# УНИВЕРСИТЕТСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

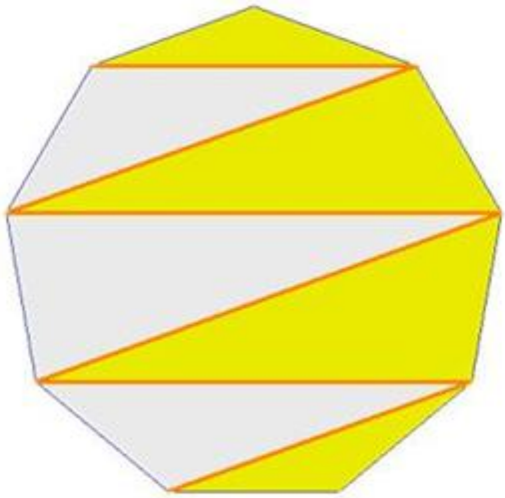
## ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 11 КЛАССОВ

## 2014 год

1) В день открытых дверей объявлен конкурс: тому, кто составит число из $8$ различных цифр так, чтобы оно делилось на каждую из своих цифр, обещан миллион сфунтиков. Сможет ли кто-нибудь получить приз?

2) В одном институте имеется несколько кафедр и лабораторий. На каждой кафедре установлено по $5$ компьютеров, а в каждой лаборатории – лишь по $2$ компьютера, но зато имеется $7$ сотовых телефонов. Общее количество компьютеров на столько же превосходит общее количество сотовых телефонов, на сколько процентов число кафедр больше числа лабораторий. Сколько в институте лабораторий?

3) На лекции профессор ИМФИ СФУ нарисовал правильный девятиугольник и разделил на треугольники так, как показано на рисунке. Какая часть площади больше: закрашенная белым или серым?



4) Абитуриент Сергей считает, что не существует таких несовпадающих квадратных трехчленов $f(x)$ и $g(x)$, получающихся друг из друга перестановкой коэффициентов, что при всех действительных $x$ верно равенство $f(x) \geq g(x)$. Его друг Вася, поступающий в ИМФИ СФУ, не согласен с Сергеем. Кто из ребят прав и почему?

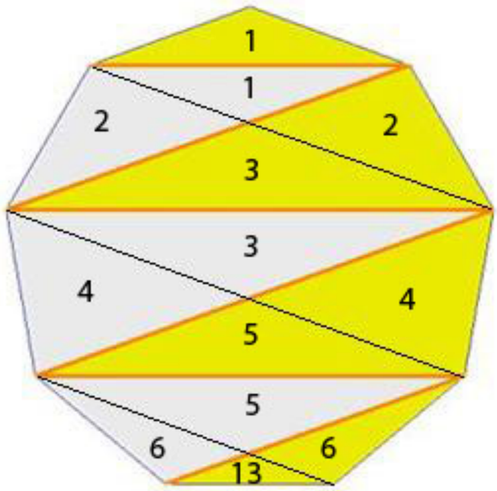
5) Есть $2014$ произвольных различных чисел и для каждой пары чисел найдено среднее арифметическое. Участник олимпиады на Дне открытых дверей ИМФИ может получить $1$ балл, если найдет наибольшее возможное число различных средних арифметических, еще $2$ балла – если укажет пример этого, еще $2$ балла – если найдет наименьшее возможное число различных средних арифметических, еще $1$ балл – если и для этого укажет пример. А если он сделает всё это, то получит еще призовой балл.

**РЕШЕНИЯ**

1) Докажем, что никто не сможет получить приз. Очевидно, что среди цифр не должно быть цифры $0$. Кроме того, среди них обязательно должны присутствовать четные цифры, поэтому искомое восьмизначное число должно быть четным. В таком случае, оно не должно делиться на цифру $5$ (иначе это число должно было бы оканчиваться на цифру $0$). Итак, в искомое число могут входить только цифры $1$, $2$, $3$, $4$, $6$, $7$, $8$, $9$, и, следовательно, оно должно делиться на $9$. Но сумма выписанных цифр не делится на $9$.

2) Пусть у института имеется $k$ кафедр и $l$ лабораторий. Общее количество компьютеров превосходит общее количество сотовых телефонов на величину $5k + 2l - 7l = 5(k - l)$, что по условию задачи равно $\frac{100(k-l)}{l}$. Из составленного уравнения находим искомое число лабораторий $l = 20$.

3) Проведем в девятиугольнике еще несколько диагоналей так, как показано на рисунке. Девятиугольник разбился на $13$ треугольников. На рисунке расставлены номера треугольников, причем одинаковым номером помечены равные треугольник разных цветов. $12$ треугольников разбились на пары, а тринадцатому треугольнику, который оказался черным, пары не нашлось. Значит черная часть площади треугольника больше его белой части.




4) Вася прав. Например, подойдут многочлены $f(x) = 2x^2 + x + 3$ и $g(x) = x^2 + 3x + 2$. Очевидно, что

$$f(x) - g(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0.$$

5) Наибольшее возможное число различных средних арифметических равно $\frac{n(n-1)}{2} = 1007 \cdot 2013$, наименьшее – равно $n - 1 + n - 2 = 2n - 3 = 4025$. Пример для наибольшего числа: степени числа 2. Пример для наименьшего числа: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots, 2014$.