Федеральное государственное образовательное автономное учреждение
высшего профессионального образования
СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
институт математики и фундаментальной информатики

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
Учебная программа дисциплины

Семестры V-VI, 68 часов лекций,
68 часов практических занятий,
формы контроля – зачет (семестр V), экзамен (семестр VI)

Кафедра теории функций
Автор-составитель:
А.А. Шлапунов

Красноярск 2013

Содержание разделов и тем лекционного курса

Раздел I: метрические пространства (14 ч. лекций)

Лекция 1.

1.1. Введение. (1 ч.)

Об истории функционального анализа, его цели и месте в математике. Основные даты и имена. Связь с другими разделами математики: алгебра, математический анализ, комплексный анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения в частных производных, интегральные уравнения.

1.2. Метрические пространства. (1.ч)

Основные понятия, определения и примеры: метрика, неравенство Коши-Буняковского-Шварца, Примеры: пространства $\mathbb{R}^n_p$ ($1 \le p \le \infty$, $n \ge 1$), l_p ($1 \le p \le \infty$), другие пространства последовательностей, пространства непрерывных функций, дискретное пространство.

Лекция 2.

1.3. Непрерывные отображения метрических пространств. (1.ч)

Непрерывность. Изометрия. Гомеоморфизм. Примеры.

1.4. Последовательности точек метрических пространств. (1 ч.)

Сходимость, свойства сходящихся последовательностей.

1.5*. Сходимость (в метрическом пространстве) на языке окрестностей. Эквивалентность сходимости и сходимости на языке окрестностей.

1.6*. Непрерывность (в метрическом пространстве) по Гейне (секвенциальная непрерывность). Эквивалентность непрерывности и непрерывности по Гейне.

Лекция 3.

1.7. Замкнутые множества. (1 ч.)

Шары в метрическом пространстве, окрестность, точка прикосновения, предельная точка, изолированная точка, замыкание. Свойства замкнутых множеств.

1.8. Открытые множества. (1 ч.)

Примеры. Связь между открытыми и замкнутыми множествами. Теоремы о пересечении и объединении открытых (замкнутых) множеств.

Лекция 4.

1.9. Плотные подмножества, сепарабельные пространства. (1 ч.)

Примеры сепарабельных ($\mathbb{R}^n_p$, l_p) и не сепарабельных ($\mathcal{M}$) пространств.

1.10. Полнота. (1 ч.)

Фундаментальные последовательности. Примеры полных ($\mathbb{R}^n_p$, l_p, $C[a,b]$) и неполных пространств ($C_2[a,b]$).

Лекция 5.

1.11. Характеризация полных пространств. (1 ч.)

Теорема о вложенных шарах.

1.12. Теорема Бэра. (1 ч.)

Лекция 6.

1.13. Полнота и разрешимость уравнений в метрических пространствах. (1 ч.)

1.14. Пополнение пространства. (1 ч.)

Примеры: пополнение $\mathbb{Q}$ суть $\mathbb{R}$, пополнение $C_2([a,b])$.

Лекция 7.

1.15. Принцип сжимающих отображений. (1 ч.)

1.16. Его применение к доказательству теоремы о существовании и единственности решения интегральных уравнений. (1 ч.)

1.17*. Применение принципа сжимающих отображений к доказательству теоремы о существовании и единственности решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Раздел II: Линейные метрические пространства и функционалы (20 ч. лекций)

Лекция 8.

2.1*. Линейные пространства. Линейная зависимость, размерность, базис, подпространства. Примеры линейных пространств и их подпространств.

2.2. Нормированные пространства (1 ч.)

Норма, сравнение с метрикой, банаховы пространства, замкнутые подпространства. Примеры нормированных пространств ($\mathbb{R}^n$, $C([a,b])$). Эквивалентность норм.

2.3*. Теорема о пополнении нормированных пространств.

2.4. Евклидовы пространства. (1 ч.)

Скалярное произведение (над полем $\mathbb{R}$). Неравенство Коши–Буняковского. Угол между векторами.

2.5*. Теорема о пополнении евклидовых пространств.

Лекция 9.

2.6. Ортогональные векторы. (1 ч.)

Примеры. Ортогонализация Грама-Шмидта. Теорема об ортонормированном базисе в сепарабельном евклидовом пространстве.

2.7. Коэффициенты Фурье. Неравенство Бесселя. (1 ч.)

Лекция 10.

2.8. Полные и замкнутые ортогональные системы. (1 ч.)

Теорема Рисса-Фишера.

2.9. Теорема об изоморфизме. (1 ч.)

Любое конечномерное евклидово изоморфно $\mathbb{R}^n$; любое сепарабельное гильбертово изоморфно l_2.

2.10. Подпространства, ортогональные дополнения. (1 ч.)

Прямая сумма подпространств. Прямая сумма евклидовых пространств.

2.11*. Свойство параллелограмма.

2.12*. Комплексные евклидовы пространств. Скалярное произведение над полем $\mathbb{C}$.

Лекция 11.

2.13. Функционалы. (1 ч.)

Определениями примеры.

2.14. Компактные множества. (1 ч.)

Максимумы (минимумы) функционалов, теорема Вейерштрасса. Теорема об ε-сети. Некомпактность шара в бесконечномерном нормированном пространстве.

2.15*. Компактные множества в пространстве непрерывных функций. Теорема Арцела.

Лекция 12.

2.16. Функционалы в нормированных пространствах. (1 ч.)

Ограниченность, норма функционала, непрерывность.

2.17. Теорема Хана-Банаха в нормированных пространствах. (1 ч.)

2.18*. Теорема Хана-Банаха в комплексных пространствах.

Лекция 13.

2.19. Сопряженное пространство. (1 ч.)

2.20. Теорема об общем виде непрерывного линейного функционала на полном евклидовом пространстве. (1 ч.)

Лекция 14.

2.21. Второе сопряженное пространство. Рефлексивность. (1 ч.)

2.22. Слабая сходимость в нормированном пространстве. (1 ч.)

Ограниченность слабо сходящейся последовательности.

2.23*. $*$-слабая сходимость в сопряженном пространстве. Ограниченность $*$-слабо сходящейся последовательности.

Лекция 15.

2.24. Обобщенные функции и их основные свойства. (2 ч.)

Лекция 16.

2.25. Производная обобщенной функции. (2 ч.)

Лекция 17.

2.26. Первообразная обобщенной функции. (2 ч.)

Раздел III: линейные операторы в нормированных пространствах (14 ч. лекций)

Лекция 18.

3.1. Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность (1 ч.)

Примеры: линейные операторы в конечномерных пространствах, интегральный оператор в $L^2(a,b)$, оператор дифференцирования в $C^k[a,b]$.

3.2. Норма оператора (1 ч.)

Лекция 19.

3.3. Пространство линейных ограниченных операторов (1 ч.)

Операции с линейными операторами. Композиция операторов.

3.4. Компактные операторы (1 ч.)

Пространство компактных операторов. Некомпактность тождественного оператора в бесконечномерном нормированном пространстве.

Лекция 20.

3.5. Сильная (поточечная) и равномерная сходимости в пространстве операторов (1 ч.)

Принцип равномерной ограниченности.

3.6. Теорема Банаха-Штейнгауза (1 ч.)

Описание условий поточечной сходимости в пространстве операторов

Лекция 21.

3.7. Замкнутые операторы. (1 ч.)

3.8. Теорема о замкнутом графике. (1 ч.)

Лекция 22.

3.9. Сопряженный оператор. (1 ч.)

Определение, линейность, непрерывность сопряженного оператора (для линейного).

3.10. Операторные уравнения. (1 ч.)

Постановка задачи. Корректность по Адамару.

3.11. Обратный оператор. (1 ч.)

Условия обратимости. Лемма об аннуляторе ядра.

Лекция 23.

3.12. Непрерывная обратимость. (1 ч.)

3.13. Достаточные условия непрерывной обратимости. (1 ч.)

Теорема Банаха об обратном операторе. Ряд Неймана. Примеры обратных операторов.

Лекция 24.

3.14. Спектр оператора. Резольвента. (1 ч.)

Собственные значения и непрерывный спектр. Замкнутость спектра. Теорема о спектральном радиусе.

3.15. Собственные значения и собственные векторы компактного оператора. (1 ч.)

Раздел IV: линейные операторы в пространствах Гильберта (20 ч. лекций)

Лекция 25.

4.1. Интеграл Лебега. Основные определения. (1 ч.)

Лекция 26.

4.2. Интеграл Лебега. Основные свойства. (1 ч.)

Лекция 27.

4.3. Сопряженный оператор. Случай евклидовых пространств. (1 ч.)

4.4. Самосопряженные операторы. (1 ч.)

Лекции 28.

4.5. Собственные значения и собственные векторы самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве. (1 ч.)

4.6. Спектральная теорема (Гильберта-Шмидта) для компактного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве (1 ч.)

Лекции 29.

4.7. Окончание доказательства спектральной теоремы и ее следствия. (1 ч.)

4.8. Базисы со свойством двойной ортогональности.

Лекции 30.

4.9 Теорема об итерациях неотрицательных операторов

4.10. Условия разрешимости операторных уравнений первого рода

Случай компактных операторов

Лекции 31.

4.11. Операторные уравнения второго рода

4.12. Теоремы Фредгольма.

Лекция 32.

4.13. Следствия из теорем Фредгольма.

4.14. Задачи, приводящие к интегральным уравнениям.

Лекция 33.

4.15. Линейные интегральные уравнения второго рода.

Определения, примеры.

4.16. Операторы Гильберта-Шмидта в пространстве Лебега.

Ядро оператора. Компактность оператора Гильберта-Шмидта. Ядро сопряженного оператора.

Лекция 34.

4.17. Уравнения с вырожденными ядрами.

4.18. Заключительные замечания.

Практические (семинарские) занятий

Раздел I. Метрические пространства (14 ч. практических занятий)

Семинары 1-2. Метрические пространства. Определение и примеры (4 ч.)

Семинар 3. Метрические пространства. Сходимость, открытые и замкнутые множества. (2 ч.)

Семинар 4. Полнота (2 ч.)

Семинар 5. Пополнение пространства (2 ч.)

Семинары 6-7. Принцип сжимающих отображений (4 ч.)

Раздел II. Линейные метрические пространства и функционалы (16 ч. практических занятий)

Семинар 8. Линейные пространства. Нормированные пространства (2 ч.)
Семинар 9. Евклидовы пространства. Свойства скалярного произведения (2 ч.)
Семинар 10. Полные евклидовы пространства (2 ч.)
Семинар 11. Компактные множества (2 часа)

Семинар 12 Непрерывные линейные функционалы на нормированных пространствах. Теорема Хана Банаха (2 ч.)
Семинар 13 Сопряженное пространство. Второе сопряженное пространство (2 ч.)
Семинар 14 Слабая сходимость в нормированном пространстве (2 ч.)
Семинар 15 Обобщенные функции (2 ч.)
Семинар 16 Производная обобщенной функции (2 ч.)
Семинар 17 Первообразная обобщенной функции (2 ч.)

Раздел III. Линейные операторы в нормированных пространствах (14 ч. практических занятий)

Семинары 18–19. Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность, норма оператора. Принцип равномерной ограниченности.
Семинар 20. Компактные операторы.
Семинар 21. Замкнутые операторы.
Семинар 22. Сопряженный оператор.
Семинары 23. Обратные операторы. Непрерывная обратимость.
Семинар 24. Спектр оператора. Резольвента.

Раздел IV. Линейные операторы в пространствах Гильберта (16 практических занятий)

Семинары 25-26. Интеграл Лебега.

Семинары 27. Сопряженный оператор в пространствах Гильберта.

Семинары 28–29. Спектр самосопряженного оператора. Теорема Гильберта-Шмидта.

Семинары 30. Базисы с двойной ортогональностью.

Семинар 31–32. Теоремы Фредгольма.

Семинар 33. Интегральные уравнения второго рода с операторами Гильберта-Шмидта вырожденными ядрами.

Семинар 34. Интегральные уравнения с вырожденными ядрами.

Основная и дополнительная литература, информационные ресурсы

Список литературы

[1] Шлапунов А.А. *Функциональный анализ. Конспект лекций*/А.А. Шлапунов, В.В. Работин, Т.М. Садыков. – Красноярск: Изд-во СФУ, 2011.

[2] Шлапунов А.А. *Функциональный анализ. Методические указания по выполнению самостоятельной работы*/А.А. Шлапунов, Д.П. Федченко, В.М. Трутнев. – Красноярск: Изд-во СФУ, 2012.

[3] Колмогоров А.Н. *Элементы теории функций и функционального анализа*/А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Физматлит, 2004.

[4] Треногин В.А. *Функциональный анализ*/ В.А. Треногин. – М.: Наука, 1980.

[5] Натансон И.П. *Теория функций вещественной переменной*/ И.П. Натансон. – М.: Гостехиздат, 1957.

[6] Шилов Г.Е. *Математический анализ. Второй специальный курс*/ Г.Е. Шилов. – М.: МГУ, 1984.

[7] Робертсон А. *Топологические векторные пространства*/ А. Робертсон, В. Робертсон. – М.: Мир, 1967.

[8] Лаврентьев М.М. *Линейные операторы и некорректные задачи*/ М.М. Лаврентьев, Л.Я. Савельев. – М.: Наука, 1991.

[9] Иосида К. *Функциональный анализ*/К. Иосида. – М.: Мир, 1967.

[10] Канторович А.В. *Функциональный анализ в нормированных пространствах*/ А.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Физматгиз, 1959.

[11] Треногин В.А. *Задачи и упражнения по функциональному анализу*/ В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева. – М.: Физматлит, 2002.

[12] Беклемишев Д.В. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры*/ Д.В. Беклемишев. – М.: Наука, 1984.

[13] Владимиров В.С. *Обобщенные функции в математической физике*/ В.С. Владимиров. – – М.: Наука, 1979.

[14] Владимиров В.С. *Сборник задач по уравнениям математической физики*/ В.С. Владимиров, А.А. Вашарин. – М.: Физматлит, 2001.

[15] Пуляев В.Ф. *Задачи по функциональному анализу*/ В.Ф. Пуляев, З.Б. Цалюк. – Краснодар: изд-во КубГУ, 1983.

Замечание. Базовым учебником является книга [3]. В тех случаях, когда предпочтительнее использовать другой источник, это отмечено особо.