СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY

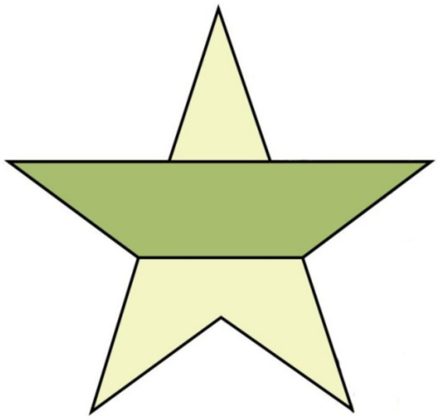
ИМ СФУ

УНИВЕРСИТЕТСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 11 КЛАССОВ

2015 год

1) Первокурсницы ИМиФИ СФУ Маша и Катя после лекций по пути домой стояли в пробке. Катя взглянула на Машу, которая записывала у себя в тетради числа от 1 до 2015, и предложила задумывать по одному числу и если задуманные числа окажутся различными и оба чётны или оба нечётны, то они вычеркиваются из ряда $1, 2, \dots, 2015$, в остальных случаях числа остаются. Когда Маша собиралась выходить из автобуса, в тетради осталось одно число. Какова его чётность?



2) Какая часть площади правильной пятиконечной звезды закрашена (см. рисунок)?

3) Для чисел x, y, z справедливы следующие равенства $x + y + z = 1$ и $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Чему равно значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$?

4) Абитуриент Дима выписал на доске все натуральные числа, не превосходящие $30n$, где n – натуральное число. Затем убрал из них все числа, делящиеся на 30. Оказалось, что сумма оставшихся чисел равна 27840. Чему равно значение n?

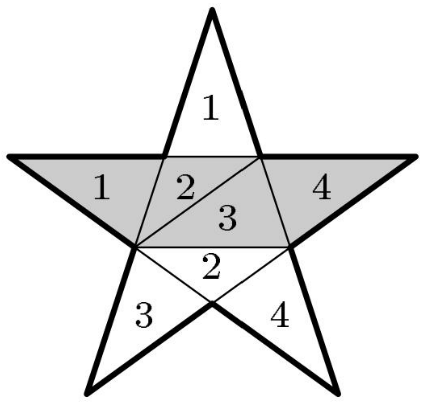
5) На 50 экзаменационных билетах по теории игр написаны их номера от 1 до 50. Студент Вася и профессор по очереди берут по одному билету, причем Вася берет первым и чтобы получить пятерку, должен добиться того, чтобы сумма номеров выбранных им двадцати пяти билетов делилась на 25. Профессор хочет этому помешать. Сможет ли Вася получить пятерку?

РЕШЕНИЯ

1) Среди чисел от 1 до 2015 имеется 1008 нечётных и 1007 чётных. Числа одинаковой чётности вычеркиваются из ряда парами, при этом нельзя сделать так, чтобы осталось 1 нечётное и ни одного чётного, поэтому осталось чётное число.

Ответ: останется чётное число.

2) Пятиконечная звезда состоит из правильного пятиугольника – центральная часть звезды, и примыкающих к нему пяти треугольников – будем называть их лучами звезды.



Проведем в центральном пятиугольнике две диагонали, как показано на рисунке. Они делят его на два одинаковых маленьких треугольника и один треугольник побольше. Треугольник побольше равен примыкающему лучу звезды, поскольку вместе с ним образует параллелограмм – это следует из того, что в правильном пятиугольнике диагональ параллельна противоположной стороне.

Итак, окрашенная часть звезды состоит из трех больших треугольников, равным лучам звезды, и одного маленького. И неокрашенная часть также состоит из трёх лучей звезды и одного маленького треугольника. Значит, окрашена ровно половина площади звезды.

3) $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)$, но по условию, $\frac{xy+xz+yz}{xyz} = 0$.

Ответ: 1.

4) Искомая сумма равна

$$1+\cdots+30n-30(1+\cdots+n)=\frac{30n(30n+1)}{2}-\frac{30n(n+1)}{2}=15\cdot 29\cdot n^2=2784$$

Отсюда $n=8$.

Ответ: 8.

5) В этой задаче неважно, как расположены карточки. Пусти карточки расположены в виде таблицы 2×25: в первой строка выложены карточки с числами от 1 до 25 по возрастанию, а под ними во второй строке – карточки с числами от 26 до 50 тоже по возрастанию.

1	2	3	...	24	25
26	27	28	...	49	50

Наблюдая за игрой, будем говорить, что столбец в этой таблице неполный, если из него взята одна карточка, и полный – если обе карточки еще не взяты. Заметим, что числа, стоящие в одном столбце, отличаются на 25 и поэтому дают одинаковые остатки при делении на 25.

Выигрышная стратегия Васи состоит в том, чтобы взять из каждого столбца ровно одну карточку Тогда сумма чисел на Васиных карточках будет иметь такой же остаток при делении на 25, как и сумма $1+2+3+\ldots+24-1-0=300$, т. е. будет делиться на 25. Значит, Вася выиграет.

Следовать этой стратегии совсем нетрудно. Первым ходом Вася берет карточку из любого столбца и запоминает, что больше из этого столбца он карточек брать не будет. Таким образом, перед ходом профессора на столе имеется ровно один неполный столбец, причем карточку из него взял Вася. После того как профессор сделает свой ход, на столе будет не более двух неполных столбцов. Точнее говоря, не будет ни одного неполного столбца, если профессор возьмет карточку из неполного столбца, либо будет ровно два неполных столбца, если профессор возьмет карточку из какого-то полного столбца. В первом случае Вася возьмет карточку из любого столбца, во втором случае – из того, где только что взял карточку профессор. В обоих случаях после Васиного хода на столе остался ровно один неполный столбец, из которого Вася уже брал карточку. Ситуация повторилась. Играя таким образом дальше, Вася добьется своей цели.

Ответ: Вася сможет получить пятерку.