

УНИВЕРСИТЕТСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 11 КЛАССОВ

2012 год

- 1) Институт математики СФУ создан на базе математического факультета Красноярского государственного университета. Математический факультет — один из первых факультетов университета. В каком году основан математический факультет, если в записи этого числа последняя цифра на три больше предыдущей и при зачеркивании первой и последней цифры получается наибольшее двузначное число с суммой цифр 15?
- 2) Студенты Института математики Андрей и Вася в 12:00 вместе вышли из общежития и пошли на экзамен по дисциплине «Информатика и программирование». Пройдя полпути, Вася вспомнил, что забыл студенческий билет и зачетную книжку, и побежал за ними в общежитие со скоростью в два раза большей, чем он шел вместе с Андреем. Схватив студенческий билет и зачетную книжку, он побежал на экзамен (с той же скоростью, что бежал в общежитие). В результате Андрей пришел на экзамен вовремя, а Вася опоздал на 10 минут. На какое время был назначен экзамен?
- 3) Сотрудник банка Сергей Владимирович, являющийся выпускником Института математики, с легкостью может разрезать круг на несколько равных частей так, что центр круга не лежит на границе хотя бы одной из них. Разрежьте и Вы круг таким образом.
- 4) Профессор Института математики утверждает, что он может провести в некотором треугольнике один отрезок так, что после этого на чертеже окажутся все виды треугольников: равносторонний, равнобедренный, разносторонний, остроугольный, прямоугольный и тупоугольный. Постройте такой пример.
- 5) Абитуриентка Лена, решившая поступать в Институт математики, знает про функцию f , что для любых положительных x и y выполняется равенство $f(xy) = f(x) + f(y)$. Помогите найти ей $f(2012)$, если известно, что $f\left(\frac{1}{2012}\right) = 1$.

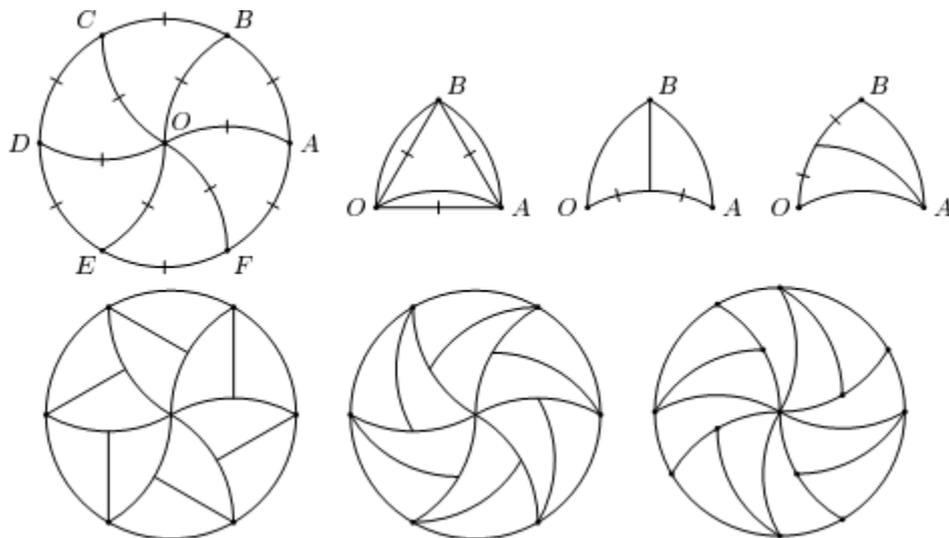
РЕШЕНИЯ

1. В 1969 году

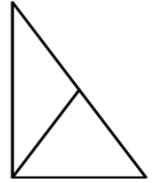
2. *Первый способ.* Вася бежал со скоростью вдвое большей, чем скорость Андрея, поэтому в то время, когда Андрей пришел на экзамен, Вася вновь был на середине пути. Так как он опоздал на 10 минут, то Андрей затратил на половину пути 20 минут, а на весь путь – 40 минут. Поэтому экзамен был назначен на 12:40.

Второй способ. Пусть время, за которое Андрей дошел от общежития до места проведения экзамена, равно t минут. Вася прошел половину пути вместе с Андреем, на это у него ушло $\frac{t}{2}$ минут. Затем он пробежал расстояние равное $\frac{3}{2}$ расстояния от общежития до места проведения экзамена. Так как он бежал в два раза быстрее, то ему понадобилось в два раза меньше времени, то есть $\frac{3}{4} \cdot t$ минут. Итого, Вася затратил на весь путь $\frac{5}{4} \cdot t$. Вася опоздал на 10 минут, значит: $\frac{5}{4} \cdot t - t = 10$, $t = 40$ минут.

3. Разобьём окружность с центром в точке O на шесть равных частей точками A, B, C, D, E и F . Понятно, что треугольники $OAB, OBC, OCD, ODE, OEF, OFA$ — равносторонние. Проведём дугу окружности с центром в точке A радиуса AB от точки B до точки O . Аналогично проведём дуги окружностей с центрами в точках B, C, D, E, F . Таким образом, мы разбили окружность на 6 равных частей. Теперь каждую из этих частей разобьём на две равные части одним из двух способов, изображённых на рисунке.



4. Если в прямоугольном треугольнике с углом в 30° провести медиану к гипотенузе, то она разобьет исходный прямоугольный разносторонний треугольник на тупоугольный равнобедренный и остроугольный равносторонний.



5. *Первый способ.* При $y = 1$ данное равенство примет вид:
 $f(x) = f(x) + f(1)$, следовательно, $f(1) = 0$. Пусть $x = 2012$, $y = \frac{1}{2012}$,
тогда $f(1) = f(2012) + f\left(\frac{1}{2012}\right)$, то есть $f(2012) = -f\left(\frac{1}{2012}\right) = -1$.

Второй способ. Рассмотрим следующую цепочку равенств:

$$f\left(\frac{1}{2012}\right) = f\left(\frac{1}{2012^2} \cdot 2012\right) = f\left(\frac{1}{2012^2}\right) + f(2012) = f\left(\frac{1}{2012}\right) + f\left(\frac{1}{2012}\right) + f(2012).$$

Следовательно, $f(2012) = -f\left(\frac{1}{2012}\right) = -1$.