: $I_1 < \frac{\varepsilon}{3}$, $I_2 < \frac{\varepsilon}{3}$ при любых $(t,x) \in G$. Зафиксируем это N. Рассмотрим I_3. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что при всех y таких, что $|x^0 - y| < \delta$, выполняется неравенство

$$|\varphi(y) - \varphi(x^0)| < \frac{\varepsilon}{6N}. \tag{0.7}$$

Последнее имеет место в силу непрерывности функции $\varphi(x)$ в точке x^0.

Пусть $(t,x) \in G = \{(t,x) | 0 < t < t_0, |x - x^0| < \delta\}$ и

$$2\sqrt{t}N + |x - x^0| < \delta. \tag{0.8}$$

Тогда

$$I_3 \leq \int\limits_{-N}^{N} |\varphi(x + 2\sqrt{t}\zeta) - \varphi(x^0)|\, d\zeta \leq \int\limits_{-N}^{N} \frac{\varepsilon}{6N}\, d\xi = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Доказано, что при всех (t,x), удовлетворяющих (0.8), выполняется $|u(t,x)-\varphi(x^0)|<\varepsilon$. Лемма 6 доказана.

Из лемм 3-6 следует

Теорема. При условии (0.3) функция $u(t,x)$,заданная равенством (0.4) (интеграл Пуассона) есть решение задачи Коши (0.1), (0.2), $u\in C^{\infty}_{(0,T]}$.

Свойства решения.

Свойство 1. Если $|\varphi(x)|<N$, $x\in E_1$, то $|u(t,x)|<N$, $(t,x)\in\Pi_{(0,+\infty)}$.

Доказательство.

$$|u(t,x)|\le\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}}|\varphi(\xi)|\,d\xi\le\frac{N}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}}\,d\xi=$$

$$=\left(\frac{\xi-x}{2\sqrt{t}}=z\right)=\frac{N}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}\,dz=N.$$

Свойство 2. Если $\varphi(x)$ - нечетная функция, то $u(t,0)=0$.

Доказательство. Действительно,

$$u(t,0)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\xi^2}{4t}}\varphi(\xi)\,d\xi=0,$$

что следует из нечетности подынтегрального выражения.

Рассмотрим задачу о распространении тепла в полуограниченном стержне, боковая поверхность которого теплоизолирована:

$$u_t=u_{xx},\qquad t>0,\quad x>0, \tag{0.9}$$

$$u(0,x)=u_0(x),\qquad x>0, \tag{0.10}$$

$$u(t,0)=0,\qquad t\ge 0. \tag{0.11}$$

Продолжим функцию $u_0(x)$ нечетно на всю действительную ось, обозначив продолжение $U_0(x)$:

$$U_0(x)=\begin{cases}u_0(x), & x\ge 0\\ -u_0(x), & x<0.\end{cases}$$

Функция

$$U(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4t}} U_0(\xi)\, d\xi \tag{0.12}$$

есть решение задачи (0.1), (0.2) при $u_o(x) = U_0(x)$. Обозначим через $u(t,x)$ сужение $U(t,x)$ на множество $\Pi_1 = \{(t,x) | t \geq 0, x \geq 0\}$. Так как $U(t,0) = 0$ в силу свойства 2, то $u(t,x)$ есть решение задачи (0.9) - (0.11).

Замечание. Считаем, что функция $U_0(x)$ удовлетворяет условию (0.3).