МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Институт математики

А.М.Кытманов, Е.К. Лейнартас, В.Н.Лукин,
О.В.Ходос, О.Н.Черепанова, Т.Н.Шипина

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

с элементами алгебры, геометрии и функционального анализа

Учебное пособие

Красноярск 2011

Математический анализ: учеб. пособие;
А.М.Кытманов, Е.К. Лейнартас, В.Н.Лукин, О.В.Ходос, О.Н.Черепанова, Т.Н.Шипина. – Красноярск, 2011. – 476 с.

Книга представляет собой учебное пособие по курсу математического анализа. В ней изложены его основные разделы: дифференциальное и интегральное исчисления функций одного и многих вещественных переменных, теория рядов. Наряду с традиционными разделами в книге приведены необходимые для изученимя анализа сведения из других разделов математики: алгебры, геометрии, функционального анализа.

Предназначается студентам младших курсов естественно-научных специальностей и направлений университетов.

Введение

Эта книга написана на основе общего курса лекций по математическому анализу, который в течении ряда лет читался в Институте математики Сибирского федерального университета. В ней изложены основные разделы математического анализа: дифференциальное и интегральное исчисления функций одного и многих вещественных переменных, теория рядов.

Математический анализ является той частью классической математики, которая лежит в основе почти любой математической дисциплины. Обычно он является первым серьезным курсом высшей математики, с которым приходится сталкиваться первокурснику. В его задачу помимо изложения необходимого запаса сведений о предмете (определений, теорем, методов доказательства и решения задач) входит также развитие логического мышления и математической культуры, нужных для дальнейшего изучения математики. Курс математического анализа является базовым для изучения многих общепрофессиональных и специальных математических дисциплин. Изложение материала ведется на уровне строгости, принятой в настоящее время в математике. Авторы старались по возможности приводить полные доказательства. Их отсутствие означает, что соответствующие утверждения уже доказывались раньше в более простой ситуации. Например, многие утверждения для функций многих переменных так или иначе доказывались для функций одного переменного.

Книга состоит из введения, десяти основных глав и одной главы — дополнения. В нервых шести главах излагаются дифференциальное и интегральное исчисления функций одного вещественного переменного. Основными задачами и темами изучения в этих главах являются:

– рассмотрение элементов теории множеств, вещественных чисел, понятий функции и ее графика, изучение пределов последовательности и функции, непрерывности функции;

– введение понятия производной и дифференциала функции, изучение их свойств и проведение полного исследования функций с помощью производных;

– введения понятия неопределенного интеграла и изучения основных методов его вычисления;

– рассмотрение определенного интеграла Римана и изучение его свойств, определение и изучение несобственного интеграла, приложение определенного интеграла к вычислению площадей, объемов, длины кривой, площади поверхности и нахождению различных механических и физических величин;

– рассмотрение понятия сходящегося ряда и суммы ряда, исследование рядов на сходимость и абсолютную сходимость, используя различные признаки сходимости;

– изучение функциональных последовательностей и рядов, их равномерной сходимости и ее свойств, изучение степенных рядов и рядов Фурье.

Следующие четыре главы посвящены дифференциальному и интегральному исчислениям функций многих переменных. Основными задачами и темами изучения в них являются:

– рассмотрение понятия предела, непрерывности функций многих переменных, частных производных и дифференцируемости, приложения дифференциального исчисления к нахождению экстремумов, неявным и обратным функциям, условному экстремуму;

– введение измеримых по Жордану множеств, внешней и внутренней мер Жордана, изучение классов измеримых множеств. Построение кратного интеграла Римана, интегральных сумм, сумм Дарбу, изучение критериев интегрируемости, свойств интеграла Римана, интегрируемости непрерывных функций, теоремы Фубини о сведении кратного интеграла к повторному, замене переменных в кратном интеграле. Построение несобственного кратного интеграла Римана по неограниченному множеству и от неограниченной функции, получение его свойств, доказательству признаков сходимости;

– изучение собственных и несобственных интегралов, зависящих от параметра, равномерной сходимости. Рассмотрение приложений данной теории к нахождению различных несобственных интегралов, интегралам Эйлера, интегралу и преобразованию Фурье;

– рассмотрение понятия криволинейного интеграла первого и второго рода, связи между ними. Введение понятие внешней дифференциальной формы и кусочно-гладкой поверхности. Определение интеграла от дифференциальной формы по цепи и рассмотрение его свойств. Получение основные интегральных формул: формул Грина, Остроградского, классической формулы Стокса. Изучение элементов векторного анализа (теории поля).

При изучении математического анализа необходимо знать такие темы алгебры, аналитической и дифференциальной геометрии, дискретной математики и математической логики как системы линейных уравнений, векторное и евклидово пространства, матрицы и определители, квадратичные формы, логические символы и операции теории множеств, комплексные числа, кривые второго порядка, внешние дифференциальные формы. Необходимые сведения из этих тем приведены в дополнительной одиннадцатой главе. Кроме того в ней даны также элементы теории рядов Фурье в функциональных пространствах, функционального анализа и некоторые приложения в физике. Таким образом, данное учебное пособие дает возможность при изучении курса математического анализа обойтись без обращения к другим литературным источникам.

Систему нумерации поясним на примерах: символ пункта 2.12.1 означает "глава 2, параграф 12, пункт 1". Аналогично формула (2.12.1) есть первая формула параграфа 12 главы 2. Определения и утверждения, задачи и упражнения, замечания и рисунки нумеруются таким же образом.

Глава 1

Введение в анализ

В результате изучения данной главы читатель должен уметь решать задачи на предел функции и последовательности, на непрерывность и точки разрыва, на нахождение точной верхней и точной нижней границы. Знать основные определения и теоремы о пределах последовательностей, функций, о непрерывности функций и ее свойствах: формулу бинома Ньютона, теорему о существовании верхней грани, принцип Архимеда, принцип Кантор, принцип Больцано-Вейерштрасса, принцип Бореля-Лебега,критерий Коши, теорему Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности, замечательные пределы, локальные и глобальные свойства непрерывных функций, равномерную непрерывность и теорему Кантора, O-символику. Владеть основными методами нахождения пределов последовательностей и функций.

1.1. Элементы теории множеств

1.1.1. Операции над множествами.

Определение 1.1.1. *Совокупность каких–либо объектов можно рассматривать как новый объект. Этот новый объект называется множеством, а объекты, его составляющие, — элементами данного множества.*

Обычно сами множества мы будем обозначать большими латинскими буквами $A, B, C, \ldots$, а элементы множеств — малыми латинскими буквами $a, b, c, \ldots$. Как правило, мы будем иметь дело лишь с числовыми множествами.

Если M — какое–либо множество, а x — его элемент, мы пишем $x \in M$, если же x не является элементом M, то пишем $x \notin M$. Для удобства рассматривают множество, не содержащее ни одного элемента. Его называют *пустым множеством* и обозначают $\varnothing$.

Множество M можно задать либо перечислением элементов, из которых оно состоит, —

$$M = \{a, b, c, \ldots\},$$

либо с помощью какого-либо определяющего свойства P

$$M = \{x : x \text{ обладает свойством } P\}.$$

Множества могут находиться в определенных *отношениях*, и над ними можно производить некоторые *операции*.

1. *Равенство* множеств. Два множества M и N называются *равными* ($M = N$), если они содержат одни и те же элементы.

2. *Включение.* Множество M *содержится* в множестве N ($M \subset N$), если каждый элемент множества M принадлежит множеству N. В этом случае также говорят, что M — *подмножество* N. Ясно, что если $M \subset N$ и $N \subset M$, то $M = N$. Пустое множество считаем подмножеством любого множества: $\varnothing \subset M$ для любого M. Множество M *содержит* множество N ($M \supset N$), если $N \subset M$.

3. *Пересечение* множеств M и N есть множество

$$M \cap N = \{x : x \in M \text{ и } x \in N\},$$

т.е. $M \cap N$ — это множество элементов, принадлежащих как M, так и N. Если таких элементов нет, то $M \cap N = \varnothing$.

4. *Объединение* множеств M и N есть множество

$$M \cup N = \{x : x \in M \text{ или } x \in N\}.$$

Таким образом, здесь речь идет о множестве элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств M или N.

5. *Разность* множеств M и N есть множество

$$M \setminus N = \{x : x \in M \text{ и } x \notin N\}.$$

Разность может оказаться и пустой, если, например, $M = N$.

6. Если в данной теории все множества являются подмножествами одного множества $\mathbb{I}$, то оно $\mathbb{I}$ называется *универсальным*. В этом случае определяется операция *дополнения*: $CM = \mathbb{I} \setminus M$. Так что $C\mathbb{I} = \varnothing$, $C\varnothing = \mathbb{I}$.

В математическом анализе таким универсальным множеством является множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел.

Упражнение 1.1.1. Доказать, что включения $A \subset B$ и $B \subset A$ выполняются одновременно тогда и только тогда, когда $A = B$.

1.1.2. Свойства операций над множествами. 1. Для любого множества M выполняется включение $M \subset M$ (*рефлексивность* операции включения).

2. Для любого множества M выполнено включение $\varnothing \subset M$.

3. Если M и N — два множества, для которых $M \subset N$ и $N \subset M$, то $M = N$ (закон *тождества*).

4. Если для трех множеств $M \subset N$, $N \subset S$, то $M \subset S$ (*транзитивность* включения).

5. Для любых трех множеств $(M \cup N) \cup S = M \cup (N \cup S)$ (*ассоциативность* операции объединения). Точно такое же свойство справедливо и для операции пересечения.

6. *Коммутативные* законы для этих операций

$$M \cap N = N \cap M, \qquad M \cup N = N \cup M.$$

7. *Дистрибутивные* законы для объединения и пересечения

$$M \cap (N \cup S) = (M \cup N) \cap (M \cup S), \quad M \cup (N \cap S) = (M \cap N) \cup (M \cap S).$$

8. Включение $M \subset N$ имеет место тогда и только тогда, когда $M \cap N = M$.

9. Включение $M \subset N$ имеет место тогда и только тогда, когда $M \cup N = N$.

10. *Законы двойственности*:

$$C(M \cup N) = CM \cap CN, \qquad C(M \cap N) = CM \cup CN,$$

для любых множеств M и N.

1.1.3. Прямое (декартово) произведение множеств.

Определение 1.1.2. *Пусть X, Y — произвольные множества. Множество*

$$X \times Y = \{(x, y) : \ x \in X, \ y \in Y\},$$

образованное всеми упорядоченными парами (x, y), называется прямым или декартовым произведением множеств X и Y.

Из определения прямого произведения следует, что вообще говоря $X \times Y \neq Y \times X$. Равенство имеет место, лишь если $X = Y$. В этом случае пишут $X \times X = X^2$.

Произведение называется декартовым в честь Декарта, который пришел к системе координат и аналитическому языку геометрии. Известная всем система декартовых координат на плоскости превращает эту плоскость в прямое произведение двух числовых осей. На этом примере также видна зависимость прямого произведения от порядка сомножителей. Например, парам $(1, 0)$ и $(0, 1)$ соответствуют разные точки плоскости.

Первый (соответственно, второй) элементы пары (x, y) называют первой (соответственно, второй) координатами пары.

Упражнение 1.1.2. Показать, что $(A \times B) \subset (X \times Y)$, если $A \subset X$, а $B \subset Y$.

Упражнение 1.1.3. Показать, что $(X \times Y) \cup (Z \times Y) = (X \cup Z) \times Y$.

1.1.4. Логические символы. В математических рассуждениях часто встречаются выражения "существует элемент" и "любой элемент" среди элементов, имеющих некоторое свойство. Для сокращения таких выражений мы будем использовать два *кванторa*: *квантор существования* — $\exists$ (читается "существует") и *квантор всеобщности* — $\forall$ (читается "для всех").

Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Эта функция называется *четной*, если для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$. Используя логическую символику, данное условие можно записать короче:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f(-x) = f(x).$$

Введем еще несколько логических символов.

Символ $\Longrightarrow$ означает "следует" (одно высказывание следует из другого), а символ $\Longleftrightarrow$ означает равносильность высказываний, стоящих по разные от него стороны.

Определение часто используемого в математике символа $\sum$ (греческая заглавная буква "сигма") для обозначения суммы слагаемых можно записать следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Как правило, изложение материала будет вестись в классическом стиле без использования логических символов. Они будут употребляться параллельно с основным текстом. Это поможет читателю привыкнуть к их применению и в то же время более кратко (а, следовательно, более выразительно) разъяснять нужную мысль.

Типичное математическое утверждение имеет вид $A \Longrightarrow B$, где A — посылка, а B — заключение. Доказательство такого утверждения состоит в построении цепочки

$$A \Longrightarrow C_1 \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow C_n \Longrightarrow B$$

следствий, каждый элемент которой либо считается аксиомой, либо уже является доказанным утверждением.

В доказательстве мы будем придерживаться классического правила вывода: если A истинно и $A \Longrightarrow B$, то B тоже истинно.

При доказательстве от противного мы будем использовать принцип исключенного третьего, в силу которого высказывание A или не A считается истинным независимо от конкретного содержания высказывания A. Следовательно, мы принимаем, что повторное отрицание равносильно исходному высказыванию.

В дальнейшем конец проводимого доказательства сформулированного утверждения будем отмечать символом $\Box$.

1.2. Натуральные числа. Индукция. Бином Ньютона

Множество *натуральных* чисел мы обозначим через $\mathbb{N}$. Его элементами являются числа $1, 2, 3, \ldots$. Основное свойство, которое мы будем использовать в классе натуральных чисел, заключается в том, что если n — натуральное число, то $n+1$ также натуральное число.

1.2.1. Индукция. Мы также будем использовать следующее замечательное свойство множества натуральных чисел.

Теорема 1.2.1. *Если множество* $\mathbb{M}$ *таково, что*
1) $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$,
2) $1 \in \mathbb{M}$,
3) из того, что $n \in \mathbb{M}$, *следует* $(n+1) \in \mathbb{M}$, *то*

$$\mathbb{M} = \mathbb{N}.$$

Эту теорему обычно называют принципом полной математической индукции и обычно формулируют в следующем виде.

Теорема 1.2.2 (принцип полной математической индукции). *Если имеется множество утверждений, каждому из которых приписано натуральное число (его номер)* $n = 1, 2, \ldots$, *и если доказано, что:*
1) справедливо утверждение с номером 1 (база индукции),
2) из справедливости утверждения с номером $n \in \mathbb{N}$ *следует справедливость утверждения с номером* $n+1$ *(шаг индукции),*
то тем самым доказана справедливость всех рассматриваемых утверждений с произвольным номером $n \in \mathbb{N}$.

Пример 1.2.1. Доказать, что для любого натурального числа n справедливо равенство

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1.2.1}$$

Решение. 1. Проверим базу индукции. При $n = 1$ получаем, что $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$ — верное равенство.

2. Сделаем шаг индукции — предполагая, что равенство (1.2.1) верно для некоторого n, докажем его для следующего натурального числа $n+1$, т.е.

$$1 + 2 + \ldots + (n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}.$$

Получим

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + (n+1) &= (1 + 2 + \ldots + n) + (n+1) = \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

Упражнение 1.2.1. Показать, что $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$ при $x > -1$, $n \in \mathbb{N}$ (неравенство Бернулли).

1.2.2. Целые числа. Про пустое множество говорят, что число его элементов равно нулю. Слово "нуль" обозначается символом 0. Множество натуральных чисел, к которому добавлен нуль, обозначается $\mathbb{N}_0$.

Нуль считается меньше любого натурального числа.

Вместе с натуральными числами можно рассмотреть числа, им противоположные.

Определение 1.2.1. *Множество натуральных чисел вместе с нулем и с числами, противоположными натуральным, называется множеством целых чисел и обозначается* $\mathbb{Z}$, *таким образом,*

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{m : m = -n, n \in \mathbb{N}\}.$$

Непосредственно из определения операций сложения и умножения следуют такие свойства.

1. Закон *коммутативности* сложения: $m + n = n + m$ для всех $m, n \in \mathbb{Z}$.

2. Закон *ассоциативности* сложения: $m+(n+p) = (m+n)+p$ для всех $m, n, p \in \mathbb{Z}$.

3. Для всех $n \in Z$ выполнено равенство $n + 0 = n$.

4. Для любого числа $n \in \mathbb{Z}$ существует *противоположное* число $-n$ такое, что $n + (-n) = 0$.

Последнее свойство позволяет определить операцию, обратную к операции сложения, — *вычитание*, а именно $m - n = m + (-n)$.

5. Закон *коммутативности* умножения: $mn = nm$ для любых чисел $m, n \in \mathbb{Z}$.

6. Закон *ассоциативности* умножения: $m(np) = (mn)p$ для любых чисел $m, n, p \in \mathbb{Z}$.

7. Для любого числа $n \in \mathbb{Z}$ выполнено равенство $n \cdot 1 = n$.

В отличие от операции сложения операция умножения не обратима, т.е. уравнение $n \cdot x = m$, вообще говоря, не имеет решений x во множестве целых чисел для фиксированных $m, n \in \mathbb{Z}$.

1.2.3. Бином Ньютона.

Определение 1.2.2. *Для данного натурального числа* n *определим функцию* $n!$ *как произведение всех натуральных чисел от* 1 *до* n *включительно, т.е.*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n.$$

Положим, также, по определению $0! = 1$.

Эта функция (читается "n факториал") играет важную роль в теории чисел.

Определим теперь *биномиальные* коэффициенты C_n^k следующим образом:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad n, k \in \mathbb{N}, \quad k \leqslant n.$$

Кроме того, положим $C_n^0 = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 1.2.3. *Имеют место свойства:*
1) $C_n^k = C_n^{n-k}$,
2) $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

Из этих свойств следует, что биномиальные коэффициенты являются натуральными числами.

Используя C_n^k, мы можем доказать формулу *бинома Ньютона.*

Теорема 1.2.4. *Справедлива формула*

$$(x+a)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} a + C_n^2 x^{n-2} a^2 + \ldots + C_n^{n-1} x a^{n-1} + a^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} a^k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для доказательства этой формулы используется принцип полной математической индукции.

Как следствие, из формулы бинома Ньютона получаем следующие соотношения:

$$(x+a)^2 = x^2 + 2xa + a^2,$$

$$(x+a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3,$$

$$(x+a)^4 = x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + a^4.$$

1.3. Вещественные числа

1.3.1. Рациональные числа. Ранее уже рассматривалось множество $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ всех натуральных, т.е. целых положительных чисел, а также множество $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, \dots\}$ целых чисел.

Определение 1.3.1. *Числа вида* $\pm\dfrac{p}{q}$*, где* $p \geqslant 0$, $q > 0$ *целые, называются рациональными. Множество таких чисел обозначается* $\mathbb{Q}$.

Известно, как сравниваются рациональные числа $\left(\dfrac{p_1}{q_1} < \dfrac{p_2}{q_2}\right)$ и как определяются четыре арифметических действия над ними.

В практических вычислениях вполне достаточно оперировать только рациональными числами. Но, например, для точного (теоретического) выражения длины гипотенузы прямоугольного треугольника с катетами, равными 1, рациональных чисел не достаточно. Другими словами, $\sqrt{2}$ *не есть рациональное число,* что было известно еще Пифагору.

Теорема 1.3.1. *Число* $\sqrt{2}$ *не является рациональным.*

Доказательство. Пусть $\sqrt{2} = p/q$, причем p/q — несократимая дробь. Тогда $p^2 = 2q^2$, т.е. в разложении числа p^2 на множители есть двойка. Это означает, что и в разложении числа p на множители имеется двойка ($p = 2p_1$). Тогда $2^2p_1^2 = 2q^2$ или $2p_1^2 = q^2$, что говорит уже о четности числа q, т.е. p и q — четные числа, и дробь $\dfrac{p}{q}$ оказалась сократимой. $\square$

Таким образом, имеется необходимость в "новых" числах, которые далее назовем *иррациональными.* Покажем, как можно ввести их при помощи бесконечных десятичных дробей.

Теорема 1.3.2. *Каждой рациональной дроби соответствует конечная или бесконечная периодическая дробь. Каждой конечной или бесконечной периодической дроби соответствует рациональное число.*

Доказательство. Пусть p/q — произвольное положительное число. Поставим ему в соответствие десятичную периодическую дробь по правилам деления "уголком":

$$\begin{array}{r|l} \underline{\;p\;} & \underline{\quad q \quad} \\ \underline{\;b_0\;} & \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\dots \\ b_1 & \\ \dots & \end{array},$$

где α_0 — целое неотрицательное число, а α_k ($k = 1,\ 2, \dots$) — цифры. Ясно, что в результате указанного процесса может получиться десятичное разложение только одного из двух следующих типов. Либо это будет конечная десятичная дробь

$$\frac{p}{q} = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_m \qquad (\alpha_m > 0),$$

либо бесконечная, но в этом случае эта дробь будет обязательно периодической:

$$\frac{p}{q} = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_m\beta_1 \ldots \beta_k\beta_1 \ldots \beta_k \ldots = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m(\beta_1 \ldots \beta_k),$$

т.е., начиная с некоторого разряда $(m+1)$, возникает некоторый период $\beta_1 \ldots \beta_k$, где не все цифры β_j равны нулю. Периодичность дроби вытекает из того факта, что при делении "уголком" остатки $b_k < q$ и поэтому среди первых q из них $b_0,\ b_1,\ \ldots,\ b_{q-1}$ заведомо имеется два равных между собой (ведь среди целых положительных чисел, меньших q, имеется только $(q-1)$ различных). Равенство же двух остатков $b_i = b_j$ неизбежно вызовет появление периода.

Случай конечной дроби всегда можно свести к случаю бесконечной периодической дроби, полагая

$$\frac{p}{q} = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}\alpha_m = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}\alpha_m 0 \ldots$$

С другой стороны, произвольной бесконечной периодической дроби соответствует единственное рациональное число p/q, такое что процесс деления "уголком" дает именно это разложение. Произведем это сопоставление для простоты на примере:

$$\begin{aligned} 0,5(4) &= 0,544\ldots = 0,5 + \frac{4}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \cdots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{4/10^2}{1 - 1/10} = \frac{1}{2} + \frac{4}{90} = \frac{49}{90}. \end{aligned}$$

Отрицательному рациональному числу $-p/q$ приводят в соответствие бесконечное десятичное разложение, взятое со знаком $(-)$. □

Числу нуль естественно привести в соответствие разложение $0 = 0,000\ldots$

Следует отметить, что разным (на первый взгляд) бесконечным десятичным дробям может соответствовать одно число. Например, дробям $1,(0)$ и $0,(9)$ соответствует число 1.

1.3.2. Вещественные числа. Кроме периодических десятичных дробей существуют *непериодические*, например, $0,1010010001\ldots$

Определение 1.3.2. *Иррациональным числом называется произвольная бесконечная непериодическая дробь*

$$a = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots, \tag{1.3.1}$$

где α_0 — целое неотрицательное число, α_k $(k = 1,\ 2, \ldots)$ — цифры.

Определение 1.3.3. *Рациональные и иррациональные числа называются действительными (или вещественными) числами, и их множество обозначается через $\mathbb{R}$.*

Определение 1.3.4. *Число a, где не все α_k равны нулю, называется положительным или отрицательным в зависимости от того, будет ли в (1.3.1) фигурировать $(+)$ или $(-)$. При этом $(+)$, как обычно, будем опускать.*

Действительные числа определены пока формально, так как надо определить еще арифметические операции над ними и ввести отношение порядка $(<)$.

1.3.3. Определение неравенств (отношений порядка). Пусть заданы два числа $a = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots, \quad b = \pm\beta_0, \beta_1\beta_2\ldots$, определяемые бесконечными десятичными дробями.

Определение 1.3.5. *Два числа a и b равны между собой тогда, когда их знаки одинаковы и $\alpha_k = \beta_k$ для всех $k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$*

Определение 1.3.6. *Пусть a и b — два положительных числа. Тогда будем говорить, что a меньше b, и писать $a < b$ (или $b > a$), если найдется такой индекс l, что $\alpha_k = \beta_k,\ k = 0, 1, \ldots, l$, а $\alpha_{l+1} < \beta_{l+1}$.*

Такой же принцип используется при введении знаков ">" и "<" для отрицательных чисел a и b. Заметим также, что положительное число a всегда больше любого отрицательного b ($a > b$).

Определение 1.3.7. *Для чисел a и b неравенство $a \leqslant b$ означает, что либо $a < b$, либо $a = b$. Неравенство $a \geqslant b$ эквивалентно неравенству $b \leqslant a$.*

Например, $0 \leqslant 0$, $1 \geqslant 0$.

1.3.4. Определение арифметических операций. Для произвольного числа $a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots$ введем его n-ю срезку $a^{(n)} = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ ($a^{(n)}$– конечная десятичная дробь).

Арифметические операции с конечными десятичными дробями хорошо известны.

Определим теперь операцию сложения двух положительных чисел

$$a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots, \quad b = \beta_0, \beta_1\beta_2\ldots,$$

т.е. сложение двух бесконечных десятичных дробей, используя их срезки.

Введем для этого последовательность чисел

$$a^{(n)} + b^{(n)} = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n + \beta_0, \beta_1\beta_2\ldots\beta_n =$$
$$= \lambda_0^{(n)}, \lambda_1^{(n)}\ldots\lambda_n^{(n)} = \lambda^{(n)}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Числа $\lambda^{(n)}$ определяются по правилу сложения конечных десятичных дробей $a^{(n)}$ и $b^{(n)}$. Можно доказать, что последовательность $\{\lambda^{(n)}\}$ стабилизируется (т.е. каждый разряд $\lambda_j^{(n)}$, начиная с некоторого номера n_j, равен постоянному числу λ_j, $\lambda_j^{(n)} = \lambda_j$) к некоторому определенному числу $\lambda_0, \lambda_1\lambda_2\ldots$ Это число называется *суммой* $a + b$. Будем писать

$$a^{(n)} + b^{(n)} \rightrightarrows a + b.$$

Произведение, разность и частное чисел a и b определяют следующим образом:

$$\left(a^{(n)} \cdot b^{(n)}\right)^{(n)} \rightrightarrows a \cdot b,$$

$$a^{(n)} - b^{(n)} \rightrightarrows a - b$$

($a > b > 0$ и n настолько велико, что $\quad a^{(n)} - b^{(n)} > 0$)

$$\left(\frac{a^{(n)}}{b^{(n)}}\right)^{(n)} \rightrightarrows \frac{a}{b}.$$

Замечание 1.3.1. *Эти определения распространяются обычными способами на числа a и b произвольных знаков.*

1.3.5. Основные свойства вещественных чисел.

Свойства порядка. $\mathbf{I}_1$. Каковы бы ни были два вещественных числа a и b, выполняется одно и только одно из соотношений: либо $a < b$, либо $a > b$, либо $a = b$.

$\mathbf{I}_2$. *Свойство транзитивности.* Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

$\mathbf{I}_3$. *Свойство плотности.* Для любых вещественных чисел a и b, таких что $a < b$, существует вещественное число c, удовлетворяющее соотношению $a < c < b$.

Свойства I_1 и I_2 вытекают непосредственно из определений знаков "=" и "<".

Докажем свойство I_3.

Если положительные числа $a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots$, $b = \beta_0, \beta_1\beta_2\ldots$ записаны в виде бесконечных дробей и $a < b$, то при некотором s_0 числа $\alpha_k = \beta_k$, где $k \leqslant s_0 - 1$ (если $s_0 = 0$, то эти равенства опускаются), $\alpha_{s_0} < \beta_{s_0}$.

Найдется также $s_1 > s_0$ такое, что $\beta_{s_1} > 0$ (иначе число b представлялось бы конечной дробью). Если взять в качестве числа c десятичную дробь $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_{s_0-1}\beta_{s_0} \ldots \beta_{s_1-1}\,(\beta_{s_1} - 1)\,\beta_{s_1+1}\ldots$, то очевидно, что число c удовлетворяет неравенствам $a < c < b$. Существует также рациональное число c_1 ($c_1 = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_{s_0-1}\beta_{s_0} \ldots \beta_{s_1}$), удовлетворяющее тем же неравенствам $a < c_1 < b$.

Легко распространить доказательство свойства I_3 на случай любых a и b. $\square$

Нетрудно понять, что в качестве числа c можно всегда взять число $\dfrac{a+b}{2}$.

Свойства операций сложения и вычитания. $\mathbf{II_1}$. $a + b = b + a$ (коммутативность сложения).

$\mathbf{II_2}$. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения).

$\mathbf{II_3}$. $a + 0 = a$.

$\mathbf{II_4}$. $a + (-a) = 0$.

$\mathbf{II_5}$. Если $a < b$, то для любого c верно: $a + c < b + c$.

Свойства операций умножения и деления. $\mathbf{III_1}$. $a \cdot b = b \cdot a$ (коммутативность умножения).

$\mathbf{III_2}$. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (ассоциативность умножения).

$\mathbf{III_3}$. $a \cdot 1 = a$.

$\mathbf{III_4}$. $a \cdot \dfrac{1}{a} = 1 \quad (a \neq 0)$.

$\mathbf{III_5}$. $(a + b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$ (дистрибутивность умножения относительно сложения).

$\mathbf{III_6}$. Если $a < b$, $c > 0$, то $a \cdot c < b \cdot c$.

Свойство непрерывности множества вещественных чисел.

Теорема 1.3.3. *Пусть даны два непустых множества вещественных чисел X и Y. Предположим, что для всякого числа $x \in X$ и для всякого числа $y \in Y$ справедливо неравенство $x \leqslant y$, тогда существует вещественное число c такое, что $x \leqslant c \leqslant y$ для всех $x \in X$ и для всех $y \in Y$.*

Определение 1.3.8. *Число c из теоремы 1.3.3 называется сечением множеств X и Y.*

Замечание 1.3.2. *Во множестве $\mathbb{Q}$ рациональных чисел свойство непрерывности не выполняется. Например, взяв $X = \{x \in \mathbb{Q} : x \geqslant 0,\ x^2 < 2\}$ и $Y = \{y \geqslant 0,\ y^2 > 2\}$, получим, что сечением данных множеств является число $\sqrt{2}$, которое иррационально.*

1.4. Ограниченные множества. Теорема о верхней грани. Принцип Архимеда

1.4.1. Ограниченные множества.

Определение 1.4.1. *Говорят, что множество $X \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху, если существует число $c \in \mathbb{R}$ такое, что $x \leqslant c$ для любого $x \in X$. Число c при этом называется верхней границей множества X.*

Аналогично определяются ограниченность множества снизу и нижняя граница множества X.

Определение 1.4.2. *Множество, ограниченное и сверху, и снизу, называется ограниченным.*

Определение 1.4.3. *Элемент $a \in X$ называется наибольшим (или максимальным) элементом множества $X \subset \mathbb{R}$, если $x \leqslant a$ для любого элемента $x \in X$ (аналогично определяется наименьший (минимальный) элемент множества X). В этом случае пишут $a = \max X \quad (a = \min X)$.*

Пример 1.4.1. Найти минимальные и максимальные элементы множеств $\{3, 8, 9\}$, $[1, 3]$, $[1, 3)$.

Решение.

1) $X = \{3, 8, 9\}$, $3 = \min X$; $9 = \max X$;
2) $X = [1, 3]$, $1 = \min X$; $3 = \max X$;
3) $X = [1, 3)$, $1 = \min X$; максимального элемента в этом множестве не существует.

Лемма 1.4.1. *Если максимальный (минимальный) элемент существует, то он единственный.*

Доказательство проведем от противного. Пусть $a = \max X, b = \max X$ и, например, $a < b$ (см. свойство I_1). Но так как $a = \max X$, а $b \in X$, то $a \geqslant b$. Это противоречие и доказывает лемму. □

Определение 1.4.4. *Число $c \in \mathbb{R}$ называется точной верхней границей множества $X \subset \mathbb{R}$, если выполнены следующие два условия:*

1) любой элемент $x \in X$ удовлетворяет неравенству $x \leqslant c$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ существует элемент $x_0 \in X$ такой, что $c - \varepsilon < x_0$.

В этом случае пишут $S = \sup X$ ("супремум" X).

Это определение говорит о том, что c наименьшая из верхних границ.

Аналогично определяется точная нижняя граница s множества X, которая обозначается $s = \inf X$ ("инфимум" X).

Пример 1.4.2. Найти точные нижние и точные верхние границы множеств $[1, 3)$, $(1, 3]$.

Решение.

1) $X = [1, 3)$, $1 = \inf X$, $3 = \sup X$;
2) $X = (1, 3]$, $1 = \inf X$, $3 = \sup X$.

Для неограниченных сверху множеств X пишут $\sup X = +\infty$, а для неограниченных снизу множеств X пишут $\inf X = -\infty$.

Теорема 1.4.1. *Всякое непустое ограниченное сверху множество $X \subset \mathbb{R}$ имеет, и притом единственную, точную верхнюю границу.*

Доказательство будет основано на свойстве непрерывности (теорема 1.3.3) множества действительных чисел.

Рассмотрим два случая.

1. Множество X — конечно. Тогда существует наибольший элемент x_0 в X. Очевидно, что $x_0 = \sup X$, и в этом случае теорема доказана.

2. Множество X — бесконечно. Обозначим через Y множество всех верхних границ X. Тогда Y не пусто и справедливо неравенство $x \leqslant y$ для всех $x \in X$ и для всех $y \in Y$. По свойству непрерывности множества вещественных чисел (теорема 1.3.3) существует число c являющееся сечением множеств X и Y. Поскольку $x \leqslant c$ для всех $x \in X$, то c — верхняя граница для X. Поскольку $c \leqslant y$ для всех $y \in Y$, то c — наименьшая из верхних границ.

Докажем единственность c. Второе условие определения 1.4.4 можно сформулировать другими словами: число c есть минимальный элемент множества верхних границ, т.е. $c = \min Y$, где Y — множество верхних границ множества X. По лемме 1.4.1 минимальный элемент единственный. □

Замечание 1.4.1. *Если теорему 1.4.1 принять за аксиому, то свойство непрерывности действительных чисел можно доказать на основе этой аксиомы.*

1.4.2. Принцип Архимеда.

Теорема 1.4.2 (принцип Архимеда)**.** *Каково бы ни было число $c > 0$, существует натуральное $n > c$.*

Доказательство. Если $c = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots$, то в качестве n можно взять $\alpha_0 + 2$. □

Следствие 1.4.1. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число n, такое что $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть $c = \dfrac{1}{\varepsilon}$, тогда, используя принцип Архимеда, находим $n > c = \dfrac{1}{\varepsilon}$, т.е. $\dfrac{1}{\varepsilon} < n$. Умножая последнее неравенство на число $\dfrac{\varepsilon}{n}$ (см. свойство III_6), получим $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$. □

1.5. Три принципа математического анализа

1.5.1. Принцип Кантора.

Определение 1.5.1. *Пусть даны две точки a и b, $a \leqslant b$. Отрезком (сегментом или замкнутым числовым промежутком) назовем множество $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leqslant x \leqslant b\}$.*

Определение 1.5.2. *Пусть даны две точки a и b, $a < b$. Интервалом (открытым числовым промежутком) назовем множество $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\}$.*

Определение 1.5.3. *Последовательность отрезков $I_1 = [a_1, b_1]$, $I_2 = [a_2, b_2], \ldots$, $I_n = [a_n, b_n], \ldots$, называется вложенной, если выполнены включения $I_{n+1} \subset I_n$ для всех натуральных чисел n.*

Теорема 1.5.1 (принцип Кантора о вложенных отрезках)**.** *Пусть дана последовательность вложенных друг в друга отрезков $I_1 = [a_1, b_1]$, $I_2 = [a_2, b_2], \ldots$, $I_n = [a_n, b_n], \ldots$ и пусть для любого числа $\varepsilon > 0$ в этой последовательности отрезков можно найти отрезок I_n, длина которого $|I_n| < \varepsilon$ (т.е. $|I_n| \to 0$ при $n \to \infty$).*

Тогда существует единственная точка c, принадлежащая всем этим отрезкам.

Доказательство. Рассмотрим два множества: множество $X = \{a_1, a_2, \dots a_n, \dots\}$ и множество $Y = \{b_1, b_2, \dots b_n, \dots\}$. Из свойства вложенности отрезков получаем, что $a_n \leqslant b_m$ для любых $n, m \in \mathbb{N}$ (если бы для каких-то n, m было справедливо обратное неравенство $a_n > b_m$, то мы бы получили, что $b_n > a_n > b_m > a_m$ и поэтому отрезки I_n и I_m не пересекались бы).

Поэтому множества X, Y удовлетворяют условию теоремы 1.3.3, следовательно, существует точка c — сечение этих множеств, т.е. $a_n \leqslant c \leqslant b_n$. Таким образом, c принадлежит всем отрезкам I_n.

Единственность точки c следует из того, что длины отрезков стремятся к нулю. □

Если вместо отрезков рассматривать интервалы, то это свойство будет несправедливо.

Пример 1.5.1. Привести пример системы вложенных интервалов с пустым пересечением.

Решение. Рассмотрим последовательность вложенных интервалов $J_1 = (0, 1)$, $J_2 = \left(0, \dfrac{1}{2}\right), \dots, J_n = \left(0, \dfrac{1}{n}\right), \dots$ Тогда пересечение этих интервалов пусто.

1.5.2. Принцип Бореля-Лебега. Рассмотрим еще одно свойство вещественных чисел.

Определение 1.5.4. *Говорят, что система множеств $\mathcal{S} = \{X\}$ покрывает множество Y, если любой $y \in Y$ содержится, по крайней мере, в одном из множеств X, т.е. $Y \subset \cup X$.*

Теорема 1.5.2 (принцип Бореля-Лебега). *В любой системе интервалов, покрывающих отрезок $[a, b]$, имеется конечная подсистема, покрывающая этот отрезок.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{S} = \{U\}$ есть система интервалов U, покрывающих отрезок $[a, b] = I_1$. Если I_1 нельзя покрыть конечным числом интервалов U, то поделим I_1 пополам и выберем из двух отрезков тот, который не покрывается конечным числом интервалов U. Обозначим этот отрезок I_2. Продолжая этот процесс, получим последовательность $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$, причем длина отрезка I_n (обозначим ее $|I_n|$) равна $|I_n| = \dfrac{|I_1|}{2^{n-1}}$. По теореме 1.5.1 о вложенных отрезках существует точка $c \in I_n$ для любого n. Элемент c принадлежит также интервалу $U = (\alpha, \beta)$ из системы $\mathcal{S}$. Пусть теперь $\varepsilon = \min(c - \alpha, \beta - c)$ и $|I_n| < \varepsilon$. Тогда $I_n \subset (\alpha, \beta)$. Но это противоречит тому, что отрезок I_n нельзя покрыть системой интервалов $\{U\}$. □

Замечание 1.5.1. *Из доказательства видно, что принцип Бореля-Лебега вытекает из принципа Кантора о вложенных отрезках. Можно показать, что принцип Кантора является следствием теоремы 1.5.2. Такие утверждения называются эквивалентными.*

Упражнение 1.5.1. Показать, что из системы отрезков, покрывающих некоторый отрезок, не всегда можно выбрать конечное подпокрытие (привести пример).

1.5.3. Принцип Больцано-Вейерштрасса. Докажем еще одну теорему, эквивалентную свойству непрерывности множества действительных чисел. Предварительно дадим несколько определений.

Определение 1.5.5. *Окрестностью точки $x_0 \in \mathbb{R}$ называется интервал, содержащий эту точку; δ-окрестностью (или окрестностью радиуса δ) точки x_0 называется интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.*

Например, интервал $(1, 5)$ есть окрестность точки $x_0 = 4$, а интервал $(3, 5)$ есть окрестность радиуса 1 той же точки x_0.

Определение 1.5.6. *Точка x_0 называется предельной точкой множества $X \subset \mathbb{R}$, если любая окрестность этой точки содержит бесконечное подмножество множества X.*

Можно сформулировать определение 1.5.6 в другой равносильной форме.

Определение 1.5.7. *Точка x_0 называется предельной точкой множества $X \subset \mathbb{R}$, если любая окрестность этой точки содержит, по крайней мере, одну точку множества X, не совпадающую с точкой x_0.*

Упражнение 1.5.2. Доказать равносильность (т.е. эквивалентность) этих определений.

Пример 1.5.2. Пусть $X = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$, где $n \in \mathbb{N}$. Найти предельные точки этого множества.

Решение. Предельной точкой множества X является точка 0, которая для этого множества единственная.

Пример 1.5.3. Пусть множество X есть интервал $(1, 3)$. Найти предельные точки этого множества.

Решение. Все его предельные точки образуют отрезок $[1, 3]$.

Предельные точки отрезка дают сам этот отрезок.

Определение 1.5.8. *Множество всех предельных точек множества X обозначается X' и называется производным множеством.*

Теорема 1.5.3 (принцип Больцано-Вейерштрасса)**.** *Всякое бесконечное ограниченное числовое множество имеет, по крайней мере, одну предельную точку.*

Доказательство. Пусть X — бесконечное ограниченное множество чисел из $\mathbb{R}$. Из определения ограниченности множества X следует, что X содержится в некотором отрезке $[a, b]$. Обозначим отрезок $[a, b]$ через σ_0 и покажем, что существует, по крайней мере, одна точка $x_0 \in [a, b]$, которая является предельной для X. Разделим отрезок σ_0 на два равных отрезка и обозначим через $\sigma_1 = [a_1, b_1]$ любой из них, содержащий бесконечное подмножество чисел множества X (по крайней мере, один из них обязательно содержит такое бесконечное подмножество). Теперь σ_1 разделим на два равных отрезка и обозначим через $\sigma_2 = [a_2, b_2]$ любой из них, содержащий бесконечное подмножество чисел множества X.

Рассуждая по индукции, получим последовательность вложенных друг в друга отрезков $\sigma_n = [a_n, b_n]$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$, длины которых $\dfrac{b-a}{2^n}$ стремятся к нулю. Согласно принципу Кантора о вложенных отрезках (теорема 1.5.1) существует точка x_0, принадлежащая всем σ_n. Очевидно, что x_0 есть предельная точка множества X. $\square$

Если теорему Больцано-Вейерштрасса взять за аксиому, то принцип Кантора может быть доказан на основании этой аксиомы.

Таким образом, принцип Кантора о вложенных отрезках, свойство существования точной верхней границы (точной нижней границы), принцип Бореля–Лебега и принцип Больцано–Вейерштрасса есть эквивалентные утверждения.

Упражнение 1.5.3. Показать, что если вместо множества вещественных чисел $\mathbb{R}$ рассмотреть множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$, то ни один из принципов выполняться не будет (привести соответствующие примеры).

1.6. Понятие функции. График функции. Класс элементарных функций

1.6.1. Понятие функции или отображения. Рассмотрим два непустых множества X и Y.

Определение 1.6.1. *Говорят, что задана функция f, отображающая множество X в множество Y, если каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие (по определенному правилу) единственный элемент $y \in Y$. Записывается это так:*

$$f: \ X \to Y.$$

Наряду с термином "функция" употребляются термины "отображение" , "соответствие" , "преобразование" , "морфизм" , "оператор" и т.д.

Определение 1.6.2. *Множество X, на котором задана функция, называют областью определения функции, а множество всех элементов вида $f(x) \in Y$ называют областью значений и обозначают $f(X)$. Тогда $f(X) \subset Y$.*

Определение 1.6.3. *Элемент $x \in X$ называют аргументом функции f, а элемент $y = f(x) \in Y$ есть значение функции.*

Мы будем рассматривать, если не оговорено противное, *числовые* функции, т.е. функции, у которых область определения и область значений являются числовыми множествами (как правило, множествами вещественных чисел).

Для функции мы часто будем употреблять обозначения $y = f(x)$ или $f: \ x \to y$.

Определение 1.6.4. *Пусть множество $M \subset X$, тогда образом множества M при отображении f называют множество*

$$f(M) = \{y \in Y: \ y = f(x), \ x \in M\}.$$

Другими словами, $f(M)$ состоит из всех образов $f(x)$ элементов $x \in M$ при отображении f.

Упражнение 1.6.1. Показать, что если $A \subset B$, то для любой функции f (определенной на B) $f(A) \subset f(B)$.

Определение 1.6.5. *Пусть множество $M \subset Y$. Прообразом множества M при отображении f называют множество*

$$f^{-1}(M) = \{x \in X: \ f(x) \in M\}.$$

Иногда рассматривают прообразы множеств M, которые не содержатся полностью во множестве значений. В этом случае может быть такая ситуация, когда $f^{-1}(M) = \varnothing$.

Определение 1.6.6. *Если выполнено равенство $f(X) = Y$, то говорят, что функция f отображает множество X на множество Y. В этом случае f называют сюръективным отображением, или сюръекцией, или отображением на.*

Определение 1.6.7. *Если при отображении $f: X \to Y$ разным элементам $x \in X$ соответствуют разные элементы $y \in Y$, т.е. при $x_1 \neq x_2$ имеет место $f(x_1) \neq f(x_2)$, то отображение f называется инъективным отображением или просто инъекцией.*

Определение 1.6.8. *Если одновременно отображение $f: \ X \to Y$ является инъективным и сюръективным, то f называют биективным отображением, или биекцией, или взаимно-однозначным отображением X на Y.*

Таким образом, отображение f является биективным (т.е. взаимно-однозначным отображением множества X на множество Y), если для любых элементов $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ справедливо неравенство $f(x_1) \neq f(x_2)$, и, каково бы ни было $y \in Y$, существует такой элемент $x \in X$, для которого $f(x) = y$.

Взаимно-однозначное отображение на еще называют *взаимно-однозначным соответствием.*

Для таких отображений можно определить *обратную* функцию.

Определение 1.6.9. *Пусть $f: X \to Y$ — взаимно-однозначное соответствие. Функция $f^{-1}: Y \to X$ называется обратной для функции f, если $f^{-1}(y) = x$ в том и только в том случае, когда $f(x) = y$. Данными соотношениями обратная функция полностью определена.*

1.6.2. График функции.

Определение 1.6.10. *Если $f: X \to Y$, то графиком функции f называется множество всех пар $(x, y) \in X \times Y$ вида $(x, f(x))$, где $x \in X$.*

Если график функции f обозначить через Γ_f, то

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y : \ y = f(x), \ x \in X\}.$$

Определим операцию *суперпозиции*, или *композиции*, двух функций.

Определение 1.6.11. *Пусть $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$, тогда композицией функций f и g (или суперпозицией, или сложной функцией) называется функция $g \circ f: X \to Z$, определенная следующим образом:*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

для всех $x \in X$.

Функцию $F(x) = g(f(x))$ еще называют *сложной* функцией.

Вообще говоря, эта операция не перестановочна (не коммутативна).

Как можно задавать числовую функцию? Прежде всего функции могут задаваться в виде формул: *аналитический способ* задания. Для этого используется некоторый запас изученных и специально обозначенных функций. Например: $y = ax+b$, $y = ax^2$, $y = \sin x$ и т.д.

При этом всегда под функцией, заданной некоторой формулой, понимается функция, определенная на множестве тех вещественных чисел, для которых, во–первых, указанная формула имеет смысл и, во-вторых, в процессе проведения всех необходимых вычислений по этой формуле получаются только вещественные числа.

При таком определении, казалось бы, одинаковые функции могут иметь различные области определения.

Пример 1.6.1. Найти области определения функций $y = x$ и $y = (\sqrt{x})^2$.

Решение. Первая функция определена на всей вещественной оси, а вторая — только для неотрицательных значений аргумента. Поэтому эти функции имеют разную область определения.

Иногда функция задается *кусочно*, т.е. с помощью разных формул на разных числовых промежутках.

Рассмотрим функцию

$$\mathrm{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{для } \ x > 0, \\ 0 & \text{для } \ x = 0, \\ -1 & \text{для } \ x < 0. \end{cases}$$

Эта функция называется "сигнум" x, или "знак" x.

Функцию можно задавать с помощью ее графика, а также с помощью таблицы.

Определение 1.6.12. *Целой частью числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x, обозначается эта функция через $[x]$.*

1.6.3. Класс элементарных функций.

Определение 1.6.13. *Основными элементарными функциями мы будем считать следующие функции:*

1) $y = x^{\alpha}, \quad x > 0, \quad \alpha$ — любое вещественное число (степенная функция);

2) $y = a^x$, где основание степени $a > 0$, $a \neq 1$, x — любое вещественное число (показательная функция);

3) $y = \log_a x, \quad x > 0$, а основание логарифма $a > 0, \ a \neq 1$ (логарифмическая функция);

4) $y = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}$;

5) $y = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}$;

6) $y = \operatorname{tg} x, \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$;

7) $y = \operatorname{ctg} x, \quad x \neq k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

(функции из пунктов 4–7 носят название тригонометрических);

8) $y = \arcsin x, \quad x \in [-1, 1]$;

9) $y = \arccos x, \quad x \in [-1, 1]$;

10) $y = \operatorname{arctg} x, \quad x \in (-\infty, +\infty)$;

11) $y = \operatorname{arcctg} x, \quad x \in (-\infty, +\infty)$

(функции из пунктов 8-11 носят название обратных тригонометрических).

Сделаем некоторые замечания относительно этих функций.

Степенная функция для некоторых значений показателя α имеет большую область определения. Например, если α — *целое неотрицательное* число, то область определения такой функции — вся вещественная ось $\mathbb{R}$; если α — *целое отрицательное* число, то область определения такой функции — все вещественные числа, отличные от нуля; если α — *неотрицательное дробное* число, то область определения такой функции — все неотрицательные вещественные числа.

Функции показательная и логарифмическая — *взаимно обратны.* Если основание логарифма равно 10, то такая функция обозначается через $\lg x$ и называется *десятичным* логарифмом. Если основание логарифма равно e, то такая функция называется *натуральным* логарифмом и обозначается $\ln x$.

Соответствующие тригонометрические и обратные тригонометрические функции *взаимно обратны.* Например, $\sin x$ на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$ и $\arcsin x$.

Графики этих функций хорошо известны еще со школы.

Определение 1.6.14. *Элементарной функцией назовем функцию, которая получается из основных элементарных функций с помощью применения конечного числа арифметических операций и операции суперпозиции (композиции, взятия сложной функции).*

Например, функции

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \quad y = \sin \log_2 x, \quad y = x^2 + \operatorname{arctg}\sqrt{x}$$

являются элементарными

Рассматривают следующие классы элементарных функций:

1. *Многочлены*, т.е. функции вида

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2. *Рациональные функции*, т.е. функции вида

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, причем $Q(x)$ не равен тождественно нулю.

3. *Алгебраические функции*, примером которых служат функции $y = \sqrt[n]{x}, \quad n \in \mathbb{N}$, и $y = \sqrt{R(x)}$, где $R(x)$ — рациональная функция. В общем, алгебраические функции являются корнями некоторого алгебраического уравнения от двух переменных x и y.

4. Различные *трансцендентные функции.* К ним, например, относятся тригонометрические и обратные тригонометрические функции, а также *гиперболические* функции, которые мы определим.

Гиперболический синус —

$$y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

гиперболический косинус —

$$y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

гиперболический тангенс —

$$y = \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

гиперболический котангенс —

$$y = \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Полезно знать графики этих функций.

Данные функции обладают некоторыми свойствами, похожими на свойства тригонометрических функций. Например,

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad 2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x = \operatorname{sh}(2x).$$

Гиперболические функции так же связаны с гиперболой, как обычные тригонометрические функции с кругом.

1.7. Предел последовательности и его свойства

1.7.1. Предел последовательности.

Определение 1.7.1. *Пусть каждому натуральному числу $n = 1,2,\dots$ поставлено в соответствие в силу некоторого закона число x_n. Тогда говорят, что этим определена последовательность чисел $x_1, \ x_2, \dots, x_n, \dots$ или последовательность $\{x_n\}$. Числа x_n называются элементами последовательности (членами последовательности).*

Таким образом, последовательность — это некоторая функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Примерами последовательностей служат выражения

$$\left\{\frac{1}{2^n}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right\}$$

$$\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, \dots\}.$$

Иногда будем говорить, что переменная x_n пробегает последовательность $\{x_n\}$ или последовательность значений x_n.

Определение 1.7.2. *Число $A \in \mathbb{R}$ называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется натуральное число N, такое что для всех натуральных $n > N$ выполняется неравенство*

$$|x_n - A| < \varepsilon. \tag{1.7.1}$$

При этом будем писать

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A$$

или

$$x_n \to A \quad \textit{при} \quad n \to \infty$$

и говорить, что переменная x_n стремится к A, или что последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу A при $n \to \infty$.

Определение 1.7.3. *Если последовательность имеет предел, то она называется сходящейся.*

Заметим, что эти обозначения уже частично использовались при формулировке принципа Кантора о вложенных отрезках (§ 1.5).

Запишем теперь определение предела в логической символике (знак := заменяет слова "есть по определению"):

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A := \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \ \Rightarrow \ |x_n - A| < \varepsilon.$$

Определение 1.7.4. *Последовательность $\{x_n\}$, не имеющая предела, называется расходящейся.*

Приведем примеры.

Пример 1.7.1. Найти предел последовательности $\dfrac{1}{n}$.

Решение. Предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \text{так как } \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ при } n > N \geqslant \left[\frac{1}{\varepsilon}\right].$$

Пример 1.7.2. Найти предел последовательности $\dfrac{1}{2^n}$.

Решение. Предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0, \quad \text{так как } \left|\frac{1}{2^n} - 0\right| = \frac{1}{2^n} < \varepsilon \text{ при } n > N \geqslant \left[\frac{\lg \frac{1}{\varepsilon}}{\lg 2}\right].$$

Пример 1.7.3. Найти предел последовательности $\dfrac{\sin n}{n}$.

Решение. Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0, \text{ так как } \left|\frac{\sin n}{n} - 0\right| = \left|\frac{\sin n}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

$$\text{при } n > N \geqslant \left[\frac{1}{\varepsilon}\right].$$

Пример 1.7.4. Показать, что последовательность $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, \dots\}$ не имеет предела, т.е. расходится.

Решение. Для установления этого факта перефразируем определение 1.7.2 (придадим ему геометрический смысл). Неравенство (1.7.1) запишем в виде

$$A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon,$$

т.е. элементы x_n (при $n > N$) принадлежат промежутку $(A - \varepsilon,\ A + \varepsilon)$, который является *$\varepsilon$-окрестностью* точки A. Так что, при $\varepsilon < \dfrac{1}{2}$ либо элементы последовательности с четными номерами (т.е. $x_n = 1$), либо элементы последовательности с нечетными номерами (т.е. $x_n = -1$) не могут лежать в ε-окрестности любого числа A.

Упражнение 1.7.1. Показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q^n} = 0, \quad |q| > 1.$$

Определение 1.7.5. *Число $A \in \mathbb{R}$ называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если, какова бы ни была ε-окрестность точки A, существует натуральное число N, такое что $x_n \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ при $n > N$.*

Другими словами, может быть только конечное число элементов последовательности $\{x_n\}$, которые не принадлежат ε-окрестности точки A.

Если заметить, что в любой окрестности $V(A)$ точки A содержится некоторая ε-окрестность этой же точки, то определение 1.7.5 можно переписать в логической символике следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A := \forall V(A)\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ \Rightarrow\ x_n \in V(A).$$

1.7.2. Общие свойства пределов.

Определение 1.7.6. *Последовательность, принимающая только одно значение, называется постоянной.*

Определение 1.7.7. *Если существуют числа A и N такие, что $x_n = A$ при $n > N$, то $\{x_n\}$ называется финально постоянной.*

Определение 1.7.8. *Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если существует число $M > 0$ такое, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $|x_n| < M$.*

Теорема 1.7.1. *a) Финально постоянная последовательность сходится.*
b) Последовательность не может иметь двух или более различных пределов.
c) Сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство. a) Если $x_n = A$ при $n > N$, то $\forall\, V(A) \ \Rightarrow\ x_n \in V(A)$ при $n > N$.

b) От противного. Пусть последовательность имеет два предела A_1 и A_2 и $V(A_1) \cap V(A_2) = \varnothing$. Тогда, по определению 1.7.5,

$$\exists N_1 \quad \forall n > N_1\ \Rightarrow\ x_n \in V(A_1),$$
$$\exists N_2 \quad \forall n > N_2\ \Rightarrow\ x_n \in V(A_2).$$

Выберем в качестве $N = \max(N_1, N_2)$, теперь для $\forall n > N \quad \Rightarrow\ x_n \in V(A_1) \cap V(A_2)$, но $V(A_1) \cap V(A_2) = \varnothing$.

c) Пусть A — предел последовательности $\{x_n\}$.

Зафиксируем $\varepsilon = 1$, тогда $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N\ \Rightarrow\ |x_n - A| < 1$, т.е. $A-1 < x_n < A+1$.

Тогда ясно, что $\min\{A-1, x_1, \ldots, x_n\} \leqslant x_n \leqslant \max\{A+1, x_1, \ldots, x_n\}$ для любого n. □

1.7.3. Предельный переход и арифметические операции.

Определение 1.7.9. *Если $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — две числовые последовательности, то их суммой, произведением и частным называются последовательности*

$$\{x_n + y_n\}, \{x_n \cdot y_n\}, \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} (\textit{отношение определено, если} \quad y_n \neq 0).$$

Теорема 1.7.2. *Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — две числовые последовательности. Если $\lim x_n = A$, $\lim y_n = B$, то*

a) $\lim (x_n + y_n) = A + B$;

b) $\lim x_n \cdot y_n \quad = A \cdot B$;

c) $\lim \dfrac{x_n}{y_n} \qquad = \dfrac{A}{B}, \quad B \neq 0, y_n \neq 0.$

Доказательство теоремы предоставляется читателю.

1.7.4. Предельный переход и неравенства.

Теорема 1.7.3. *Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — две сходящиеся последовательности, причем*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A, \ \lim_{n\to\infty} y_n = B.$$

Если $A < B$, то существует такой номер $N \in \mathbb{N}$, что для любых $n > N$ выполняется неравенство $x_n < y_n$.

Доказательство. Возьмем число C, такое что $A < C < B$ (см. свойство I_3 действительных чисел.) По определению предела найдем числа N' и N'' так, чтобы при любом $n > N'$ было выполнено $|x_n - A| < C - A$ и при любом $n > N''$ также выполнялось $|y_n - B| < B - C$. Тогда при $n > N = \max\{N', N''\}$ получим

$$x_n < A + (C - A) = C < B - (B - C) < y_n. \quad \square$$

Теорема 1.7.4 (о зажатой последовательности)**.** *Пусть последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ таковы, что при любом $n > N \in \mathbb{N}$ имеет место соотношение $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$. Если при этом последовательности $\{x_n\}$, $\{z_n\}$ сходятся к одному и тому же пределу, то последовательность $\{y_n\}$ также сходится к этому пределу.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$. Для $\varepsilon > 0$ найдем числа N' и N'' так, чтобы при любом $n > N'$ иметь $A - \varepsilon < x_n$ и при любом $n > N''$ выполнялось $z_n < A + \varepsilon$.

Тогда при $n > N = \max\{N', N''\}$ получим

$$A - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < A + \varepsilon$$

или $|y_n - A| < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$. □

Эту теорему иногда называют "правилом двух милиционеров".

Следствие 1.7.1. *Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$. Если существует номер N такой, что при любом $n > N$:*

a) $x_n > y_n$, *то* $A \geqslant B$;

b) $x_n \geqslant y_n$, *то* $A \geqslant B$;

c) $x_n > B$, *то* $A \geqslant B$;

d) $x_n \geqslant B$, *то* $A \geqslant B$.

Доказательство. Рассуждая от противного, из теоремы 1.7.3 немедленно получаем первые два утверждения a), b). Утверждения c) и d) есть частные случаи первых двух, получающиеся при $y_n = B$. $\square$

Пусть $x_n = \dfrac{1}{n}$, $y_n = 0$. Тогда $\dfrac{1}{n} > 0$ означает, что $x_n > y_n$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим, что $A = 0$, $B = 0$ и $A = B$, т.е. строгое неравенство $x_n > y_n$ после предельного перехода может стать равенством.

Следствие 1.7.2. *Пусть последовательность $\{z_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, $a \neq 0$. Тогда существует номер N такой, что при любом $n > N$ выполняется:*

a) $z_n > \dfrac{a}{2}$, если $a > 0$;

b) $z_n < \dfrac{a}{2}$, если $a < 0$;

c) $|z_n| > \dfrac{a}{2}$.

Доказательство. Утверждение a) получается из теоремы 1.7.3, если положить $x_n = \dfrac{a}{2}$, $y_n = z_n$. Тогда $A = \dfrac{a}{2} < a = B$ при $a > 0$. Аналогично получаем утверждение b). Последний пункт c) есть следствие первых двух. $\square$

1.8. Теоремы о существовании предела последовательности

1.8.1. Критерий Коши. Изучим в этом параграфе одну из важнейших теорем математического анализа, имеющую многочисленные аналоги в других разделах математики (и самого математического анализа).

Определение 1.8.1. *Последовательность называется фундаментальной (или последовательностью Коши), если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N \in \mathbb{N}$, что из $n > N$ и $m > N$ следует выполнение неравенства $|x_m - x_n| < \varepsilon$. Условие, которому удовлетворяет фундаментальная последовательность, называется условием Коши.*

Пример 1.8.1. Пусть $x_n = \dfrac{1}{n}$. Показать, что эта последовательность фундаментальна.

Решение. Учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, можно для любого $\varepsilon > 0$ указать номер $N \in \mathbb{N}$, что из $n > N$ и $m > N$ следует $0 < x_n < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $0 < x_m < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогда $|x_m - x_n| \leqslant |x_m| + |x_n| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Теорема 1.8.1 (критерий Коши сходимости последовательности)**.** *Числовая последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Доказательство. Покажем сначала необходимость, т.е. что из существования предела последовательности вытекает ее фундаментальность.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. Из определения предела следует, что для $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что при $n > N$ выполняется $|x_n - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ и при $m > N$ также $|x_m - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$|x_m - x_n| = |(x_m - A) + (A - x_n)| \leqslant |x_m - A| + |A - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т.е. условие Коши выполнено.

Перейдем к доказательству достаточности условия Коши для сходимости последовательности $\{x_n\}$.

Пусть $\{x_n\}$ — фундаментальна. Разобьем доказательство на три этапа.

1) Покажем ограниченность фундаментальной последовательности. Для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что из $k > N$, $m > N$ следует

$$|x_k - x_m| < \frac{\varepsilon}{3},$$

или

$$-\frac{\varepsilon}{3} < x_k - x_m < \frac{\varepsilon}{3},$$

или

$$x_m - \frac{\varepsilon}{3} < x_k < x_m + \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.8.1}$$

Пусть теперь $\varepsilon = 1$, а $m = N + 1$. Тогда $x_{N+1} - \dfrac{1}{3} < x_k < x_{N+1} + \dfrac{1}{3}$. Подчеркнем, что в последнем неравенстве k произвольно ($k > N$), а $x_{N+1} - \dfrac{1}{3}$ и $x_{N+1} + \dfrac{1}{3}$ есть некоторые константы. Это означает, что последовательность $\{x_k\}$, $k > N$, ограничена. Но элементов, имеющих номера $k \leqslant N$, конечное число, значит вся последовательность ограничена.

2) Построение последовательности вложенных отрезков.

Пусть

$$a_n = \inf_{k \geqslant n} x_k, \;\; b_n = \sup_{k \geqslant n} x_k$$

(указанные величины существуют, так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена). Из определений точной верхней и точной нижней границ вытекает, что $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$. Таким образом, последовательность $[a_n, b_n]$ образует последовательность вложенных отрезков. Покажем, что длина этих отрезков стремится к 0 при $n \to \infty$. Из неравенства (1.8.1) при $m = N + 1$ получаем, что

$$x_{N+1} - \frac{\varepsilon}{3} \leqslant \inf_{k \geqslant n} x_k = a_n \leqslant b_n = \sup_{k \geqslant n} x_k \leqslant x_{N+1} + \frac{\varepsilon}{3},$$

откуда длина отрезка $[a_n, b_n]$, $n > N$, оценивается величиной ε, так как $b_n - a_n \leqslant \dfrac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

3) Используем принцип Кантора о вложенных отрезках $[a_n, b_n]$.

Пусть A — единственная точка, принадлежащая всем этим отрезкам, т.е. $a_n \leqslant A \leqslant b_n$. Но элементы последовательности x_k с номерами $k \geqslant n$ также принадлежат отрезку $[a_n, b_n]$. Действительно,

$$a_n = \inf_{k \geqslant n} x_k \leqslant x_k \leqslant \sup_{k \geqslant n} x_k = b_n.$$

Тогда $|A - x_k| \leqslant b_n - a_n < \varepsilon$ при $k \geqslant n > N$, что и говорит о сходимости последовательности $\{x_n\}$ к числу A. □

Рассмотрим примеры, в которых необходимо изучить сходимость последовательности $\{x_n\}$, используя критерий Коши.

Пример 1.8.2. Рассмотрим последовательность $x_n = \dfrac{\sin n}{n}$. Показать, что она сходится.

Решение. Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано. Оценим величину $|x_m - x_n| = \left|\frac{\sin m}{m} - \frac{\sin n}{n}\right|$. Пусть для определенности $m > n$. Тогда

$$\left|\frac{\sin m}{m} - \frac{\sin n}{n}\right| = \left|\frac{\sin m}{m}\right| + \left|\frac{\sin n}{n}\right| \leqslant \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \frac{1}{2n}.$$

Если в качестве N взять величину $\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$ и потребовать, чтобы $n > N$ (тем более $m > N$), то $|x_m - x_n| < \varepsilon$ и последовательность оказалась фундаментальной, а значит, и сходящейся по критерию Коши.

Пример 1.8.3. Рассмотрим последовательность $x_n = (-1)^n$. Показать, что она расходится (по критерию Коши).

Решение. Уже было показано, что последовательность $\{x_n\}$ расходящаяся, т.е. она не является фундаментальной. Проведем формальную проверку этого факта. Сформулируем прежде всего отрицание того, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная.

Числовая последовательность $\{x_n\}$ не удовлетворяет условию Коши, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что при любом $N \in \mathbb{N}$ найдутся числа n, m больше N, для которых $|x_n - x_m| \geqslant \varepsilon$ или, в формальной логической записи,

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n > N \quad \exists m > N \;\Rightarrow\; |x_n - x_m| \geqslant \varepsilon.$$

Для последовательности $x_n = (-1)^n$ положим $\varepsilon = 1$. Тогда при любом $N \in \mathbb{N}$ и $n = N + 1$, $m = N + 2$ будем иметь

$$|x_n - x_m| = \left|(-1)^{N+1} - (-1)^{N+2}\right| = \left|(-1)^{N+1} + (-1)^{N+1}\right| =$$

$$= \left|2 \cdot (-1)^{N+1}\right| = 2 \cdot \left|(-1)^{N+1}\right| = 2 > 1 = \varepsilon.$$

Пример 1.8.4. Рассмотрим последовательность $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. Показать, что эта последовательность не является фундаментальной и поэтому расходится.

Решение. По аналогии с предыдущим примером проверим, что выполняется условие отрицания определения фундаментальности. Пусть $\varepsilon = \frac{1}{4}$ и $m = 2k$, $n = k$, где k — произвольное натуральное число. Тогда

$$|x_{2k} - x_k| = \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{k+k} > \frac{1}{k+k} + \cdots + \frac{1}{k+k} =$$

$$= \frac{k}{k+k} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}.$$

1.8.2. Теорема Вейерштрасса.

Определение 1.8.2. *Последовательность называется*
возрастающей, если для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $x_n \leqslant x_{n+1}$;
строго возрастающей, если для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $x_n < x_{n+1}$;
убывающей, если для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $x_n \geqslant x_{n+1}$;
строго убывающей, если для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $x_n > x_{n+1}$.
Последовательности этих четырех видов называются монотонными.

Иногда возрастающие последовательности называют неубывающими, строго возрастающие — возрастающими, убывающие — невозрастающими, а строго убывающие — убывающими. Поэтому в случае непонимания нужно обращаться к определению.

Пример 1.8.5. Пусть $x_1 = 0$; $x_2 = 0,\alpha_1$; $x_3 = 0,\alpha_1\alpha_2$; $\ldots$; $x_n = 0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}$; $\ldots$, где α_i — произвольная цифра. Показать, что указанная последовательность — возрастающая.

Решение. Очевидно из определения.

Определение 1.8.3. *Последовательность называется ограниченной сверху, если существует число M такое, что $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n < M$. Аналогично определяется последовательность, ограниченная снизу.*

Пример 1.8.6. Проверить ограниченность последовательности $\left\{\dfrac{\sin n}{n}\right\}$.

Решение. Последовательность $\left\{\dfrac{\sin n}{n}\right\}$ ограничена сверху ($M = 1$, $\dfrac{\sin n}{n} < 1$). Она ограничена и снизу.

Теорема 1.8.2 (Вейерштрасс). *Для того чтобы возрастающая последовательность имела предел, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена сверху.*

Доказательство.

Необходимость. Так как любая сходящаяся последовательность ограничена, то она ограничена сверху.

Достаточность. Нужно доказать существование предела у возрастающей последовательности, ограниченной сверху. Обозначим эту последовательность $\{x_n\}$. По условию $x_n \leqslant M$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и для некоторого M. Тогда существует и точная верхняя граница этого множества $B = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}$. По определению точной верхней границы для любого $\varepsilon > 0$ найдется элемент $x_N \in \{x_n\}$ такой, что $B - \varepsilon < x_N \leqslant B$. Но так как последовательность $\{x_n\}$ возрастающая, то при любом $n > N$ получим $B - \varepsilon < x_N \leqslant x_n \leqslant B$, т.е.

$$|B - x_n| = B - x_n < \varepsilon.$$

Таким образом, доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = B$. □

Заметим, что мы доказали:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}.$$

Замечание 1.8.1. *Аналогичную теорему можно сформулировать и доказать для убывающей последовательности, ограниченной снизу. В этом случае*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}.$$

Замечание 1.8.2. *Ограниченность сверху (снизу) возрастающей (убывающей) последовательности на самом деле, очевидно, равносильна ограниченности этой последовательности.*

Пример 1.8.7. Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{q^n} = 0$, если $q > 1$.

Решение. Проверим сначала, что последовательность $\left\{\dfrac{n}{q^n}\right\}$ убывает. Действительно, если $x_n = \dfrac{n}{q^n}$ и $x_{n+1} = \dfrac{n+1}{q^{n+1}}$, то $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{n+1}{nq}$, $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что $\dfrac{n+1}{nq} < 1$, начиная с некоторого номера N. А это будет означать, что с этого номера $x_{n+1} < x_n$. Для этого убедимся, что предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n\cdot q} < 1$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n\cdot q}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{q}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q}=1\cdot\frac{1}{q}=\frac{1}{q}<1.$$

Таким образом, при $n>N$ будем иметь $x_{n+1}<x_n$, т.е. после члена x_N наша последовательность монотонно убывает. Поскольку конечное число членов последовательности, как видно из определения предела, не влияет на сходимость последовательности и ее предел, то достаточно теперь найти предел убывающей последовательности $x_{N+1}>x_{N+2}>\dots$

Ограниченность снизу указанной последовательности очевидна: $x_n=\dfrac{n}{q^n}>0$ для всех $n\in\mathbb{N}$.

Значит, по теореме 1.8.2 исследуемая последовательность имеет предел.

Осталось установить величину этого предела.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$. Рассмотрим уже известное равенство

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{n+1}{n\cdot q}$$

или

$$x_{n+1}=\frac{n+1}{n\cdot q}\cdot x_n\quad\text{для всех}\quad n\in\mathbb{N}.$$

Перейдем к пределу при $n\to\infty$ в этом соотношении. Предел левой части $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=A$. Предел правой части

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n\cdot q}\cdot x_n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n\cdot q}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{q}\cdot A,$$

отсюда $A=\dfrac{1}{q}\cdot A$, что возможно только при $A=0$.

Упражнение 1.8.1. Показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0\quad\text{для любого}\quad a.$$

Упражнение 1.8.2. Показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

1.8.3. Число e. Число e играет фундаментальную роль в математическом анализе. Такую же как число π в геометрии.

Пример 1.8.8. Доказать, что существует предел последовательности $\{\alpha_n\}$, где $\alpha_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Решение. Покажем, что последовательность $\{\alpha_n\}$ — возрастающая (даже строго возрастающая). Для этого вычислим α_n и α_{n+1} по формуле бинома и сравним их:

$$\alpha_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{n^3}+$$

$$+\dots+\frac{n(n-1)\dots(n-(n-1))}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot n}\frac{1}{n^n}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+$$

$$+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\dots++\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right);$$

$$\alpha_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \cdots$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

Из полученных разложений для α_n и α_{n+1} следует, что $\alpha_n < \alpha_{n+1}$.

Действительно, слагаемые в разложении α_n меньше соответствующих слагаемых в разложении α_{n+1}. Например,

$$\frac{1}{3!}\cdot\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdot\left(1 - \frac{2}{n}\right) < \frac{1}{3!}\cdot\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1 - \frac{2}{n+1}\right).$$

К тому же количество слагаемых в разложении α_{n+1} на единицу больше, чем в разложении α_n.

Далее,

$$\alpha_n = 2 + \frac{1}{2!}\cdot\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\cdot\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdot\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n^n} <$$
$$< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} <$$
$$< 2 + 1 = 3,$$

т.е. $\alpha_n < 3$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

На основании теоремы 1.8.2 предел последовательности α_n существует. Его стандартное обозначение — e. Оно равно $e = 2,718281828459045\ldots$

1.9. Подпоследовательности. Частичный предел последовательности. Верхний и нижний пределы

1.9.1. Частичный предел последовательности.

Определение 1.9.1. *Пусть задана некоторая последовательность* $\{x_n\}$, *и*

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \ldots$$

есть строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда последовательность

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$$

называется подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$.

Пример 1.9.1. Пусть задана последовательность

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

Записать некоторые ее подпоследовательности.

Решение.

а) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{2n-1}, \ldots \qquad (n_1 = 1, n_2 = 3, \ldots, n_k = 2k-1, \ldots)$;

б) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots \qquad \left(n_1 = 2, n_2 = 4, \ldots, n_k = 2^k, \ldots\right)$;

в) $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \ldots, \frac{1}{5n}, \ldots \qquad (n_1 = 5, n_2 = 10, \ldots, n_k = 5k, \ldots)$.

Но последовательность

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

уже не является подпоследовательностью последовательности $1, \dfrac{1}{2}, \dots, \dfrac{1}{n}, \dots$.

Теорема 1.9.1 (принцип Больцано-Вейерштрасса (для последовательностей)). *Каждая ограниченная последовательность действительных чисел содержит сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть E — множество значений ограниченной последовательности $\{x_n\}$. Это множество может быть конечным. (Например, множество значений последовательности $\{(-1)^n\}$ состоит всего из двух чисел: $-1, +1$.) Тогда существуют, по крайней мере, одна точка $x \in E$ и последовательность

$$n_1 < n_2 < \dots$$

номеров, таких что

$$x_{n_1} = x_{n_2} = \dots = x.$$

Полученная подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ постоянна и, значит, сходится.

Пусть теперь множество E — бесконечно. Тогда по принципу Больцано-Вейерштрасса (теорема 1.5.3) оно обладает, по крайней мере, одной предельной точкой x. Поскольку x — предельная точка E, можно выбрать $n_1 \in \mathbb{N}$ так, что $|x_{n_1} - x| < 1$; $n_2 \in \mathbb{N} \quad (n_1 < n_2)$ так, что $|x_{n_2} - x| < \dfrac{1}{2}; \dots ; n_k \in \mathbb{N} \quad (n_{k-1} < n_k)$ так, что $|x_{n_k} - x| < \dfrac{1}{k}; \dots$ Ясно, что

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x.$$

□

Определение 1.9.2. *Будем писать*

$$x_n \to +\infty \quad \left(\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty\right)$$

и говорить, что последовательность $\{x_n\}$ стремится к плюс бесконечности, если для каждого числа c найдется номер $N \in \mathbb{N}$, такой что $x_n > c$ при любом $n > N$.

Аналогично даются определения для случая $x_n \to -\infty, \quad x_n \to \infty$.

Последовательность $\{2^n\}$ стремится к $+\infty$, последовательность $\{-2^n\}$ стремится к $-\infty$, последовательность $\{(-2)^n\}$ стремится к ∞. Последовательность $\{n^{(-1)^n}\}$ не стремится ни к $+\infty$, ни к $-\infty$, ни просто к бесконечности, но является неограниченной.

1.9.2. Верхний и нижний пределы. Пусть задана последовательность $\{x_k\}$. Построим новую последовательность $\{a_n\}$, $a_n = \inf\limits_{k\geqslant n} x_k$, предполагая, что $\{x_k\}$ ограничена снизу. Ясно, что $\{a_n\}$ возрастает и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ есть либо конечное число, либо символ $+\infty$.

Определение 1.9.3. *Число l (или символ $+\infty$) называется нижним пределом последовательности $\{x_k\}$, если*

$$l = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} x_k \left(\text{или} \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty\right).$$

Для последовательности $\{x_k\}$, неограниченной снизу, полагаем, что нижний предел равен $-\infty$. Нижний предел обозначается символом

$$\varliminf_{k\to\infty} x_k.$$

Аналогично, рассматривая последовательность $b_n = \sup\limits_{k\geqslant n} x_k$, определяем верхний предел

$$\varlimsup_{k\to\infty} x_k$$

последовательности $\{x_k\}$.

Приведем примеры.

Пример 1.9.2. Для последовательности $x_k = (-1)^k$ найти верхний и нижний пределы.

Решение.

$$\varliminf_{k\to\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} (-1)^k = \lim_{n\to\infty} (-1) = -1,$$
$$\varlimsup_{k\to\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} (-1)^k = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Пример 1.9.3. Для последовательности $x_k = -k^2$ найти верхний и нижний пределы.

Решение.

$$\varliminf_{k\to\infty} \left(-k^2\right) = -\infty,$$
$$\varlimsup_{k\to\infty} \left(-k^2\right) = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} \left(-k^2\right) = \lim_{n\to\infty} \left(-n^2\right) = -\infty.$$

Пример 1.9.4. Для последовательности $x_k = \dfrac{1}{k}$ найти верхний и нижний пределы.

Решение.

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{k} = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} \frac{1}{k} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$
$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{k} = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} \frac{1}{k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Упражнение 1.9.1. Найти верхний и нижний пределы последовательности $k^{(-1)^k}$.

Определение 1.9.4. *Число (или символ $+\infty$ или $-\infty$) называют частичным пределом последовательности, если в ней есть подпоследовательность, сходящаяся к этому числу (или символу $+\infty$, $-\infty$).*

Теорема 1.9.2. *Нижний и верхний пределы последовательности являются, соответственно, наименьшим и наибольшим из ее частичных пределов. (При этом считаются принятыми естественные соотношения $-\infty < x < +\infty$ между символами $-\infty, +\infty$ и числами $x \in \mathbb{R}$.)*

Доказательство. Проведем его для нижнего предела и для случая, когда последовательность ограничена. Пусть

$$\varliminf_{k\to\infty} x_k = a$$

(a — конечное число, так как $\{x_k\}$ — ограниченная последовательность). Сначала покажем, что a — частичный предел.

Пусть $a_n = \inf\limits_{k\geqslant n} x_k$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$, используя определение нижней грани, подберем числа $k_n \in \mathbb{N}$ так, что $a_n \leqslant x_{k_n} \leqslant a_n + \dfrac{1}{n}$ и $k_n < k_{n+1}$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получим, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = a$, и мы доказали, что a — частичный предел последовательности $\{x_k\}$.

Это наименьший частичный предел, поскольку для любого $\varepsilon > 0$ найдется $n \in \mathbb{N}$, такое, что $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ (это вытекает из определения предела последовательности $\{a_n\}$). Но $a_n = \inf\limits_{k \geqslant n} x_k$ и $a - \varepsilon < a_n \leqslant x_k$ при $k \geqslant n$, т.е. все элементы последовательности $\{x_k\}$ (за исключением может быть конечного числа элементов $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$) больше числа $a - \varepsilon$. Это означает, что любой частичный предел нашей последовательности $l \geqslant a - \varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$, $l \geqslant a$. □

Несколько удлинив рассуждения, можно доказать теорему 1.9.2 и для случая, когда последовательность неограничена.

Следствие 1.9.1. *Последовательность имеет предел или стремится к минус или плюс бесконечности в том и только в том случае, когда нижний и верхний пределы последовательности совпадают.*

Доказательство. Приведем его для случая, когда все пределы конечны. Пусть

$$\varliminf_{k \to \infty} x_k = \varlimsup_{k \to \infty} x_k = A \in \mathbb{R}.$$

Поскольку

$$a_n = \inf_{k \geqslant n} x_k \leqslant x_n \leqslant \sup_{k \geqslant n} x_k = b_n,$$

т.е. $a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получим, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = A$.

Пусть теперь $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = A$. Тогда любая подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$ сходится к тому же числу A, т.е. все частичные пределы равны A, откуда и следует, что

$$\varliminf_{k \to \infty} x_k = \varlimsup_{k \to \infty} x_k = A.$$

□

Следствие 1.9.2. *Последовательность сходится тогда и только тогда, когда сходится любая ее подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть сходится любая подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$ последовательности $\{x_k\}$. Тогда сходится и сама последовательность $\{x_k\}$, так как она одновременно является и подпоследовательностью.

Пусть теперь сходится последовательность $\{x_k\}$. Возьмем любую подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$. Нижний и верхний пределы подпоследовательности $\{x_{k_n}\}$ заключены между нижним и верхним пределами последовательности $\{x_k\}$. Но эти последние пределы совпадают, значит, совпадают нижний и верхний пределы подпоследовательности, что обеспечивает сходимость $\{x_{k_n}\}$. □

1.10. Предел функции

1.10.1. Определения предела функции. Пусть $\mathbb{E}$ — некоторое множество действительных ($\mathbb{E} \subset \mathbb{R}$) и x_0 — предельная точка множества $\mathbb{E}$. Пусть $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ — вещественная функция, определенная на $\mathbb{E}$.

Определение 1.10.1. *Будем говорить, что функция $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ имеет своим пределом число A при x, стремящемся к x_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$, такое что для любой точки $x \in \mathbb{E}$, такой, что $0 < |x - x_0| < \delta$, выполнено неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.*

В логической символике выделенные условия запишутся в виде

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{E} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Тот факт, что число A есть предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$, записывают следующим образом:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathbb{E}}} f(x) = A.$$

В этой записи условие, что $x \in \mathbb{E}$, как правило, будем опускать, предполагая его всегда выполненным. Часто про определение 1.10.1 предела функции говорят, что оно записано "на языке $\varepsilon - \delta$" или в форме Коши.

Пример 1.10.1. Показать, что

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \mathbb{E}}} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0,$$

где $\mathbb{E} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Здесь 0 не принадлежит $\mathbb{E}$.

Решение. Пусть число $\varepsilon > 0$ произвольное. Возьмем $\delta = \varepsilon$. Тогда для всех $x \in \mathbb{E}$, для которых $0 < |x| < \delta$, выполнено неравенство

$$\left| x \cdot \sin \frac{1}{x} \right| \leqslant |x| < \delta = \varepsilon.$$

Пример 1.10.2. Показать, что $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$.

Решение. Зафиксируем число $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta > 0$, решая неравенство $|x^2 - 4| < \varepsilon$ относительно величины $|x - 2|$:

$$|x - 2| \cdot |x + 2| < \varepsilon,$$

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{|x + 2|}.$$

Выражение $\dfrac{\varepsilon}{|x + 2|}$ в качестве δ брать нельзя, так как оно зависит от x, а из определения 1.10.1 следует, что δ может зависеть только от ε и от x_0. Оценим поэтому величину $\dfrac{\varepsilon}{|x + 2|}$, предполагая, что $x \in (1, 3)$, т.е. лежит в единичной окрестности точки $x_0 = 2$:

$$\frac{\varepsilon}{5} < \frac{\varepsilon}{|x + 2|}.$$

Теперь в качестве δ можно взять величину $\dfrac{\varepsilon}{5}$, предполагая при этом, что $x \in (1, 3)$ или, коротко, $\delta = \min\left(\dfrac{\varepsilon}{5}, 1\right)$.

Упражнение 1.10.1. Показать, что

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}.$$

Перефразируем определение 1.10.1, используя геометрическую интерпретацию и понятие проколотой окрестности точки x_0.

Определение 1.10.2. *Проколотой окрестностью точки называется окрестность точки, из которой исключена сама эта точка.*

Если $U(x_0)$ — обозначение окрестности точки x_0, то проколотую окрестность этой точки будем обозначать символом $\overset{o}{U}(x_0)$.

Введем в рассмотрение множества

$$U_{\mathbb{E}}(x_0) := \mathbb{E} \cap U_(x_0),$$

$$\overset{o}{U}_{\mathbb{E}}(x_0) := \mathbb{E} \cap \overset{o}{U}(x_0)$$

(знак :=, как всегда, заменяет слова "есть по определению"), которые будем называть, соответственно, *окрестностью* и *проколотой окрестностью* точки x_0 в множестве $\mathbb{E}$.

Если x_0 — предельная точка $\mathbb{E}$, то $\overset{o}{U}(x_0) \neq \varnothing$, какова бы ни была окрестность $U(x_0)$.

Введем еще символы $\overset{o}{U}{}^{\delta}_{\mathbb{E}}(x_0)$ и $V^{\varepsilon}_{\mathbb{R}}(A)$ для обозначения проколотой δ-окрестности точки x_0 в множестве $\mathbb{E}$ и ε-окрестности точки A в $\mathbb{R}$. Тогда в определении 1.10.1 условие того, что A есть предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$, $x \in \mathbb{E}$ можно записать в виде

$$\forall V^{\epsilon}_{\mathbb{R}}(A) \qquad \exists \overset{o}{U}{}^{\delta}_{\mathbb{E}}(x_0) \quad \Rightarrow \quad f(\overset{o}{U}{}^{\delta}_{\mathbb{E}}(x_0)) \subset V^{\varepsilon}_{\mathbb{R}}(A).$$

В последней записи буквы ε и δ можно опустить, так как из существования произвольной окрестности точки x_0 следует существование симметричной δ-окрестности. Теперь определение 1.10.1 можно переформулировать.

Определение 1.10.3. *Предел*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathbb{E}}} f(x) = A,$$

если выполнено условие

$$\forall V_{\mathbb{R}}(A) \quad \exists \overset{o}{U}_{\mathbb{E}}(x_0) \quad \Rightarrow \quad f(\overset{o}{U}_{\mathbb{E}}(x_0)) \subset V_{\mathbb{R}}(A).$$

Пример 1.10.3. Показать, что функция

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

не имеет предела при $x \to 0$.

Решение. Легко видеть, что возможными значениями предела A могут быть только числа -1, 0, 1, т.е. значения функции $\operatorname{sgn} x$. Действительно, если взять любое другое число в качестве A (например, $2,5$), то у этого числа всегда найдется окрестность $V_{\mathbb{R}}(A)$ (для числа $2,5$ это, например, окрестность $(1,5; 3,5)$), которая не содержит ни одного значения функции $\operatorname{sgn} x$, и условие $f(\overset{o}{U}_{\mathbb{E}}(x_0)) \subset V_{\mathbb{R}}(A)$ не может быть выполнено ни для каких $\overset{o}{U}_{\mathbb{E}}(x_0)$.

Но это условие не может быть выполнено и для чисел $\{-1, 0, 1\}$. Если, например, $A = 1$ и $V_{\mathbb{R}}(1) = (0,5; 1,5)$, то $\operatorname{sgn}(\overset{o}{U}_{\mathbb{E}}(0)) = \{-1, 1\}$, какова бы ни была проколотая окрестность $\overset{o}{U}_{\mathbb{E}}(0)$, таким образом, $\operatorname{sgn}(\overset{o}{U}_{\mathbb{E}}(0)) \notin V_{\mathbb{R}}(1) = (0,5; 1,5)$. Рассуждая аналогично, получим, что числа $\{-1, 0\}$ также не могут быть пределом функции $\operatorname{sgn} x$ при $x \to 0$. Таким образом, никакое число не может быть пределом $\operatorname{sgn} x$ при $x \to 0$: этот предел не существует.

Дадим другое определение предела функции (на "языке последовательностей" или иногда говорят — "по Гейне").

Определение 1.10.4. *Число A называется пределом функции $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ при x, стремящемся к x_0, если для любой числовой последовательности $\{x_n\}$, которая сходится к x_0, $\quad x_n \in \mathbb{E} \setminus x_0$, выполняется условие*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

Теорема 1.10.1. *Определение 1.10.1 и определение 1.10.4 предела функции эквивалентны.*

Доказательство. Пусть функция f имеет предел A при $x \to x_0$ в смысле определения 1.10.1. Проверим выполнение определения 1.10.4. Зафиксируем последовательность $\{x_n\}$, $\quad x_n \to x_0$, $\quad x_n \in \mathbb{E} \setminus x_0$. Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем $\delta > 0$ так, как это сказано в первом определении. Затем подберем натуральное N так, чтобы $|x_n - x_0| < \delta$ для $n > N$, но тогда $|f(x_n) - A| < \varepsilon$ для $n > N$, а это означает, что

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$$

и определение 1.10.4 выполнено (ведь последовательность $\{x_n\}$ выбрана произвольно, лишь бы $x_n \to x_0,\ x_n \in \mathbb{E} \setminus x_0$).

Обратно. Пусть функция f имеет предел в смысле определения 1.10.4. Допустим, что при этом она не имеет предела в смысле определения 1.10.1, т.е. выполняется отрицание определения 1.10.1:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in \mathbb{E} \quad \Rightarrow \quad (0 < |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - A| \geqslant \varepsilon_0).$$

Так как δ — произвольное число, то пусть $\delta = 1/k, \quad k = 1, 2, \ldots$. Для каждого такого $\delta = 1/k$ существует точка $x_k \in \mathbb{E}$, для которой

$$0 < |x_k - x_0| < 1/k$$

и

$$|f(x_k) - A| \geqslant \varepsilon_0, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Из этих соотношений видно, что $x_k \to x_0, \quad x_k \in \mathbb{E} \setminus x_0$, но

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) \neq A,$$

а это противоречит тому, что определение 1.10.4 выполнено. □

1.10.2. Общие свойства предела. Напомним некоторые определения, необходимые для того, чтобы сформулировать свойства предела функции.

Определение 1.10.5. *Функцию $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$, принимающую только одно значение C, назовем постоянной. Функцию $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ назовем финально постоянной при $x \to x_0,\ x \in \mathbb{E}$, если она постоянная в некоторой проколотой окрестности $\overset{o}{U}_{\mathbb{E}}(x_0)$ точки x_0, предельной для множества $\mathbb{E}$.*

Определение 1.10.6. *Функция $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ называется ограниченной, ограниченной сверху, ограниченной снизу, если найдется число C, такое что для любого $x \in \mathbb{E}$ выполнено, соответственно,*

$$|f(x)| < C, \quad f(x) < C, \quad C < f(x).$$

Легко по аналогии с определением 1.10.5 дать определение, например, функции, финально ограниченной при $x \to x_0, \quad x \in \mathbb{E}$.

Теорема 1.10.2. *A. Если $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ есть финально постоянная при $x \to x_0$ и эта постоянная равна A, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.*

B. Если предел функции $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ существует при $x \to x_0, \quad x \in \mathbb{E}$, то функция f финально ограничена при $x \to x_0, \quad x \in \mathbb{E}$.

C. Если предел функции $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ при $x \to x_0$ существует, то он единственный.

Доказательство. Утверждения А и В непосредственно вытекают из соответствующих определений. Необходимые записи предлагается проделать читателю. Докажем утверждение С. Допустим, что существуют два разных предела A_1и A_2 у функции f при $x \to x_0, \quad x \in \mathbb{E}$. Возьмем тогда окрестности $V(A_1)$ и $V(A_2)$ так, чтобы они не имели общих точек. Это можно сделать на основании свойства I_3 действительных чисел.

Теперь из определения 1.10.3 предела функции следует, что существуют две проколотые окрестности $\overset{o}{U'_{\mathbb{E}}}(x_0)$ и $\overset{o}{U''_{\mathbb{E}}}(x_0)$, такие что $f(\overset{o}{U'_{\mathbb{E}}}(x_0)) \subset V(A_1)$ и $f(\overset{o}{U''_{\mathbb{E}}}(x_0)) \subset V(A_2)$. Отсюда следует, что $V(A_1) \cap V(A_2) \neq \varnothing$. Полученным противоречием и доказывается утверждение С. $\square$

Теорема 1.10.3. *Пусть $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ — две функции с общей областью определения. Если пределы функций f и g существуют при $x \to x_0, x \in \mathbb{E}$ $(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A, \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B)$, то*

a) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A + B;$

b) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A \cdot B;$

c) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{A}{B}$, *если $B \neq 0$ и $g(x) \neq 0$ при $x \in \mathbb{E}$.*

Доказательство вытекает из соответствующей теоремы об арифметических свойствах предела последовательности, при этом следует использовать определение 1.10.4 предела функции "на языке последовательностей". $\square$

Теорема 1.10.4. *Если функции $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ таковы, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$ и $A < B$, то найдется проколотая окрестность $\overset{o}{U}_{\mathbb{E}}(x_0)$, для точек которой выполнено неравенство $f(x) < g(x)$.*

Доказательство этой теоремы предоставляется читателю.

Следствие 1.10.1. *Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A, \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$. Если в некоторой проколотой окрестности $\overset{o}{U}_{\mathbb{E}}(x_0)$ точки x_0:*

a) выполнено $f(x) > g(x)$, то $A \geqslant B$;

b) выполнено $f(x) \geqslant g(x)$, то $A \geqslant B$;

c) выполнено $f(x) > B$, то $A \geqslant B$;

d) выполнено $f(x) \geqslant B$, то $A \geqslant B$.

Доказательство. Рассуждая от противного при доказательстве, например, пункта а), т.е. предполагая, что $A < B$, по теореме 1.10.4 найдем проколотую окрестность $\overset{o}{V}_{\mathbb{E}}(x_0)$, для которой $f(x) < g(x), \; x \in \overset{o}{V}_{\mathbb{E}}(x_0)$. Получили противоречие с условием $f(x) > g(x), \; x \in \overset{o}{U}_{\mathbb{E}}(x_0)$, так как $\overset{o}{V}_{\mathbb{E}}(x_0) \cap \overset{o}{U}_{\mathbb{E}}(x_0) \neq 0$. Совершенно аналогично доказывается b). Пункты c) и d) получаются уже из a) и b) при $g(x) \equiv B$. $\square$

Теорема 1.10.5. *Если между функциями f, g, h, определенными на множестве $\mathbb{E}$, имеет место соотношение*

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x), \quad x \in \mathbb{E}$$

и если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = C,$$

то существует также предел $g(x)$ при $x \to x_0$, $\quad x \in \mathbb{E}$, и

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = C.$$

Доказательство. Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = C$, то для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ найдутся такие две проколотые окрестности $\overset{o}{U}{}'_{\mathbb{E}}(x_0)$ и $\overset{o}{U}{}''_{\mathbb{E}}(x_0)$, что

$$C - \varepsilon < f(x), \qquad x \in \overset{o}{U}{}'_{\mathbb{E}}(x_0), \quad h(x) < C + \varepsilon, \qquad x \in \overset{o}{U}{}''_{\mathbb{E}}(x_0).$$

Тогда для точек

$$x \in \overset{o}{U}_{\mathbb{E}}(x_0) \subset \overset{o}{U}{}'_{\mathbb{E}}(x_0) \cap \overset{o}{U}{}''_{\mathbb{E}}(x_0)$$

будем иметь

$$C - \varepsilon < f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) < C + \varepsilon$$

или

$$C + \varepsilon < g(x) < C + \varepsilon, \quad |g(x) - C| < \varepsilon \quad \text{для } x \in \overset{o}{U}_{\mathbb{E}}(x_0).$$

Следовательно, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = C$. □

Замечание 1.10.1. *Иногда теорему 1.10.5 называют теоремой "о двух милиционерах" или теоремой "о зажатой" функции.*

1.10.3. Первый замечательный предел. В качестве иллюстрации использования теорем 1.10.4 и 1.10.5 докажем, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Этот предел часто называют *первым замечательным пределом.*

Доказательство состоит из проверки четырех утверждений:

a) $\cos^2 x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$ для $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$;

b) $|\sin x| \leqslant |x|$ для всех $x \in \mathbb{R}$;

c) $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$;

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

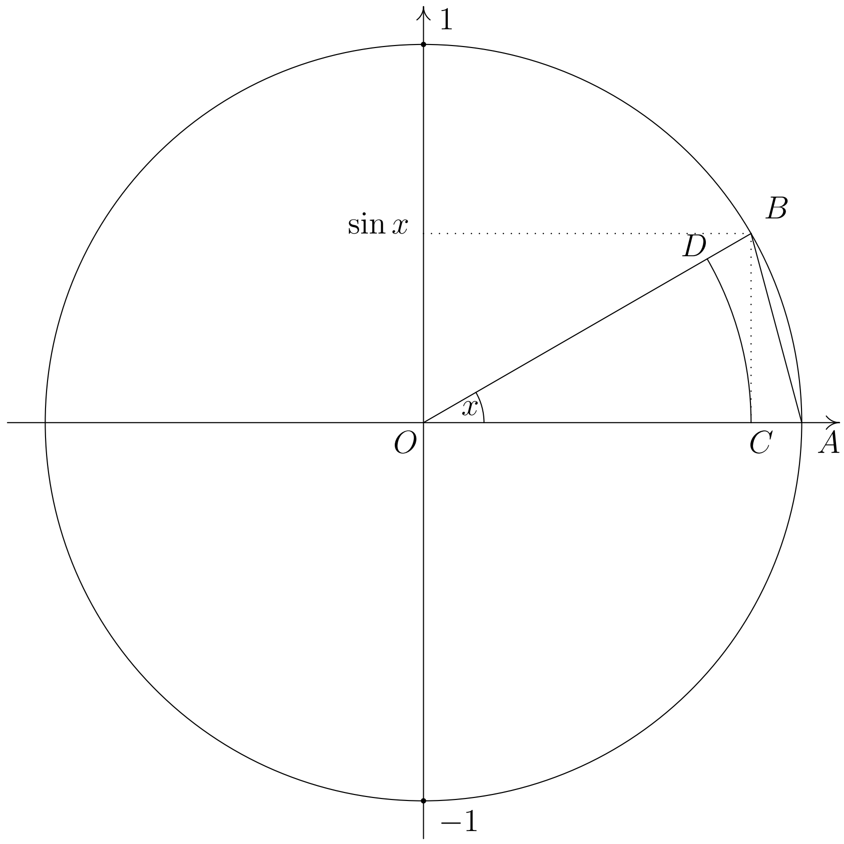

Рис 1.10.1. Первый замечательный предел

Утверждение a) достаточно проверить только для положительных x, $\quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Для отрицательных x оно следует из четности всех входящих в неравенство функций.

Сравнивая (рис. 1.10.1) площади сектора OCD (S_1), треугольника OAB (S_2) и сектора OAB (S_3), получим

$$S_1 < S_2 < S_3,$$

или

$$\frac{1}{2}\left|OC\right| \cdot \left|\smile CD\right| < \frac{1}{2}\left|OA\right| \cdot \left|BC\right| < \frac{1}{2}\left|OA\right| \cdot \left|\smile AB\right|,$$

или

$$\frac{1}{2}(\cos x) \cdot (x\cos x) < \frac{1}{2} \cdot (1) \cdot (\sin x) < \frac{1}{2}(1) \cdot (x),$$

разделив последнее неравенство на $\dfrac{1}{2}x > 0$, получим утверждение a).

Утверждение b) легко получить из a) и элементарных соображений. Действительно, если x удовлетворяет условию $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$, то

$$0 \leqslant \cos^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1 \Longrightarrow 0 < \frac{\sin x}{x} < 1 \Longrightarrow \left|\sin x\right| < \left|x\right|.$$

Для $|x| \geqslant \dfrac{\pi}{2}$ неравенство $|\sin x| < |x|$ выполняется очевидным образом:

$$|\sin x| \leqslant 1, \quad \text{а} \quad |x| \geqslant \frac{\pi}{2} > 1,5.$$

При $x = 0$ справедливо равенство $|\sin x| = |x|$.

Таким образом,

$$|\sin x| \leqslant |x| \text{ для всех } x \in \mathbb{R}.$$

Утверждение c) следует из теоремы 1.10.5 и неравенств

$$0 \leqslant |\sin x| \leqslant |x|.$$

Здесь роль функций $f,\ g,\ h$ играют, соответственно,

$$0, \quad |\sin x|, \quad |x|.$$

И, наконец, утверждение d) получается из неравенств a) и теоремы 1.10.5:

$$1-\sin^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \text{для } 0<|x|<\frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x\to 0}(1-\sin^2 x)=1, \qquad \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

1.10.4. Пределы функции справа и слева, бесконечные пределы и пределы при $x\to\infty$.

Определение 1.10.7. *Число A называется правым пределом (или пределом справа) функции $f:\mathbb{E}\to\mathbb{R}$ в точке $x_0,\ x\in\mathbb{E}$, если*

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x\in\mathbb{E} \quad (0<x-x_0<\delta \Longrightarrow |f(x)-A|<\varepsilon).$$

Аналогично определяется *левый предел* (или *предел слева*) (следует изменить только одно неравенство $0<x_0-x<\delta$).

Для обозначения правого предела используют символы

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0) \quad \text{при } x_0\neq 0.$$

Если $x_0=0$, то пишут $\lim\limits_{x\to +0} f(x)=f(+0)$. Для записи левого предела используют такие же формулы, заменяя только символ $+0$ на -0.

Напрмиер, для функции $\operatorname{sgn} x$ правый предел при $x\to +0$ равен $(+1)$, а левый равен (-1).

Легко доказать, используя определения 1.10.1 и 1.10.7, следующую теорему.

Теорема 1.10.6. *Предел функции $f:\mathbb{E}\to\mathbb{R},\quad x\in\mathbb{E}$, существует тогда и только тогда, когда существуют пределы справа и слева в этой точке и они равны.*

До сих пор мы говорили о конечных пределах ($A\neq\infty$) при $x\to x_0$, причем x_0 также было конечное число. На практике часто приходится сталкиваться со случаями, когда $A=+\infty,\ -\infty,\ \infty$ или $x_0=+\infty,\ -\infty,\ \infty$ либо одновременно A и x_0 не являются конечными числами. Например, интуитивно ясно, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0, \quad \text{или} \quad \lim_{x\to +0}\frac{1}{x}=+\infty.$$

Покажем, как выглядят точные формулировки соответствующих определений.

Определение 1.10.8. *Число A называется пределом функции $f:\mathbb{E}\to\mathbb{R}$ при $x\to\infty,\ x\in\mathbb{E}$, если*

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x\in\mathbb{E} \quad (|x|>\delta \Longrightarrow |f(x)-A|<\varepsilon).$$

Определение 1.10.9. *Говорят, что пределом функции $f:\mathbb{E}\to\mathbb{R}$ при $x\to x_0+0,\ x\in\mathbb{E}$ является $+\infty$, если $\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x\in\mathbb{E} \quad (0<x-x_0<\delta \Longrightarrow f(x)>\varepsilon)$.*

Нетрудно дать и другие аналогичные определения предела, когда $A=+\infty,\ -\infty,\ \infty$ и $x_0=+\infty,-\infty,\infty$. Предоставим сделать это самому читателю.

1.10.5. Второй замечательный предел. Уже известен предел последовательности

$$\alpha_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Докажем теперь, что

$$\lim_{x\to 0} (1 + x)^{\dfrac{1}{x}} = e, \quad x \in \mathbb{R} \setminus 0.$$

Для этого достаточно доказать два равенства (см. теорему 1.10.6):
a) $\lim\limits_{x\to +0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$, b) $\lim\limits_{x\to -0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Рассмотрим равенство a). Воспользуемся определением правого предела "на языке последовательностей" (его легко сформулировать по аналогии с определением 1.10.4).

Заметим предварительно, что если $\{n_k\}$ — произвольная (не обязательно строго возрастающая) последовательность натуральных чисел такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$, то $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_{n_k} = e$, т.е.

$$\lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e$$

(докажите это самостоятельно).

Пусть $\{x_k\}$, $\quad k = 1, 2, \ldots$, произвольная последовательность, для которой выполняются условия $x_k \to 0$ при $k \to \infty$, $\quad x_k > 0$ (без ограничения общности можно считать, что $x_k < 1$).

Тогда $\dfrac{1}{x_k} \to +\infty$ при $k \to \infty$ и $n_k = \left[\dfrac{1}{x_k}\right] \to \infty$, $\quad n_k > 0$. Из определения целой части числа следует, что

$$n_k \leqslant \frac{1}{x_k} < n_k + 1,$$

т.е.

$$\frac{1}{n_k + 1} < x_k \leqslant \frac{1}{n_k}.$$

Тогда справедливы неравенства

$$\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k} < (1 + x_k)^{\dfrac{1}{x_k}} < \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k + 1}.$$

Предел крайних членов этого неравенства равен e. Действительно, для левой части имеем

$$\lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k} = \lim_{k\to\infty} \left[\frac{\left(1 + \dfrac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k + 1}}{\left(1 + \dfrac{1}{n_k + 1}\right)}\right] =$$

$$= \frac{\lim\limits_{k\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k + 1}}{\lim\limits_{k\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n_k + 1}\right)} = e/1 = e.$$

Аналогично получим, что $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}=e$. Отсюда следует, что

$$\lim_{k\to\infty}(1+x_k)^{\dfrac{1}{x_k}}=e,$$

поэтому

$$\lim_{x\to+0}(1+x)^{\dfrac{1}{x}}=e.$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{x\to-0}(1+x)^{\dfrac{1}{x}}=e,$$

откуда окончательно получаем требуемый результат.

1.11. Теоремы о пределе функции

1.11.1. Критерий Коши существования предела функции. Для определенности рассмотрим подробно случай существования предела функции $f:\mathbb{E}\to\mathbb{R}$ в точке x_0, $\quad x_0\neq-\infty,+\infty,\infty$ (см. определения 1.10.1 и 1.10.4 § 1.10).

Определение 1.11.1. *Будем говорить, что функция $f:\mathbb{E}\to\mathbb{R}$ удовлетворяет в точке x_0 (x_0 — предельная точка множества $\mathbb{E}$) условию Коши, если*

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\overset{o}{U}_{\mathbb{E}}(x_0)\quad\forall x',x''\in\overset{o}{U}_{\mathbb{E}}(x_0)\ \Rightarrow\ \left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon.$$

Теорема 1.11.1 (критерий Коши существования предела функции)**.** *Для того чтобы функция $f:\mathbb{E}\to\mathbb{R}$ имела в точке x_0 конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы функция f удовлетворяла в точке x_0 условию Коши.*

Доказательство. Необходимость. Пусть существует конечный предел

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A.$$

Фиксируем произвольное положительное число ε. В силу определения 1.10.1 (§ 1.10) предела функции по Коши для положительного числа $\dfrac{\varepsilon}{2}$ найдется положительное число δ такое, что каковы бы ни были два значения аргумента x' и x'', $\quad x',x''\in\mathbb{E}$, удовлетворяющие условиям

$$0<\left|x'-x_0\right|<\delta,\quad 0<\left|x''-x_0\right|<\delta$$

(т.е. $x',x''\in\overset{o}{U}{}^{\delta}_{\mathbb{E}}(x_0)$), для соответствующих значений функции справедливы неравенства

$$\left|f(x')-A\right|<\frac{\varepsilon}{2},\quad\left|f(x'')-A\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь легко получаем неравенство для условия Коши:

$$\left|f(x')-f(x'')\right|=\left|f(x')-A+A-f(x'')\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|f(x')-A\right|+\left|A-f(x'')\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

а это и означает, что функция f удовлетворяет в точке x_0 условию Коши.

Достаточность. Пусть функция f удовлетворяет в точке x_0 условию Коши. Требуется доказать, что функция f имеет в точке x_0 предел. Воспользуемся определением 1.10.4 (§ 1.10) предела функции по Гейне.

Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность, такая что $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0$, $x_n \in \mathbb{E}\setminus x_0$, $n = 1, 2, \ldots$.

Необходимо доказать:

a) что соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к некоторому числу A;

b) что это число A *одно и то же* для всех сходящихся к x_0 последовательностей $\{x_n\}$, $\quad x_n \in \mathbb{E} \setminus x_0$.

Докажем пункт a). Фиксируем произвольное положительное число ε и для него находим, по условию Коши, проколотую окрестность $\overset{o}{U}_{\mathbb{E}}(x_0)$. В силу сходимости последовательности $\{x_n\}$ к x_0 и в силу условия $x_n \neq x_0$ для этой проколотой окрестности $\overset{o}{U}_{\mathbb{E}}(x_0)$ найдется номер N, такой что для $\forall n > N$, $\quad \forall m > N$ выполняется условие

$$x_n \in \overset{o}{U}_{\mathbb{E}}(x_0), \quad x_m \in \overset{o}{U}_{\mathbb{E}}(x_0).$$

Но тогда, по условию Коши, справедливо неравенство

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon,$$

а это означает, что последовательность $\{f(x_n)\}$ — фундаментальна. В силу критерия Коши для сходимости числовой последовательности (§ 1.8, теорема 1.8.1) последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к некоторому числу A.

Остается доказать пункт b). Рассмотрим две последовательности:

$$\{x_n\}, \quad x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0, \quad x_n \in \mathbb{E} \setminus x_0;$$

$$\{x_n'\}, \quad x_n' \underset{n\to\infty}{\to} x_0, \quad x_n' \in \mathbb{E} \setminus x_0.$$

Докажем, что соответствующие последовательности значений функции

$$\{f(x_n)\} \quad \text{и} \quad \{f(x_n')\}$$

сходятся к одному и тому же пределу. Предположим, что последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{f(x_n')\}$ сходятся к пределам A и A' соответственно. Рассмотрим новую последовательность значений аргумента

$$x_1, x_1', x_2, x_2', x_3, x_3', \ldots, x_n, x_n', \ldots$$

(ясно, что эта последовательность сходится к x_0 и принадлежит множеству $\mathbb{E}$).

В силу доказанного в a), соответствующая последовательность значений функции

$$f(x_1), f(x_1'), f(x_2), f(x_2'), \ldots, f(x_n), f(x_n') \ldots$$

обязана сходиться к некоторому числу A''. Но тогда и две ее подпоследовательности

$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$$

и

$$f(x_1'), f(x_2'), \ldots, f(x_n'), \ldots$$

должны сходиться к числу A'', т.е.

$$A = A' = A''.$$

□

1.11.2. Предел монотонной функции. Получим условие существования правого (или левого) предела для часто встречающегося и весьма полезного класса числовых функций — монотонных. Напомним их определение.

Определение 1.11.2. *Функция* $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ *называется*

строго возрастающей на $\mathbb{E}$, *если для всех* $x_1, x_2 \in \mathbb{E}$ *таких, что* $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$;

возрастающей на $\mathbb{E}$, *если для всех* $x_1, x_2 \in \mathbb{E}$ *таких, что* $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$;

убывающей на $\mathbb{E}$, *если для всех* $x_1, x_2 \in \mathbb{E}$ *таких, что* $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$;

строго убывающей на $\mathbb{E}$, *если для всех* $x_1, x_2 \in \mathbb{E}$ *таких, что* $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Функции перечисленных типов называются монотонными на множестве $\mathbb{E}$.

Иногда вместо слова "возрастающая" говорят "неубывающая", а вместо слов "строго возрастающая" говорят "возрастающая".

Пусть множество $\mathbb{E}$ ограничено. Обозначим через $a = \inf \mathbb{E}$ и $b = \sup \mathbb{E}$. Допустим, что a и b — предельные точки множества $\mathbb{E}$.

Теорема 1.11.2 (Вейерштрасса о пределе монотонной функции). *Для того чтобы возрастающая на множестве* $\mathbb{E}$ *функция* $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ *имела левый предел при* $x \to b - 0, \quad x \in \mathbb{E}$, *необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена сверху, а для того чтобы она имела правый предел при* $x \to a + 0, \quad x \in \mathbb{E}$, *необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена снизу.*

Доказательство. Докажем теорему для предела $\lim\limits_{x \to b-0} f(x)$.

Необходимость. Если этот предел существует, то, как и всякая функция, имеющая предел (теорема 1.10.1 § 1.10), функция f оказывается финально ограниченной при $x \to b - 0$, а следовательно, и ограниченной сверху на $\mathbb{E}$ (ведь функция f — возрастающая на $\mathbb{E}$).

Достаточность. Если f ограничена сверху, то существует $\sup\limits_{x \in \mathbb{E}} f(x) = A$; покажем, что

$$\lim_{x \to b-0} f(x) = A.$$

По $\varepsilon > 0$, на основании определения точной верхней границы множества, найдем точку $x_0 \in \mathbb{E}$, для которой

$$A - \varepsilon < f(x_0) \leqslant A.$$

Тогда ввиду возрастания f на $\mathbb{E}$ получаем, что при $x_0 < x < b, \quad x \in \mathbb{E}$,

$$A - \varepsilon < f(x) \leqslant A,$$

т.е.

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon.$$

Теперь можно записать, что выполняется условие

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = b - x_0 \quad \forall x \in \mathbb{E} \quad (0 < b - x < \delta \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon),$$

которое и гарантирует, что число A есть левый предел функции f при $x \to b - 0$ (см. определение 1.10.7 § 1.10).

Для предела $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ все рассуждения аналогичны. В этом случае

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \inf_{x \in \mathbb{E}} f(x).$$

□

Аналогичная теорема верна для убывающих функций.

Замечание 1.11.1. *Теорему 1.11.2 можно сформулировать и доказать для случая, когда множество* $\mathbb{E}$ *неограничено (например,* $b = +\infty$*).*

1.12. Непрерывность функции. Локальные свойства непрерывных функций

1.12.1. Основные определения и примеры. Имеется интуитивное представление о непрерывности функции, которое базируется на геометрической интерпретации: если график функции есть непрерывная кривая, то и функция непрерывна (рис. 1.12.1) во всех точках области определения.

На рис. 1.12.1 функция $f(x)$ — непрерывна точке x_0, а на рис. 1.12.2 функция $f(x)$ — разрывна в точке x_0.

Определяя непрерывность нестрого, можно сказать, что функция f непрерывна в точке x_0, если ее значения $f(x)$ приближаются к значению $f(x_0)$ по мере того, как аргумент x приближается к точке x_0 (рис. 1.12.1).

Из рис. 1.12.2 следует, что если x приближается к x_0, например, справа, то значения $f(x)$ приближаются к C, но не к $f(x_0)$, что и характеризует отсутствие непрерывности в точке x_0.

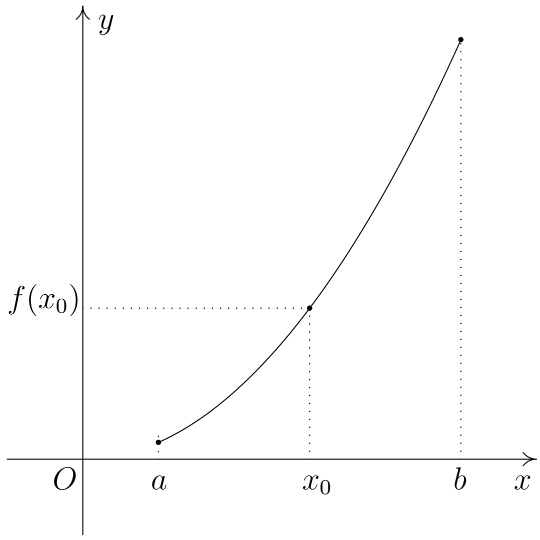

Рис 1.12.1. Непрерывная функция

Нестрогость такого подхода заключена в размытости термина "приближается" (иногда добавляют "сколь угодно близко"). Добиться же необходимой четкости можно, используя строгое понятие предела функции: $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} A$, если x_0 — предельная точка множества $\mathbb{E}$.

Определение 1.12.1. *Говорят, что функция* $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ *непрерывна в точке* $x_0 \in \mathbb{E}$ *(*x_0 *— предельная точка множества* $\mathbb{E}$*), если*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right) = f(x_0)$$

(короче, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$*).*

Если же x_0 — изолированная точка множества $\mathbb{E}$ (т.е. не предельная), то $f(x)$ считается в этой точке непрерывной по определению.

Если раскрыть на "языке $\varepsilon - \delta$", что означает равенство $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, то получим другую формулировку определения 1.12.1.

Определение 1.12.2. *Говорят, что функция $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $x_0 \in \mathbb{E}$, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{E} \quad (|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)\,.$$

Замечание 1.12.1. *В последней формулировке различать два случая (x_0 — предельная, или изолированная, точка) нет необходимости. В изолированной точке определение 1.12.2 выполняется автоматически.*

Используя другие определения предела функции, легко получить и другие формулировки определения непрерывности функции в точке. Рассматривают также непрерывность функции *справа (или слева) в точке*, используя для этого определение предела справа (или слева). Так, например, сформулируем следующее определение.

Определение 1.12.3. *Говорят, что функция $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ непрерывна справа в точке $x_0 \in \mathbb{E}$, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{E} \quad (0 \leqslant x - x_0 < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)\,.$$

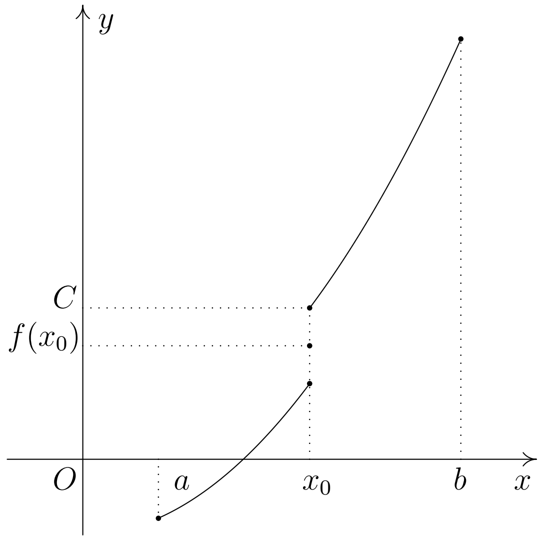

Рис 1.12.2. Разрывная функция

Легко доказать, что непрерывность $f(x)$ одновременно справа и слева в точке эквивалентна непрерывности $f(x)$ в той же точке.

Определение 1.12.4. *Функция $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ называется непрерывной на множестве $\mathbb{E}$, если она непрерывна в каждой точке множества $\mathbb{E}$.*

Множество всех непрерывных функций, определенных на $\mathbb{E}$, обозначают $\mathcal{C}(E)$.

Пример 1.12.1. Показать, что функция $f(x) = k, \quad x \in \mathbb{E}$ (k — постоянная величина), непрерывна на $\mathbb{E}$.

Решение. Действительно, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} k = k = f(x_0)$.

Пример 1.12.2. Показать, что функция $f(x) = x$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

Решение. Это следует из очевидных равенств

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} x = x_0 = f(x_0).$$

Пример 1.12.3. Показать, что функция $f(x) = \sin x$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

Решение. В этом случае необходимо использовать определение 1.12.2 непрерывности функции. Для $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ получаем

$$|\sin x - \sin x_0| =$$
$$= 2\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \cdot \left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant 2 \cdot \frac{|x-x_0|}{2} < \varepsilon,$$

как только $|x - x_0| < \delta = \varepsilon$.

Упражнение 1.12.1. Доказать, что непрерывны функции $\cos x$ $(x \in \mathbb{R})$, a^x $(x \in \mathbb{R})$, $\log_a x$ $(x > 0)$.

Пример 1.12.4. Показать, что функция $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ не является непрерывной в точке $x_0 = 0$.

Решение. Действительно, равенство $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(0)$ не может быть выполнено, так как $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$ не существует (см. пример 1.10.3, § 1.10).

1.12.2. Локальные свойства непрерывных функций. *Локальными* называют такие свойства функций, которые определяются поведением функции в сколь угодно малой окрестности точки области определения.

Теорема 1.12.1. *Пусть $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ — функция, непрерывная в точке $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1° *Функция f ограничена в некоторой окрестности $U_{\mathbb{E}}(x_0)$.*

2° *Если $f(x_0) \neq 0$, то в некоторой окрестности $U_{\mathbb{E}}(x_0)$ точки x_0 функция $f(x) > 0$ (или $f(x) < 0$) вместе с $f(x_0)$.*

3° *Если функция $g : U_{\mathbb{E}}(x_0) \to \mathbb{R}$ также непрерывна в точке x_0, то функции*

$$f + g; \quad f \cdot g; \quad \frac{f}{g} \quad (g(x_0) \neq 0)$$

непрерывны в точке x_0.

4° *Если функция $g : \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $y_0 \in \mathbb{Y}$, а функция f такова, что $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$, $f(x_0) = y_0$, $f(\mathbb{E}) \subset \mathbb{Y}$ и f непрерывна в точке x_0, то композиция $g \circ f$ непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. Утверждения 1°, 2°, 3° теоремы 1.12.1 вытекают из определения непрерывности функции в точке x_0 $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\right)$ и соответствующих свойств предела функции.

Докажем утверждение 4°. Зафиксируем окрестность $V\left(g(y_0)\right)$. Вследствие непрерывности функции g в точке y_0 найдется окрестность $U_{\mathbb{Y}}(y_0)$, такая что $g\left(U_{\mathbb{Y}}(y_0)\right) \subset V\left(g(y_0)\right)$.

А вследствие непрерывности функции f в точке x_0 уже для окрестности $U_{\mathbb{Y}}(y_0)$ существует окрестность $U_{\mathbb{E}}(x_0)$, такая что

$$f\left(U_{\mathbb{E}}(x_0)\right) \subset U_{\mathbb{Y}}(y_0)$$

или

$$g\left(f\left(U_{\mathbb{E}}(x_0)\right)\right) \subset V\left(g(y_0)\right).$$

Из полученных соотношений следует, что функция $g \circ f$ определена и непрерывна в точке x_0. □

Пример 1.12.5. Показать, что алгебраический многочлен

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

является непрерывной функцией для $x \in \mathbb{R}$.

Решение. Это следует из пункта 3° теоремы 1.12.1 и непрерывности функции $y = x$ и $y = k$.

Пример 1.12.6. Показать, что рациональная функция

$$R(x) = P_n(x)/Q_m(x)$$

непрерывна всюду, кроме точек, в которых $Q_m(x) = 0$.

Решение. Данное утверждение следует из предыдущего примера и свойств непрерывных функций.

1.13. Точки разрыва. Разрывы монотонной функции

1.13.1. Точки разрыва и их классификация. Предыдущий пример показывает, что существуют точки, в которых функция $f(x)$ не является непрерывной. Поэтому естественно дать следующее определение.

Определение 1.13.1. *Если функция $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ не является непрерывной в некоторой точке x_0 из множества $\mathbb{E}$, то эта точка x_0 называется точкой разрыва функции f.*

Легко получить определение точки разрыва "на языке $\varepsilon - \delta$".

Определение 1.13.2. *Говорят, что точка $x_0 \in \mathbb{E}$ есть точка разрыва функции $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$, если*

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in \mathbb{E} \quad (|x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon) \, .$$

Точки разрыва функции разделяют на классы: точки *устранимого* разрыва, точки разрыва *первого рода* и точки разрыва *второго рода.*

Определение 1.13.3. *Точка $x_0 \in \mathbb{E}$ называется точкой устранимого разрыва для функции $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$, если пределы справа и слева функции f в точке x_0 равны между собой, но не равны значению функции $f(x_0)$ в точке x_0.*

Пример 1.13.1. Показать, что функция $f(x) = |\operatorname{sgn} x|$ имеет в точке $x_0 = 0$ устранимый разрыв.

Решение. В самом деле, $\lim\limits_{x \to +0} |\operatorname{sgn} x| = 1, \quad \lim\limits_{x \to -0} |\operatorname{sgn} x| = 1$, но $\operatorname{sgn} 0 = 0$.

Определение 1.13.4. *Точка $x_0 \in \mathbb{E}$ называется точкой разрыва первого рода для функции $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$, если существуют правый и левый пределы функции f в точке x_0, но они не равны между собой.*

Пример 1.13.2. Показать, что функция $f(x) = \operatorname{sgn} x$ имеет в точке $x_0 = 0$ разрыв первого рода.

Решение. Действительно, $\lim\limits_{x \to +0} \operatorname{sgn} x = 1$, $\lim\limits_{x \to -0} \operatorname{sgn} x = -1$, но $f(0) = \operatorname{sgn} 0 = 0$.

Определение 1.13.5. *Точка $x_0 \in \mathbb{E}$ называется точкой разрыва второго рода для функции $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$, если в этой точке не существует, по крайней мере, один из пределов: правый или левый.*

Определение 1.13.6. *Если хотя бы один из пределов — справа или слева — бесконечный, то это точка бесконечного разрыва.*

Бесконечные разрывы являются разрывами второго рода.

Пример 1.13.3. Показать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

в точке $x_0 = 0$ имеет разрыв второго рода.

Решение. Действительно, в этой точке не существует ни правый, ни левый предел.

Упражнение 1.13.1. Построить график этой функции.

Замечание 1.13.1. *На практике точкой разрыва функции $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ называют и точку x_0, которая не принадлежит множеству $\mathbb{E}$, но функция f определена в некоторой окрестности точки x_0.*

С учетом этого замечания точку $x_0 = 0$ будем называть *точкой разрыва* функции $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus 0$ (ясно, что это точка разрыва второго рода).

1.13.2. Разрывы монотонной функции.

Теорема 1.13.1. *Пусть функция $y = f(x)$ монотонна на интервале (a, b), тогда она может иметь точки разрыва только первого рода, и число точек разрыва либо конечно, либо счетно.*

Доказательство этой теоремы легко следует из теоремы 1.11.2 о существовании предела монотонной функции.

1.14. Глобальные свойства непрерывных функций. Равномерная непрерывность

1.14.1. Глобальные свойства непрерывных функций. Если свойство функции связано со всей ее областью определения, то это свойство естественно назвать *глобальным.*

Теорема 1.14.1 (Коши о существовании корня)**.** *Если функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, принимает на его концах значения разных знаков ($f(a) \cdot f(b) < 0$), то на отрезке существует такая точка x_0, что*

$$f(x_0) = 0.$$

Доказательство. Делим отрезок $[a, b]$ пополам. Если в точке деления функция не равна нулю, то на концах одного из двух полученных в результате деления отрезков функция снова принимает значения разных знаков. Именно этот отрезок снова делим пополам и продолжаем процесс дальше до того момента, пока не попадем точкой деления в точку x_0, где $f(x_0) = 0$, или мы получим последовательность I_n вложенных отрезков, длины которых стремятся к нулю. В последнем случае, на основании свойства непрерывности вещественных чисел, существует единственная точка $x_0, \quad x_0 \in I_n, \quad n = 1, 2, \ldots$. Пусть $I_n = \left[x_n^{'}, x_n^{''}\right]$, тогда $f({x_n}') \cdot f(x_n^{''}) < 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{'} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n^{''} = x_0$. Из свойств предела следует неравенство

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n^{'}) \cdot \lim_{n\to\infty} f(x_n^{''}) \leqslant 0.$$

Из непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n') = f(x_0) \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n'') = f(x_0),$$

и тогда

$$f^2(x_0) \leqslant 0.$$

Таким образом, $f(x_0) = 0$. $\square$

В теореме ничего не говорится о числе корней. Утверждается лишь, что существует хотя бы один корень.

Теорема 1.14.2 (Больцано-Коши о промежуточном значении)**.** *Если функция $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a, b]$, $\quad g(a) = A, \quad g(b) = B$, то для любого числа C, лежащего между A и B, найдется точка $c \in [a, b]$, в которой $g(c) = C$.*

Доказательство. Достаточно применить предыдущую теорему для функции $f(x) = g(x) - c$ $(f(a) \cdot f(b) < 0)$. $\square$

Теорема 1.14.3 (первая теорема Вейерштрасса)**.** *Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на нем.*

Доказательство. Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывная на $\mathbb{E} = [a, b]$ функция. Вследствие теоремы 1.12.1 (1°) для каждой точки $x \in [a, b]$ найдется окрестность $U(x)$, такая что функция f ограничена для точек $x \in \mathbb{E} \cap U(x) = U_{\mathbb{E}}(x)$. Совокупность $U(x), \quad x \in [a, b]$ образует покрытие отрезка $[a, b]$. По принципу Бореля-Лебега из бесконечной совокупности $U(x)$ можно извлечь конечную систему интервалов $U(x_1), U(x_2), \ldots, U(x_n)$, покрывающих отрезок $[a, b]$. Для $x \in U_{\mathbb{E}}(x_k)$ функция $f(x)$ ограничена и, следовательно, $m_k \leqslant f(x) \leqslant M_k, \quad k = 1, 2 \ldots, n$.

Тогда в любой точке x из $[a, b]$ имеем

$$\min(m_1, m_2, \ldots m_n) \leqslant f(x) \leqslant \max(M_1, M_2, \ldots M_n),$$

и теорема доказана. $\square$

Теорема 1.14.4 (вторая теорема Вейерштрасса)**.** *Функция, непрерывная на отрезке, принимает на этом отрезке свое максимальное и минимальное значение.*

Доказательство. Покажем, что существует точка $x_0 \in [a, b]$, такая что $f(x_0) = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x) = M$. Докажем от противного, пусть для $x \in [a, b], \quad f(x) < M$. Тогда функция $\dfrac{1}{M - f(x)}$ непрерывна на $[a, b] \quad (M - f(x) \neq 0, \quad x \in [a, b])$ и, следовательно, по предыдущей теореме ограничена на $[a, b]$. Но $\dfrac{1}{M - f(x)}$ неограничена на $[a, b]$, так как знаменатель этой дроби $M - f(x)$ можно сделать за счет выбора x из $[a, b]$ сколь угодно близким к нулю. Это противоречие и доказывает, что существует точка $x_0 \in [a, b]$, такая что $f(x_0) = M$.

Аналогично теорема доказывается для минимального значения. $\square$

Замечание 1.14.1. *Заметим, что теоремы Вейерштрасса неверны, если в условиях этих теорем отрезок $[a, b]$ заменить на интервал (a, b). Достаточно рассмотреть функции $f_1(x) = \dfrac{1}{x}$ и $f_2(x) = x$ на $(0, 1)$.*

Для функции $f_1(x)$ неверна первая теорема Вейерштрасса, для функции $f_2(x)$ — вторая.

1.14.2. Равномерно непрерывные функции.

Определение 1.14.1. *Функция $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ называется равномерно непрерывной на множестве $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}$, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x_1 \in \mathbb{E} \ \forall x_2 \in \mathbb{E} \ \left(|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon\right).$$

Пример 1.14.1. Показать, что функция $f(x) = \sin x$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

Решение. Пусть $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, тогда

$$|\sin x_1 - \sin x_2| = 2\left|\sin \frac{x_1 - x_2}{2}\right| \cdot \left|\cos \frac{x_1 + x_2}{2}\right| \leqslant |x_1 - x_2| < \delta = \varepsilon.$$

Сформулируем условия того, что функция не будет равномерно непрерывной на множестве $\mathbb{E}$.

Функция $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ *не является равномерно непрерывной* на множестве $\mathbb{E}$, если

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_1 \in \mathbb{E} \ \exists x_2 \in \mathbb{E} \ \left(|x_1 - x_2| < \delta \wedge |f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \varepsilon\right).$$

Пример 1.14.2. Показать, что функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной на множестве $(0, 1]$.

Решение. Пусть $\varepsilon = 1$ и $\delta > 0$ — произвольное фиксированное число. Возьмем точки $x_1^n = \dfrac{1}{n}$ и $x_2^n = \dfrac{1}{n+1}$, $\quad n = 2, 3, \ldots$. Тогда $|x_1^n - x_2^n| = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n(n+1)}$ и последняя величина может быть сделана меньше δ при $n \to \infty$, т.е. выполняется условие

$$|x_1^n - x_2^n| < \delta \wedge |f(x_1^n) - f(x_2^n)| = 1.$$

Возникает вопрос о сопоставлении понятий непрерывности и равномерной непрерывности. В одну сторону ответ очевиден: функция, равномерно непрерывная на множестве, является непрерывной в любой точке этого множества. В самом деле, достаточно в определении 1.14.1 положить $x_1 = x$, $\quad x_2 = x_0$, и мы получим определение непрерывности функции в точке x_0.

Но из непрерывности функции на множестве в общем случае не следует равномерная непрерывность на этом множестве. Пример 16.4 хорошо иллюстрирует этот факт.

Следующая теорема дает условия, когда из непрерывности функции все-таки следует ее равномерная непрерывность на множестве.

Теорема 1.14.5 (Кантора о равномерной непрерывности)**.** *Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на этом отрезке.*

Доказательство от противного. Пусть функция f не удовлетворяет определению равномерной непрерывности на множестве $\mathbb{E} = [a, b]$, т.е. удовлетворяет его отрицанию:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_1 \in \mathbb{E} \quad \exists x_2 \in \mathbb{E} \quad \left(|x_1 - x_2| < \delta \wedge |f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \varepsilon_0\right).$$

Пусть $\delta = \dfrac{1}{k}$, $\quad k = 1, 2, \ldots$, и точки $x_1^k,\ x_2^k$, удовлетворяющие записанному условию:

$$x_1^k,\ x_2^k \in \mathbb{E} = [a, b], \quad \left|x_1^k - x_2^k\right| \leqslant \frac{1}{k} \wedge \left|f(x_1^k) - f(x_2^k)\right| \geqslant \varepsilon_0.$$

Последовательность x_1^k ограничена $\quad (a \leqslant x_1^k \leqslant b, \quad k = 1, 2 \ldots)$. По принципу Больцано-Вейерштрасса выберем из нее сходящуюся подпоследовательность. Для того чтобы не усложнять обозначения, будем считать, что последовательность x_1^k сама сходится, т.е. $\lim\limits_{k\to\infty} x_1^k = x_0$. Ясно, что $a \leqslant x_0 \leqslant b$. Тогда, пользуясь непрерывностью f в точке x_0, запишем:

$$\lim_{k\to\infty} f\left(x_1^k\right) = f\left(\lim_{k\to\infty} x_1^k\right) = f\left(x_0\right).$$

В силу неравенства $\left|x_1^k - x_2^k\right| < \dfrac{1}{k}, \quad k = 1, 2\ldots$, последовательность x_2^k также сходится к x_0 при $k \to \infty$. Поэтому

$$\lim_{k\to\infty} f\left(x_2^k\right) = f\left(\lim_{k\to\infty} x_2^k\right) = f\left(x_0\right)$$

и, следовательно,

$$f\left(x_1^k\right) - f\left(x_2^k\right) \underset{k\to\infty}{\to} 0,$$

что противоречит условию

$$\left|f\left(x_1^k\right) - f\left(x_2^k\right)\right| \geqslant \varepsilon_0.$$

□

1.14.3. Обратная функция. Рассмотрим функцию

$$f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}\,(\mathbb{X} \subset \mathbb{R}, \mathbb{Y} \subset \mathbb{R}).$$

Теорема 1.14.6. *Пусть $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ есть непрерывная строго возрастающая на отрезке $[a, b]$ функция и $A = f(a), \quad B = f(b)$. Тогда образ $[a, b]$ при отображении f есть отрезок $[A, B]$ и на отрезке $[A, B]$ определена обратная функция $f^{-1} : [A, B] \to [a, b]$, которая строго возрастает и непрерывна на $[A, B]$.*

Доказательство. Докажем, что f есть биективное отображение отрезка $[a, b]$ в $[A, B]$. Действительно, f сюръективна на $[a, b]$. Это следует из непрерывности f (см. теорему Больцано-Коши о промежуточном значении) и ее монотонности (функция f не может принять значение, не принадлежащее отрезку $[A, B]$). В силу строгой монотонности f инъективна. Следовательно,

$$f\left([a, b]\right) = [A, B],$$

обратная функция существует и

$$f^{-1} : [A, B] \to [a, b].$$

Строгая монотонность f^{-1} легко следует из строгой монотонности f.

Докажем непрерывность f^{-1} в точке $y_0 \in (A, B), \quad x_0 = f^{-1}(y_0) \in (a, b)$. Пусть зафиксировано $\varepsilon > 0$, которое настолько мало, что $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset [a, b]$. Пусть, далее, $y_1 = f(x_0 - \varepsilon), \quad y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$. Из строгой монотонности f следует, что $f^{-1}(y) \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, если $y \in (y_1, y_2)$, что и означает непрерывность f^{-1} в точке y_0. □

Функция $f(x) = \sin x$ непрерывна и строго возрастает на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, причем $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -1, \quad f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$. Тогда по доказанной теореме

$$f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, +1]$$

и на отрезке $[-1, +1]$ определена обратная функция $f^{-1}(y)$, которая строго возрастает и непрерывна на $[-1, +1]$. Эту функцию, как известно, обозначают $x = \arcsin y, \quad y \in [-1, +1]$. Таким образом, доказана непрерывность обратной тригонометрической функции $\arcsin x$ для $x \in [-1, +1]$.

Точно так же доказывается непрерывность других обратных тригонометрических функций.

Очевидным следствием рассмотренных утверждений и свойств является теорема.

Теорема 1.14.7. *Всякая элементарная функция непрерывна в области своего определения.*

1.15. Асимптотическое поведение функций. O-символика

1.15.1. Определения и примеры. При исследовании поведения функции вблизи некоторой точки x_0 (или при $x \to \infty$) удобно бывает заменить исследуемую функцию на более простую (или более изученную функцию), которая в окрестности исследуемой точки x_0 с малой относительной погрешностью воспроизводит значения изучаемой функции. Так, функция $\sin x$ при $x \to 0$ ведет себя как функция x, а $\dfrac{x+1}{x}$ при $x \to \infty$ как 1.

Когда изучаемая функция не определена в некоторой точке x_0 (например, $\dfrac{\sin x}{x}$ при $x_0 = 0$), то при исследовании ее поведения в окрестности x_0 говорят, что интересуются *асимптотикой*, или *асимптотическим поведением* функции в окрестности этой точки.

Дадим теперь точные определения некоторых понятий, относящихся к асимптотическому поведению функций при $x \to x_0$.

Определение 1.15.1. *Говорят, что функция $\alpha : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ есть бесконечно малая при $x \to x_0, \quad x \in \mathbb{E}$, если*

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

Пример 1.15.1. Функция $\sin x$ — бесконечно малая при $x \to 0$, а функция $\dfrac{x+1}{x^2}$ — бесконечно малая при $x \to \infty$.

Легко доказать следующую теорему (предлагается сделать это самостоятельно).

Теорема 1.15.1. *Если $\alpha : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ и $\beta : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ — бесконечно малые функции при $x \to x_0, \quad x \in \mathbb{E}$, то их сумма $\alpha + \beta$, произведение $\alpha \cdot \beta$ также есть бесконечно малые при $x \to x_0, \quad x \in \mathbb{E}$.*

Определение 1.15.2. *Говорят, что функция $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ есть бесконечно малая по сравнению с функцией $g : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ при $x \to x_0, \quad x \in \mathbb{E}$, если существует такая проколотая окрестность $\overset{o}{U}_{\mathbb{E}}(x_0)$, что*

$$f(x) = \alpha(x) \cdot g(x), \quad x \in \overset{o}{U}_{\mathbb{E}}(x_0),$$

где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0, \quad x \in \mathbb{E}$.

Обозначают этот факт следующим образом: $f = o(g)$ при $x \to x_0, \quad x \in \mathbb{E}$. Обозначение $f = o(g)$ читается "f есть о малое от g". В случае, если $x_0 = \infty$, в качестве окрестности $U(\infty)$ рассматривается множество

$$U(\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \quad |x| > M, \text{где } M \in \mathbb{R}\},$$

$$U_{\mathbb{E}}(\infty) = U(\infty) \cap \mathbb{E}.$$

Пример 1.15.2. Проверить справедливость формул:

$$x^2 = o(x) \text{ при } x \to 0, \text{ так как } \alpha(x) = x;$$

$$\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right) \text{ при } x \to \infty, \text{ так как } \alpha(x) = \frac{1}{x};$$

$$x = o(x^2) \text{ при } x \to \infty, \text{ так как } \alpha(x) = \frac{1}{x}.$$

Решение. Эти формулы являются прямым следствием определений.

Замечание 1.15.1. *Если* $g(x) \neq 0, \quad x \in \overset{o}{U}_{\mathbb{E}}(x_0)$, *то условие* $f(x) = \alpha(x)g(x)$ *можно заменить условием* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Определение 1.15.3. *Если* $f = o(g)$ *при* $x \to x_0, \quad x \in \mathbb{E}$, *а* g *— бесконечно малая функция при* $x \to x_0, \quad x \in \mathbb{E}$, *то говорят, что* f *есть бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с* g *при* $x \to x_0, \quad x \in \mathbb{E}$.

Пример 1.15.3. Показать, что функция $\sin^2 x$ есть бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с x при $x \to 0$.

Решение. Данное свойство верно, так как $\sin^2 x = o(x)$ при $x \to 0$.

Определение 1.15.4. *Функцию* $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ *называют бесконечно большой при* $x \to x_0, \quad x \in \mathbb{E}$, *если*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

Теорема 1.15.2. *Если функция* f *— бесконечно большая при* $x \to x_0$, $x \in \mathbb{E}$, *то функция* $1/f$ *есть бесконечно малая при* $x \to x_0, \quad x \in \mathbb{E}$. *Если* $\alpha(x)$ *— бесконечно малая при* $x \to x_0, \quad x \in \mathbb{E}$ *и* $\alpha(x) \neq 0$, *то* $1/\alpha$ *есть бесконечно большая при* $x \to x_0, \quad x \in \mathbb{E}$.

Доказательство легко провести самостоятельно.

Определение 1.15.5. *Если функции* f *и* g *есть бесконечно большие при* $x \to x_0$, $x \in \mathbb{E}$ *и* $f = o(g)$ *при* $x \to x_0, \quad x \in \mathbb{E}$, *то говорят, что* g *есть бесконечно большая функция более высокого порядка по сравнению с* f *при* $x \to x_0$, $x \in \mathbb{E}$.

Пример 1.15.4. Показать, что функция $\dfrac{1}{x^2}$ есть бесконечно большая более высокого порядка по сравнению с $\dfrac{1}{x}$ при $x \to 0$.

Решение. Данное свойство верно, так как $\dfrac{1}{x} = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ при $x \to 0$.

Определение 1.15.6. *Говорят, что функция* $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ *ограничена по сравнению с функцией* $g : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ *при* $x \to x_0$, *если существует такая проколотая окрестность* $\overset{o}{U}_{\mathbb{E}}(x_0)$, *что*

$$f(x) = \beta(x) \cdot g(x), \quad x \in \overset{o}{U}_{\mathbb{E}}(x_0),$$

где $\beta(x)$ *есть финально ограниченная функция при* $x \to x_0$.

Обозначается этот факт следующим образом: $f = O(g)$ *при* $x \to x_0$, $x \in \mathbb{E}$. *Обозначение* $f = O(g)$ *читается "*f *есть* O *большое от* g*".*

Пример 1.15.5. Показать, что функция $x + 1 = O\left((x+1)^2\right)$ при $x \to 1$.

Решение. Данное свойство верно, так как функция $\beta(x) = \dfrac{1}{x+1}$ — финально ограничена при $x \to 1$.

Функция $x \cdot \left(\frac{1}{x} + \sin x\right) = O(x)$ при $x \to \infty$, так как $\beta(x) = \frac{1}{x} + \sin x$ есть финально ограниченная функция при $x \to \infty$.

Определение 1.15.7. *Говорят, что функции f и g одного порядка при $x \to x_0$, $x \in \mathbb{E}$, если*

$$f = O(g) \quad \textit{при } x \to x_0, \quad x \in \mathbb{E},$$

и

$$g = O(f) \quad \textit{при } x \to x_0, \quad x \in \mathbb{E}.$$

Обозначают этот факт следующим образом: $f \asymp g$ при $x \to x_0, \quad x \in \mathbb{E}$.

Пример 1.15.6. Показать, что Функции $(2 + \sin x) \cdot x$ и x одного порядка при $x \to \infty$.

Решение. Действительно, $(2+\sin x) \cdot x = O(x)$ при $x \to \infty$, так как $\beta(x) = \dfrac{1}{2 + \sin x}$, а $2 + \sin x \neq 0$.

Но функции $(1+\sin x) \cdot x$ и x не являются функциями одного порядка при $x \to \infty$, так как $x \neq O\left((1 + \sin x) \cdot x\right)$ при $x \to \infty$. В этом случае функция $\beta(x) = \dfrac{1}{1 + \sin x}$ не финально ограничена при $x \to \infty$, потому что знаменатель $1 + \sin x$ принимает нулевые значения в точках $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Определение 1.15.7 можно записать в другой равносильной форме.

Функции f и g одного порядка при $x \to x_0, \quad x \in \mathbb{E}$, если существуют числа $C_1 > 0, \quad C_2 > 0$ и проколотая окрестность $\overset{o}{U}_{\mathbb{E}}(x_0)$, такие что

$$C_1 \left|g(x)\right| \leqslant \left|f(x)\right| \leqslant C_2 \left|g(x)\right|, \quad x \in \overset{o}{U}_{\mathbb{E}}(x_0)$$

или

$$\frac{1}{C_2} \left|f(x)\right| \leqslant \left|g(x)\right| \leqslant \frac{1}{C_1} \left|f(x)\right|, \quad x \in \overset{o}{U}_{\mathbb{E}}(x_0).$$

Определение 1.15.8. *Говорят, что функция $f(x)$ эквивалентна функции $g(x)$ при $x \to x_0$, $x \in \mathbb{E}$, если существует проколотая окрестность $\overset{o}{U}_{\mathbb{E}}(x_0)$, такая что*

$$f(x) = \gamma(x) \cdot g(x), \quad x \in \overset{o}{U}_{\mathbb{E}}(x_0), \quad \textit{где} \quad \lim_{x \to x_0} \gamma(x) = 1.$$

Если $g(x) \neq 0$ для $x \in \overset{o}{U}_{\mathbb{E}}(x_0)$, то условие эквивалентности функций можно записать с помощью равенства

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Для записи того, что функции эквивалентны при $x \to x_0$, $x \in \mathbb{E}$, используют следующее обозначение:

$$f \sim g \quad \text{при } x \to x_0, \quad x \in \mathbb{E} \quad \text{или} \quad f \underset{x \to x_0}{\sim} g.$$

Пример 1.15.7. Проверить свойства

$$3x^3 + x^2 - 1 \sim 3x^3 \quad \text{при } x \to \infty, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\sin x \sim x \quad \text{при } x \to 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Решение. Очевидно.

Докажите самостоятельно теорему.

Теорема 1.15.3. *Если* $f \underset{x\to x_0}{\sim} g$, *а* $g \underset{x\to x_0}{\sim} h$, *то* $f \underset{x\to x_0}{\sim} h$.

1.15.2. Свойства бесконечно малых и бесконечно больших величин.

Теорема 1.15.4. *Если* $f \underset{x\to x_0}{\sim} f_1$, *то*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} f_1(x)\cdot g(x),$$

если один из этих пределов существует.

Доказательство. Существует $\overset{o}{U}_{\mathbb{E}}(x_0)$, для точек которой $f(x) = \gamma(x)f_1(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\gamma(x) = 1$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to x_0}\gamma(x)f_1(x)f(x) =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\gamma(x)\cdot\lim_{x\to x_0} f_1(x)f(x) = \lim_{x\to x_0} f_1(x)g(x),$$

причем если, например, допустить существование предела $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$, то существование предела $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)g(x)$ следует из равенства

$$f_1(x)g(x) = \frac{f(x)\cdot g(x)}{\gamma(x)}, \quad x\in \overset{o}{U}_{\mathbb{E}}(x_0)$$

и теоремы о пределе частного двух функций $f(x)g(x)$ и $\gamma(x)$. $\square$

Доказанная теорема бывает очень полезна при вычислении пределов. Заметим, что теорема верна для произведения $f(x)\cdot g(x)$, но *не верна* для суммы $f(x)+g(x)$, о чем часто забывают.

Пример 1.15.8. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+x^{5/3}}}{x^{2/3}+3}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+x^{5/3}}}{x^{2/3}+3} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^{2/3}}{x^{2/3}} = 1$$

$$\left(\sqrt[3]{x^2+x^{5/3}} \underset{x\to\infty}{\sim} x^{2/3}, \quad x^{2/3}+3 \underset{x\to\infty}{\sim} x^{2/3}\right).$$

Упражнение 1.15.1. Показать, что

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^2+x^{5/3}} - x^{2/3} - 3) \neq \lim_{x\to\infty}(x^{2/3}-x^{2/3}) = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^2+x^{5/3}} - x^{2/3} - 3) = \infty.$$

Приведем список наиболее употребляемых при вычислении пределов эквивалентных функций:

a) $\sin x \sim x$ при $x\to 0$,
b) $\operatorname{tg} x \sim x$ при $x\to 0$,
c) $\ln(1+x) \sim x$ при $x\to 0$,
d) $e^x - 1 \sim x$ при $x\to 0$,
e) $(1+x)^\mu - 1 \sim \mu x$ при $x\to 0$,
g) $\arcsin x \sim x$ при $x\to 0$,
h) $\operatorname{arctg} x \sim x$ при $x\to 0$.

Соотношения a) и b) уже известны

$$\left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x} = 1\right).$$

Для доказательства соотношений c), d), e) необходимо понятие непрерывности функции. Действительно, для c), например,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\dfrac{1}{x}} = \ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\dfrac{1}{x}} = \ln e = 1.$$

Второе равенство в этой цепочке $(\lim\limits_{x\to 0}\ln f(x) = \ln\lim\limits_{x\to 0} f(x))$ основано на непрерывности функции $\ln x$.

Отметим, наконец, часто используемые в математическом анализе правила обращения с символами o, O. Эти правила, на первый взгляд, выглядят несколько неожиданно.

Теорема 1.15.5. *При* $x \to x_0, \quad x \in \mathbb{E}$ *справедливы равенства:*
a) $o(f) + o(f) = o(f)$*;*
b) $o(f)$ *тем более есть* $O(f)$*;*
c) $o(f) + O(f) = O(f)$*;*
d) $O(f) + O(f) = O(f)$*;*
e) $\dfrac{o(f(x))}{g(x)} = o\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$ *и* $\dfrac{O(f(x))}{g(x)} = O\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$*, если* $g(x) \neq 0$*.*

Доказательство. Докажем утверждения a) и b).

a) Пусть $g_1(x) = o(f(x))$ и $g_2(x) = o(f(x))$, т.е. $g_1(x) = \alpha_1(x)\cdot f(x)$ и $g_2(x) = \alpha_2(x)\cdot f(x)$ для $x \in \overset{o}{U}_{\mathbb{E}}(x_0)$ и $\alpha_1(x) \to 0, \quad \alpha_2(x) \to 0$ при $x \to x_0$, $x \in \mathbb{E}$. Тогда

$$o(f) + o(f) = g_1(x) + g_2(x) = \alpha_1(x)\cdot f(x) + \alpha_2(x)\cdot f(x) =$$
$$= (\alpha_1(x) + \alpha_2(x))\, f(x) = o(f),$$

так как $\alpha(x) = \alpha_1(x) + \alpha_2(x) \to 0$ при $x \to x_0, \quad x \in \mathbb{E}$.

b) Пусть так же, как в пункте a) $g_1(x) = o(f(x))$ и $g_1(x) = \alpha_1(x)\cdot f(x)$. Тогда функция $\alpha_1(x)$ может играть роль финально ограниченной функции $\beta(x)$ при $x \to x_0$ из определения 1.15.4. Таким образом, $g_1(x) = O(f(x))$ при $x \to x_0, \quad x \in \mathbb{E}$. □

Остальные утверждения следует доказать самостоятельно.

Глава 2

Дифференциальное исчисление функций одного переменного

В результате изучения данной главы читатель должен уметь вычислять производные и дифференциалы элементарных функций, исследовать функции на монотонность, экстремумы, выпуклость, строить графики функций. Знать основные определения, формулы и теорем дифференциального исчисления и его приложений к исследованию функций: производную и ее геометрический смысл, дифференциал, правила дифференцирования, теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши, формулу Тейлора, правило Лопиталя. Владеть методами исследования и построения графиков функций с помощью производных.

2.1. Производная и дифференцируемость функции

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором интервале (a, b), $a < b$, и точка $x_0 \in (a, b)$.

Определение 2.1.1. *Приращением аргумента функции f в точке x_0 называют любое число Δx, такое что $(x_0 + \Delta x) \in (a, b)$. Приращением функции f в точке x_0, отвечающим приращению аргумента Δx, называют разность*

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Рассмотрим предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{2.1.1}$$

Определение 2.1.2. *Если предел (2.1.1) существует и конечен, то его называют производной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначают*

$$f'(x_0) = Df(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0).$$

Пример 2.1.1. Найти производную постоянной функции.

Решение. Пусть $y = c$ (c — постоянная). Тогда $\Delta y = 0$ для любого Δx, поэтому $y' = 0$.

Пример 2.1.2. Найти производную синуса.

Решение. Пусть $y = \sin x$. Имеем

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2},$$

поэтому

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x.$$

Таким образом,

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Упражнение 2.1.1. Доказать равенство

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Упражнение 2.1.2. Доказать равенство $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$. В частности $(e^x)' = e^x$.

Определение 2.1.3. *Функция f называется дифференцируемой в точке x_0, если*

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0. \tag{2.1.2}$$

Теорема 2.1.1. *Функция f дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке у функции f существует конечная производная, при этом константа A в формуле (2.1.2) равна $f'(x_0)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0, т.е. выполнено условие (2.1.2). Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A.$$

Поэтому производная $f'(x_0)$ существует и равна A.

Достаточность. Пусть существует производная $f'(x_0)$, т.е. существует предел (2.1.1). Тогда

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x),$$

где

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0.$$

Получаем, что в некоторой окрестности точки x_0 имеет место равенство

$$\Delta f = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0.$$

Таким образом, выполнено условие (2.1.2) при $A = f'(x_0)$. □

Определение 2.1.4. *Если функция f дифференцируема в точке x_0, то выражение*

$$A\Delta x = f'(x_0)\Delta x$$

называют дифференциалом функции f в точке x_0 и обозначают $df(x_0)$.

Если $A \neq 0$, то дифференцируемость функции f в точке x_0 означает, что с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем приращение аргумента Δx, приращение функции Δf является линейной функцией от Δx. Можно сказать, что дифференциал функции это главная линейная часть приращения функции.

Таким образом, на выражение для производной $\dfrac{df}{dx}$ можно смотреть как на отношение дифференциалов функции f и аргумента x, поскольку очевидно, что для функции $y = x$ производная равна 1 и, следовательно, $dy = dx = \Delta x$.

Итак, получаем, что $df = f'(x_0)\, dx$.

Пример 2.1.3. Найти дифференциал функции $y = x^3$.

Решение. В этом случае

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Линейная часть приращения функции равна $3x_0^2\Delta x$, поэтому $dy = 3x_0^2 \cdot dx$.

Теорема 2.1.2. *Если функция f дифференцируема в точке x_0, то она и непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0, т.е. выполнено условие (2.1.2). Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = A \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} o(\Delta x) = 0,$$

что и означает непрерывность функции. □

Эта теорема не допускает обращения. Функция $y = |x|$ непрерывна во всех точках вещественной оси, в частности, в точке $x_0 = 0$, но, как показано далее, недифференцируема в точке 0.

Введем понятие односторонней производной.

Определение 2.1.5. *Левосторонней производной функции f в точке x_0 называют предел*

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'_-(x_0) = f'(x_0 - 0),$$

правосторонней производной функции f в точке x_0 называют предел

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'_+(x_0) = f'(x_0 + 0).$$

Очевидно, для того, чтобы у функции f существовала (конечная) производная в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке существовали обе односторонние производные и они были равны между собой, при этом

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0).$$

Пример 2.1.4. Показать, что функция $y = |x|$ не дифференцируема в точке 0.

Решение. Действительно, эта функция имеет односторонние производные в точке $x = 0$, но они не равны между собой: $y'_-(0) = -1$, $y'_+(0) = +1$. Таким образом, функция $|x|$ не дифференцируема в точке 0.

Рассмотрим движение точки по прямой линии (на которой положение точки определяется координатой y), представляющее взятое с определенным знаком расстояние от неподвижной начальной точки 0. Движение задано, если известна величина $y = f(t)$ как функция времени t.

Для того чтобы прийти к понятию *скорости* в точке t_0, рассмотрим отношение

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0},$$

представляющее собой *среднюю скорость* движения на промежутке $[t_0, t]$.

Определение 2.1.6. *Определим (мгновенную) скорость движения в точке t_0 как предел*

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = v(t_0).$$

Другими словами, мгновенная скорость является производной

$$v(t_0) = f'(t_0).$$

2.2. Касательная. Геометрический смысл производной

2.2.1. Геометрический смысл производной. Найдем геометрический смысл производной. Построим график функции f в окрестности точки $(x_0, f(x_0)) = M$. Для произвольного приращения Δx рассмотрим точку $N = (x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$, принадлежащую графику функции. Проведем через точки M и N секущую (рис. 2.2.1). Пусть теперь точка N стремится к точке M (т.е. $\Delta x \to 0$).

Определение 2.2.1. *Если секущая стремится занять определенное положение, то это предельное положение называется касательной к графику функции f в точке x_0 (рис. 2.2.2).*

Теорема 2.2.1. *Если функция f является дифференцируемой в точке x_0, то в этой точке у функции f существует касательная, причем уравнение касательной имеет вид*

$$Y - f(x_0) = f'(x_0)(X - x_0).$$

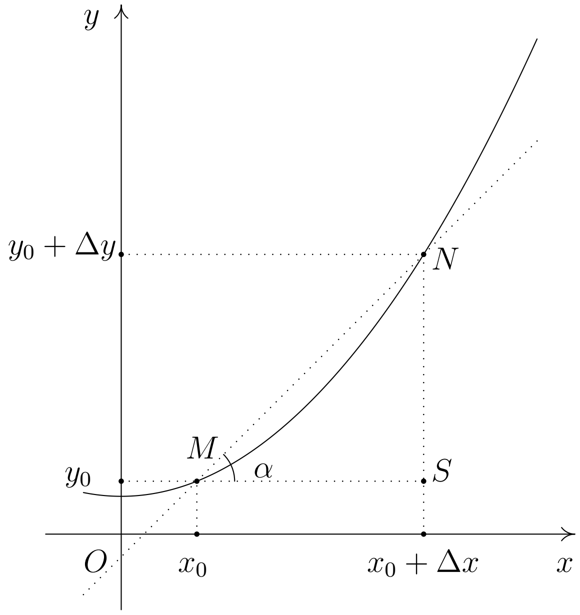

Рис 2.2.1. Секущая

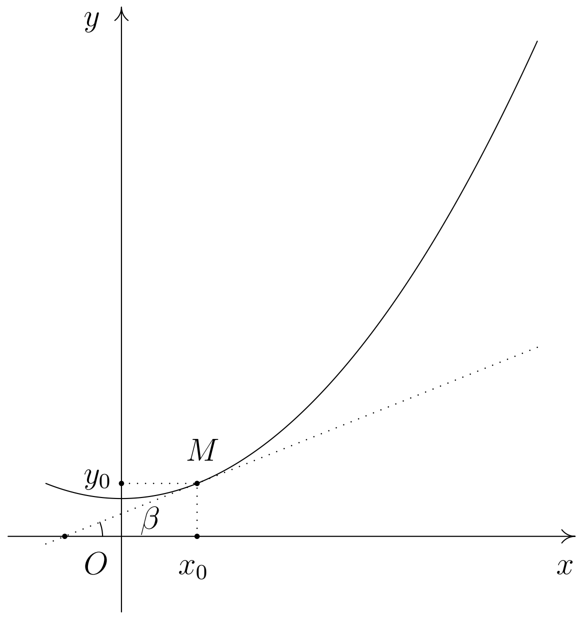

Рис 2.2.2. Касательная

Как известно, коэффициент $f'(x_0)$ в уравнении касательной равен тангенсу угла наклона касательной к оси OX. Таким образом, производная функции в некоторой точке равна тангенсу угла между касательной в соответствующей точке графика функции и осью абсцисс.

Пример 2.2.1. Найти касательную к параболе $y = x^2$ в точке $(1, 1)$.

Решение. Производная $y' = 2x$ и в точке $x = 1$ она равна 2. Искомая касательная тогда примет вид

$$y - 1 = 2(x-1) \quad \text{или} \quad y = 2x - 1.$$

Если функция f дифференцируема в точке x_0, то из формулы (2.1.2) получаем

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \to x_0,$$

и значит (обозначая $y_{\text{кас}} = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$), имеем

$$f(x) - y_{\text{кас}} = o(x - x_0), \quad x \to x_0.$$

Таким образом, касательная к графику функции обладает тем свойством, что разность ординат графика и этой касательной есть величина бесконечно малая более высокого порядка при $x \to x_0$ по сравнению с приращением аргумента.

Обратно: если существует невертикальная прямая

$$y_{\text{пр}} = A(x - x_0) + f(x_0),$$

проходящая через через точку $(x_0, f(x_0))$ и такая, что

$$f(x) - y_{\text{пр}} = o(x - x_0), \quad x \to x_0,$$

то эта прямая является касательной к графику функции в точке $(x_0, f(x_0)$.

Упражнение 2.2.1. Найти касательные у функции $y = |x|$ в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

Упражнение 2.2.2. Показать, что касательная к эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

в точке (x_0, y_0) имеет уравнение

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

2.2.2. Некоторые применения. Рассмотрим пример.

Пример 2.2.2. При каких p и q парабола $y = x^2 + px + q$ касается прямых $y = 5x + 1$ и $y = -x - 2$?

Решение. Находим $y' = 2x + p$. Поскольку прямая $y = 5x + 1$ является касательной к параболе, то имеем систему уравнений: $2x + p = 5$, $x^2 + px + q = 5x + 1$. Отсюда, $x = \dfrac{5-p}{2}$ и

$$\left(\frac{5-p}{2}\right)^2 + p\left(\frac{5-p}{2}\right) + q = 5\left(\frac{5-p}{2}\right) + 1,$$

$$-p^2 + 4q = 29 - 10p. \tag{2.2.1}$$

С другой стороны, прямая $y = -x - 2$ также является касательной к параболе, поэтому имеем

$$2x + p = -1, \quad x^2 + px + q = -x - 2.$$

Отсюда $x = -\dfrac{p+1}{2}$ и

$$\left(\frac{1+p}{2}\right)^2 - p \cdot \left(\frac{1+p}{2}\right) + q = \left(\frac{1+p}{2}\right) - 2,$$

$$-p^2 + 4q = -7 + 2p.$$

Решая последнее уравнение вместе с уравнением (2.2.1), имеем $p = 3$, $q = 2$. Таким образом, парабола $y = x^2 + 3x + 2$ касается прямых $y = 5x + 1$ и $y = -x - 2$. $\square$

Заметим, что нам не нужно было находить точки параболы, в которых происходит касание.

Пример 2.2.3. В каких точках касательная к параболе $y = x^2$ параллельна прямой $y = 4x - 5$; перпендикулярна прямой $2x - 6y + 5 = 0$?

Решение. Для ответа на первый вопрос нужно помнить, что условием параллельности двух прямых служит равенство угловых коэффициентов этих прямых. Угловой коэффициент прямой $y = 4x - 5$ равен 4. Поэтому угловой коэффициент нужной нам касательной тоже должен быть равным 4. Используя геометрический смысл производной, получаем, что $y' = 4$. Т.е. $2x = 4$, $x = 2$, $y(2) = 4$. Поэтому касательная к параболе в точке $(2, 4)$ параллельна прямой $y = 4x - 5$.

Для ответа на второй вопрос нужно помнить, что условием перпендикулярности двух прямых является то, что произведение их угловых коэффициентов равно -1. Угловой коэффициент прямой $2x - 6y + 5 = 0$ равен $\frac{1}{3}$. Поэтому $y' = -3$. То есть $2x = -3$, $x = -\frac{3}{2}$, $y(-3/2) = 9/4$. Таким образом, касательная к параболе в точке $(-3/2, 9/4)$ перпендикулярна прямой $2x - 6y + 5 = 0$. □

Пример 2.2.4. При каких p и q парабола $y = x^2 + px + q$ касается прямой $y = 3x - 2$ в точке с абсциссой 0?

Решение. Другими словами прямая $y = 3x - 2$ должна быть касательной к параболе в точке с абсциссой 0. Найдем $y(0) = q$. Вычислим производную $y' = 2x + p$ и найдем ее значение в нуле: $y'(0) = p$. Напишем уравнение касательной:

$$y - q = px \quad \text{или} \quad y = px + q.$$

Поскольку эта прямая должна совпадать с прямой $y = 3x - 2$, то $p = 3$, $q = -2$. Таким образом для параболы $y = x^2 + 3x - 2$ прямая $y = 3x - 2$ является касательной в точке с абсциссой 0. □

С помощью производной можно находить углы между кривыми в их точке пересечения.

Определение 2.2.2. *Пусть заданы две функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ дифференцируемые в точке x_0 и такие, что $f(x_0) = g(x_0)$. Тогда угол между графиками этих функций в точке x_0 есть угол между касательными к графикам этих функций в точке x_0.*

Пример 2.2.5. Найти угол между кривыми $y = \sin x$ и $y = \cos x$ в их точках пересечения.

Решение. Одной из точек, в которых $\sin x = \cos x$ является точка $x = \frac{\pi}{4}$. Найдем производные в этой точке наших функций: $\sin' x = \cos x$, а $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos' x = -\sin x$, а $-\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Обозначим угол наклона касательной к кривой $y = \sin x$ в точке $\frac{\pi}{4}$ к оси Ox через α, тогда из геометрического смысла производной получаем, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Обозначим угол наклона касательной к кривой $y = \cos x$ в точке $\frac{\pi}{4}$ к оси Ox через β, тогда $\operatorname{tg}\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Чтобы найти угол между кривыми, вычислим $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$. Имеем

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{2}.$$

Таким образом, $\alpha-\beta=\operatorname{arctg}2\sqrt{2}\approx 70,5^\circ$.

В остальных точках пересечения кривых нужный нам угол тот же самый.

$\square$

Пример 2.2.6. В каких точках касательная к параболе $y=x^2$ образует с прямой $3x-y+1=0$ угол в 45°?

Решение. Угловой коэффициент прямой $3x-y+1=0$ равен 3. Угловой коэффициент касательной равен $y'=2x$. Угловые коэффициенты — это тангенсы углов наклона этих прямых к оси Ox. По условию задачи, угол между прямыми равен 45°, поэтому тангенс разности углов наклона прямых равен $\operatorname{tg}45^\circ=1$. Расписывая этот тангенс по формуле тангенса разности (см. предыдущий пример), получим

$$1=\frac{2x-3}{1+2x\cdot 3}=\frac{2x-3}{1+6x}.$$

Решая данное уравнение, получим $x=-1$. $\square$

Можно также отметить, что при решении данных задач нам не нужно было рисовать какие–то рисунки. Достаточно было использовать геометрический смысл производной и уравнение касательной, т.е. алгебраические соотношения.

2.3. Правила дифференцирования

Рассмотрим правила дифференцирования функции, связанные с арифметическими действиями над ними.

1. Умножение на постоянную. *Если функция f дифференцируема в точке x_0 и C некоторая постоянная, то функция $Cf(x)$ также дифференцируема в точке x_0 и*

$$(Cf)'(x_0)=Cf'(x_0).$$

Таким образом правило 1 дифференцирования звучит так: константу можно вынести за знак производной.

Доказательство. Пусть $y=Cf(x)$,

$$\Delta y=Cf(x_0+\Delta x)-Cf(x_0)=C(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))=C\Delta f;$$

поэтому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=C\frac{\Delta f}{\Delta x},\quad \Delta x\neq 0.$$

Перейдем к пределу при $\Delta x\to 0$ и воспользуемся тем, что константу можно выносить за знак предела, получим

$$y'=Cf'(x_0).$$

$\square$

2. Производная суммы или разности. *Если функции f и g дифференцируемы в точке x_0, то функции $f\pm g$ также дифференцируемы в точке x_0 и*

$$(f\pm g)'(x_0)=f'(x_0)\pm g'(x_0).$$

Таким образом, производная суммы (разности) функций равна сумме (разности) производных.

Доказательство. Пусть $y = f(x) \pm g(x)$, $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \Delta g = g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)$. Тогда

$$\Delta y = [f(x_0 + \Delta x) \pm g(x_0 + \Delta x)] - [f(x_0) \pm g(x_0)] = \Delta f \pm \Delta g;$$

поэтому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta} \pm \frac{\Delta g}{\Delta}, \quad \Delta x \neq 0.$$

Пределы $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta g}{\Delta x}$, согласно предположению, существуют и равны соответственно производным $f'(x_0)$ и $g'(x_0)$, поэтому предел левой части последнего равенства при $\Delta x \to 0$ существует и равен $f'(x_0) \pm g'(x_0)$. Но $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, поэтому производная y' в точке x_0 существует и $y' = f'(x_0) \pm g'(x_0)$. □

3. Производная произведения. *Если функции f и g дифференцируемы в точке x_0, то и функция $f \cdot g$ также дифференцируема в точке x_0 и справедливо равенство*

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + g'(x_0) \cdot f(x_0).$$

Доказательство. Пусть $y = f(x) \cdot g(x)$, $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, $\Delta g = g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)$; тогда

$$\begin{aligned} \Delta y = f(x_0 + \Delta x) g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) g(x_0) = \\ = [\Delta f + f(x_0)][\Delta g + g(x_0)] - f(x_0) g(x_0) = \\ = \Delta f g(x_0) + f(x_0) \Delta g + \Delta f \Delta g, \end{aligned}$$

отсюда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} g(x_0) + f(x_0) \frac{\Delta g}{\Delta x} + \frac{\Delta f}{\Delta x} \Delta g.$$

Так как в точке x_0

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0), \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = g'(x_0) \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \Delta g = 0$$

($g(x)$ дифференцируема в точке x_0, а потому и непрерывна в этой точке), то при $x \to x_0$ существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta g}{\Delta x} = y'$ и этот предел равен

$$y'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0).$$

□

4. Производная частного. *Если функции f и g дифференцируемы в точке x_0 и $g'(x_0) \neq 0$, то функция $\dfrac{f}{g}$ также дифференцируема в точке x_0 и справедливо равенство*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Доказательство. Пусть $y = \dfrac{f}{g}$ и $g'(x_0) \neq 0$, тогда существует $\delta > 0$ такое, что $g(x_0 + \Delta x) \neq 0$ для всех Δx, удовлетворяющих условию $|\Delta x| < \delta$. Далее имеем

$$\begin{aligned} \Delta y = \frac{f(x_0 + \Delta x)}{g(x_0 + \Delta x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{f(x_0) + \Delta f}{g(x_0) + \Delta g)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \\ = \frac{\Delta f g(x_0) - f(x_0) \Delta g}{(g(x_0) + \Delta g) g(x_0)}, \end{aligned}$$

поэтому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta f}{\Delta x} g(x_0) - f(x_0)\frac{\Delta g}{\Delta x}}{(g(x_0) + \Delta g) g(x_0)}.$$

Из условия на функции f и g имеем, что при $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta g = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0), \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = g'(x_0),$$

тогда переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим, что предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$$

существует и равен

$$y' = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

□

Следствие 2.3.1. *Из правил 1 и 3 следует*

$$[C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \cdots + C_n f_n(x)]' = C_1 f_1'(x) + C_2 f_2'(x) + \cdots + C_n f_n'(x)$$

— правило дифференцирования произвольной линейной комбинации дифференцируемых функций.

Оно легко выводится с помощью метода математической индукции.
Пример 2.3.1. Найти производную функции $y = e^x \sin x - 2x^2 \cos x$.
Решение. Имеем

$$y' = (e^x \sin x)' - 2(x^2 \cos x)' =$$

$$= e^x \sin x + e^x \cos x - 2(2x \cos x - x^2 \sin x).$$

Пример 2.3.2. Найти производную $y = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.
Решение. Получаем

$$y' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Упражнение 2.3.1. Показать, что $\operatorname{ctg}' x = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Правила 1-4 переносятся и на дифференциалы. При тех же предположениях относительно дифференцируемости в точке x_0 имеем:

$$d(f \pm g) = df \pm dg, \quad d(fg) = g \cdot df + f \cdot dg,$$

$$d(cf) = c \cdot df, \quad d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot df - f \cdot dg}{g^2}.$$

Докажем, например, второе правило:

$$d(fg) = (fg)'dx = f' \cdot g\, dx + f \cdot g' dx = g\, df + f\, dg,$$

последнее равенство справедливо в силу того, что $f'dx = df$ и $g'dx = dg$.

Аналогично доказываются и остальные правила.

2.4. Производные сложной и обратной функций. Инвариантность формы дифференциала первого порядка

2.4.1. Правило дифференцирования сложной.

Теорема 2.4.1. *Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $z = F(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда сложная функция $\Phi(x) = F(f(x))$ также дифференцируема в точке x_0, причем*

$$\Phi'(x_0) = F'(y_0)f'(x_0).$$

Доказательство. Отметим, что утверждение о существовании в точке x_0 производной у сложной функции $F(f(x))$ содержит в себе утверждение о том, что эта функция определена в некоторой окрестности точки x_0. Действительно, из дифференцируемости функций $y = f(x)$ и $z = F(y)$ следует их непрерывность в окрестностях точек x_0 и $y_0 = f(x_0)$ соответственно, а для непрерывных функций известно, что сложная функция определена в некоторой окрестности точки x_0.

Положим $\Delta x = x - x_0$ и $\Delta y = y - y_0$. Так как F дифференцируема в точке x_0, то

$$\Delta z = F'(y_0)\Delta y + \varepsilon(\Delta y)\Delta y,$$

где $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \varepsilon(\Delta y) = 0$. Доопределим функцию $\varepsilon(\Delta y)$ в нуле по непрерывности: $\varepsilon(0) = 0$. Поделим полученное равенство на $\Delta x \neq 0$, получим

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = F'(y_0)\frac{\Delta y}{\Delta x} + \varepsilon(\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{2.4.1}$$

Функция $y = f(x_0)$ дифференцируема в точке x_0, поэтому

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0),$$

и, кроме того $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, т.е. приращение Δy, рассматриваемое как функция от Δx, непрерывно в точке, поэтому

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta y) = \varepsilon(\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y) = \varepsilon(0) = 0.$$

Переходя к пределу в равенстве (2.4.1) при $\Delta x \to 0$ получим

$$z'(x_0) = F'(y_0)y'(x_0).$$

□

Замечание 2.4.1. *Используя запись производной с помощью дифференциалов, формулу для вычисления производной сложной функции можно записать в виде:*

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

2.4.2. Инвариантность формы дифференциала первого порядка.

Следствие 2.4.1.

$$dz = F'(y_0)dy = \Phi'(x_0)dx.$$

В этой формуле $dy = f'(x)dx$ является дифференциалом функции, а dx дифференциалом независимой переменной.

Таким образом, дифференциал функции z имеет один и тот же вид (а именно, произведение производной функции на дифференциал переменной) независимо от того, считается ли эта переменная независимой ($dz = \Phi'(x_0)dx$) или она является функцией ($dz = F'(y_0)dy$). В этом и заключается инвариантность формы дифференциала (первого порядка).

Замечание 2.4.2. *Если приходится иметь дело со сложной функцией $z = z(y)$, $y = y(x)$, то для обозначения ее производной употребляется также индекс x или y, указывающий, по какой переменной берется производная, т.е. пишут z'_x или z'_y. В этих обозначениях формула для вычисления производной сложной функции имеет вид*

$$z'_x = z'_y y'_x.$$

2.4.3. Правило дифференцирования обратной функции.

Теорема 2.4.2. *Пусть функция $f(x)$ определена, непрерывна и строго монотонна в некоторой окрестности точки x_0, дифференцируема в этой точке и $f'(x_0) \neq 0$, тогда найдется окрестность точки $y_0 = f(x_0)$, в которой у функции f есть обратная непрерывная строго монотонная функция $f^{-1}(y) = g(y)$, причем она дифференцируема в точке y_0, и справедливо равенство*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказательство. Зафиксирум какую-то окрестность точки x_0, в которой функция f определена, непрерывна и строго монотонна, и будем рассматривать f только в этой окрестности. Тогда, как доказано ранее (теорема 1.14.6), обратная функция определена, непрерывна, строго монотонна на некотором интервале, содержащем точку y_0 и являющемся образом указанной выше окрестности точки x_0. Поэтому если $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $y = f(x)$, то $\Delta x \to 0$ равносильно $\Delta y \to 0$ в том смысле, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ (для функции f) и $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \Delta x = 0$ (для функции $x = g = f^{-1}$).

Для любых $\Delta x \neq 0$, $\Delta y \neq 0$ имеем

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

При $\Delta x \to 0$ (или, что то же самое, при $\Delta y \to 0$) предел правой части существует и отличен от нуля, поэтому и предел левой части существует. Причем

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \\ = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Поэтому

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

Следствие 2.4.2 (дифференцирование параметрически заданной функции). *Пусть функция задана параметрически, т.е.*

$$\begin{cases} y = \varphi(t), \\ x = \psi(t), \end{cases} \quad t \in (a, b),$$

и функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ дифференцируемы на интервале (a,b), тогда

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}.$$

С помощью этих правил мы можем находить производные элементарных функций, зная производные основных элементарных функций.

Пример 2.4.1. Найти производную функции $y = \arcsin x$.

Решение. Рассмотрим взаимно обратные функции $y = \arcsin x$, $x = \sin y$, $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Применим правило дифференцирования обратной функции, получим

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\cos y}.$$

Так как $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$, то $\cos y \geqslant 0$, поэтому

$$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}.$$

Таким образом,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Аналогично доказываются равенства $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Пример 2.4.2. Найти производную логарифма $y = \log_a x$ $(x > 0,\ a \neq 1,\ a > 0)$.

Решение. Эта функция является обратной к функции $x = a^y$. Тогда

$$y' = (\log_a x)' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Пример 2.4.3. Найдти производную степенной функции $y = x^\alpha$, $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Решение. По правилу дифференцирования сложной функции получим

$$y' = (x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot (\alpha \ln x)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}.$$

Пример 2.4.4. Найти производную функции $y = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2})$.

Решение. Имеем по правилу дифференцирования сложной функции

$$y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}} \cdot (x+\sqrt{x^2+a^2})' =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

Пусть $y = |f(x)|$, где функция $f(x)$ дифференцируема на некотором интервале (a,b). Полагая $y = |u|$, $u = f(x)$, находим $y' = (|u|)'_u \cdot u'_x = f'(x) \cdot \operatorname{sgn} f(x)$. Эта формула справедлива для всех $x \in (a,b)$, для которых $f(x) \neq 0$. В тех точках, где $f(x) = 0$, она позволяет найти односторонние производные.

Пример 2.4.5. Найти производную функции

$$y = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|, \qquad (x \neq a;\, x \neq -a).$$

Решение. Имеем

$$y' = \frac{1}{2a} \frac{\operatorname{sgn}\frac{x-a}{x+a}}{\left|\frac{x-a}{x+a}\right|} \left(\frac{x-a}{x+a}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2a} \cdot \frac{x+a}{x-a} \cdot \frac{x+a-(x-a)}{(x+a)^2} = \frac{1}{x^2-a^2}.$$

2.4.4. Таблица производных.

Теорема 2.4.3. *Справедливы формулы:*

1) $y = x^\alpha$, $\qquad y' = \alpha x^{\alpha-1}$;

в частности, если $y = C$, то $y' = 0$;

2) $y = a^x$, $\qquad y' = a^x \cdot \ln a$;

в частности, если $y = e^x$, то $y' = e^x$;

3) $y = \log_a x$, $\qquad y' = \frac{\log_a e}{x}$;

в частности, если $y = \ln x$, то $y' = \frac{1}{x}$;

4) $y = \sin x$, $\qquad y' = \cos x$;

5) $y = \cos x$, $\qquad y' = -\sin x$;

6) $y = \operatorname{tg} x$, $\qquad y' = \frac{1}{\cos^2 x}$;

7) $y = \operatorname{ctg} x$, $\qquad y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;

8) $y = \arcsin x$, $\qquad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

9) $y = \arccos x$, $\qquad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

10) $y = \operatorname{arctg} x$, $\qquad y' = \frac{1}{1+x^2}$;

11) $y = \operatorname{arcctg} x$, $\qquad y' = -\frac{1}{1+x^2}$;

12) $y = \operatorname{sh} x$, $\qquad y' = \operatorname{ch} x$;

13) $y = \operatorname{ch} x$, $\qquad y' = \operatorname{sh} x$;

14) $y = \operatorname{th} x$, $\qquad y' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;

15) $y = \operatorname{cth} x$, $\qquad y' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$;

16) $y = \ln(1+\sqrt{1+x^2})$, $\qquad y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Упражнение 2.4.1. Доказать равенства 12)–16).

Используя правило дифференцирования сложной функции, можем находить производные функций вида

$$y = (f(x))^{g(x)}.$$

Действительно, имеем

$$y' = \left((f(x))^{g(x)}\right)' = \left(e^{g(x)\ln(f(x))}\right)' =$$

$$= e^{g(x)\ln(f(x))}\left(g'(x) \cdot \ln(f(x)) + \frac{f'(x)g(x)}{f(x)}\right) =$$

$$= f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln(f(x)) + \frac{f'(x)g(x)}{f(x)}\right).$$

Пример 2.4.6. Найти производную функции $y = x^x$.

Решение. Имеем

$$y' = (x^x)' = (e^{x\ln x})' = e^{x\ln x} \cdot (x\ln x)' =$$

$$= x^x \cdot (\ln x + x \cdot \frac{1}{x}) = x^x(\ln x + 1).$$

Теорема 2.4.4. *Производная элементарной функции является элементарной функцией. Ее находят по правилам дифференцирования, используя таблицу производных основных элементарных функций.*

2.5. Производные и дифференциалы высших порядков

2.5.1. Производные высших порядков. Предположим, что функция f имеет (конечную) производную f' в каждой точке интервала (a, b). Тогда эта производная снова является функцией, определенной на данном интервале, и для нее можно определить производную, которая называется *производной второго порядка* от первоначальной функции f. Таким образом,

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

В свою очередь, мы можем взять производную от второй производной, и т.д.

Определение 2.5.1. *В общем случае производная n-го порядка определяется индуктивно, т.е.*

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

Производную n-го порядка обозначают также

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{d\,x^n}(x) = D^n f(x).$$

Пример 2.5.1. Найти производные функции $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Имеем

$$y' = n \cdot x^{n-1}, \quad y'' = n(n-1) \cdot x^{n-2}, \ \ldots, \ y^{(n)} = n!$$

Все дальнейшие производные этой функции равны нулю.

Если функция $y = P(x)$ — многочлен степени n, то каждое дифференцирование понижает степень многочлена на 1. Тем самым производные порядка больше чем n равны нулю.

Пример 2.5.2. Найти производные функции $y = a^x$.

Решение. Имеем

$$y' = a^x \ln a, \quad y'' = a^x \ln^2 a, \ \ldots, \ y^{(n)} = a^x \ln^n a.$$

В частности, если $y = e^x$, то производная любого порядка этой функции также равна e^x.

Пример 2.5.3. Найти производные функции $y = \sin x$.

Решение. Получаем

$$y' = \cos x = \sin(x + \pi/2), \quad y'' = \sin x = \sin(x + 2 \cdot \pi/2).$$

Отсюда по индукции имеем, что

$$y^{(n)} = \sin(x + n\pi/2).$$

Упражнение 2.5.1. Показать, что для функции $y = \cos x$

$$y^{(n)} = \cos(x + n\pi/2).$$

Упражнение 2.5.2. Найти производную n-го порядка от функции $y = \ln(1 + x)$.

Определим теперь следующие классы функций: класс $\mathcal{C}^1(a, b)$ состоит из функций f, заданных на интервале (a, b), таких что они сами и их производные первого порядка f' — непрерывны на (a, b).

Аналогично, класс функций $\mathcal{C}^n(a,b)$ состоит из функций f, определенных на интервале (a,b), таких что они сами и *все* их производные до порядка n *включительно* непрерывны на данном интервале. Для удобства полагают, что $\mathcal{C}^0(a,b)=\mathcal{C}(a,b)$, т.е. совпадает с классом всех непрерывных функций на (a,b). Говорят также, что функция f принадлежит классу $\mathcal{C}^\infty(a,b)$, если она имеет на интервале (a,b) производные любого порядка.

Рассмотрим некоторые арифметические операции над производными n-го порядка.

1. Если функции f и g имеют производные n-го порядка в точке x, то функции $f\pm g$ также имеют производные n-го порядка в этой точке и

$$(f\pm g)^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)\pm g^{(n)}(x).$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак n-й производной, т.е.

$$(cf)^{(n)}(x)=c\cdot f^{(n)}(x).$$

3. Если функции f и g имеют производные n-го порядка в точке x, то функция fg также имеет производную n-го порядка в этой точке и справедливо *правило Лейбница*

$$(fg)^{(n)}(x)=\sum_{j=0}^{n}C_n^j f^{(n-j)}(x)\,g^{(j)}(x),$$

где, как обычно, C_n^j — биномиальные коэффициенты. Это формула напоминает формулу бинома Ньютона.

Доказательство свойств 1 и 2 следует непосредственно из определения производной, а свойство 3 получается методом полной математической индукции.

Пример 2.5.4. Пусть функция $y=x^3\sin x$. Найти $y^{(10)}$.

Решение. Имеем по формуле Лейбница

$$(x^3\sin x)^{(10)}=x^3\sin(x+10\pi/2)+10\cdot 3x^2\sin(x+9\pi/2)+$$

$$+10\cdot 9\cdot 3x\sin(x+8\pi/2)+10\cdot 9\cdot 8\sin(x+7\pi/2)=$$

$$=-x^3\sin x+30x^2\cos x+270x\sin x-720\cos x.$$

Для нахождения старших производных сложной, обратной и параметрически заданной функций последовательно применяются формулы для нахождения первой производной соответствующей функции.

Пример 2.5.5. Пусть функция $y=y(x)$ имеет вторую производную на интервале I, а функция $z=z(y)$ имеет вторую производную на интервале J и образ интервала I при отображении y лежит в J. Найти вторую производную сложной функции $z(y(x))$.

Решение. Сложная функция $z(y(x))$ имеет вторую производную на интервале I и она равна

$$z''_{xx}=(z'_x)'_x=(z'_y\cdot y'_x)'_x=z''_{yx}\cdot y'_x+z'_y\cdot y''_{xx}=z''_{yy}\cdot(y'_x)^2+z'_y\cdot y''_{xx}.$$

Также находится вторая производная функции, заданной параметрически.

Пример 2.5.6. Функция

$$\begin{cases} x=\cos t,\\ y=\sin t, \end{cases}\qquad t\in[0,2\pi].$$

Найти вторую производную этой функции.

Решение. Имеем $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = -\operatorname{ctg} t$. А

$$y''_{xx} = -\frac{d \operatorname{ctg} t}{dx} = -\frac{(\operatorname{ctg} t)'_t}{(\cos t)'_t} = -\frac{1}{\sin^3 t}$$

в силу инвариантности формы дифференциала первого порядка.

Теорема 2.5.1. *Производная любого порядка от элементарной функции является элементарной функцией.*

Доказательство теоремы следует из правил дифференцирования и из таблицы производных.

2.5.2. Дифференциалы высших порядков. Аналогично определяются дифференциалы высших порядков. Если функция f дифференцируема на (a,b), то $df = f'(x)\,dx$. Поэтому дифференциал *второго порядка* определяется так:

$$d^2 f = d(df).$$

Если аргумент x является независимой переменной, то данное равенство можно продолжить —

$$d^2 f = d(f'(x)dx) = f''(x)(dx)^2 = f''(x)dx^2,$$

поскольку dx в данном случае служит приращением аргумента и не зависит от x.

Точно так же определяется дифференциал *n-го порядка:*

$$d^n f = d(d^{n-1} f).$$

И в том случае, когда x — независимая переменная, имеем

$$d^n f = f^{(n)}(x)(dx)^n = f^{(n)}(x)\,dx^n. \tag{2.5.1}$$

Таким образом, на обозначение Лейбница для старших производных можно смотреть как на отношение двух выражений.

Мы видим также, что дифференциалы n-го порядка определены, во всяком случае, для функций класса $\mathcal{C}^n(a,b)$.

Обсудим вопрос о вычислении дифференциалов высших порядков в том случае, когда переменная x, в свою очередь, является некоторой функцией $x = g(t)$, причем функция g определена на некотором интервале (c,d), имеет на нем производные n-го порядка и ее множество значений содержит область определения функции $f(x)$.

Мы видели, что форма дифференциала первого порядка инвариантна.

В отличие от дифференциала первого порядка форма дифференциала второго (или более высокого порядка) не будет инвариантной. Таким образом, вообще говоря, формула (2.5.1) для $n > 1$ не верна, если x является функцией от другого переменного. Это связано с тем, что при вычислении дифференциала второго порядка добавится новый член:

$$\begin{gathered} d^2 f = d(df) = d(f'(x)\,dx) = \\ = d(f'(x))dx + f'(x)d(dx) = f''(x)(dx)^2 + d^2 x, \end{gathered}$$

и, если $d^2 x = g''(t)dt$ не равен тождественно нулю, то формула (2.5.1) станет неверна.

Правда, если функция g — линейная по t, то $d^2 g \equiv 0$, поэтому формула (2.5.1) остается верной.

Теорема 2.5.2. *Если функция $g(t)$ является линейной по t, т.е. $g = Mt + N$, то справедлива формула*

$$d^n f(g(t)) = f^{(n)}(g(t))(dg(t))^n.$$

2.6. Теоремы о среднем в дифференциальном исчислении

2.6.1. Теорема Ферма. Пусть функция $y = f(x)$ задана в окрестности точки x_0 (т.е. в некотором интервале U, содержащем точку x_0).

Теорема 2.6.1 (Ферма). *Если в точке x_0 функция f достигает наибольшего или наименьшего значения на интервале и дифференцируема в x_0, то $f'(x_0) = 0$.*

Доказательство. Пусть, для определенности функция f принимает при $x = x_0$ наибольшее значение в окрестности $U(x_0) = \{x : |x - x_0| < r\}$, т.е. для всех $x \in U(x_0)$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$. Тогда для $x < x_0$ имеем

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0, \tag{2.6.1}$$

а для $x > x_0$, соответственно,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0. \tag{2.6.2}$$

Так как по условию теоремы в точке x_0 функция u имеет производную, то переходя в неравенствах (2.6.1) и (2.6.2) к пределу соответственно при $x \to x_0 - 0$ и при $x \to x_0 + 0$, получим $f'(x_0) \geqslant 0$ и $f'(x_0) \leqslant 0$, т.е.$f'(x_0) = 0$. □

Геометрическая интерпретация теоремы Ферма состоит в том, что если при $x = x_0$ функция принимает наибольшее или наименьшее значения на некоторой окрестности точки x_0, то касательная к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$ параллельна оси (рис. 2.6.1).

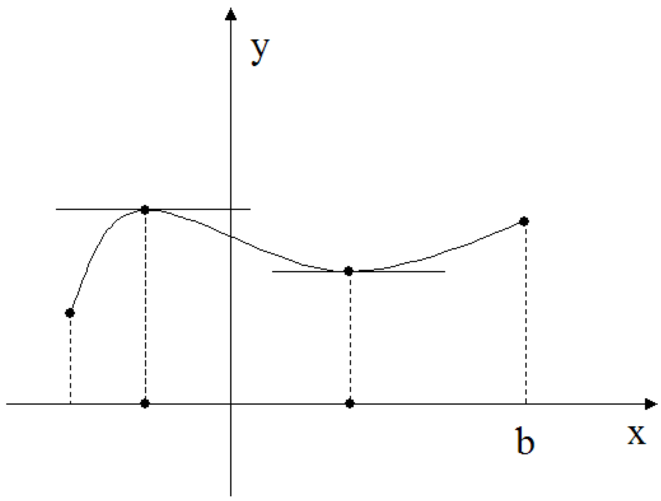

Рис 2.6.1. Геометрическая интерпретация теоремы Ферма

Следствие 2.6.1 (необходимое условие экстремума). *Пусть $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируема в этой точке. Если x_0 — точка экстремума, то $f'(x_0) = 0$.*

Отметим также, что обращение производной в нуль является необходимым условием экстремума, но не достаточным. Например, для функции $f(x) = x^3$ имеем $f'(0) = 0$, но в точке $x = 0$ экстремума нет.

2.6.2. Теорема Ролля. Построение здания дифференциального исчисления в значительной своей части основано на так называемых "теоремах о среднем значении". Первая из них это

Теорема 2.6.2 (Ролль). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема в каждой точке $x \in (a, b)$ и на концах отрезка принимает равные значения ($f(a) = f(b)$), то найдется точка $c \in (a, b)$ (которую называют средней или промежуточной точкой), такая что $f'(c) = 0$.*

Доказательство. Воспользуемся тем, что функция, непрерывная на отрезке, принимает наибольшее $M = \max f(x)$ и наименьшее $m = \min f(x)$ значения в некоторых точках отрезка. Тогда для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Если $m = M$, то функция f постоянна и, следовательно, $f'(x) \equiv 0$ на отрезке $[a, b]$, т.е. в качестве точки c можно взять любую точку интервала (a, b).

Если $m \neq M$, то из условия $f(a) = f(b)$ следует, что хотя бы одно из значений m или M не принимается на концах отрезка $[a, b]$. Пусть этим значением является M, т.е. существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $f(c) = M$. Это означает, что в точке $x = c$ функция принимает наибольшее значение на интервале (a, b) и по теореме Ферма $f'(c) = 0$. □

Геометрически теорема Ролля означает, что у графика непрерывной на отрезке и дифференцируемой внутри него функции, принимающей на концах отрезка одинаковые значения, существует точка, в которой касательная параллельна на оси абсцисс (рис. 2.6.2).

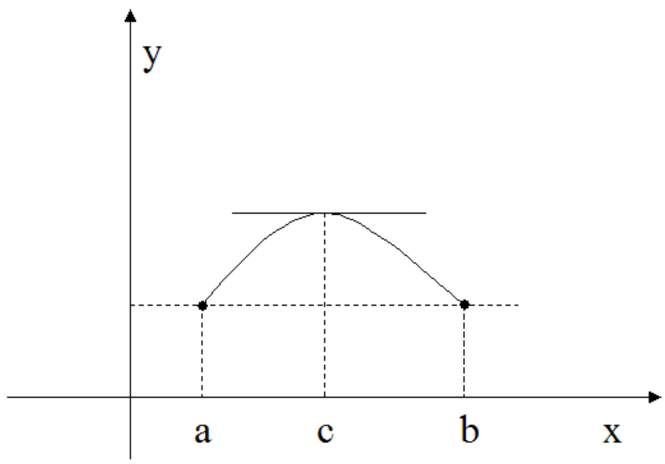

Рис 2.6.2. Геометрическая интерпретация теоремы Ролля

Замечание 2.6.1. *В теореме Ролля все условия, наложенные на функцию f, существенны. Чтобы в этом убедиться, достаточно привести примеры функций, для которых не выполняется одно из трех условий, и для которых не существует точки c такой, что $f'(c) = 0$.*

Функция

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

Дифференцируема на $(0, 1)$, принимает равные значения на концах промежутка $[0, 1]$, но не непрерывна на $[0, 1]$. Утверждение теоремы Ролля не выполнено (рис. 2.6.3).

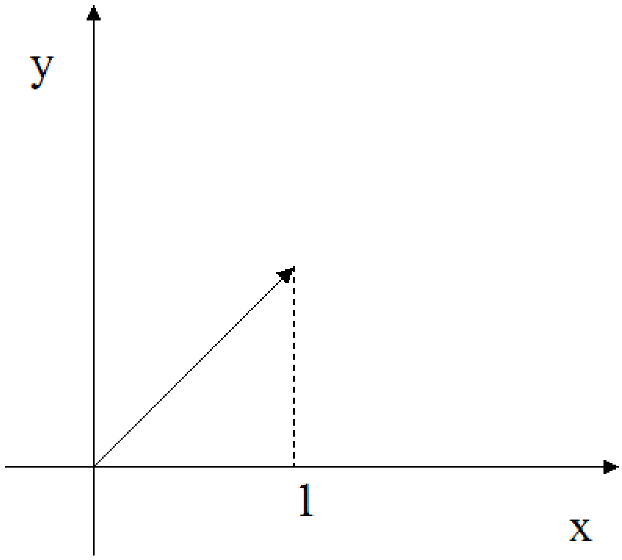

Рис 2.6.3. График функции $f(x)$

Функция $f(x) = |x|,\ x \in [-1; 1]$, непрерывна на $[0, 1]$, принимает равные значения на концах промежутка, но не дифференцируема в одной точке 0 (рис. 2.6.4).

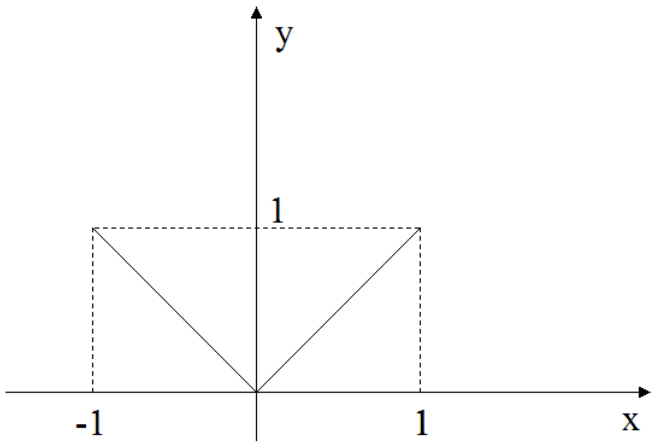

Рис 2.6.4. График функции $y = |x|$

Функция $f(x) = x, x \in [0; 1]$ непрерывна и дифференцируема на $[0, 1]$, но ее значения на концах промежутка не совпадают.

Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля на отрезке $[a, b]$, то функция $F(x) = f(x) - f(a)$ равна нулю на его концах $F(b) - F(a) = 0$ и $F'(x) = f'(x)$. Поэтому справедливо следствие теоремы Ролля:

Следствие 2.6.2. *Между двумя нулями дифференцируемой функции всегда лежит хотя бы один нуль ее производной.*

Обобщением теоремы Ролля является следующее утверждение.

Следствие 2.6.3. *Если функция f имеет в некотором интервале все производные до порядка n, принимает равные значения в $n+1$ различной точке этого интервала, тогда найдется такая точка c, в которой $f^{(n)}(c) = 0$.*

2.6.3. Теорема Лагранжа. Рассмотрим еще одно обобщение теоремы Ролля.

Теорема 2.6.3 (Лагранж)**.** *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет конечную производную во всех точках интервала (a, b), тогда найдется точка $c \in (a, b)$, в которой*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{2.6.3}$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - \lambda x$, и подберем λ таким образом, чтобы $F(b) = F(a)$. Легко видеть,что искомое значение для λ следует взять равным $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Для функции $F(x)$ выполнены все условия теоремы Ролля. Действительно,

1) функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ как линейная комбинация непрерывных функций $f(x)$ и x;

2) функция $F(x)$ дифференцируема во всех точках интервала (a, b) как линейная комбинация дифференцируемых функций;

3) на концах отрезка $[a, b]$ значения функции $F(x)$ равны в силу выбора λ.

Поэтому существует точка $c \in (a, b)$, для которой $F'(c) = 0$. Учитывая, что

$$F'(x) = f'(x) - \lambda = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \tag{2.6.4}$$

получим

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{2.6.5}$$

□

Геометрический смысл теоремы Лагранжа заключается в следующем: если мы проведем прямую, соединяющую точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$, которые лежат на графике Γ функции f, то найдется точка на графике функции, касательная в которой к Γ параллельна данной прямой (рис. 2.6.5).

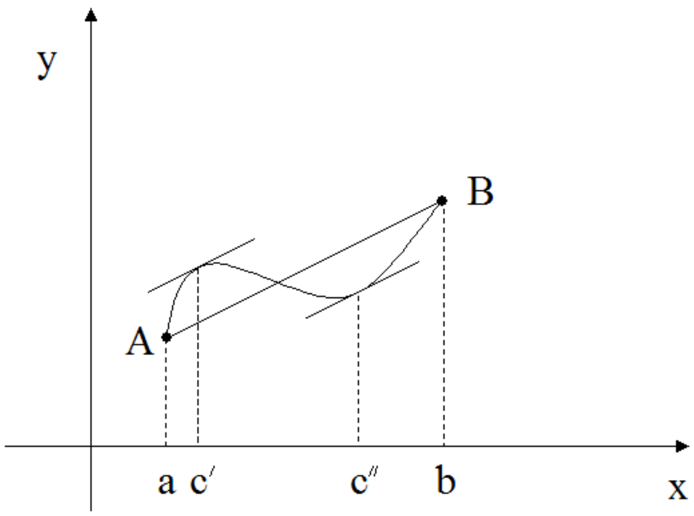

Рис 2.6.5. Геометрическая интерпретация теоремы Лагранжа

Часто формулу Лагранжа (2.6.3) называют *формулой конечных приращений* и рассматривают ее в следующей ситуации. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[x, x+h]$, дифференцируема внутри этого отрезка, тогда найдется число θ, $0 < \theta < 1$, такое, что

$$f(x + h) - f(x) = f'(x + \theta h) \cdot h. \tag{2.6.6}$$

Формула (2.6.6) есть *формула конечных приращений*. С ее помощью легко доказывается утверждение.

Следствие 2.6.4. *Если функция f дифференцируема на интервале (a, b) и $f'(x) \equiv 0$, то функция $f \equiv const$.*

Доказательство. Действительно, для любых точек $x_1, x_2 \in (a, b)$ таких, что $x_1 < x_2$, функция f удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа на отрезке $[x_1, x_2]$ и, значит,
$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \quad \text{где} \quad x_1 < c < x_2.$$
Но $f'(c) = 0$, значит $f(x_1) = f(x_2)$ для любых точек из отрезка $[a, b]$, что и означает, что функция постоянна. □

Следствие 2.6.5. *Если функции f и g дифференцируемы в точках интервала (a, b) и в этих точках $f' = g'$, тогда эти функции отличаются в рассматриваемом интервале на константу:*
$$f - g = c.$$

Доказательство. Действительно, функция $F = f - g$ удовлетворяет условиям следствия 1, в частности $f' - g' = F' = 0$ в точках интервала (a, b) и поэтому $F = c$.
□

2.6.4. Теорема Коши. Важным обобщением теоремы Лагранжа является замечательная "формула Коши".

Теорема 2.6.4 (Коши). *Пусть функции f и g непрерывны на отрезке $[a, b]$, дифференцируемы в любой точке $x \in (a, b)$, причем $g'(x) \neq 0$ для всех точек $x \in (a, b)$, тогда найдется точка $c \in (a, b)$ такая, что*
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Замечание 2.6.2. *Из условия $g'(x) \neq 0$ теоремы следует, что $g(a) \neq g(b)$, т.е. левая часть формулы определена корректно. В самом деле, если бы $g(a) = g(b)$, то функция g удовлетворяла бы условиям теоремы Ролля и, значит, нашлась бы "средняя" точка c такая, что $g'(c) = 0$, $a < c < b$.*

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию
$$F(x) = f(x) - \lambda g(x),$$
где число λ выберем таким образом, чтобы $F(a) = f(b)$, т.е. чтобы
$$f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b).$$
Для этого нужно взять
$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$
Функция F удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, следовательно, существует такая точка c, $a < c < b$, что $F'(c) = 0$. Но $F'(x) = f'(x) - \lambda g'(x)$, а поэтому
$$f'(c) - \lambda g'(c) = 0,$$
откуда следует, что
$$\lambda = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$
и утверждение теоремы Коши тем самым доказано. □

Замечание 2.6.3. *Формула конечных приращений Лагранжа является частным случаем формулы Коши (в последней следует положить $g(x) = x$). Кроме того, формула Коши справедлива и для $a > b$.*

Следствие 2.6.6. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на полуинтервале $[a, b)$, дифференцируема во всех точках интервала (a, b), у производной f' существует конечный предел справа в точке $x = a$. Тогда в этой точке у функции f существует правосторонняя производная $f'_+(a)$.*

Следствие доказывается с использованием теоремы Лагранжа. Точно такое же утверждение справедливо для правой точки интервала.

Следствие 2.6.7 (теорема Дарбу)**.** *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в каждой точке интервала (a, b), то производная $f'(x)$ не может иметь на (a, b) точек разрыва первого рода.*

2.7. Правило Лопиталя

2.7.1. Неопределенность вида $\mathbf{\frac{0}{0}}$. С помощью производных можно раскрывать неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$. Как мы видели раньше, другие типы неопределенностей сводятся к этим. Начнем со следующего утверждения.

Пусть функции f и g определены и дифференцируемы на интервале (a, b) и точка $x_0 \in (a, b)$.

Теорема 2.7.1 (правило Лопиталя)**.** *Если $f(x_0) = g(x_0) = 0$, а $g'(x_0) \neq 0$, то*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Обобщением теоремы 2.7.1 служит следующее утверждение.

Теорема 2.7.2 (правило Лопиталя)**.** *Пусть функции f и g дифференцируемы на интервале (a, b), пределы*

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a+0} g(x) = 0,$$

производная $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$ и существует конечный или определенного знака бесконечный предел

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K.$$

Тогда существует предел

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

и он тоже равен K, т.е.

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. В силу условий теоремы, функции f и g не определены в точке a. Доопределим их, положив $f(a) = g(a) = 0$. Теперь f и g непрерывны в точке a и удовлетворяют условиям теоремы Коши (теорема 2.6.4) о среднем значении на любом отрезке $[x, a]$, $a < x < b$.

Поэтому для каждого x, $a < x < b$, существует такое $c \in (a, x)$, что
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \tag{2.7.1}$$
причем $\lim\limits_{x \to a+0} c(x) = a$.

Поэтому, если существует
$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K,$$
то существует и
$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = K.$$
□

В этих теоремах точка a может принимать значение $\pm\infty$. Теорему 2.7.2 можно применять, последовательно вычисляя производные.

Пример 2.7.1. Найти предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$.

Решение. Имеем
$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} =$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Может быть и такая ситуация: предел отношения производных не существует, а предел отношения функций существует.

Пример 2.7.2. Найти предел $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x + \sin x}{x + \cos x}$.

Решение. Очевидно,
$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x} = 1,$$
а
$$\lim_{x \to \infty} \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$$
не существует.

Таким образом, нельзя утверждать (как часто говорят), что всегда предел отношения функций равен пределу отношения производных.

2.7.2. Неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Теорема 2.7.3 (правило Лопиталя)**.** *Пусть функции f и g дифференцируемы на интервале (a, b), пределы*
$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to a+0} g(x) = \infty,$$
производная $g'(x) \neq 0$ на (a, b) и существует конечный или определенного знака бесконечный предел
$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K.$$
Тогда существует и предел
$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = K.$$

В теореме 2.7.3, так же как в теореме 2.7.2, точка a может принимать значения $\pm\infty$.

Пример 2.7.3. Найти предел $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to+0} x\ln x = \lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{1/x} =$$

$$= -\lim_{x\to+0} \frac{1/x}{1/x^2} = -\lim_{x\to+0} x = 0.$$

Может случиться, что применение правила Лопиталя не упрощает задачу отыскания пределов функции. Рассмотрим

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x'}{(\sqrt{1+x^2})'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x},$$

т.е. получается предел дроби, обратной данной. Тем самым задача осталась той же. Вместе с тем заданный предел легко находится элементарно:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = 1.$$

Неопределенности 0^0, ∞^0, 1^∞ можно раскрыть, предварительно прологарифмировав соответствующие функции.

Пример 2.7.4. Найти предел x^x при $x\to+0$.

Решение. Используем предел из примера 2.7.3

$$\lim_{x\to+0} x\ln x = 0.$$

Отсюда

$$\lim_{x\to+0} x^x = \lim_{x\to+0} e^{x\ln x} = 1.$$

2.8. Формула Тейлора

2.8.1. Многочлен Тейлора. Начнем со случая, когда функция является многочленом степени n следующего вида:

$$f(x) = a_n(x-x_0)^n + a_{n-1}(x-x_0)^{n-1} + \cdots + a_1(x-x_0) + a_0.$$

Постараемся найти коэффициенты функции f, используя производные. Для этого подставим в функцию значение $x=x_0$, получим

$$f(x_0) = a_0.$$

Затем продифференцируем функцию f и подставим в производную значение $x=x_0$. Получим

$$f'(x_0) = a_1 = 1!\,a_1.$$

Проделаем ту же операцию с первой производной, имеем

$$f''(x_0) = 2a_2 = 2!\,a_2.$$

На n-м шаге получаем

$$f^{(n)}(x_0) = n!\,a_n.$$

Таким образом,

$$a_0 = f(x_0),\ a_1 = f'(x_0),\ \ldots\ , a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Следовательно,
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \qquad (2.8.1)$$

Наша цель получить формулу, аналогичную формуле (2.8.1), для более широкого класса функций, чем многочлены. Естественно ожидать, что равенство в ней не будет точным, поэтому важно остаточный член в ней записывать в приемлемых формах.

Итак, пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и дифференцируема на нем n раз. Точка x_0 лежит на этом интервале.

Определение 2.8.1. *Многочленом Тейлора для функции f степени n в точке x_0 называется следующее выражение:*
$$P_n(x, x_0) = P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$
Как обычно, мы считаем, что $0! = 1$.

Определение 2.8.2. *Разность $f(x) - P_n(x, x_0) = r_n(x, x_0) = r_n(x)$ называется остаточным членом порядка n.*

2.8.2. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. В целом *формула Тейлора* для функции f в точке x_0 имеет следующий вид:
$$f(x) = P_n(x) + r_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_n(x),\ \ x \in (a, b). \qquad (2.8.2)$$

Теорема 2.8.1. *Если точка $x_0 \in (a, b)$, функция f дифференцируема n раз на этом интервале, то для функции f справедлива формула (2.8.2), в которой $x \in (a, b)$ и остаточный член имеет вид*
$$r_n(x) = o((x - x_0)^n) \quad \textit{при} \ \ x \to x_0.$$

В данном случае говорят, что остаточный член записан в *форме Пеано.*

Доказательство. Рассмотрим остаточный член $r_n(x)$ и покажем, что
$$r_n(x_0) = r_n'(x_0) = \ldots = r_n^{(n)}(x_0) = 0.$$
Действительно, $r_n(x_0) = f(x_0) - P_n(x_0) = 0$. Далее
$$r_n'(x_0) = f'(x_0) - P_n'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0.$$
Продолжая дифференцирование и используя определение многочлена Тейлора, получим на последнем шаге
$$r_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) - P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0) = 0.$$

Осталось показать, что $r_n(x) = o((x - x_0)^n)$ при $x \to x_0$. Рассмотрим предел
$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{r_n'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \ldots =$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{r_n^{(n)}(x)}{n!} = 0$$
по правилу Лопиталя. □

Доказанная теорема позволяет любую функцию, удовлетворяющую условиям теоремы, заменить в некоторой окрестности некоторой точки многочленом с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем члены многочлена.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано дает общий метод выделения главной часть функции в окрестности данной точки. На этом обстоятельстве основаны многочисленные и разнообразные применения данной формулы в различных вопросах анализа. Поэтому формулу Тейлора часто называют *основной формулой* дифференциального исчисления.

При $n = 1$ эта формула дает условие дифференцируемости функции.

Если точка $x_0 = 0$, то формулу Тейлора иногда называют *формулой Маклорена.*

Упражнение 2.8.1. Написать многочлен Тейлора шестого порядка (в нуле) для функции $y = \ln\cos x$.

2.8.3. Единственность разложения по формуле Тейлора. Поставим теперь обратную задачу. Пусть функция f имеет n производных в окрестности точки x_0. Предположим, что существует многочлен $Q_n(x)$ степени не выше n вида

$$Q_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \ldots + c_n(x - x_0)^n$$

и такой, что:

$$f(x) = Q_n(x) + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0. \tag{2.8.3}$$

Что можно сказать о коэффициентах данного многочлена?

Полагая в формуле (2.8.3), что $x = x_0$, получим $f(x_0) = c_0$. Формулу (2.8.3) можно переписать в виде

$$f(x) - f(x_0) = c_1(x - x_0) + \ldots + c_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0.$$

Деля последнее равенство на $x - x_0$ и замечая, что $\dfrac{o((x - x_0)^n)}{x - x_0} = o((x - x_0)^{n-1})$ при $x \to x_0$, получим

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c_1 + \ldots + n \cdot c_n(x - x_0)^{n-1} + o((x - x_0)^{n-1}n), \quad x \to x_0.$$

Тогда

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = c_1.$$

Рассматривая далее равенство

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) =$$

$$= c_2(x - x_0)^2 + \ldots + c_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0,$$

деля его на $(x - x_0)^2$ и применяя правило Лопиталя при вычислении предела при $x \to x_0$, будем иметь

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2} = \frac{f''(x_0)}{2} = c_2.$$

Аналогичным образом вычисляются все остальные коэффициенты $Q_n(x)$ и они равны

$$c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

т.е. $Q_n(x)$ — это многочлен Тейлора.

Таким образом, получаем утверждение

Теорема 2.8.2. *В условиях теоремы 2.8.1 разложение по формуле Тейлора единственно.*

Данная теорема позволяет иногда находить разложение Тейлора, не вычисляя производные.

Пример 2.8.1. Разложить по формуле Маклорена функцию $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Решение. Известно, что функцию f можно записать как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + \ldots,$$

тогда остаток $x^{n+1} + x^{n-2} + \ldots = \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$. Ясно, что

$$\frac{x^{n+1}}{1-x} = o(x^n), \quad x \to 0.$$

Поэтому в силу единственности разложения формула Маклорена примет вид:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + o(x^n), \quad x \to 0.$$

2.8.4. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Более распространенной формой записи служит остаточный член *в форме Лагранжа.*

Теорема 2.8.3. *Если функция f дифференцируема $n+1$ раз на интервале (a, b) и точки $x, x_0 \in (a, b)$, то*

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

где c — некоторая точка интервала (x_0, x).

2.9. Формулы Тейлора для элементарных функций

2.9.1. Стандартные разложения. Приведем теперь 5 стандартных разложений, которые постоянно используются в математике.

1. Пусть функция $f(x) = e^x$, точка $x_0 = 0$, тогда

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) =$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \to 0.$$

2. Пусть функция $f(x) = \sin x$, точка $x_0 = 0$, тогда

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) =$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \to 0.$$

3. Пусть функция $f(x) = \cos x$, точка $x_0 = 0$, тогда

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}), \quad x \to 0.$$

4. Если функция $f(x) = \ln(1+x)$, точка $x_0 = 0$, тогда

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} + o(x^n)) =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad x \to 0.$$

5. Если функция $f(x) = (1+x)^\alpha$, точка $x = 0$, то

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + o(x^n) =$$

$$= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n), \quad x \to 0.$$

Данную формулу называют биномиальным разложением. Когда α — натуральное число, она превращается в точную формулу бинома Ньютона (при $n = \alpha$).

Докажем, например, первую формулу. Имеем $(e^x)^{(k)} = e^x$, поэтому коэффициенты Тейлора равны $\dfrac{1}{k!}$, а многочлен Тейлора

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

Упражнение 2.9.1. Доказать остальные формулы разложения.

Из полученных разложений можно получать разложения более сложных функций.

Пример 2.9.1. Разложить по формуле Маклорена функцию e^{x^2}.

Решение. Подставляя в формулу для e^x вместо x функцию x^2, получим

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \ldots + \frac{x^{2n}}{n!} + o(x^{2n})$$

в силу единственности разложения.

Пример 2.9.2. Разложить по формуле Маклорена функцию $\sin^2 x$.

Решение. Поскольку $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, то разложим сначала функцию $\cos 2x$. Используя разложение косинуса и подставляя в него $2x$ вместо x, получим

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \ldots + (-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}), \quad x \to 0.$$

Тогда

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} =$$

$$= x^2 - \frac{2^2x^4}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}), \quad x \to 0.$$

Пример 2.9.3. Разложить по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано функцию $f(x) = \sqrt[5]{x}$ в точке $x_0 = 1$.

Решение. Положив $x = 1 + t$ и применив формулу 5 биномиального разложения при $\alpha = 1/5$, получим

$$\sqrt[5]{x} = (1+t)^{1/5} = 1 + \frac{1}{5}\cdot t + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)\cdot t^2 + \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)\left(\frac{1}{5}-2\right)\cdot t^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)\left(\frac{1}{5}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{5}-n+1\right)\cdot t^n + o(t^n) =$$

$$= 1 + \frac{1}{5} \cdot (x-1) - \frac{4}{2 \cdot 5^2} \cdot (x-1)^2 + \frac{4 \cdot 9}{3! 5^3} \cdot (x-1)^3 + \dots$$

$$\dots + \frac{(-1)^n 4 \cdot 9 \cdots (5n-6)}{n! 5^n} \cdot (x-1)^n + o((x-1)^n), \quad x \to 1.$$

Упражнение 2.9.2. С помощью формулы Тейлора вычислить число e с точностью до 0,001.

2.9.2. Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора. Формула Тейлора дает простое и весьма общее правило для вычисления главной части функции. В результате этого метод вычисления пределов функций с помощью выделения главной части приобретает законченный и алгоритмический характер.

Рассмотрим сначала случай неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$. Пусть требуется найти предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

где функции f и g стремятся к 0 при $x \to x_0$ и достаточное число раз дифференцируемы. Возьмем разложение числителя и знаменателя, ограничиваясь первыми отличными от нуля членами:

$$f(x) = a(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n), \quad a \neq 0,$$

$$g(x) = b(x-x_0)^m + o((x-x_0)^m), \quad b \neq 0, \quad x \to x_0.$$

Тогда

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{a(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)}{b(x-x_0)^m + o((x-x_0)^m)} =$$

$$= \frac{a}{b} \lim_{x \to x_0} (x-x_0)^{n-m}.$$

Последний предел равен 0, если $n > m$; равен $\dfrac{a}{b}$, если $n = m$ и равен ∞, если $n < m$.

Неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ можно свести к рассмотренному случаю, перейдя к обратным функциям.

Пример 2.9.4. Найти предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}.$$

Решение. Из формул стандартных разложений получим

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

а

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad x \to 0.$$

Тогда

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3/3 + o(x^3)}{x^3/6 + o(x^3)} = 2.$$

Пример 2.9.5. Найти предел

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right).$$

Решение. Это неопределенность вида $\infty - \infty$. Преобразуем ее в неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ и используем стандартные разложения. Получим

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2}{x^2\sin^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(x - x^3/6 + o(x^3))^2 - x^2}{x^2(x + o(x))^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^4/3 + o(x^4)}{x^2(x^2 + o(x^2))}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-x^4/3 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^4/3}{x^4} = -\frac{1}{3}.$$

2.10. Условия монотонности функций

Теорема 2.10.1. *Для того чтобы дифференцируемая на интервале (a, b) функция $f(x)$ возрастала (убывала) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы во всех его точках производная была неотрицательной $f'(x) \geqslant 0$ (неположительной $f'(x) \leqslant 0$).*

Доказательство. Рассмотрим случай возрастания функции. Случай убывания рассматривается аналогично.

Необходимость. Пусть f возрастает на интервале (a, b), тогда для фиксированной точки $x_0 \in (a, b)$ и любой точки $x < x_0$ выполнено условие $f(x) \leqslant f(x_0)$, поэтому

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0.$$

Устремляя x к x_0, получим

$$\lim_{x\to x_0 - 0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0 - 0) \geqslant 0.$$

Рассмотрим точку $x > x_0$, тогда из условия возрастания получим

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0.$$

Устремляя x к x_0, имеем

$$\lim_{x\to x_0 + 0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0 + 0) \geqslant 0.$$

Поскольку, по условию теоремы, в точке x_0 существует производная, то

$$f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0) = f'(x_0) \geqslant 0.$$

Достаточность. Пусть производная функции f неотрицательна на интервале (a, b). Рассмотрим две произвольные точки этого интервала $a < x_1 < x_2 < b$. Применяя к отрезку $[x_1, x_2]$ формулу конечных приращений, получим

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),$$

где точка c лежит между x_1 и x_2. Из условия имеем, что $f'(c) \geqslant 0$, а также, что $x_2 - x_1 > 0$. Тогда $f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0$, т.е. функция f — возрастающая на (a, b). $\square$

Доказательство теоремы показывает, что справедливо утверждение.

Следствие 2.10.1. *Если на интервале (a, b) производная $f' > 0$, то функция f является строго возрастающей. Если на интервале (a, b) производная $f' < 0$, то функция f строго убывающая.*

Данное следствие не допускает обращения. Рассмотрим функцию $y = x^3$. Она является строго возрастающей на всей числовой прямой $\mathbb{R}$. Ее производная $y = 3x^2 \geqslant 0$ и обращается в 0 в точке $x = 0$ (рис. 2.10.1).

Упражнение 2.10.1. Доказать обобщение следствия 2.10.1: если производная функции f неотрицательна и обращается в 0 в конечном числе точек, то функция f будет строго возрастающей на (a, b).

Рассмотрим функцию $y = \operatorname{tg} x$. Ее производная $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} > 0$. Тем не менее эта функция не является строго возрастающей на всей области определения. Она строго возрастающая на интервалах $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Поэтому, чаще всего при исследовании функций стараются определить *интервалы монотонности,* т.е. интервалы, на которых функция возрастает или убывает.

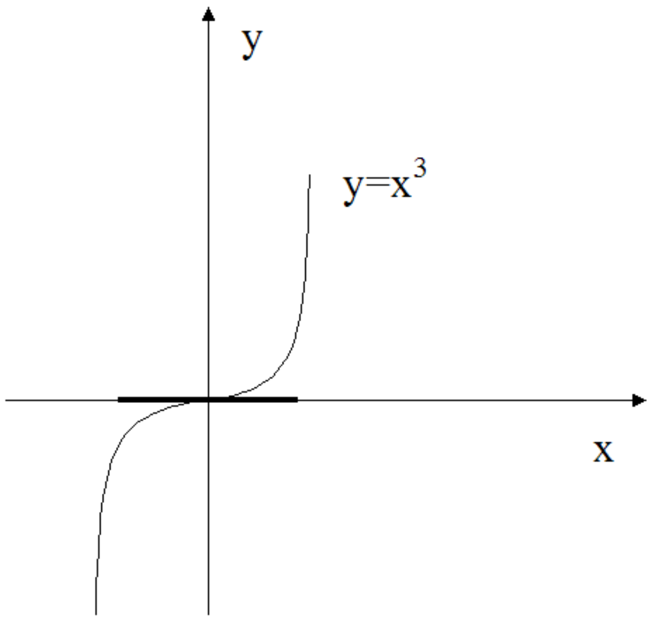

Рис 2.10.1. График функции $y = x^3$

Пример 2.10.1. Пусть $y = \cos x$. Найти интервалы монотонности этой функции.

Решение. Имеем: $y' = -\sin x$. Эта функция больше нуля там, где синус меньше нуля. Т.е. на интервале $(\pi, 2\pi)$ и на всех остальных, получающихся из данного сдвигом на число, кратное 2π. Эти интервалы составляют промежутки возрастания косинуса.

Производная $y' < 0$ на интервале $(0, \pi)$ и на всех остальных, получающихся из данного сдвигом на число, кратное 2π. Они составляют промежутки убывания функции $y = \cos x$.

Находя интервалы монотонности функции, мы автоматически находим и экстремумы функции.

С помощью производных можно доказывать неравенства.

Пример 2.10.2. Доказать неравенство $|\sin x| \leqslant |x|,\ x \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Решение. Достаточно доказать, что $\sin x \leqslant x, \quad x \in [0, \pi/2]$, поскольку функция $\sin x$ является нечетной.

Рассмотрим функцию $y = \sin x - x$. Производная этой функции $y' = \cos x - 1 \leqslant 0$. Следовательно, по теореме 2.10.1 функция y убывающая во всей области определения. В частности, $y(0) \geqslant y(x)$, если $x \geqslant 0$.

Это означает, что $0 \geqslant \sin x - x$, что совпадает с доказываемым неравенством. $\square$

Упражнение 2.10.2. Доказать неравенство

$$\sqrt[n]{x^n + a^n} \leqslant x + a, \quad x > 0, \quad a > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2.11. Нахождение экстремумов функции

2.11.1. Определение локальных экстремумов. Дадим следующие определения.

Определение 2.11.1. *Пусть функция f определена на некотором множестве $E \subset \mathbb{R}$ и точка $x_0 \in E$. Точка x_0 называется точкой (локального) максимума для функции f на E, если найдется интервал U такой, что $x_0 \in U$ и для всех точек $x \in U \cap E$ выполнено неравенство*

$$f(x) \leqslant f(x_0). \tag{2.11.1}$$

Если данное неравенство является строгим для точек $x \in U \cap E \setminus \{x_0\}$, то x_0 называется точкой строгого (локального) максимума.

Аналогично определяются точки (локального) минимума и строгого (локального) минимума, просто знак неравенства в формуле (2.11.1) меняется на противоположный.

Определение 2.11.2. *Точки максимума и минимума называются точками (локального) экстремума для функции f на множестве E.*

На рис. 2.11.1 приведен график некоторой функции, определенной на замкнутом промежутке $[a, b]$. Точка a является точкой максимума, точка c — точкой минимума, точка d — точкой максимума, а точки x, лежащие между d и b ($d < x \leqslant b$), являются как точками максимума, так и точками минимума.

Заметим, что если в качестве области определения рассмотреть интервал (a, b), то точка a перестанет быть точкой экстремума, поскольку в этой точке функция не определена.

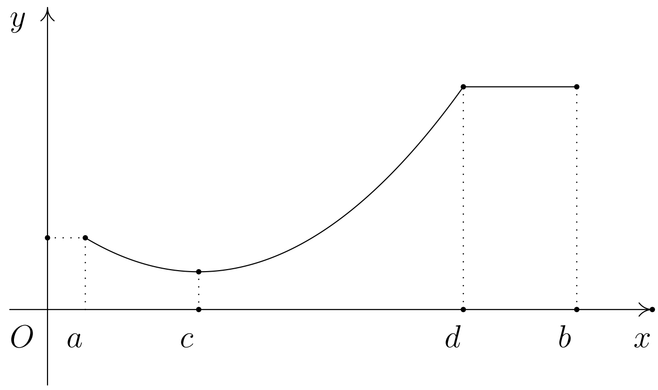

Рис 2.11.1. Геометрическая интерпретация локальных экстремумов

Необходимое условие локального экстремума дает теорема Ферма.

Теорема 2.11.1 (необходимое условие экстремума)**.** *Пусть точка x_0 является точкой локального экстремума функции f, определенной на интервале, который содержит точку x_0. Тогда либо производная функции f в точке x_0 равна нулю ($f'(x_0) = 0$), либо эта производная не существует.*

Необходимое условие экстремума не является достаточным. Например, у функции $y = x^3$ производная $3x^2 = 0$, если $x = 0$, но эта точка не служит точкой экстремума.

Точки, в которых производная равна нулю называют *стационарными* точками функции.

2.11.2. Достаточные условия, использующие первые производные.

Теорема 2.11.2 (достаточные условия экстремума). *Пусть функция f дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой этой точки, в которой она является, тем не менее, непрерывной. Если производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 является точкой строгого экстремума.*

А именно, если слева от x_0 производная $f'(x) > 0$, а справа от x_0 производная $f'(x) < 0$, то данная точка является точкой строгого локального максимума. Если же левее точки x_0 производная $f'(x) < 0$, а правее x_0 производная $f'(x) > 0$, то x_0 является точкой строгого локального минимума.

Если в окрестности точки x_0 производная сохраняет знак, то эта точка не является точкой локального экстремума.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда левее точки x_0 производная положительна, правее — отрицательна. Пусть $x < x_0$. Применим к отрезку $[x, x_0]$ формулу конечных приращений, тогда

$$f(x_0) - f(x) = f'(c) \cdot (x_0 - x),$$

где некотороя точка $c \in (x, x_0)$. Условия теоремы дают, что $f'(c) > 0$ и $x_0 - x > 0$. Поэтому $f(x_0) - f(x) > 0$. Т.е. $f(x) < f(x_0)$.

Аналогично, рассматривая точку $x > x_0$, по теореме Лагранжа получим

$$f(x) - f(x_0) = f'(c) \cdot (x - x_0),$$

где точка $c \in (x_0, x)$. Из условия теоремы получаем, что $f'(c) < 0$ и $x - x_0 > 0$. Поэтому $f(x) - f(x_0) < 0$. Т.е. $f(x) < f(x_0)$. Т.е. x_0 — точка строгого локального максимума.

Аналогично разбираются и все остальные случаи. □

Может быть и такая ситуация, когда производная не имеет определенного знака левее или правее данной точки x_0, тем не менее точка x_0 будет точкой экстремума.

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2\left(2 + \sin\dfrac{1}{x}\right), & \text{если } \ x \neq 0, \\ 0, & \text{если } \ x = 0. \end{cases}$$

У этой функции точка $x = 0$ является точкой строгого локального минимума, а производная ни в какой односторонней окрестности нуля знака не сохраняет.

2.11.3. Достаточные условия, использующие старшие производные.

Теорема 2.11.3 (достаточные условия экстремума). *Пусть в точке x_0 у функции f существуют производные до порядка n, $n \geqslant 1$, включительно, причем*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

Тогда, если n — четное, то функция f имеет в точке x_0 строгий локальный экстремум (максимум при $f^{(n)}(x_0) < 0$ и минимум при $f^{(n)}(x_0) > 0$). Если же n — нечетное, то точка x_0 не является точкой локального экстремума.

Доказательство теоремы 2.11.3 использует формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Рассмотрим

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Тогда правило Лопиталя показывает, что f имеет производные всех порядков в точке $x = 0$, равные нулю. Тем не менее точка 0 будет точкой минимума. Поэтому теорема 2.11.3 не допускает обращения.

Следствие 2.11.1. *Пусть в точке x_0 у функции f существуют производные первого и второго порядка, причем $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$.*

Тогда точка x_0 является точкой локального экстремума, а именно, точкой максимума, если $f''(x_0) < 0$, и точкой минимума, если $f''(x_0) > 0$.

Пример 2.11.1. Найти экстремумы функции $y = x + \dfrac{1}{x}$.

Решение. Найдем производную и приравняем ее к нулю:

$$y' = 1 - \frac{1}{x^2} = 0.$$

Отсюда $x = \pm 1$. Найдем вторую производную:

$$y'' = \frac{2}{x^3}.$$

В точке $x = 1$ вторая производная положительна, а в точке $x = -1$ вторая производная отрицательна. Поэтому точка 1 является точкой минимума, а точка -1 — точкой максимума. Значения $y(1) = 2$, а $y(-1) = -2$. Других точек экстремума нет.

Упражнение 2.11.1. Найти экстремумы функции $y = \sqrt{x} \cdot \ln x$.

Пример 2.11.2. (задача Тартальи). Разделить число 8 на две такие части, чтобы произведение их произведения на разность было максимальным.

Решение. Обозначим через x — наименьшее из этих двух чисел. Тогда $x \in [0, 4]$ и $8 - x$ — большее число. Их разность равна $8 - 2x$. В итоге функция, которую нужно исследовать на экстремум, примет вид

$$y = x(8 - x)(8 - 2x), \quad x \in [0, 4].$$

Находим производную и приравниваем ее к нулю:

$$y' = (x(8 - x)(8 - 2x))' = (2x^3 - 24x^2 + 64x)' =$$

$$= 6x^2 - 48x + 64 = 0.$$

Корнями последнего уравнения служат числа $x_1 = 4 - \dfrac{4}{\sqrt{3}}$ и $x_2 = 4 + \dfrac{4}{\sqrt{3}}$. Второй корень не подходит, так как $x_2 > 4$.

Таким образом, имеются три критические точки: $0, 4, 4 - \dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

Ищем значения функции в этих точках: $y(0) = y(4) = 0$, $y(4 - 4/\sqrt{3}) > 0$. Значит, решение задачи Тартальи есть: $4 - \dfrac{4}{\sqrt{3}}$ — меньшее число и $4 + \dfrac{4}{\sqrt{3}}$ — большее число.

Упражнение 2.11.2. Дан угол и точка внутри него. Требуется провести через эту точку прямую, отсекающую от угла треугольник наименьшей площади.

2.11.4. Наибольшие и наименьшие значения функции на отрезке. Рассмотрим вопрос о нахождении наибольших и наименьших значений функции на отрезке. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда по теореме Вейерштрасса она достигает на $[a, b]$ наибольшего и наименьшего значений. Как их найти?

Предположим, что функция f имеет на интервале (a, b) производную за исключением конечного множества точек. Тогда нужно найти эту производную, приравнять ее к нулю и найти стационарные точки на (a, b). Тогда все локальные экстремумы находятся среди множества стационарных точек, особых точек (в которых производная не существует) и концов промежутка. Все эти точки называются *критическими.* Среди значений функции в критических точках нужно выбрать наименьшее и наибольшее значения. Исследовать знак производной уже не нужно.

Пример 2.11.3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^2 - 4x + 6$ на $[-3, 10]$.

Решение. Производная $y' = 2x-4 = 0$. Стационарная точка $x = 2$ лежит на отрезке $[-3, 10]$. Особых точек производная не имеет. Тогда множество критических точек — это точки -3, 2, 10. Вычисляем значение функции в этих точках: $y(-3) = 27$, $y(2) = 2$, $y(10) = 66$. Поэтому наибольшее значение функции равно 66, наименьшее — 2.

Пример 2.11.4. Найти наибольшее и наименьшее значения следующей функции $y = \sin x \cdot \sin 2x$.

Решение. Поскольку не сказано, на каком множестве нужно искать наибольшее и наименьшее значения, то нужно эту функцию исследовать на экстремум во всей области определения, т.е. на всей числовой оси.

Так как данная функция является периодической с периодом 2π, то достаточно ее исследовать на отрезке $[0, 2\pi]$. А на отрезке мы уже можем использовать приведенную выше схему.

Имеем $y' = \cos x \cdot \sin 2x + \sin x \cdot 2\cos 2x = 0$. Решаем полученное уравнение:

$$\cos x \cdot (2\sin x \cdot \cos x) + 2\sin x(\cos^2 x - \sin^2 x) = 0,$$

$$\sin x \cdot (\cos^2 x + 2\cos^2 x - 1) = 0,$$

$$\sin x = 0 \quad \text{или} \quad 3\cos^2 x = 1.$$

Решениями первого уравнения $\sin x = 0$ на отрезке $[0, 2\pi]$ служат точки $x = 0$, $x = \pi$ и $x = 2\pi$.

Для второго уравнения получаем

$$\cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Так как решить данные уравнения можно только приближенно, то поступим следующим образом. Найдем значения функций $\sin x$ и $\sin 2x$, соответствующие точке x, для которой $\cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. Имеем

$$\sin x = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}},$$

а

$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Причем функции принимают и положительные и отрицательные значения, поскольку рассматриваются на отрезке, соответствующем периоду функции.

Тогда значения функции y в этих точках x равны $\pm\frac{4}{9}\sqrt{3}$. Значения функции в точках $0, \pi, 2\pi$ равны 0. Так что наибольшее значение функции равно $\frac{4}{9}\sqrt{3}$, а наименьшее значение функции равно $-\frac{4}{9}\sqrt{3}$.

Пример 2.11.5. Найти точки экстремума для функции $y = \sqrt{|x|}$ на множестве $[-1, 2)$.

Решение. Найдем производную функции: при $x > 0$ эта функция равна $\sqrt{x}$, поэтому $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Она в нуль не обращается.

При $x < 0$ эта функция равна $\sqrt{-x}$, поэтому $y' = -\dfrac{1}{2\sqrt{-x}}$, она также не равна нулю ни в одной точке. Так что стационарных точек нет. В точке $x = 0$ производная не существует (знаменатель обращается в 0). Следовательно, критическими точками будут точки $x = 0$ и $x = -1$, как граничная точка области определения (точка $x = 2$ не является критической, так как она не принадлежит области определения).

Поскольку $y \geqslant 0 = y(0)$, то точка $x = 0$ есть точка минимума. Точка $x = -1$ является граничной точкой максимума, так как $y(-1) \geqslant y(x)$ при $x < 0$.

Пример 2.11.6. Вписать в заданный шар цилиндр наибольшего объема.

Решение. Пусть шар имеет радиус R. Обозначим половину высоты цилиндра через x. При этом $0 \leqslant x \leqslant R$. Тогда радиус r основания цилиндра равен $\sqrt{R^2 - x^2}$ и его объем равен $2\pi r^2 x = 2\pi(R^2 - x^2)x$. Таким образом, мы должны исследовать на экстремум функцию

$$y = 2\pi(R^2 - x^2)x, \quad x \in [0, R].$$

Ищем производную и приравниваем ее к нулю:

$$y' = 2\pi(R^2 x - x^3)' = 2\pi(R^2 - 3x^2) = 0.$$

Стационарные точки $x_1 = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$ и $x_2 = -\dfrac{R}{\sqrt{3}}$. Второй корень не подходит, так как x должно быть неотрицательным.

Поэтому критические точки — это точки $0, R, \dfrac{R}{\sqrt{3}}$.

Ищем значения функции в этих точках: $y(0) = y(R) = 0$, $y(R/\sqrt{3}) > 0$. Поэтому искомое решение равно $\dfrac{R}{\sqrt{3}}$. Радиус основания $r = \sqrt{R^2 - \dfrac{R^2}{3}} = R\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Отсюда мы и получаем ответ: отношение высоты экстремального цилиндра к диаметру основания равно $\sqrt{2}$.

Упражнение 2.11.3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = \sqrt{5 - 4x}$ на отрезке $[-1, 1]$.

2.12. Условия выпуклости функции

2.12.1. Выпуклость вверх и выпуклость вниз.

Определение 2.12.1. *Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b). Она называется выпуклой вниз на интервале (a, b), если для любых точек x_1 и x_2, $a < x_1 < x_2 < b$, и любых чисел $\alpha_1 \geqslant 0$ и $\alpha_2 \geqslant 0$ таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, выполняется неравенство*

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2). \tag{2.12.1}$$

Если для функции f справедливо обратное неравенство, то функция f называется выпуклой вверх.

Если при $x_1 \neq x_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$ неравенство (2.12.1) является строгим, то функция f называется *строго выпуклой вниз (соответственно, вверх).*

В некоторых учебниках функции выпуклые вниз (соответсвенно, выпуклые вверх) называют *выпуклыми* (соответственно, *вогнутыми*).

Определение 2.12.2. *Всякий интервал, на котором функция выпукла вниз или вверх, называется интервалом выпуклости функции.*

Очевидно, что функция $f(x)$ выпукла вниз тогда и только тогда, когда функция $-f(x)$ — выпукла вверх. Поэтому мы будем рассматривать, в основном, функции выпуклые вниз.

Геометрически условие выпуклости вниз означает, что точки дуги графика функции лежат под хордой, стягивающей эту дугу.

Сначала придадим неравенству (2.12.1) другой вид, более приспособленный для наших целей.

Из соотношений $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ имеем

$$\alpha_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad \alpha_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Поэтому (2.12.1) можно переписать в виде

$$f(x) \leqslant \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \cdot f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot f(x_2).$$

Учитывая, что $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ и $x_1 < x_2$, после умножения на $x_2 - x_1$ получим

$$(x_2 - x)f(x_1) + (x_1 - x_2)f(x) + (x - x_1)f(x_2) \geqslant 0.$$

Замечая, что $x_2 - x_1 = (x_2 - x) + (x - x_1)$, из последнего неравенства имеем

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}, \quad x_1, x_2 \in (a, b), \quad x_1 < x < x_2. \tag{2.12.2}$$

Неравенство (2.12.2) эквивалентно условию выпуклости вниз.

Теорема 2.12.1. *Пусть функция f дифференцируема на интервале (a, b). Для того чтобы f была выпукла вниз на (a, b), необходимо и достаточно, чтобы ее производная f' была возрастающей на (a, b).*

Доказательство. Необходимость. Пусть функция выпукла вниз, тогда для нее выполнены неравенства (2.12.2). Устремляя в (2.12.2) x последовательно к x_1 и x_2, получаем

$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant f'(x_2),$$

что означает монотонность производной.

Достаточность. Для $a < x_1 < x < x_2 < b$ по теореме Лагранжа

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1), \quad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(c_2),$$

где $x_1 < c_1 < x < c_2 < x_2$ и так как $f'(c_1) \leqslant f'(c_2)$, то выполнено неравенство (2.12.2). $\square$

Достаточность показывает, что если производная строго монотонна, то функция — строго выпукла. Но это условие не является необходимым для строгой выпуклости.

Функция $y = x^4$ строго выпукла вниз на числовой прямой, но вторая производная $y'' = 12x^2$ не является строго положительной на $\mathbb{R}$.

Очевидным следствием теоремы 2.12.1 и условия монотонности функции служит утверждение

Следствие 2.12.1. *Пусть функция f дважды дифференцируема на интервале (a, b). Для того чтобы функция f была выпукла вниз, необходимо и достаточно, чтобы $f''(x) \geqslant 0$ на (a, b).*

Пример 2.12.1. Исследовать на выпуклость функцию $y = a^x$.

Решение. Так как $y'' = a^x(\ln^2 a) > 0$, то данная функция строго выпукла вниз на всей действительной оси.

Пример 2.12.2. исследовать на выпуклость функцию $y = \log_a x$.

Решение. Имеем $y'' = -\dfrac{1}{x^2 \ln a}$. Поэтому функция строго выпукла вниз при $0 < a < 1$ и строго выпукла вверх при $a > 1$ на всей области определения $x > 0$.

Пример 2.12.3. Исследовать на выпуклость функцию $y = \sin x$.

Решение. Поскольку $y'' = -\sin x$, то на интервалах $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ функция выпукла вверх, а на интервалах $(2k-1)\pi, 2k\pi)$ функция выпукла вниз.

Упражнение 2.12.1. Исследовать на выпуклость функцию $y = x^\alpha$ при разных значениях α.

Выпуклость функции также связана с определенным положением касательной.

Теорема 2.12.2. *Пусть функция f дифференцируема на интервале (a, b). Для того чтобы она была выпукла вверх на (a, b) (соответственно, выпукла вниз на (a, b)), необходимо и достаточно, чтобы касательная к графику функции в любой точке x_0 из (a, b) лежала выше графика функции на интервале (a, b) (соответственно, лежала ниже графика этой функции).*

2.12.2. Неравенство Йенсена.

Теорема 2.12.3 (неравенство Йенсена). *Пусть функция f выпукла вниз на интервале (a, b), тогда для любых точек $x_1, \ldots, x_n \in (a, b)$ и любых неотрицательных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, таких что $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$, выполнено неравенство*

$$f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n). \tag{2.12.3}$$

Доказательство этой теоремы получается из неравенства (2.12.1) методом полной математической индукции. Если функция f выпукла вверх, то для нее справедливо неравенство (2.12.3), только в нем знак неравенства нужно изменить на противоположный.

Теорема 2.12.3 позволяет доказывать различные неравенства, используя условия выпуклости функций.

Функция $y = \ln x$ строго выпукла вверх на множестве положительных чисел, поэтому неравенство Йенсена дает

$$\alpha_1 \ln x_1 + \ldots + \alpha_n \ln x_n \leqslant \ln(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n)$$

или

$$x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \leqslant \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$$

при $x_j > 0$, $\alpha_j > 0$ $(j = 1, \ldots, n)$ и $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$.

В частности, если $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = \dfrac{1}{n}$, получаем классическое неравенство

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}.$$

2.12.3. Точки перегиба. Иногда важно знать точки, в которых направление выпуклости меняется.

Определение 2.12.3. *Пусть функция f дифференцируема в окрестности точки x_0 и существует такое $\delta > 0$, что на промежутках $(x_0-\delta, x_0)$ и $(x_0, x_0+\delta)$ функция f имеет разные направления выпуклости, тогда точка x_0 называется точкой перегиба функции.*

Условие, сформулированное в определении, можно переформулировать так: если $y = L(x)$ — уравнение касательной к графику функции f в точке x_0, то разность $f(x) - L(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0.

Теорема 2.12.4. *Если функция f дважды дифференцируема в точке x_0 и x_0 — точка перегиба функции, то $f''(x_0) = 0$.*

Теорема 2.12.4 является только необходимым условием точки перегиба, но не достаточным. Достаточное условие можно, например, сформулировать в следующем виде.

Теорема 2.12.5. *Если функция f дифференцируема в окрестности точки x_0 и дважды дифференцируема в проколотой окрестности этой точки, а вторая производная меняет знак при переходе через эту точку, то x_0 является точкой перегиба функции f.*

Пример 2.12.4. Найти точки перегиба функции $y = \sin x$.

Решение. Точками перегиба служат точки $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, поскольку в этих точках вторая производная равна нулю и она меняет знак при переходе через эти точки.

2.13. Асимптоты. Исследование функции и построение ее графика

2.13.1. Асимптоты. Разберем сначала вопрос о нахождении *асимптот* функции.

Пусть функция f определена для всех $x > a$ (соответственно, для всех $x < b$).

Определение 2.13.1. *Если существуют числа k и l такие, что*

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - (kx + l)) = 0$$

(соответственно, при $x \to -\infty$), то прямая $y = kx + l$ называется (наклонной) асимптотой графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$).

Асимптота называется *горизонтальной*, если константа $k = 0$.

Определение 2.13.2. *Вертикальными асимптотами функции f являются прямые, соответствующие точкам бесконечного разрыва этой функции (хотя бы с одной стороны).*

Теорема 2.13.1. *Для того, чтобы прямая $y = kx + l$ служила асимптотой функции f при $x \to +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},$$

$$l = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx).$$

Доказательство. Пусть прямая $y = kx + l$ является асимптотой функции $f(x)$ при $x \to +\infty$. Тогда

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (kx + l)) = 0.$$

Деля это выражение на x, получим

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x) - (kx + l)}{x} \right) = 0,$$

отсюда получаем, что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k.$$

Возвращаясь еще раз к определению асимптоты, получаем

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = l.$$

В обратную сторону доказательство предоставляется читателю. □

Аналогичная теорема верна для асимптот функции f при $x \to -\infty$.

Пример 2.13.1. Найти асимптоты функции

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 2}{x + 1}.$$

Решение. По теореме 2.13.1 имеем

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 3x - 2}{x(x + 1)} = 1,$$

$$l = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 - 3x - 2}{x + 1} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-4x - 2}{x + 1} = -4.$$

Таким образом, асимптота данной функции при $x \to \pm\infty$ имеет уравнение $y = x - 4$. □

2.13.2. Схема исследования функции. Изучение заданной функции и построение ее графика с помощью развитого аппарата целесообразно проводить по следующей схеме.

1. Определить область существования и область значений данной функции, исследовать поведение функции в граничных точках области определения.
2. Найти промежутки постоянства знака и нули функции, точки пересечения с осями координат.
3. Исследовать функцию на четность, нечетность, периодичность.
4. Найти промежутки непрерывности, точки разрыва, виды точек разрыва и вертикальные асимптоты.
5. Найти наклонные асимптоты функции.
6. Вычислить первую производную функции, найти с ее помощью промежутки возрастания, убывания функции, точки экстремума и значения функции в точках экстремума.
7. Вычислить вторую производную, найти с ее помощью промежутки выпуклости функции, точки перегиба и значения функции в точках перегиба.
8. Построить график функции.

2.13.3. Пример исследования функции. Рассмотрим пример.

Пример 2.13.2. Исследовать и построить график функции

$$y = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x.$$

Решение. 1. Область определения этой функции — вся числовая ось. Функция ограничена на своей области определения, поскольку таким свойством обладают функции $\cos x$ и $\cos 2x$.

2. Область значений определить трудно, пока не найдены экстремумы.

Исследуем сначала функцию на симметричность и периодичность.

3. Функция четная, так как

$$y(-x) = \cos(-x) + \frac{1}{2}\cos(-2x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x = y(x)$$

в силу четности косинуса.

4. Функция периодическая с периодом 2π, поскольку таким свойством обладают функции $\cos x$ и $\cos 2x$. Это означает, что график функции достаточно строить на промежутке $[0, \pi]$, затем его симметрично отразить относительно оси Oy, а полученный график сдвигать вдоль оси Ox на числа, кратные 2π вправо и влево.

5. Рассмотрим уравнение

$$\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x = 0,$$

$$2\cos x + 2\cos^2 x - 1 = 0.$$

Отсюда $\cos x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$.

Корень $\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$ не лежит в области значений косинуса, поскольку его модуль больше 1. Второй корень $\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ лежит в области значений косинуса. Поэтому имеем

$$x = \pm \arccos\frac{-1+\sqrt{3}}{2} + 2\pi n, \quad x \in Z.$$

На промежутке $[0, \pi]$ лежит лишь один корень этого уравнения:

$$x_1 = \arccos\frac{-1+\sqrt{3}}{2}.$$

Он может быть найден только приближенно. На интервале $(0, x_1)$ функция положительна, а на интервале (x_1, π) функция отрицательна.

6. При $x = 0$ функция $y = \dfrac{3}{2}$.

7. Находим производную и приравниваем ее к нулю:

$$y' = -\sin x - \sin 2x = 0.$$

Отсюда $\sin x + 2\sin x \cdot \cos x = 0$, т.е. $\sin x = 0$ и $x = 0, \pi$ (если рассматривать точки x только из промежутка $[0, \pi]$).

Второе уравнение $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ дает решение $x = \dfrac{2}{3}\pi$. На промежутке $(0, 2\pi/3)$ производная отрицательна, т.е. функция убывает. На промежутке $(2\pi/3, \pi)$ производная положительна, т.е. функция возрастает.

Следовательно, $x = 0$ — точка максимума и $y(0) = 3/2$. Точка $x = 2\pi/3$ — точка минимума и $y(2\pi/3) = -3/4$. Точка $x = \pi$ — точка максимума и $y(\pi) = -1/2$.

Поэтому область значений функции есть промежуток $[-3/4, 3/2]$.

8. Находим вторую производную и приравниваем ее к нулю:

$$y'' = -\cos x - 2\cos 2x = 0.$$

Отсюда $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{8}$. Это точки перегиба.

Соответственно, определяются интервалы выпуклости вниз и вверх.

9. График функции показан на рис. 2.13.1.

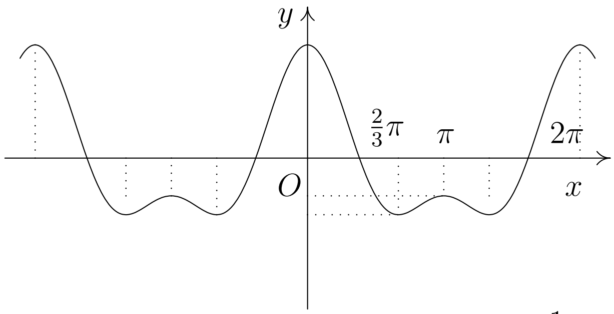

Рис 2.13.1. График функции $y = \cos x + \dfrac{1}{2}\cos 2x$

Упражнение 2.13.1. Исследовать и построить график функции $y = |x+2|e^{-1/x}$.

Глава 3

Неопределенный интеграл

После изучения этой главы читать должен знать определение неопределенного интеграла и первообразной, уметь находить интегралы от рациональных, иррациональных, тригонометрических и разного типа трансцендентных функций, владеть методами вычисления неопределенных интегралов: интегрирование по частям и с помощью замены переменной.

3.1. Неопределенный интеграл и его свойства

Для решения многих задач, использующих для своего описания дифференциальное исчисление (см. дополнение, § 11.3), очень часто приходится искать функции, производные которых известны. Например, известна функция $f(x) = x^2$, а необходимо найти функцию $F(x)$ такую, что $F'(x) = f(x) = x^2$. Решение этой конкретной задачи очень просто и не трудно сообразить, что для записи функции $F(x)$ можно использовать формулу $\dfrac{x^3}{3}$ или формулу $\dfrac{x^3}{3} + C$, где C — произвольная постоянная.

Рассмотрим в общем виде задачу отыскания функции $F(x)$ по ее известной производной $f(x)$. Сразу отметим, что решение этой задачи производится с помощью операции, которая называется *интегрированием* или, более точно *неопределенным интегрированием.* В процессе изучения этой новой операции, обратной дифференцированию, будут даны ответы на вопрос существования функции $F(x)$, ее единственности, правил и методов отыскания.

3.1.1. Первообразная и неопределенный интеграл.

Определение 3.1.1. *Пусть функции F и f заданы на конечном или бесконечном интервале (a, b). Функция F называется первообра́зной для функции f на интервале (a, b), если F дифференцируема на (a, b) и*

$$F'(x) = (x) \tag{3.1.1}$$

или

$$dF(x) = f(x)dx$$

для всех $x \in (a, b)$.

Иногда вместо термина "первообразная для данной функции $f(x)$" употребляют слова "первообразная данной функции $f(x)$".

Пример 3.1.1. Найти первообразную функции $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Решение. Функция $F(x) = \operatorname{arctg} x$ является первообразной для $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ на всей числовой прямой (рис. 3.1.1), так как

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Пример 3.1.2. Проверить, что функция $F(x) = \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}$ является первообразной для $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ на любом интервале, не содержащем ноль. Например, на интервале $(-\infty, 0)$, или $(0, +\infty)$, или $(1, 5)$ и т.п.

Решение. Действительно,

$$F'(x) = \left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} = f(x), \quad x \neq 0.$$

Заметим, что функцию $\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}$ нельзя назвать первообразной функции $\dfrac{1}{1+x^2}$ на множестве $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, так как это последнее множество не является интервалом (рис. 3.1.2).

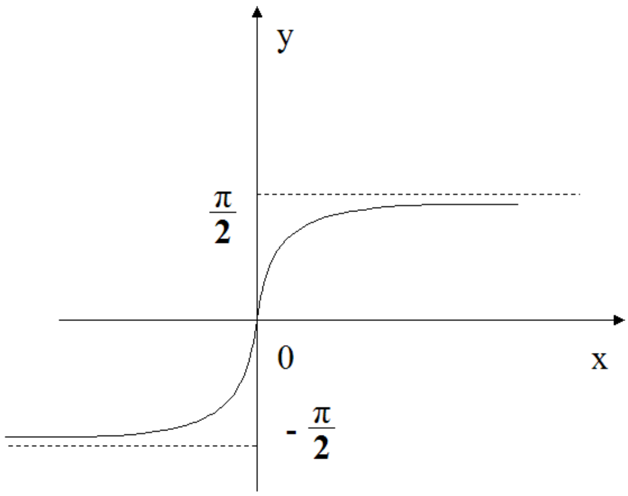

Рис 3.1.1. График функции $y = \operatorname{arctg} x$

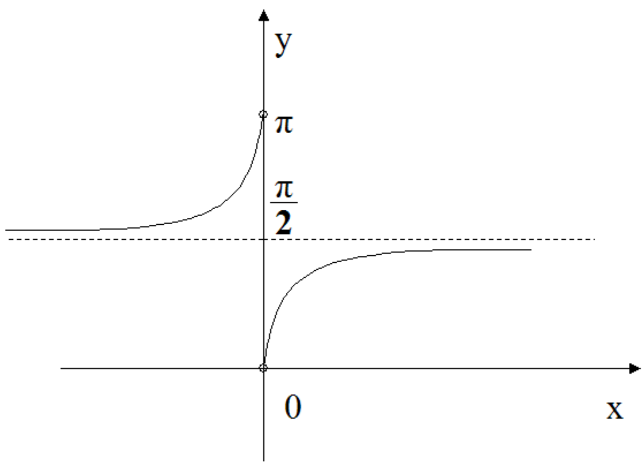

Рис 3.1.2. График функции $y = \operatorname{arcctg} 1/x$

Пример 3.1.3. Проверить, что функция $F(x) = \ln|x|$ — первообразная функции $\dfrac{1}{x}$ на любом интервале, не содержащем ноль.

Решение. Действительно, если $x > 0$, то

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

и если $x < 0$

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

Замечание 3.1.1. *В определении 3.1.1 вместо интервала (a, b) можно использовать отрезок $[a, b]$, полуинтервалы $[a, b)$ или $(a, b]$. Это несколько усложнит дальнейшие рассуждения (придется говорить о правых и левых производных в точках $x = a$ и $x = b$), но не изменит сути дела.*

Ответ на важнейший вопрос о существовании первообразной функции $F(x)$ для функции $f(x)$ будет дан позднее (при изучении определенного интеграла), когда будет доказана фундаментальная теорема о том, что любая *непрерывная* на (a, b) функция имеет на этом интервале (a, b) первообразную $F(x)$.

Сейчас же легко описать множество первообразных для данной функции $f(x)$.

Теорема 3.1.1. *Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две первообразные для функции $f(x)$, на интервале (a, b), то их разность $F_1(x) - F_2(x)$ постоянна на этом интервале.*

Доказательство. Производная разности функций $F_1(x) - F_2(x)$ равна нулю на интервале (a, b)

$$(F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Тогда из теоремы Лагранжа о среднем следует, что $F_1(x) - F_2(x) = C$, где C — некоторая постоянная, то есть

$$F_1(x) = F_2(x) + C \tag{3.1.2}$$

Таким образом, если $F_2(x)$ есть какая-либо первообразная для функции $f(x)$ на интервале (a, b), то всякая функция $F_1(x)$ вида (3.1.2) также является первообразной для $f(x)$ на интервале и всякая первообразная функции для $f(x)$ на (a, b) представима в таком виде.

Определение 3.1.2. *Множество всех первообразных функций $f(x)$ на интервале (a, b) называется неопределенным интегралом и обозначается так:*

$$\int f(x)\,dx.$$

Если $F(x)$ — какая-либо первообразная функции на (a, b), то пишут

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{3.1.3}$$

хотя было бы правильнее писать

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) + C\}.$$

Будем употреблять запись (3.1.3), как это обычно принято.

Подчеркнем, что равенство в обеих частях которого стоят неопределенные интегралы, следует понимать, как равенство между множествами.

Знак $\displaystyle\int$ называется знаком неопределенного интеграла, f есть *подынтегральная* функция, а $f(x)dx$ — *подынтегральное* выражение. Запись под знаком интеграла не просто функции $f(x)$, а выражения $f(x)dx$ удобнее, так как явно указывается, по какой переменной искать первообразную.

Пример 3.1.4. Найти неопределенные интегралы от функции ax^2 по x и по a.

Решение. Имеем

$$\int ax^2\,dx = \frac{ax^3}{3} + C, \quad \int ax^2\,da = \frac{a^2x^2}{2} + C.$$

Преимущества использования под интегралом выражения $f(x)dx$ будут обнаружены и в дальнейшем.

Заметим, что две первообразные функции $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}$ для функции $\dfrac{1}{1+x^2}$ из первых двух примеров связаны равенствами:

$$\operatorname{arcctg}\frac{1}{x} = \operatorname{arctg} x + \pi, \quad C = \pi, \quad x \in (-\infty, 0);$$

$$\operatorname{arcctg}\frac{1}{x} = \operatorname{arctg} x + 0, \quad C = 0, \quad x \in (0, \infty).$$

Возникает кажущееся противоречие с формулой (3.1.2), так как в этой формуле постоянная C единственна при фиксированных функциях $F_1(x)$ и $F_2(x)$.

Противоречие снимается, если внимательно прочитать условия второго примера и уяснить, что функция $\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}$ не является первообразной для функции $\dfrac{1}{1+x^2}$ на интервале $(-\infty, +\infty)$ и, таким образом, сравнивать две функции $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}$ как первообразные для функции $\dfrac{1}{1+x^2}$ на интервале $(-\infty, +\infty)$ нельзя. Но эти же функции $\left(\operatorname{arctg} x \ \text{ и } \ \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}\right)$, например, на интервале $(-\infty, 0)$ уже первообразные для $\dfrac{1}{1+x^2}$ и формула (3.1.2) для них естественно верна ($C = \pi$).

3.1.2. Основные свойства неопределенного интеграла. Для $x \in (a, b)$ справедливы равенства:

1. $\displaystyle\int dF(x) = F(x) + C,$

2. $\displaystyle d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)dx.$

Верность этих утверждений вытекает из определения первообразной и неопределенного интеграла. Например, справедливость второго равенства следует из несложной цепочки равенств

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = d\,(F(x) + C) = dF(x) + dC = f(x)dx + 0.$$

3. Свойство аддитивности неопределенного интеграла относительно функций.

Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют первообразные на интервале (a, b), то и функция $f_1(x) + f_2(x)$ имеет первообразную на этом интервале, причем

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx. \tag{3.1.4}$$

Доказательство. Пусть для $x \in (a, b)$

$$\int f_1(x)\,dx = F_1(x) + C_1, \quad \int f_2(x)\,dx = F_2(x) + C_2$$

или

$$F_1'(x) = f_1(x), \quad F_2'(x) = f_2(x).$$

Положим

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x)$$

тогда

$$F'(x) = F_1'(x) + F_2'(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

то есть функция $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$ есть одна из первообразных для $f_1(x) + f_2(x)$ и поэтому

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = F_1(x) + F_2(x) + C.$$

Таким образом левая часть доказываемой формулы (3.1.4) состоит из функций вида

$$F_1(x) + F_2(x) + C,$$

а правая — из функций вида

$$F_1(x) + F_2(x) + C_1 + C_2.$$

Ввиду произвольности постоянных C, C_1 и C_2 эти совокупности функций совпадают (для любого числа C можно указать числа C_1 и C_2 такие, что $C = C_1 + C_2$). □

4. Если функция $f(x)$ имеет первообразную на интервале (a, b) и k — постоянная, то и функция $k \cdot f(x)$ имеет первообразную для $x \in (a, b)$ и справедливо равенство (при $k \neq 0$)

$$\int kf(x)\,dx = k \int f(x)\,dx. \tag{3.1.5}$$

Доказательство. Пусть для $x \in (a, b)$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

или

$$F'(x) = f(x).$$

Тогда

$$(kF(x))' = kf(x),$$

то есть первообразная для функции $kf(x)$ найдена.

Докажем формулу (3.1.5). Ее левая часть равна

$$kF(x) + C_1,$$

а правая

$$k[F(x) + C] = kF(x) + kC.$$

В силу произвольности постоянных C и C_1 и условия $k \neq 0$ совокупности функций $kF(x) + C_1$ и $kF(x) + C$ совпадают, а значит верна формула (3.1.5). □

3.1.3. Табличные интегралы. Уже говорилось, что операция интегрирования является операцией, обратной операции дифференцирования, поэтому всякая формула вида

$$F'(x) = f(x)$$

может быть записана в виде интегральной формулы

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C.$$

Например, равенство

$$(\sin x)' = \cos x$$

в интегральной форме имеет вид

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C.$$

Используя подобный подход, запишем таблицу неопределенных интегралов, которая получается непосредственно из соответствующей таблицы производных элементарных функций (см. § 2.4).

1. $\displaystyle\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad x > 0, \quad \alpha \neq -1.$

(Формула справедлива и для всех $x \leqslant 0$, если степень x^α имеет смысл для этих x, например, при $\alpha = 2$.)

2. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C$ на любом интервале, на котором $x \neq 0$.

3. $\displaystyle\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1$

(в частности, $\displaystyle\int e^x\, dx = e^x + C$.)

4. $\displaystyle\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$

5. $\displaystyle\int \cos x\, dx = \sin x + C.$

6. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C.$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C.$

8. $\displaystyle\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C.$

9. $\displaystyle\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C.$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

12. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C.$

13. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$

14. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + C.$

15. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm 1}) + C.$

Отметим, что если в вышеприведенных равенствах подынтегральная функция теряет смысл для каких–то x, то написанные формулы справедливы только на интервалах, не содержащих этих x.

С помощью интегралов 1–15, называемых обычно *табличными интегралами*, и доказанных выше свойств неопределенного интеграла можно выразить интегралы и от более сложных элементарных функций через элементарные функции. Например,

$$\int \left(7\cos x - 3 + \frac{x^3}{4} - \frac{1}{2x}\right) dx = 7\int \cos x\, dx - 3\int dx +$$

$$+\frac{1}{4}\int x^3\, dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} = 7\sin x - 3x + \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}\ln|x| + C.$$

Равенства справедливы на любом интервале, не содержащем нуля.

3.2. Основные методы интегрирования

3.2.1. Интегрирование с помощью замены переменной.

Теорема 3.2.1. *Пусть функции $f(x)$, и $x = \varphi(t)$ определены на некоторых интервалах так, что имеет смысл сложная функция $f(\varphi(t))$ и функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема. Тогда, если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то есть*

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C,$$

то функция $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ имеет первообразную

$$F(\varphi(t))$$

и, значит,

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C. \tag{3.2.1}$$

Доказательство. Сложная функция $F(\varphi(t))$ имеет смысл, так как определена функция $f(\varphi(t))$, а области определений $f(x)$ и $F(x)$ совпадают. Найдем производную для $F(\varphi(t))$ по переменной t:

$$\frac{dF(\varphi(t))}{dt} = \frac{F'(\varphi(t))}{dx} \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt} = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t),$$

т.е. функция $F(\varphi(t))$ — первообразная для функции $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ и формула (3.2.1) доказана.

Формула (3.2.1) часто используется на практике для вычисления неопределенных интегралов. Но для удобства использования перепишем ее в следующем виде

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int f(x)\, dx, \tag{3.2.2}$$

где $x = \varphi(t)$ или

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int f(\varphi(t)) d\varphi(t). \tag{3.2.3}$$

Пример 3.2.1. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{t\, dt}{t^2 + 1}$.

Решение. Пусть $\varphi'(t)dt = tdt$. Тогда в качестве $\varphi(t)$ можно взять функцию $\frac{1}{2}(t^2+1)$ и записать по формулам (3.2.2) и (3.2.3):

$$\int \frac{t\,dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\ln|x| + C = \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + C.$$

3.2.2. Интегрирование по частям.

Теорема 3.2.2. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на некотором интервале и интеграл*

$$\int v(x)\,du(x)$$

существует, то и интеграл

$$\int u(x)\,dv(x)$$

также существует и справедливо равенство

$$\int u(x)\,dv(x) = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\,du(x). \tag{3.2.4}$$

Доказательство. Вычислим дифференциал произведения функций $u(x)\cdot v(x)$.

$$d\left(u(x)\cdot v(x)\right) = v(x)du(x) + u(x)dv(x)$$

или

$$u(x)dv(x) = d\left(u(x)\cdot v(x)\right) - v(x)du(x).$$

Если дифференциалы функций равны, то, очевидно, их неопределенные интегралы, как множества функций, совпадают; поэтому

$$\int u(x)\,dv(x) = \int d\left(u(x)\cdot v(x)\right) - \int v(x)\,du(x)$$

(см. свойство 1, § 3.1). □

Пример 3.2.2. Вычислить интеграл $\int xe^x\,dx$.

Решение. Легко видеть, что $\int xe^x\,dx = \int xd(e^x)$ (эту операцию называют "занесением функции e^x под знак дифференциала"). Тогда в формуле (3.2.4) $u(x) = x$, а $v(x) = x$. Используя указанную формулу, получим ответ:

$$\int xe^x\,dx = \int xd(e^x) = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C.$$

Пример 3.2.3. Вычислить интеграл $\int x^2\ln x\,dx$.

Решение. "Занесем" функцию x^2 под знак дифференциала:

$$\int x^2\ln x\,dx = \int \ln x d\left(\frac{x^3}{3}\right).$$

Далее, используя формулу (3.2.4), получим:

$$\int \ln x d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot d(\ln x) = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\cdot\ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

Пример 3.2.4. Вывести рекуррентную формулу для вычисления интеграла

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Рекуррентная формула устанавливает алгебраическую связь между интегралами J_{n+1} и J_n и тем самым позволяет интеграл с любым номером n свести к интегралу J_1, который фактически является табличным, $J_1 = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$.

Решение. Применим к интегралу

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$$

формулу (3.2.4), полагая $u(x) = \dfrac{1}{(x^2+a^2)^n}, \quad v = x$.

Тогда

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}dx.$$

Последний интеграл преобразуется следующим образом:

$$\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx = \int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx =$$

$$= \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - a^2\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = J_n - a^2 J_{n+1},$$

что дает возможность записать:

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nJ_n - 2na^2 J_{n+1}.$$

Откуда и получается рекуррентная формула

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{a^2}J_n. \tag{3.2.5}$$

3.3. Интегрирование рациональных функций

В этой лекции будет рассмотрен метод интегрирования рациональной функции $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с действительными коэффициентами (см. § 11.2 из дополнения).

На основании теоремы 11.2.8 (см. § 11.2 из дополнения) всякая правильная (степень многочлена $P(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$) рациональная несократимая дробь $R(x)$ с действительными коэффициентами разлагается следующим образом:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \ldots + \frac{A_l}{(x-a)^l} + \ldots + \frac{B_1}{x-b} + \ldots \tag{3.3.1}$$

$$+\frac{B_m}{(x-b)^m} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \ldots + \frac{M_sx+N_s}{(x^2+px+q)^s},$$

где многочлен $Q(x)$ имеет разложение

$$Q(x) = C(x-a)^l \cdot\ldots\cdot (x-b)^m(x^2+px+q)^s \ldots,$$

причем квадратные многочлены $x^2+px+q, \ldots$ не имеют действительных корней.

Коэффициенты числителей в разложении (3.3.1) могут быть найдены методом неопределенных коэффициентов.

Рациональные дроби вида

$$\frac{A}{(x-a)^l}, \qquad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^s}, \tag{3.3.2}$$

где a, p, q, A, M, N — действительные числа и $\frac{p^2}{4} - q < 0$ (корни многочлена x^2+px+q существенно комплексные) называются *элементарными рациональными дробями.*

Легко видеть, что разложение (3.3.1) есть сумма элементарных рациональных дробей. С точки зрения интегрирования элементарных дробей среди них следует выделить четыре типа дробей:

$$\frac{A}{x-a}; \qquad \frac{A}{(x-a)^l}, \quad l = 2, 3, \ldots;$$
$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}; \qquad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^s}, \quad s = 2, 3, \ldots$$

Научившись интегрировать эти четыре типа, не трудно найти и интеграл

$$\int R(x)\,dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx.$$

3.3.1. Интегрирование элементарных рациональных дробей четырех типов.

$$1). \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C. \tag{3.3.3}$$

$$2). \int \frac{A}{(x-a)^l} dx = -\frac{A}{(l-1)(x-a)^{l-1}} + C, \qquad l = 2, 3, \ldots \tag{3.3.4}$$

$$3). \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx.$$

Выделим из выражения x^2+px+q полный квадрат двучлена:

$$x^2+px+q = x^2 + 2\cdot\frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left[q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right] = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right).$$

Так как величина $q - \frac{p^2}{2} > 0$, то можно ввести число a по формуле $a = +\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$ или $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$. Сделав замену переменной

$$x + \frac{p}{2} = t, \qquad dx = dt$$

и используя равенства

$$x^2+px+q = t^2+a^2, \qquad Mx+N = Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right),$$

найдем требуемый интеграл

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \int \frac{Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{t^2+a^2} =$$
$$= \frac{M}{2}\int \frac{2tdt}{t^2+a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(t^2+a^2) + \frac{1}{a}\left(N - \frac{Mp}{2}\right)\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C,$$

или, возвращаясь к переменной x, и подставляя вместо a его значение:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \tag{3.3.5}$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

$$4).\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^s}dx.$$

Воспользуемся той же заменой переменной $x + \dfrac{p}{2} = t$ и обозначениями, что и при интегрировании дроби третьего типа, получим:

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^s}dx = \int \frac{Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{(t^2+a^2)^s}dt =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{2+dt}{(t^2+a^2)^s}dt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^s}.$$

Первый интеграл в последней сумме легко вычисляется еще одной заменой переменной

$$t^2+a^2 = u, \qquad 2tdt = du$$

$$\int \frac{2t}{(t^2+a^2)^s}dt = \int \frac{du}{u^s} = -\frac{1}{s-1}\cdot\frac{1}{u^{s-1}} + C = \tag{3.3.6}$$

$$= -\frac{1}{s-1}\frac{1}{(t^2+a^2)^{s-1}} + C.$$

Второй же интеграл, при любом натуральном s может быть вычислен по рекуррентной формуле (см. пример 3.2.4, формула (3.2.5)).

Таким образом, используя аддитивность интеграла для любой правильной рациональной несократимой дроби $R(x)$ с действительными коэффициентами неопределенный интеграл может быть найден и выражен через элементарные функции, а именно он является алгебраической суммой суперпозиций рациональных дробей, арктангенсов и натуральных логарифмов.

Если дробь $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ — неправильная (степень многочлена $P(x)$ больше или равна степени многочлена $Q(x)$), то сначала выделяется "целая часть" (многочлен), т.е. данная рациональная дробь представляется в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби и далее снова, используя аддитивность, выражаем неопределенный интеграл от неправильной дроби $R(x)$ через элементарные функции.

3.3.2. Метод Остроградского. Не трудно заметить (анализируя результаты интегрирования элементарных дробей четырех типов), что всякая первообразная любой рациональной дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ представима, вообще говоря, в виде суммы рациональной дроби и трансцендентной функции (логарифмов и арктангенсов), которая получается при интегрировании дробей вида

$$\frac{A}{x-a} \quad \text{и} \quad \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \qquad \frac{p^2}{4} - q < 0.$$

Таким образом, если $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ — правильная рациональная дробь и

$$Q(x) = (x-a_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x-a_r)^{n_r}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+p_sx+q_s)^{m_s}$$

разложение ее знаменателя на множители, то

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \left[\sum_{i=1}^{r} \frac{A_i}{x-a_i} + \sum_{j=1}^{s} \frac{M_jx+N_j}{x^2+p_jx+q_j} \right] dx$$

Произведя сложение дробей в квадратных скобках, получим

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx, \tag{3.3.7}$$

где $Q(x) = (x-a_1) \cdot \ldots \cdot (x-a_r)(x^2+p_1x+q_1) \cdot \ldots \cdot (x^2+p_sx+q_s)$.

Из формул (3.3.4), (3.3.5) и (3.3.6)следует, что многочлен $Q_1(x)$ имеет вид

$$Q_1(x) = (x-a_1)^{n_1-1} \cdot \ldots \cdot (x-a_r)^{n_r-1}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1-1} \cdot \ldots \cdot (x^2+p_sx+q_s)^{m_s-1}$$

и, значит многочлен $Q_1(x)$ является общим наибольшим делителем многочлена и его производной $Q'(x)$.

Формула (3.3.7) называется *формулой Остроградского.*

Интеграл $\displaystyle\int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx$ называется *трансцендентной частью* интеграла

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx.$$

Это естественно, ведь из вышеизложенного следует, что всякая первообразная дроби $\dfrac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ с точностью до постоянного слагаемого представляет собой линейную комбинацию логарифмов и арктангенсов от рациональных функций.

Дробь $\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ называется *рациональной частью* интеграла $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$.

Если известны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$, то многочлены $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ ($Q(x) = Q_1(x) \cdot Q_2(x)$) могут быть найдены, например, с помощью алгоритма Евклида. Для отыскания же многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ можно применить метод неопределенных коэффициентов с использованием равенства

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left(\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right)' + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}, \tag{3.3.8}$$

которое получается диффернцированием формулы (3.3.7). Степени многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ с неизвестными коэффициентами выбираются на единицу меньше степеней соответствующих знаменателей $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$.

Можно показать, что соотношение (3.3.8) позволяет единственным образом найти неизвестные коэффициенты многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$.

3.4. Интегрирование иррациональных функций

3.4.1. Интегрирование выражений вида $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$. Основным приемом нахождения интеграла от указанного выражения, где буква R обозначает рациональную функцию от своих аргументов (а в дальнейшем и других интегралов от иррациональных функций) будет отыскание таких подстановок $t = \varphi(x)$, которые привели бы подынтегральное выражение к рациональному виду относительно новой переменной $\int R_1(t)\,dt$. Последний интеграл можно выразить в конечном виде через элементарные функции, используя методики предыдущей лекции. Если функция $\varphi(x)$ сама элементарна, то возвращаясь к переменной x, получим нужный интеграл в виде элементарной функции.

Будем называть такой прием *методом рационализации подынтегрального выражения.*

Проиллюстрируем этот прием на вычислении интеграла

$$\int R\left(x,\ \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \tag{3.4.1}$$

где R означает рациональную функцию от двух аргументов x и $y = \sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$, m — натуральное число, a, b, c, d — постоянные вещественные числа, причем $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$. (В случае, когда $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$, дробь $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ не зависит от x и подынтегральная функция была бы рациональной относительно переменной x.)

Положим

$$t = \varphi(x) = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \quad t^m = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad x = \psi(t) = \frac{dt^m - b}{a - ct^m}.$$

Искомый интеграл перейдет в интеграл

$$\int R\left(\psi(t), t\right)\psi'(t)\,dt \tag{3.4.2}$$

от рациональной функции $R\left(\psi(t), t\right)\psi'(t)$ $\left(R\left(\psi(t), t\right)\right.$ рациональна, как суперпозиция рациональных, $\psi'(t)$ рациональна, как производная рациональной функции).

Вычислив интеграл (3.4.2) по правилам предыдущей лекции и вернувшись к старой переменной $(t = \varphi(x))$, найдем интеграл (3.4.1).

Замечание 3.4.1. *К интегралу вида (3.4.1) сводятся и более общие интегралы*

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right] dx,$$

где все показатели $r_1, \dots r_s$ рациональны.

Действительно, достаточно привести эти показатели к общему знаменателю m, чтобы выразить все степени $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_i}$ $(i = 1, \dots, s)$ через один радикал $\sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ с целыми показателями n_i, $n_i = m \cdot r_i$ $(i = 1, 2, \dots, s)$.

3.4.2. Интегрирование выражений вида $x^m(a + bx^n)^p$. Интеграл от указанного вида функций

$$\int x^m(a + bx^n)^p\,dx \tag{3.4.3}$$

называют интегралом от *дифференциального бинома* (или биномиального дифференциала)

$$x^m(a + bx^n)^p dx,$$

если a и b — вещественные числа $(a \neq 0,\ b \neq 0)$, n, m и p — рациональны.

Укажем случаи, когда интеграл (3.4.3) выражается через элементарные функции. Прежде всего этот случай возникает, если p есть целое число ($p \in \mathbb{Z}$). Тогда функция $x^m(a+bx^n)^p$ относится к типу, изученному в предыдущем пункте ($r_1 = m,\ r_2 = n$).

Для выяснения других случаев сделаем замену переменной $z = x^n$ Тогда

$$x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{1}{n}(a+bz)^p z^{\frac{m+1}{n}-1} dz$$

или

$$\int x^m(a+bx^n)^p\, dx = \frac{1}{n}\int (a+bz)^p z^q\, dz, \tag{3.4.4}$$

где $q = \dfrac{m+1}{n} - 1$.

Если q есть целое число, то снова приходим к интегралу изученного типа (см. предыдущий пункт, $r_1 = p$).

Перепишем, наконец, второй интеграл равенства (3.4.4) в виде

$$\frac{1}{n}\int \left(\frac{a+bz}{z}\right)^p z^{p+q} dz$$

и снова заключаем, что если $p+q$ есть целое число, то возникает изученный случай (см. предыдущий пункт, $r_1 = p$).

Таким образом, интегралы (3.4.4) от дифференциального бинома выражаются через элементарные функции, если оказывается целым одно из чисел

$$p, q, p+q$$

или (что то же самое) одно из чисел

$$p, \quad \frac{m+1}{n}, \quad \frac{m+1}{n} + p.$$

П.Л.Чебышёв (1821–1894) — русский математик — показал, что при показателях m, n и p, не удовлетворяющих вышеуказанным условиям, интеграл (3.4.3) не выражается через элементарные функции.

3.4.3. Интегрирование выражений вида $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$. Рассмотрим очень важный класс интегралов

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx \tag{3.4.5}$$

в предположении, что трехчлен ax^2+bx+c не есть полный квадрат (иначе исчезает иррациональность) и вещественные коэффициенты a, b, c таковы, что подынтегральная функция определена на каком-то интервале.

Существует три подстановки, называемые подстановками Эйлера, с помощью которых всегда можно достигнуть рационализации подынтегрального выражения.

1. Пусть $a > 0$, тогда полагают

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x \tag{3.4.6}$$

(или $\sqrt{ax^2+bx+c} = t + \sqrt{a}x$). Возводя равенство (3.4.6) в квадрат, найдем что

$$x = \frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}, \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b},$$

$$dx = 2\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt.$$

если в интеграле (3.4.5) использовать полученные выражения, то подынтегральная функция окажется рациональной относительно переменной t и интеграл может быть найден. Для возвращения к переменной x, следует положить

$$t = \sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{a}x.$$

2. Пусть $c > 0$. В этом случае полагаем

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}$$

(или $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt - \sqrt{c}$).

Производя фактически те же преобразования, что и в первом случае, найдем, что

$$x = \frac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{c}t^2 - bt + a\sqrt{c}}{a - t^2},$$

$$dx = 2\frac{\sqrt{c}t^2 - bt + a\sqrt{c}}{(a - t^2)^2}dt.$$

Далее, интегрируя рациональную функцию относительно переменной t и полагая

$$t = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{c}}{x},$$

находим интеграл (3.4.5).

3. Пусть квадратный трехчлен $x^2 + bx + c$ имеет различные вещественные корни x_1 и x_2. Тогда

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Положим

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1).$$

Возводя последнее равенство в квадрат, найдем

$$x = \frac{-ax_2 + x_1 t^2}{t^2 - a}, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{a(x_1 - x_2)}{t^2 - a},$$

$$dx = \frac{2a(x_2 - x_1)t}{(t^2 - a)^2}dt.$$

Далее вычисления интеграла (3.4.5) идут по той же схеме, что и в первом (или втором) случае.

Замечание 3.4.2. *Первый случай ($a > 0$) и второй ($c > 0$) можно свести один к другому подстановкой $x = \frac{1}{z}$ и, таким образом, пользоваться только, например, первым случаем.*

Замечание 3.4.3. *Ясно, что вариант, когда не подходит ни первый, ни третий случай ведет к тому, что выражение*

$$\sqrt{ax^2 + bx + c}$$

не имеет смысла (под корнем стоит отрицательное число для любых x).

3.5. Интегрирование тригонометрических функций

3.5.1. Вычисление интегралов вида $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$. Замена переменной по формуле
$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$
сводит интеграл
$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx$$
к интегралу от рациональной функции. Действительно,
$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} == \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$
$$x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2t}{1+t^2}.$$
Тогда искомый интеграл перепишется в виде интеграла
$$2\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2},$$
который, очевидно, есть интеграл от рациональной функции.

Замечание 3.5.1. *Иногда подстановки вида*
$$t = \sin x, \quad t = \cos x, \quad t = \operatorname{tg} x$$
позволяют вычислить нужный интеграл значительно быстрее, чем при использовании универсальной подстановки $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

3.5.2. Вычисление интегралов вида $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$. а) Пусть m и n — рациональные числа, тогда подстановка
$$t = \sin x$$
приведет искомый интеграл к интегралу от дифференциального бинома. Действительно,
$$\cos x = (1-t^2)^{\frac{1}{2}}, \quad dt = \cos x dx, \quad dx = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt,$$
$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int t^m (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt.$$

б) Пусть m и n — целые числа, причем среди них есть нечетное, например, $m = 2k+1$. Подстановка $t = \sin x$ быстро ведет к получению результата: интегралу от рациональной функции по переменной t (если же m и n — положительные, то к интегралу от многочлена).
$$\int \sin^{2k+1} x \cos^n x\, dx = -\int (\sin^2 x)^k \cos^n x\, d\cos x = \int (1-t^2)^k t^n dt.$$

в) Пусть m и n — целые, положительные, четные (может быть одно из чисел ноль). Тогда применение формул
$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$
позволит понизить степень функций $\sin x$ и $\cos x$ под интегралом и в конце концов найти нужный интеграл.

3.5.3. Вычисление интегралов вида $\int \sin \alpha x \cos \beta x \, dx$. Указанные выше в заглавии интегралы легко вычисляются, если воспользоваться тригонометрическими формулами

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x],$$
$$\sin \alpha x \sin \beta x = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x],$$
$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x].$$

Например,

$$\int \sin 3x \cos 5x \, dx = \frac{1}{2}\int (\sin 8x - \sin 2x)\, dx = -\frac{1}{16}\cos 8x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

3.6. Интегрирование трансцендентных функций

34.1. Если подынтегральное выражение имеет вид

$$P(x)e^{ax}dx, \quad P(x)\sin bx\, dx, \quad P(x)\cos bx\, dx, \quad P(x)\ln^m x\, dx$$

(m целое, $m > 0$), где $P(x)$ — многочлен, то обычно говорят об интегрировании *трансцендентной* функции. Фактически, в этом случае нужно научиться вычислять интеграл, когда $P(x) = x^n$, (n — целое, неотрицательное). Задача решается многократным использованием метода интегрирования по частям. Покажем это на примерах.

1.

$$\int x^2 \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\int x^2 d(\sin 2x) = \frac{1}{2}x^2 \sin 2x - \int x \sin 2x\, dx =$$
$$= \frac{1}{2}x^2 \sin 2x + \frac{1}{2}\int x d(\cos 2x) = \frac{1}{2}x^2 \sin 2x + \frac{1}{2}x\cos 2x - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx =$$
$$= \frac{1}{2}x^2 \sin 2x + \frac{1}{2}x \cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Аналогично интегрируются выражения

$$x^n \arcsin x\, dx, \quad x^n \arccos x\, dx, \quad x^n \operatorname{arctg} x\, dx, \quad x^n \operatorname{arcctg} x\, dx.$$

34.2. Рассмотрим интегралы от трансцендентных функций $e^{ax}\cos bx$, $e^{ax}\sin bx$. В этом случае результаты дает также повторное интегрирование по частям, но с использованием еще одного приема, которым необходимо владеть для вычисления и других интегралов. Найдем интеграл от функции $e^{ax}\cos bx$. Обозначим искомый интеграл через I. Тогда

$$I = \int e^{ax}\cos bx\, dx = \int e^{ax} d\left(\frac{\sin bx}{b}\right) = \frac{e^{ax}\sin bx}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\, dx =$$
$$= \frac{e^{ax}\sin bx}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax} d\left(-\frac{\cos bx}{b}\right) =$$
$$= \frac{e^{ax}\sin bx}{b} + \frac{ae^{ax}\cos bx}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx\, dx.$$

Теперь получается уравнение относительно величины I

$$I = \frac{e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx)}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}I,$$

откуда
$$I = \frac{e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx)}{a^2+b^2} + C.$$

Аналогично вычисляется интеграл
$$\int e^{ax}\sin bx\,dx.$$

Не трудно вычислить и интеграл
$$\int x^n e^{ax}\cos bx\,dx,$$
используя полученные выше результаты.

Интегрирование по частям приведет к понижению степени n под интегралом. Действительно,
$$\int x^n e^{ax}\cos bx\,dx = \int x^n d\left[\frac{e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx)}{a^2+b^2}\right] =$$
$$= x^n e^{ax}\frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2+b^2} - n\int x^{n-1}\left[\frac{e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx)}{a^2+b^2}\right]dx.$$

Полученный в правой части интеграл — сумма интегралов уже изученного типа и, следовательно, степень $n-1$ также может быть понижена и приведена в конце концов к нулю, что позволит выписать окончательный ответ.

34.3. Интеграл вида $\int R(\operatorname{sh}x, \operatorname{ch}x)\,dx$ вычисляется теми же приемами, что интегралы $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$.

Подстановка $t = \operatorname{th}\frac{x}{2}$ сводит искомый интеграл к интегралу от рациональной функции относительно переменной t
$$\int R(\operatorname{sh}x, \operatorname{ch}x)\,dx = 2\int R\left(\frac{2t}{1-t^2}, \frac{1+t^2}{1-t^2}\right)\frac{dt}{1-t^2},$$
так как
$$\operatorname{sh}x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \operatorname{ch}x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2t}{1-t^2}.$$

3.7. Интегрирование различных классов функций

Выше были рассмотрены некоторые классы функций, для которых разработаны стандартные методы интегрирования. Чаще всего использовался прием рационализации подынтегральной функциии, после чего делался вывод о принципиальной возможности вычисления интеграла, т.е. его выражения через элементарные функции. На практике часто встречаются функции, интегрирование которых не может быть осуществлено ни одним из рассмотренных приемов. В этом случае необходимо использовать комбинацию различных способов или разработать новый метод. Заметим, что и стандартная рационализация подынтегральной функции часто приводит к громоздким и утомительным вычислениям.

Приведем некоторые примеры.

Найти интегралы:

1.
$$J = \int \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx =$$

$$= \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx + \int \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}\,dx =$$
$$= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^{3/2}}.$$

В первом интеграле последней суммы сделаем подстановку $x = \operatorname{sh} t$, а во втором — $u = x^2+1$. Тогда

$$J = \int \frac{d(\operatorname{sh} t)}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 t + 1}} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^{3/2}} = \int \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} t}\,dt + \frac{1}{2}\frac{1}{u^{1/2}}(-2) =$$
$$= t - \frac{1}{u^{1/2}} + C = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + C,$$

так как из равенства $x = \operatorname{sh} t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ следует, что

$$t = \ln(x+\sqrt{x^2+1}).$$

Стандартная рационализация с помощью подстановки Эйлера $\sqrt{x^2+1} = x+t$, здесь вряд ли уместна.

2. $J = \displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x\,dx$. Сделаем замену переменной $x = \sin t$, тогда

$$J = \int \cos^2 t\cdot t\,dt = \int t\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int t\,dt + \frac{1}{2}\int t\cos 2t\,dt$$
$$= \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}t\sin 2t - \frac{1}{4}\int t\sin 2t\,dt = \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}t\sin 2t + \frac{1}{8}\cos 2t + C.$$

Вернемся к переменной x, $t = \arcsin x$.

$$J = \frac{1}{4}\arcsin^2 x + \frac{1}{4}\arcsin x\cdot\sin(2\arcsin x) + \frac{1}{8}\cos(2\arcsin x) + C =$$
$$= \frac{1}{4}\arcsin^2 x + \frac{1}{4}\arcsin x\cdot 2x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{8}(1-x^2-x^2) + C =$$
$$= \frac{\arcsin^2 x - x^2}{4} + \frac{x\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x}{2} + C.$$

3.

$$J = \int \frac{x\ln|x|}{(1-x^2)\sqrt{x^2-1}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{x\ln x^2}{(1-x^2)\sqrt{x^2-1}}\,dx =$$
$$= -\frac{1}{4}\int \frac{\ln x^2 d(x^2-1)}{(x^2-1)^{3/2}} = \frac{1}{2}\int \ln x^2 d\left((x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\ln x^2}{\sqrt{x^2-1}} - 2\int (x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\,\frac{dx}{x}\right] =$$
$$= \frac{\ln|x|}{\sqrt{x^2-1}} - \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\ln|x|}{\sqrt{x^2-1}} - \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} =$$
$$= \frac{\ln|x|}{\sqrt{x^2-1}} + \int \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{\ln|x|}{\sqrt{x^2-1}} + \arcsin\frac{1}{x} + C.$$

Эти несложные примеры показывают, что нельзя предложить стандартные алгоритмы для нахождения всех интегралов. Тем более, что вообще-то, при решении практических важных задач чаще встречаются с интегралами, которые не выражаются в элементарных функциях (с так называемыми "неберущимися" интегралами). Скорее "берущиеся" интегралы составляют исключение из правил.

3.7.1. Обзор некоторых интегралов, которые не выражаются через элементарные функции (не интегрируются в конечном виде). Можно доказать, что к таким интегралам относятся

$$\int \frac{e^x}{x^n}\,dx, \quad \int \frac{\sin x}{x^n}, \quad \int \frac{\cos x}{x^n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Интегрируя их по частям, получаем рекуррентные формулы и сводим интегралы, соответственно к трем основным:

1. $\int \frac{e^x}{x}\,dx = \int \frac{dy}{\ln y} = \mathrm{li}(y), \quad$ где $\quad x = \ln y \quad$ (li(y) — "интегральный логарифм");

2. $\int \frac{\sin x}{x\,dx} = \mathrm{si}(x) \quad$ ("интегральный синус");

3. $\int \frac{\cos x}{x\,dx} = \mathrm{ci}(x) \quad$ ("интегральный косинус").

Конечно, во всех трех случаях нужно фиксировать произвольную постоянную, чтобы однозначно определить введенные функции. Это делается на базе соотношений:

1. $\mathrm{li}(y) \to 0 \quad$ при $\quad y \to +0$;
2. $\mathrm{si}(0) = 0$;
3. $\mathrm{ci}(x) \to 0 \quad$ при $\quad x \to +\infty$.

На практике (в теории вероятностей) очень важен интеграл

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx, \quad \Phi_0(0) = 0,$$

который также не выражается в элементарных функциях, но таблицы функции $\Phi_0(x)$ входят в каждое, даже элементарное пособие по теории вероятностей.

Все указанные выше функции табулированы и, если интеграл удается свести к одной из них (или их комбинации), то задача интегрирования считается решенной.

Пример 3.7.1. Выразить интеграл

$$J = \int \frac{1-x}{x} e^{-x}\,dx$$

через интегральный логарифм $\mathrm{li}(x)$ и элементарные функции.

Решение. Имеем

$$J = \int \frac{1-x}{x} e^{-x}\,dx = \int \frac{e^{-x}}{x}\,dx - \int e^{-x}\,dx = \int \frac{e^{-x}}{-x}\,d(-x) + e^{-x} =$$

$$= \mathrm{li}(y) + e^{-x} + C, \quad \text{где } -x = \ln y;$$

$$J = \mathrm{li}(e^{-x}) + e^{-x} + C.$$

3.7.2. Эллиптические интегралы. Интегралы вида

$$\int R\left(x, \sqrt{P(x)}\right),$$

где $P(x)$ — многочлен третьей или четвертой степени, называются *эллиптическими*. В общем случае эти интегралы не выражаются через элементарные функции. В том случае, когда это выражение возможно, они называются *псевдоэллиптическими*. Особенно часто встречаются интегралы

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad \text{и} \quad \int \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad 0 \leqslant k < 1.$$

Подстановкой $x = \sin\varphi$ они приводятся к комбинации интегралов

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad \text{и} \quad \int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi, \tag{3.7.1}$$

которые называются соответственно *эллиптическими интегралами первого и второго рода в форме Лежандра* (А.Лежандр (1752–1853) — французский математик).

Если первообразные (3.7.1) выбрать так, что при $\varphi = 0$ они обращаются в ноль, то эти первообразные обозначают соответственно

$$F(\varphi, k) \quad \text{и} \quad E(\varphi, k)$$

и сведение эллиптического интеграла к этим функциям завершает процесс интегрирования.

Глава 4

Определенный интеграл Римана и его приложения

После изучения данной главы читатель должен уметь находить определенные и несобственные интегралы и применять их к нахождению длин кривых, площадей, объемов и поверхностей вращения. Знать основные определения, формулы и теоремы об определенном интеграле, суммах Дарбу, основную форулу Ньютона-Лейбница, классах интегрируемых функций и его приложения. Владеть методами вычисления определенного и несобственного интегралов.

4.1. Определенный интеграл. Необходимый признак интегрируемости

4.1.1. Определение интеграла Римана.

Определение 4.1.1. *Пусть* $[a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, *— некоторый отрезок. Разбиением* T *отрезка* $[a, b]$ *называется произвольный конечный набор точек* $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, *таких, что* $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. *Каждый из отрезков* $[x_{i-1}, x_i]$ *называется отрезком разбиения, а его длина обозначается* $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Отметим, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i = (b - a)$.

Определение 4.1.2. *Величину*

$$|T| = \delta = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta x_i$$

назовем диаметром, или мелкостью, разбиения.

Рассмотрим некоторую функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[a, b]$, и набор произвольных точек $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, таких, что $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ для любого i.

Определение 4.1.3. *Интегральной суммой (Римана) для функции* f *называется выражение*

$$\sigma_T(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Определим предел интегральных сумм при $|T| \to 0$ следующим образом.

Определение 4.1.4. *Число* I *назовем пределом интегральных сумм при* $|T| \to 0$

$$I = \lim_{|T| \to 0} \sigma_T(f),$$

если для любого $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta > 0$, *что для любого разбиения* T *с мелкостью* $|T| < \delta$ *и для любой выбранной последовательности точек* $\xi_1, \dots, \xi_n$ *справедливо неравенство*

$$|I - \sigma_T| < \varepsilon.$$

Определение 4.1.5. *Функция f называется* **интегрируемой** *(по Риману) на отрезке $[a,b]$, если существует конечный предел I интегральных сумм при $|T| \to 0$. Данный предел I называется* **определенным интегралом** *от функции f по отрезку $[a,b]$ и обозначается так:*

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|T|\to 0} \sigma_T(f).$$

Определение 4.1.6. *Переменная x называется* **переменной интегрирования**, *число a —* **нижним пределом**, *число b —* **верхним пределом**, *а функция f —* **подынтегральной функцией**.

Положим по определению

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0,$$

а если дан отрезок $[a,b]$, для которого $a > b$, то определим

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

4.1.2. Необходимый признак интегрируемости.

Теорема 4.1.1. *Если функция f неограничена на отрезке $[a,b]$, то она неинтегрируема на этом отрезке.*

Теорема 4.1.1 представляет собой *необходимый* признак интегрируемости функции: если функция интегрируема, то она должна быть ограниченной на отрезке.

Доказательство. Пусть функция f — неограничена на $[a,b]$. Возьмем разбиение отрезка $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Тогда f неограничена на каком-то отрезке, входящем в разбиение, скажем на $[x_{j-1}, x_j]$. Рассмотрим набор точек $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. В силу неограниченности функции, для любого числа $M > 0$ найдется точка $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$, что $|f(\xi_j)| > M$.

Тогда для интегральной суммы $\sigma_T(f)$ выполняется неравенство

$$|\sigma_T(f)| \geqslant |f(\xi_j)\Delta x_j| - \left|\sum_{i\neq j} f(\xi_i)\Delta x_i\right| > M\Delta x_j - \left|\sum_{i\neq j} f(\xi_i)\Delta x_i\right|.$$

Отсюда видно, что интегральная сумма $\sigma_T(f)$ может быть сделана как угодно большой по модулю и, таким образом, является неограниченной. Так что функция f — неинтегрируема на отрезке $[a,b]$. □

Но не всякая ограниченная функция является интегрируемой.

Пример 4.1.1. Рассмотрим функцию Дирихле $f(x)$, равную 1 для рациональных значений x и нулю для иррациональных значений x. Доказать, что эта функция не интегрируема на любом отрезке $[a,b]$.

Решение. Рассмотрим интегральные суммы $\sigma_T(f)$ для f для некоторого разбиения T. Если взять точки ξ_i рациональными, то $\sigma_T(f) = 0$. Если рассмотреть иррациональны точки ξ_i, то $\sigma_T(f) = b - a$. Таким образом, интегральные суммы для f не могут иметь предела при $|T| \to 0$.

Не вдаваясь пока в подробности, дадим геометрический смысл определенного интеграла. Пусть функция $f(x)$ определена, непрерывна и положительна на отрезке

$[a, b]$. Рассмотрим следующую плоскую фигуру, ограниченную прямыми $x = a$, $x = b$, осью OX и графиком функции $y = f(x)$. Эта фигура называется *криволинейной трапецией.* Площадь S криволинейной трапеции равна определенному интегралу от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{4.1.1}$$

Мы не будем пока доказывать это утверждение, поскольку мы еще не определили понятие площади плоской фигуры. И на равенство (4.1.1) можно пока смотреть как на определение.

4.2. Нижние и верхние суммы Дарбу. Критерии интегрируемости

Теорема 4.2.1 (критерий Коши интегрируемости функции)**.** *Для того, чтобы функция f была интегрируема на отрезке $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\delta > 0$, что для любых разбиений T' и T'' с мелкостями меньше δ и для любых наборов точек $\xi'_1, \dots, \xi'_n, \xi''_1, \dots, \xi''_n$ выполнялось неравенство*

$$|\sigma_{T'}(f) - \sigma_{T''}(f)| < \varepsilon.$$

Эта теорема не что иное, как переформулировка обычного критерия Коши существования предела функции на случай предела интегральных сумм.

Удобными критериями проверки интегрируемости функции являются критерии, в которых используются так называемые *верхние* и *нижние суммы Дарбу.*

Пусть функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$ и $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$. Определим числа M_i и m_i следующим образом:

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad i = 1, \dots, n.$$

Определение 4.2.1. *Назовем верхней суммой Дарбу выражение*

$$S_T(f) = S_T = \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i,$$

а нижней суммой Дарбу — выражение

$$s_T(f) = s_T = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta x_i.$$

Тогда ясно, что $S_T \geqslant s_T$ для любого разбиения T. Нетрудно установить следующие свойства сумм Дарбу.

1. Для любой интегральной суммы $\sigma_T(f)$ справедливы неравенства

$$s_T(f) \leqslant \sigma_T(f) \leqslant S_T(f).$$

Более того

$$s_T(f) = \inf_{\{\xi_1, \dots, \xi_n\}} \sigma_T(f), \quad \text{а} \quad S_T(f) = \sup_{\{\xi_1, \dots, \xi_n\}} \sigma_T(f).$$

2. Если T' *измельчение* T'' (т.е. $T' \supset T''$), то $S_{T'}(f) \leqslant S_{T''}(f)$, а $s_{T'}(f) \geqslant s_{T''}(f)$.

3. Для любых разбиений T' и T'' верно неравенство $s_{T'}(f) \leqslant S_{T''}(f)$.

Определение 4.2.2. *Определим: верхний интеграл (Дарбу) —*

$$\overline{I}(f) = \inf_{\{T\}} S_T,$$

нижний интеграл (Дарбу) —

$$\underline{I}(f) = \sup_{\{T\}} s_T.$$

Тогда очевидно, что данные выражения конечны, а из свойства 3 получаем, что $\overline{I}(f) \geqslant \underline{I}(f)$.

Теорема 4.2.2 (критерий Дарбу)**.** *Для того, чтобы ограниченная функция f была интегрируема на отрезке $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы $\overline{I} = \underline{I}$, при этом*

$$\overline{I} = \underline{I} = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Теорема 4.2.3 (критерий Римана)**.** *Для того, чтобы ограниченная функция $f(x)$ была интегрируема на отрезке $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое $\delta > 0$, что для всех разбиений T с диаметром $|T| < \delta$ выполнялось условие*

$$S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon.$$

Доказательство получается из свойств 1–3 сумм Дарбу и определения интеграла. □

Обозначим $\omega_i(f) = M_i - m_i$ — разность между наибольшим и наименьшим значение функции на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$. Часто эту величину называют *колебанием* функции f на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$.

Из теоремы 4.2.3 и определения сумм Дарбу очевидным образом получаем

Следствие 4.2.1. *Для того, чтобы ограниченная функция $f(x)$ была интегрируема на отрезке $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое такое $\delta > 0$, что для всех разбиений T с диаметром $|T| < \delta$ выполнялось условие*

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(f) \Delta x_i < \varepsilon.$$

4.3. Интегрируемость непрерывных и монотонных функций

4.3.1. Интегрируемость непрерывных функций. Как следствие из теоремы 4.2.1 (или следствия 4.2.1) мы получаем утверждение.

Теорема 4.3.1. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.*

Доказательство. Непрерывная на отрезке функция ограничена и по теореме Кантора — равномерно непрерывна (теорема 1.14.5). Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, что для любых точек x', x'' из $[a, b]$ с условием $|x' - x''| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и берем разбиение T с диаметром $|T| < \delta$. Тогда для колебания $\omega_i(f)$ справедливы неравенства

$$\omega_i(f) = M_i - m_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f = \sup_{x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x') - f(x'')| \leqslant \varepsilon.$$

Поэтому
$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i \leqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon \cdot (b-a).$$
□

4.3.2. Интегрируемость монотонных функций. Монотонные функции также интегрируемы.

Теорема 4.3.2. *Если функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.*

Доказательство. Предположим, что f является возрастающей на $[a, b]$. Тогда для данного разбиения $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ имеем $\omega_i(f) = f(x_i) - f(x_{i-1})$. Поэтому
$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\Delta x_i \leqslant |T| \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) = |T|(f(b) - f(a)).$$

Так, что зафиксировав $\varepsilon > 0$, можно в качестве δ взять число $\dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$. (Если $f(b) = f(a)$, то $f(x) \equiv 0$ и интегрируемость такой функции очевидна.) □

Для дальнейшего изучения нам хватит этих двух классов интегрируемых функций.

Упражнение 4.3.1. Показать, что ограниченные функции f с конечным числом точек разрыва интегрируемы на отрезке $[a, b]$.

4.4. Свойства определенного интеграла. Первая теорема о среднем

Перейдем теперь к рассмотрению основных свойств определенного интеграла:

1. $\displaystyle\int_a^b dx = b - a.$

Это свойство прямое следствие определения интеграла.

2. Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на любом отрезке $[c, d]$, таком, что $[c, d] \subset [a, b]$.

Данное свойство несложно вытекает из следствия 4.2.1.

3. (*Аддитивность интеграла*). Пусть $a < c < b$. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$, то она интегрируема на отрезке $[a, b]$, причем
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

4. Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то их сумма $f + g$ также интегрируема на $[a, b]$, причем
$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

5. Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то функция $c\,f(x)$ также интегрируема на $[a, b]$ для любой постоянной c и
$$\int_a^b (cf(x))dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

Доказательство свойств 3, 4, 5 прямо следует из определения интеграла и свойств предела.

6. Пусть функции f и g интегрируемы на отрезке $[a,d]$, тогда их произведение $f(x)g(x)$ также интегрируемо на $[a,b]$.

7. Если функция f интегрируема на $[a,b]$ и $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) > 0$, то $\dfrac{1}{f(x)}$ также интегрируема на $[a,b]$.

Свойства 6 и 7 вытекают из связи между колебаниями произведения и частного функций и колебаниями самих функций.

8. Если функция f интегрируема на $[a,b]$, $a<b$, и неотрицательна на $[a,b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

9. (*Монотонность интеграла*). Если функции f и g интегрируемы на $[a,b]$, $a<b$, и $f(x)\leqslant g(x)$ для всех $x\in[a,b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Свойства 8 и 9 прямо следуют из определения интеграла.

10. Пусть функция f интегрируема и неотрицательна на отрезке $[a,b]$, $a<b$, и существует точка $c\in[a.b]$, в которой функция непрерывна и положительна, тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx > 0.$$

11. Если функция f интегрируема на $[a,b]$, $a<b$, то функция $|f|$ также интегрируема на $[a,b]$ и

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

12. Если функция f интегрируема на отрезке $[-a,a]$, $a>0$, и четная на этом отрезке, то

$$\int\limits_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int\limits_0^a f(x)\,dx,$$

если при тех же условиях функция f — нечетная на $[-a,a]$, то

$$\int\limits_{-a}^a f(x)\,dx = 0.$$

13. Если функция f интегрируема на отрезке $[0,T]$, $T>0$, и является периодической на вещественной оси $\mathbb{R}$ с периодом T, то для любого $a\in\mathbb{R}$ функция f интегрируема на $[a,a+T]$ и

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_0^T f(x)\,dx.$$

Теорема 4.4.1 (первая теорема о среднем)**.** *Пусть функции f и g интегрируемы на отрезке $[a,b]$, существуют такие константы m и M, что*

$$m \leqslant f(x) \leqslant M, \quad x \in [a,b],$$

функция g — неотрицательна на $[a,b]$. Тогда существует такое число μ, что $m \leqslant \mu \leqslant M$ и

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Если, кроме того, функция f непрерывна на $[a,b]$, то найдется такая точка $c \in (a,b)$, для которой

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c) \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Теорема 4.4.1 верна и для функций g, неположительных на $[a,b]$.

Доказательство. Так как функции f и g — интегрируемы, то по свойству 6 их произведение также интегрируемо на $[a,b]$.

Из условий теоремы получаем, что

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x).$$

Из свойств 5, 9 имеем

$$m\int\limits_a^b g(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Если $\int\limits_a^b g(x) = 0$, то из последнего неравенства очевидно выполняется неравенство $\int\limits_a^b f(x)g(x) = 0$. Поэтому заключение теоремы верно для любого числа μ.

Если $\int\limits_a^b g(x) > 0$, то разделив на этот интеграл полученное неравенство имеем

$$m \leqslant \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int\limits_a^b g(x)\,dx} \leqslant M.$$

Так что в качестве μ можно выбрать отношение

$$\frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int\limits_a^b g(x)\,dx}.$$

Последняя часть теоремы следует из теоремы Больцано-Коши о промежуточном значении для непрерывных на отрезке функций (теорема 1.14.2) и из условия, что
$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$
$\square$

Следствие 4.4.1. *Если функция f интегрируема на $[a,b]$ и для некоторых констант m и M справедливо неравенство*
$$m \leqslant f(x) \leqslant M, \quad x \in [a,b],$$
то найдется число μ, такое, что $m \leqslant \mu \leqslant M$ и
$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a),$$
если, кроме того, функция f — непрерывна на $[a,b]$, то найдется точка $c \in (a,b)$, такая, что
$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

4.5. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, тогда, как мы видели, она интегрируема на любом меньшем отрезке из $[a,b]$. Следовательно, мы можем рассмотреть интеграл
$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt, \quad x \in [a,b]. \tag{4.5.1}$$

Определение 4.5.1. *Интеграл (4.5.1) называют интегралом с переменным верхним пределом.*

Теорема 4.5.1. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$, то интеграл (4.5.1) с переменным верхним пределом является непрерывной функцией на $[a,b]$.*

Доказательство. Действительно, свойство 3 аддитивности интеграла влечет, что
$$F(x_1) - F(x_2) = \int\limits_{x_2}^{x_1} f(t)\,dt.$$
Поэтому из свойства 11 и ограниченности интегрируемой функции получаем
$$|F(x_1) - F(x_2)| = \left|\int\limits_{x_2}^{x_1} f(t)\,dt\right| \leqslant \left|\int\limits_{x_2}^{x_1} |f(t)|\,dt\right| \leqslant c\left|\int\limits_{x_2}^{x_1} dt\right| = c|x_1 - x_2|.$$
Откуда следует непрерывность $F(x)$. $\square$

Теорема 4.5.2. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a,b]$, то интеграл (4.5.1) является дифференцируемой функцией в точке x_0 и*
$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Доказательство. Взяв Δx — некоторое приращение аргумента так, чтобы $(x_0 + \Delta x) \in [a, b]$, получим из свойств интеграла, что

$$\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Тогда

$$\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) = \frac{1}{\Delta x}\cdot\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt - \frac{f(x_0)}{\Delta x}\cdot\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt =$$

$$= \frac{1}{\Delta x}\cdot\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} (f(t)-f(x_0))\,dt$$

В силу непрерывности функции f в точке x_0 для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\Delta > 0$, что при $|t - x_0| < \delta$ следует, что $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Выбирая теперь $|\Delta x| < \delta$, получим

$$\left|\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| \leqslant \frac{1}{|\Delta x|}\cdot\left|\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t)-f(x_0)|\,dt\right| \leqslant \varepsilon\frac{1}{|\Delta x|}\cdot|\Delta x| = \varepsilon.$$

Поэтому при $\Delta x \to 0$ предел отношения $\dfrac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x}$ существует и равен $f(x_0)$, т.е. $F'(x_0) = f(x_0)$. □

В частности, справедливо утверждение

Теорема 4.5.3. *Если функция f непрерывна на отрезке, то на этом отрезке у нее есть первообразная, равная*

$$\int\limits_a^x f(t)\,dt.$$

Рассмотрим теперь основную формулу интегрального исчисления — *формулу Ньютона-Лейбница.*

Теорема 4.5.4 (формула Ньютона-Лейбница)**.** *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Если функция Φ является произвольной первообразной для f на этом отрезке, то*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi|_a^b\,.$$

Доказательство. Рассмотрим разность $\Phi(x) - F(x)$, тогда

$$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

По свойству первообразных эта разность есть постоянная величина на $[a, b]$, т.е. $\Phi(x) - F(x) = c$. Следовательно, $\Phi(a) - F(a) = \Phi(a) - 0 = c$, т.е. $c = \Phi(a)$.

С другой стороны $F(b) = \int\limits_a^b f(t)\,dt$. Поэтому

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt = F(b) = \Phi(b) - c = \Phi(b) - \Phi(a).$$

□

Пример 4.5.1. Найти интеграл

$$\int\limits_0^1 \sin x\,dx.$$

Решение. Поскольку

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C,$$

то по формуле Ньютона–Лейбница получаем

$$\int\limits_0^1 \sin x\,dx = -\cos x\big|_0^1 = -\cos 1 + 1.$$

Рассмотрим еще один пример.

Пример 4.5.2. Найти интеграл $\int\limits_0^2 x^2\,dx$.

Решение. Имеем

$$\int\limits_0^2 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

4.6. Основные методы интегрирования

Рассмотрим два правила (метода) интегрирования в определенном интеграле: замену переменной и интегрирование по частям.

4.6.1. Замена переменной.

Теорема 4.6.1 (замена переменной)**.** *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Функция $\varphi(t)$ определена и непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha,\beta]$, причем для всех $t \in [\alpha,\beta]$ выполняется неравенство $a \leqslant \varphi(t) \leqslant b$ и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \tag{4.6.1}$$

При доказательстве теоремы используются формула замены переменной для неопределенного интеграла и формула Ньютона-Лейбница.

Пример 4.6.1. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^2 e^{x^2} x\,dx.$$

Решение. Применим формулу (4.6.1), вводя новую переменную $u = x^2$, получим

$$\int_0^2 e^{x^2} x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 e^{x^2}\,d(x^2) = \frac{1}{2}\int_0^4 e^u\,du = \frac{e^4-1}{2}.$$

Формула замены переменной (4.6.1) может быть обобщена на случай, когда подынтегральная функция лишь интегрируема.

4.6.2. Интегрирование по частям.

Теорема 4.6.2 (интегрирование по частям)**.** *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, то*

$$\int_a^b u\,dv = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v\,du. \tag{4.6.2}$$

Теорема 4.6.2 также получается из формулы интегрирования по частям для неопределенного интеграла и формулы Ньютона-Лейбница.

Пример 4.6.2. Найти значение интеграла

$$\int_1^2 \ln x\,dx.$$

Решение. Применяя формулу (4.6.2), получим

$$\int_1^2 \ln x\,dx = x\ln x\,\Big|_1^2 - \int_1^2 dx = 2\ln 2 - 1.$$

Пример 4.6.3. Вычислить интеграл

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx.$$

Решение. Применяя формулу интегрирования по частям, мы получаем рекуррентное соотношение

$$I_n = \frac{n-1}{n}\,I_{n-2}.$$

Замечая, что

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2},$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 1,$$

имеем ответ:

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2} & \text{при } n \text{ четном,} \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & \text{при } n \text{ нечетном.} \end{cases} \tag{4.6.3}$$

Из формулы (4.6.3) легко получается *формула Валлиса*:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 .$$

Следствием формулы (4.6.2) служит также следующее утверждение.

Теорема 4.6.3 (вторая теорема о среднем)**.** *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, а функция g монотонна и непрерывна на $[a,b]$. Тогда существует такая точка $\xi \in [a,b]$, что*

$$\int\limits_a^b g(x)f(x)\,dx = g(a)\int\limits_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

Данную теорему также называют *теоремой Бонне*. Ее можно обобщить на случай интегрируемых функций f и g.

4.7. Несобственный интеграл и его свойства. Признаки сходимости

4.7.1. Определение несобственного интеграла. Функция, не ограниченная на отрезке, не интегрируема на нем по Риману. Если же промежуток интегрирования бесконечен, то интеграл Римана по нему не определен. Тем не менее во многих задачах математики и физики возникает необходимость либо интегрировать неограниченные функции, либо рассматривать интеграл по неограниченному промежутку. Здесь мы дадим определение таких интегралов.

Пусть функция $y = f(x)$ задана на конечном или бесконечном промежутке $[a,\omega)$ (ω — либо конечное число, либо $+\infty$). И пусть функция f интегрируема на любом конечном промежутке вида $[a,\eta]$, $a \leqslant \eta < \omega$.

Определение 4.7.1. *Если существует (конечный) предел*

$$\lim_{\eta\to\omega} \int\limits_a^\eta f(x)\,dx,$$

то функция f называется интегрируемой (в несобственном смысле) на промежутке $[a,\omega)$, а указанный предел называется несобственным интегралом от функции f по промежутку $[a,\omega)$ и обозначается

$$\int\limits_a^\omega f(x)\,dx.$$

В этом случае также говорят, что несобственный интеграл сходится (в противном случае он называется расходящимся).

Понятие сходимости не меняется, если мы заменим точку a на любую точку c, $a < c < \omega$.

При $\omega = \pm\infty$ (т.е. в случае неограниченного промежутка) несобственный интеграл часто называют несобственным интегралом первого рода.

При ω конечном (т.е. в случае ограниченного промежутка и неограниченной функции) данный интеграл называют несобственным интегралом второго рода.

Эти два типа интегралов мы изучаем одновременно, что позволяет унифицировать их изложение.

Приведем критерий сходимости несобственного интеграла, который является переформулировкой общего критерия Коши существования предела функции.

Теорема 4.7.1 (критерий Коши)**.** *Для сходимости несобственного интеграла*

$$\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ *существовало такое число* $\eta = \eta(\varepsilon)$, $a < \eta < \omega$, *что для любых чисел* η', η'', *таких, что* $\eta < \eta', \eta'' < \omega$, *выполнялось неравенство*

$$\left|\int\limits_{\eta'}^{\eta''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Отметим, что определение несобственного интеграла по ограниченному промежутку содержательно лишь в случае, когда функция f не ограничена в любой окрестности точки ω. Это связано с тем, что функция f, интегрируемая на любом отрезке $[a, \eta]$, $a < \eta < \omega$, и ограниченная на промежутке $[a, \omega)$, интегрируема по Риману на отрезке $[a, \omega]$.

Таким образом, можно считать, что функция f не ограничена на $[a, \omega)$.

Нами дано определение несобственного интеграла, если на $[a, \omega)$ есть лишь одна особая точка, в окрестности которой функция f не ограничена. Если таких особых точек несколько, например $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \omega$, то делается следующее: отрезки $[a_i, a_{i+1}]$ делятся точками b_i на две части и несобственный интеграл по $[a, \omega)$ определяется так:

$$\int\limits_a^\omega f(x)\,dx = \int\limits_a^{a_1} f(x)\,dx + \int\limits_{a_1}^{b_1} f(x)\,dx + \cdots + \int\limits_{b_n}^{\omega} f(x)\,dx.$$

Причем если хотя бы один из интегралов в этой формуле расходится, то и весь интеграл

$$\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$$

считается расходящимся.

Величина данного интеграла (а также сходимость и расходимость) не зависят от способа выбора точек b_i.

Пример 4.7.1. Выяснить, при каких p сходится и расходится интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p}.$$

Решение. Пусть сначала $p \neq 1$, тогда

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\eta\to+0} \int\limits_\eta^1 \frac{dx}{x^p} =$$

$$= \lim_{\eta\to+0} \left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_\eta^1 = \begin{cases} \frac{1}{1-p} & \text{при } p < 1, \\ +\infty & \text{при } p > 1. \end{cases}$$

При $p = 1$ этот интеграл также расходящийся. Таким образом, интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p}$$

сходится при $p < 1$ и расходится при $p \geqslant 1$.

Пример 4.7.2. Рассмотреть тот же самый вопрос для интеграла

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}.$$

Решение. Аналогично предыдущему примеру нетрудно показать, что данный интеграл сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$.

Формулы интегрального исчисления сохраняют свой вид для несобственного интеграла (например, формула Ньютона-Лейбница), нужно только иметь в виду, что при подстановке верхних или нижних пределов интегрирования следует находить соответствующий предел этих функций.

Пример 4.7.3. Вычислить интеграл Эйлера

$$J = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx.$$

Решение. Сделав замену переменных $x = 2t$, получим

$$J = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin 2t \, dt = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(2 \sin t \, \cos t) dt =$$

$$= \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin t \, dt + \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t \, dt.$$

Произведя в последнем интеграле замену переменных $t = \dfrac{\pi}{2} - y$, имеем

$$J = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin t \, dt + 2\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin y \, dy = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2J.$$

Отсюда находим, что

$$J = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

Пример 4.7.4. Вычислить интеграл

$$J_n = \int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx, \quad n = 0, 1, 2 \ldots.$$

Решение. Проинтегрируем по частям заданный интеграл при $n > 0$, тогда получим

$$J_n = -x^n e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} \, dx = nJ_{n-1}.$$

Так как

$$J_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1,$$

то $J_n = n!$.

4.7.2. Признаки сходимости несобственных интегралов от неотрицательных функций. Везде далее в этом параграфе будем предполагать, что выполнены следующие условия: функция $y = f(x)$ определена на конечном или бесконечном промежутке $[a, \omega)$ и интегрируема на любом отрезке $[a, \eta]$ для всех η, удовлетворяющем неравенствам $a \leqslant \eta < \omega$.

Часто бывают полезны признаки сходимости несобственных интегралов. Рассмотрим сначала интегралы от неотрицательных функций.

Лемма 4.7.1. *Если функция $y = f(x)$ неотрицательна на промежутке $[a, \omega)$, то для сходимости несобственного интеграла*

$$\int_a^{\omega} f(x)\,dx$$

необходимо и достаточно, чтобы все интегралы

$$\int_a^{\eta} f(x)\,dx, \quad a \leqslant \eta < \omega, \tag{4.7.1}$$

были ограничены одной константой M.

Доказательство леммы 4.7.1 следует из теоремы 1.11.2 Вейерштрасса о пределе монотонной функции, поскольку интегралы в формуле (4.7.1) являются монотонно возрастающими по η функциями.

Теорема 4.7.2 (признак сравнения)**.** *Пусть функции f и g неотрицательны на промежутке $[a, \omega)$ и выполнено неравенство*

$$f(x) \leqslant g(x), \quad x \in [a, \omega). \tag{4.7.2}$$

Если интеграл

$$\int_a^{\omega} g(x)\,dx \tag{4.7.3}$$

сходится, то сходится и интеграл

$$\int_a^{\omega} f(x)\,dx, \tag{4.7.4}$$

если же интеграл (4.7.4) расходится, то расходится и интеграл (4.7.3).

Доказательство. Если интеграл (4.7.3) сходится, то по лемме 4.7.1 интегралы

$$\int_a^{\eta} g(x)\,dx, \quad \eta \in [a, \omega),$$

ограничены в совокупности некоторой константой M. Тогда в силу неравенства (4.7.2) интегралы

$$\int\limits_a^{\eta} f(x)\,dx$$

так же равномерно ограничены той же константой M.

Снова по лемме 4.7.1 интеграл (4.7.4) сходится.

Вторая часть теоремы доказывается аналогично. $\square$

Следствие 4.7.1 (признак сравнения в предельной форме)**.** *Пусть функции f и g положительны на промежутке $[a,\omega)$. Если существует предел*

$$\lim_{x\to\omega}\frac{f(x)}{g(x)}=k,$$

причем $k\neq 0$ и конечно, то интегралы (4.7.3) и (4.7.4) либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся.

В качестве функций сравнения $g(x)$ часто берут степенные функции. Именно в случае конечных промежутков $[a,\omega)$ берутся функции

$$g(x)=\frac{1}{(\omega-x)^p},$$

интегралы от которых сходятся при $p<1$ и расходятся при $p\geqslant 1$.

В случае бесконечных промежутков ($\omega=\pm\infty$) берут функцию g вида

$$g(x)=\frac{1}{|x|^p},$$

так как известно (см. пример 4.7.2), что интеграл от этой функции сходится при $p>1$ и расходится при $p\leqslant 1$.

Пример 4.7.5. Показать, что интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx$$

сходится.

Решение. В самом деле, обозначая подынтегральную функцию через $f(x)$ и вводя функцию сравнения

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}},$$

имеем

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Так как показатель степени у функции $g(x)$ равен $1/3<1$, то по следствию 4.7.1 данный интеграл сходится.

4.7.3. Несобственные интегралы от знакопеременных функций. Рассмотрим теперь интегралы от функций f, которые могут менять знак на промежутке $[a,\omega)$.

Определение 4.7.2. *Интеграл вида*

$$\int\limits_a^{\omega} f(x)\,dx \tag{4.7.5}$$

называется абсолютно сходящимся, если сходится несобственный интеграл

$$\int\limits_a^{\omega} |f(x)|\,dx.$$

Непосредственно из критерия Коши сходимости несобственного интеграла (теорема 4.7.1) следует

Теорема 4.7.3. *Если интеграл вида (4.7.5) сходится абсолютно, то он сходится.*

Важно отметить, что существуют так называемые *условно сходящиеся* интегралы, т.е. сходящиеся интегралы от таких функций, что интеграл от модуля этих функций расходится.

Рассмотрим один из условно сходящихся интегралов.

Пример 4.7.6. Показать, что интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \tag{4.7.6}$$

сходится.

Решение. При $x \to 0$ подынтегральная функция стремится к 1 (первый замечательный предел), поэтому данный интеграл несобственный лишь за счет неограниченности промежутка интегрирования. Тогда на сходимость достаточно исследовать интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Выполним в данном интеграле интегрирование по частям:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = -\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,d(\cos x) =$$

$$= -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^{+\infty} + \int\limits_1^{+\infty} \cos x\,d\left(\frac{1}{x}\right) = \cos 1 - \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

Интеграл в правой части абсолютно сходится (значит, просто сходится), так как подынтегральная функция допускает оценку

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$$

на промежутке интегрирования.

Итак, интеграл (4.7.6) сходится. Покажем, что интеграл от модуля подынтегральной функции расходится. Действительно, справедливо неравенство

$$|\sin x| \geqslant \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

Тогда для любого $\eta > 1$ имеем

$$\int\limits_1^\eta \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_1^\eta \frac{1}{x}dx - \frac{1}{2}\int\limits_1^\eta \frac{\cos 2x}{x}dx.$$

Интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$$

расходится (он равен $+\infty$). Интеграл же

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\,dx$$

сходится. Этот факт доказывается точно так же, как сходимость интеграла (4.7.6). Таким образом, получаем, что интеграл (4.7.6) не является абсолютно сходящимся.

Приведем признак сходимости для условно сходящихся интегралов.

Теорема 4.7.4 (признак Абеля)**.** *Рассмотрим интеграл вида*

$$\int\limits_a^\omega f(x)g(x)\,dx. \tag{4.7.7}$$

Если выполнены условия:

1) интеграл

$$\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$$

сходится;

2) функция $g(x)$ монотонна;

3) функция $g(x)$ ограничена на $[a,\omega)$,

то интеграл (4.7.7)сходится.

Теорема 4.7.5 (признак Дирихле)**.** *Если для интеграла (4.7.7) выполнены условия*

1) функция $f(x)$ имеет ограниченную первообразную на промежутке $[a,\omega)$;

2) функция $g(x)$ монотонна на $[a,\omega)$

3) и

$$\lim_{x\to\omega} g(x) = 0,$$

то интеграл (4.7.7)сходится.

Доказательство этих теорем следует из критерия Коши сходимости несобственного интеграла и второй теоремы о среднем (теорема 4.6.3).

Пример 4.7.6 удовлетворяет условиям признака Дирихле.

4.8. Спрямляемые и гладкие кривые. Длина кривой

4.8.1. Определение кривой. Рассмотрим отображения отрезков в трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$. Пусть $[a, b]$ — некоторый отрезок, а $\vec{r}(t)$ — его отображение в $\mathbb{R}^3$. Обозначим координаты отображения $\vec{r}(t)$ через $x(t),\ y(t),\ z(t)$, т.е.

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in [a, b].$$

Будем считать отображение $\vec{r}(t)$ непрерывным, если непрерывны все функции $x,\ y,\ z$.

Определение 4.8.1. *Непрерывное отображение $\vec{r}(t)$ отрезка $[a, b]$ в $\mathbb{R}^3$ назовем путем, а его образ — носителем этого пути.*

Рассматриваемое отображение не предполагается взаимно однозначным. Точки носителя пути, в которые отображаются разные точки отрезка $[a, b]$, называются точками *самопересечения* или *кратными* точками этого пути.

Сама переменная t называется *параметром.*

При определении понятия *кривой* будем исходить из физического представления о траектории точки, движущейся в пространстве. На такой траектории можно выбирать различные параметры, точно описывающие положение на ней движущейся точки. Различным параметрам соответствуют разные отображения отрезков на траекторию, каждое из которых дает полное ее описание.

В силу этого соображения естественно определить кривую как класс в каком-то смысле равноправных непрерывных отображений отрезков в пространство.

Определение 4.8.2. *Путь $\vec{r}(t),\ t \in [a, b]$, называется эквивалентным пути $\vec{\rho}(\tau),\ \tau \in [\alpha, \beta]$, если существует такая непрерывная строго монотонная функция φ, отображающая отрезок $[a, b]$ на отрезок $[\alpha, \beta]$, что для каждого $t \in [a, b]$ справедливо равенство*

$$\vec{\rho}(\varphi(t)) = \vec{r}(t). \tag{4.8.1}$$

Если путь $\vec{r}(t)$ эквивалентен пути $\vec{\rho}(\tau)$, то

$$\vec{r}(t) \sim \vec{\rho}(\tau).$$

Нетрудно проверить, что это отношение есть отношение эквивалентности. Таким образом, множество всех путей разбивается на непересекающиеся классы.

Определение 4.8.3. *Всякий класс γ эквивалентных путей называется кривой или (более подробно) непрерывной параметрически заданной кривой.*

Каждое из отображений, задающее путь из класса γ, называется *параметризацией* этой кривой.

Такие же определения даются для *плоских* кривых, т.е. для кривых, лежащих на плоскости $\mathbb{R}^2$.

Пример 4.8.1. Показать, что отображение

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t, \quad t \in [0, 2\pi],$$

задает одну из возможных параметризаций окружности радиуса R с центром в начале координат на плоскости (рис. 4.8.1).

Решение. Очевидно.

Пример 4.8.2. Показать, что верхнюю полуокружность можно также задать другой параметризацией:

$$x = t, \quad y = \sqrt{R^2 - t^2}, \quad t \in [0, R].$$

Решение. Очевидно.

Носитель пути одинаков для любых параметризаций одной кривой, поэтому он называется *носителем кривой.*

Если $\vec{r}(t),\ t \in [a,b]$, — параметризация кривой γ, то точка $\vec{r}(a)$ называется *начальной* точкой кривой, а точка $\vec{r}(b)$ — *конечной* точкой кривой γ.

Кривая γ называется *простой*, если она не имеет точек самопересечения, т.е. некоторая (а значит, и любая) параметризация этой кривой осуществляет взаимно однозначное отображение отрезка на носитель кривой.

Кривая γ называется *замкнутой*, если начальная и конечная точки этой кривой совпадают.

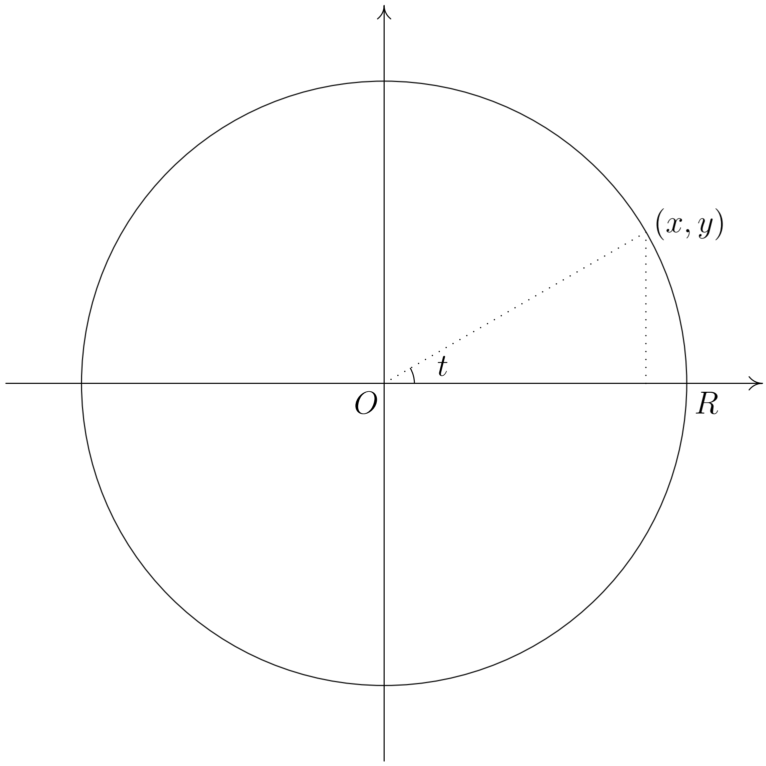

Рис 4.8.1. Параметризация окружности

Кривая γ называется *простой замкнутой* кривой, если она замкнута и не имеет других точек самопересечения, кроме начальной и конечной.

Два пути называются *ориентированно эквивалентными*, если функция φ из определения 4.8.2 является строго возрастающей.

Определение 4.8.4. *Совокупность всех ориентированно эквивалентных между собой путей называется ориентированной кривой.*

Вместо выражения "задана ориентированная кривая" часто говорят, что "задана ориентация на кривой" или "задан порядок обхода этой кривой".

Кривые могут быть одинаково ориентированы или противоположно ориентированы. Таким образом, у любой простой кривой возможны только две ориентации. Они задаются порядком прохождения параметра по отрезку, на котором этот параметр определен.

Часто плоские кривые задают *неявным* образом. А именно пусть γ — плоская кривая, задаваемая вектор-функцией

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in [a,b].$$

Если существует такая непрерывная функция $F(x,y)$, что координаты (x,y) кривой γ удовлетворяют условию

$$F(x(t),y(t))\equiv 0,$$

то говорят, что уравнение

$$F(x,y)=0 \tag{4.8.2}$$

является *неявным* представлением кривой γ.

Следует, однако, иметь в виду, что, вообще говоря, множество точек, удовлетворяющее уравнению вида (4.8.2), не есть кривая в определенном выше смысле даже для достаточно "хороших" функций F.

Если кривая γ задается непрерывно дифференцируемой вектор-функцией $\vec{r}(t)$, то такая кривая называется *непрерывно дифференцируемой*.

Конечно, когда речь идет о непрерывно дифференцируемых кривых, мы должны сузить класс допустимых преобразований φ из (4.8.1): считать их тоже непрерывно дифференцируемыми.

Пусть задана кривая γ своей параметризацией $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$, $\quad t\in[a,b]$, причем все функции x,y,z дифференцируемы в точке $t_0\in[a,b]$ и $\vec{r}'(t_0)=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))\neq 0$. Рассмотрим приращение Δt, такое, что $(t_0+\Delta t)\in[a,b]$.

Прямая, проходящая через точки $\vec{r}(t_0)$ и $\vec{r}(t_0+\Delta t)$, называется *секущей.*

Вектор $\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\dfrac{\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)}{\Delta t}$ параллелен этой секущей. Таким образом, при $\Delta t\to 0$ и в силу дифференцируемости вектор-функции $\vec{r}(t)$ в точке t_0 получаем, что секущая стремится к некоторому предельному положению с направляющим вектором $r'(t_0)$.

Это предельное положение называется *касательной* к кривой γ в точке $\vec{r}(t_0)$.

Итак, в векторной записи уравнение касательной имеет вид

$$\vec{r}=\vec{r}(t_0)+\vec{r}'(t_0)\,t,\quad -\infty<t<+\infty,$$

а в координатной записи

$$\begin{gathered}x=x(t_0)+x'(t_0)\,t,\\ y=y(t_0)+y'(t_0)\,t,\\ z=z(t_0)+z'(t_0)\,t,\\ t\in(-\infty,+\infty).\end{gathered}$$

Исключив переменную t, получим уравнение

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}, \tag{4.8.3}$$

где $x_0=x(t_0)$, $y_0=y(t_0)$, $z_0=z(t_0)$.

Следовательно, если $\vec{r}'(t_0)\neq 0$, то у кривой есть касательная вида (4.8.3).

Определение 4.8.5. *Точка $\vec{r}(t)$ кривой γ, в которой $\vec{r}'(t)\neq 0$, называется неособой, а точка, в которой $\vec{r}'(t)=0$, — особой.*

Определение 4.8.6. *Непрерывно дифференцируемая кривая без особых точек называется гладкой кривой. Кривая, представимая в виде объединения конечного числа гладких кривых, называется кусочно-гладкой.*

В примере 4.8.1 окружность — гладкая кривая.

Если плоская кривая задается явным образом непрерывно дифференцируемой функцией, то график этой функции есть гладкая кривая.

4.8.2. Длина кривой. Дадим определение длины кривой. Пусть γ — некоторая *простая* кривая с параметризацией

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \ t \in [a, b]. \tag{4.8.4}$$

Рассмотрим разбиение T отрезка $[a, b]$ вида $T = \{t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b\}$. Положим

$$\sigma_T = \sum_{i=1}^{n} |\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})|.$$

Очевидно, что σ_T — это длина ломаной с вершинами в точках $\vec{r}(a), \vec{r}(t_1), \ldots, r(b)$.

Определение 4.8.7. *Для заданной простой кривой γ вида (4.8.4) величина*

$$S_\gamma = S = \sup_{\{T\}} \sigma_T,$$

где верхняя грань берется по всем разбиениям T отрезка $[a, b]$, называется длиной кривой γ. Если $S < +\infty$, то кривая называется спрямляемой, в противном случае — неспрямляемой.

Нетрудно показать, что если кривая γ спрямляема, то любая часть этой кривой также спрямляема. Поэтому можно говорить о длине $s(t)$ части кривой γ, когда параметр изменяется от 0 до t. При этом $s(0) = 0$, а $s(b) = S$.

Теорема 4.8.1. *Пусть кривая вида (4.8.4) непрерывно дифференцируема. Тогда кривая γ спрямляема, и переменная длина дуги $s(t)$ является возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией параметра t, $t \in [a, b]$, при этом*

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2},$$

где $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

Следствие 4.8.1. *Если параметром непрерывно дифференцируемой кривой является переменная длина дуги s, то*

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = 1.$$

Параметризация спрямляемой кривой, при которой параметром служит переменная длина дуги, называется *естественной параметризацией.*

Следствие 4.8.1 позволяет производить проверку: будет ли данная параметризация естественной?

Из теоремы 4.8.1 и формулы Ньютона-Лейбница легко следует формула для нахождения длины кривой.

Теорема 4.8.2. *Если γ — непрерывно дифференцируемая кривая вида (4.8.4), то длина S этой кривой вычисляется по формуле*

$$S = \int_a^b \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt. \tag{4.8.5}$$

Приведем некоторые следствия формулы (4.8.5) для плоских кривых.

Следствие 4.8.2. *Пусть непрерывно дифференцируемая плоская кривая γ имеет параметризацию $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, тогда ее длина S равна*

$$S = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt.$$

Следствие 4.8.3. *Если непрерывно дифференцируемая плоская кривая γ задана явным образом, т.е. графиком функции $y = y(x)$, $x \in [a, b]$, то ее длина равна*

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx. \tag{4.8.6}$$

Следствие 4.8.4. *Если плоская непрерывно дифференцируемая кривая γ задана в полярных координатах $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, то ее длина вычисляется по формуле*

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}\, d\varphi.$$

Пример 4.8.3. Найти длину S дуги параболы (рис. 4.8.2) $y = ax^2$, $0 \leqslant x \leqslant b$.
Решение. Замечая, что $y' = 2ax$, согласно формуле (4.8.6), имеем

$$S = \int_0^b \sqrt{1 + 4a^2x^2} dx.$$

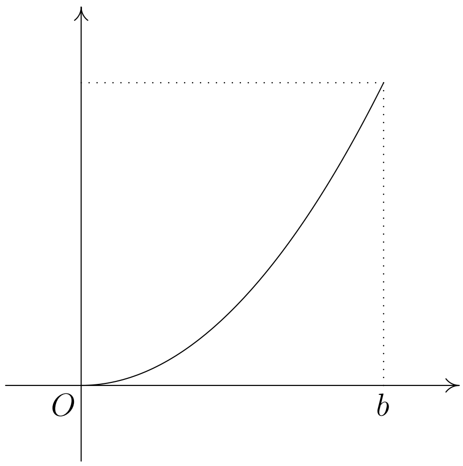

Рис 4.8.2. Длина дуги параболы

Неопределенный интеграл $I = \int \sqrt{1 + 4a^2x^2} dx$ вычислим следующим образом: проинтегрируем его сначала по частям; затем к числителю дроби, стоящей под знаком интеграла, прибавим и вычтем единицу, произведем деление и проинтегрируем (с помощью подстановки $y = 2ax$) получившуюся дробь:

$$I = \int \sqrt{1 + 4a^2x^2} dx = x\sqrt{1 + 4a^2x^2} - \int \frac{4a^2x^2}{\sqrt{1 + 4a^2x^2}} dx =$$
$$= x\sqrt{1 + 4a^2x^2} - I + \frac{1}{2a} \ln \left| 2ax + \sqrt{1 + 4a^2x^2} \right|.$$

Это равенство, рассматриваемое как уравнение относительно интеграла I, дает возможность найти его значение:

$$I = \frac{1}{2}x\sqrt{1+4a^2x^2} + \frac{1}{4a}\ln\left|2ax + \sqrt{1+4a^2x^2}\right| + C.$$

Теперь легко найти величину интеграла для S:

$$S = \frac{1}{2}b\sqrt{1+4a^2b^2} + \frac{1}{4a}\ln\left|2ab + \sqrt{1+4a^2b^2}\right|.$$

Пример 4.8.4. Найти длину астроиды $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t$ (рис. 4.8.3).

Решение. Астроида симметрична относительно координатных осей. Ее части, лежащей в первой четверти, соответствует изменение параметра t от 0 до $\pi/2$. Вычислим длину S этой части (равной, очевидно, 1/4 длины всей астроиды). Заметив, что

$$x' = -3a\cos^2 t\sin t, \quad y' = 3a\sin^2 t\cos t,$$

по формуле из следствия 4.8.2 получим

$$S = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}dt = \frac{3a}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2tdt = \frac{3a}{2}.$$

Таким образом, длина всей астроиды равна $6a$.

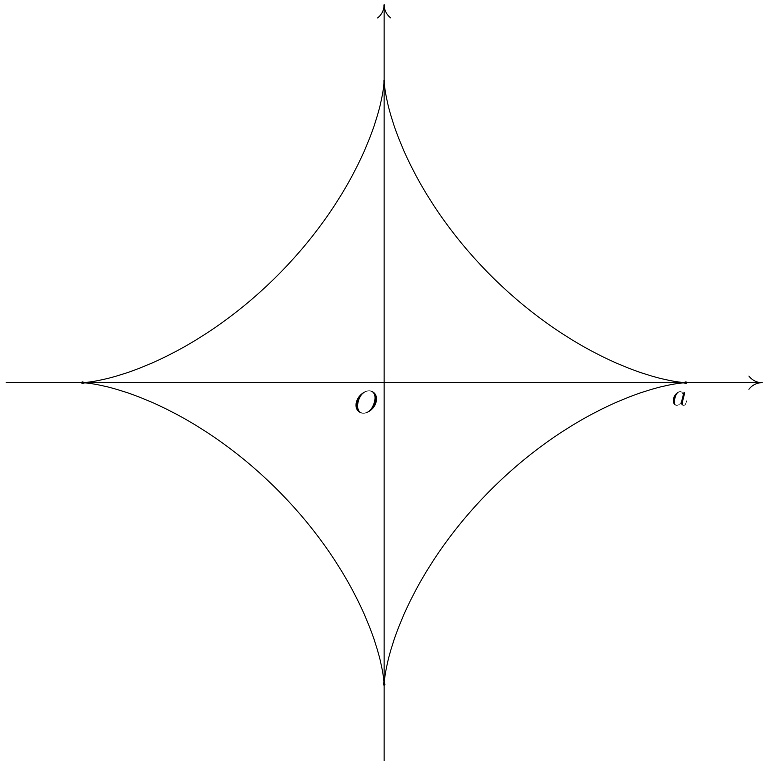

Рис 4.8.3. Длина дуги астроиды

4.9. Площадь плоской фигуры. Мера Жордана

4.9.1. Определение и свойства площади. Рассмотрим плоскость с некоторой прямоугольной системой координат. Обозначим через T_0 разбиение этой плоскости на замкнутые квадраты (т.е. квадраты вместе с границей), получающиеся при проведении прямых вида

$$x = p, \quad y = q, \quad p, q = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Такое разбиение назовем *разбиением ранга 0.*

Разобьем каждый из квадратов разбиения T_0 на сто равных квадратов прямыми, параллельными осям координат (соседние прямые отстоят друг от друга на $\frac{1}{10}$). Множество таких квадратов назовем *разбиением ранга 1* и обозначим T_1.

Продолжая этот процесс, получим *разбиения* T_m *ранга* m, $m = 0, 1, 2, \ldots$. Расстояние между соседними прямыми в таком разбиении равно $(10)^{-m}$.

Пусть G — некоторое непустое ограниченное множество на плоскости. *Ограниченность* означает, что оно содержится в некотором круге достаточно большого радиуса.

Обозначим через $s_m = s_m(G)$ объединение всех квадратов из T_m, лежащих (вместе с границами) в G. Если таких квадратов нет, то будем считать, что $s_m = \varnothing$.

Обозначим через $S_m = S_m(G)$ объединение всех квадратов из T_m, пересекающихся с G хотя бы по одной точке. Ясно, что S_m также ограниченное множество.

Очевидно, что

$$s_0 \subset s_1 \subset \ldots \subset s_m \subset \ldots \subset G, \tag{4.9.1}$$

а

$$G \subset \ldots \subset S_m \subset \ldots \subset S_1 \subset S_0. \tag{4.9.2}$$

Если обозначить через P_n площадь многоугольника S_n, а через p_n — площадь многоугольника s_n (считается, что $p_n = 0$, если множество $s_n = \varnothing$), то будут выполнены следующие неравенства (следствие включений (4.9.1) и (4.9.2)):

$$0 \leqslant p_0 \leqslant p_1 \leqslant \ldots \leqslant p_n \leqslant \ldots \leqslant P_n \leqslant \ldots \leqslant P_1 \leqslant P_0. \tag{4.9.3}$$

Таким образом, множество $\{p_n :\ n = 0, 1, 2 \ldots\}$ ограничено сверху (любым числом P_m), а множество $\{P_n :\ n = 0, 1, 2 \ldots\}$ ограничено снизу (например, нулем). Дадим следующее определение.

Определение 4.9.1. *Внутренней площадью (внутренней мерой Жордана) множества G называется число $P_* = P_*(G)$, равное*

$$\sup\{p_n : n = 0, 1, 2 \ldots\}.$$

Внешней площадью (внешней мерой Жордана) множества G называется число $P^* = P^*(G)$, равное

$$\inf\{P_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Так как последовательности $\{p_n\}$ и $\{P_n\}$ монотонны, то в определении 4.9.1 можно вместо взятия точной границы поставить знак предела.

Из неравенств (4.9.3) получаем, что

$$0 \leqslant P_* \leqslant P^* < \infty.$$

Определение 4.9.2. *Множество G называется квадрируемым (измеримым по Жордану), если $P_* = P^* = P$. При этом само число $P = P(G)$ называется площадью (двумерной мерой Жордана) множества G. Мера пустого множества считается равной нулю.*

Приведем некоторые свойства построенной меры.

1. Если множество G — многоугольник, то его мера совпадает с обычной площадью этого многоугольника.

2. Если для измеримых множеств G и F выполнено включение $G \subset F$, то $P(G) \leqslant P(F)$ (свойство *монотонности* меры).

3. Если множества G и F измеримы и не пересекаются ($F \cap G = \varnothing$), то множество $F \cup G$ измеримо и $P(F \cup G) = P(F) + P(G)$ (свойство *аддитивности* меры Жордана).

Свойство 3 можно обобщить.

4. Если множества F и G измеримы, то множества $F \cup G$ и $F \cap G$ измеримы и $P(G \cap F) + P(G \cup F) = P(G) + P(F)$.

5. Пусть G — ограниченное непустое множество. Обозначим через ∂G множество *граничных точек* G, т.е. это множество, состоящее из точек, таких, что любой круг с центром в этой точке содержит как точки множества G, так и его дополнения. Множество G измеримо тогда и только тогда, когда множество его граничных точек имеет площадь, равную нулю.

Другими словами, множество ∂G содержится в объединении квадратов достаточно большого ранга m как угодно малой площади.

4.9.2. Вычисление площади. Рассмотрим криволинейную трапецию G следующего вида: она ограничена прямыми $x = a,\ x = b$ $(a < b)$, осью OX и графиком непрерывной неотрицательной на $[a, b]$ функции $y = f(x)$.

Свойство равномерной непрерывности этой функции показывает, что данная криволинейная трапеция G квадрируема, в качестве P_n и p_n можно выбрать соответствующие верхние и нижние суммы Дарбу функции f. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.9.1. *Построенная криволинейная трапеция G измерима и*

$$P(G) = \int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{4.9.4}$$

Как следствие теоремы 4.9.1 и свойства аддитивности можно получить утверждение о площади фигуры F, ограниченной прямыми $x = a,\ x = b$ и графиками двух непрерывных на $[a, b]$ функций $f,\ g$, таких, что $f(x) \leqslant g(x)$ для $x \in [a, b]$.

Следствие 4.9.1. *Множество F измеримо, и*

$$P(F) = \int\limits_a^b (g(x) - f(x))\,dx.$$

Можно показать, что любое ограниченное множество G, граница которого является гладкой, кусочно гладкой или спрямляемой кривой, — измеримо по Жордану.

Пусть граница множества G задается гладкой (или кусочно гладкой) кривой вида $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [a, b]$. Причем ориентация этой границы *положительна,* т.е. граница пробегается против часовой стрелки при движении параметра от a к b. Производя в формуле (4.9.4) замену переменных, получим следующее утверждение.

Теорема 4.9.2. *Множество G квадрируемо, и его площадь равна*

$$P(G) = \int\limits_a^b y(t)x'(t)\,dt = -\int\limits_a^b x(t)y'(t)\,dt. \tag{4.9.5}$$

Найдем площадь фигуры в полярной системе координат. Пусть граница этого множества G задается кривой $r = r(\varphi),\ \varphi \in [\alpha, \beta]$, и отрезками прямых вида $\varphi = \alpha,\ \varphi = \beta$. Функция $r = r(\varphi)$ неотрицательна и непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$. Переходя к параметрическому заданию этой кривой

$$x = r(\varphi)\cos\varphi, \quad y = r(\varphi)\sin\varphi$$

и используя формулы (4.9.5), имеем следствие.

Следствие 4.9.2. *Множество G измеримо, и*

$$P(G) = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\, d\varphi.$$

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 4.9.1. Пусть множество G состоит из точек на плоскости, лежащих в квадрате, который ограничен прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, и имеющих рациональные координаты. Показать, что оно неизмеримо по Жордану.

Решение. Очевидно, что $P_*(G) = 0$, так как в этом множестве не содержится ни одного квадрата любого разбиения. С другой стороны, $P^* = 1$, поскольку объединение квадратов разбиения T_m, пересекающих G, содержит единичный квадрат. Таким образом, это множество G не измеримо по Жордану.

Пример 4.9.2. Вычислить площадь фигуры G, ограниченную эллипсом (§ 11.10):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4.9.6}$$

Решение. Выражая из (4.9.6) y, имеем

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad x \in [-a, a].$$

Тогда искомая площадь P равна

$$P = 4\frac{b}{a}\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = 4\frac{b}{a}\left(\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}\right)\Bigg|_0^a = \pi ab.$$

Пример 4.9.3. Найти площадь P фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1 + \cos\varphi)$ (рис. 4.9.1).

Решение. Имеем

$$P = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}(1 + \cos\varphi)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi + a^2\int\limits_0^{2\pi}\cos\varphi\, d\varphi + \frac{a^2}{4}\int\limits_0^{2\pi}(1 + \cos 2\varphi)d\varphi = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

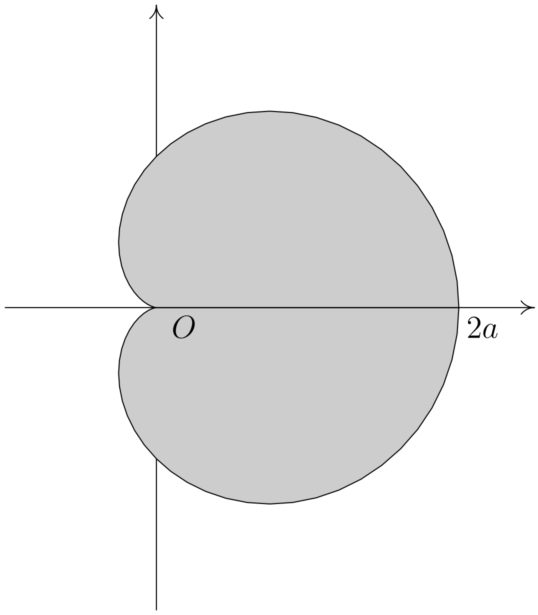

Рис 4.9.1. Площадь фигуры, ограниченной кардиоидой

4.10. Объем тела и его вычисление

Понятие объема или трехмерной меры Жордана вводится аналогично понятию площади. Сначала рассматриваем разбиения T_m пространства $\mathbb{R}^3$ ранга m. Для этого разбиваем все пространство на замкнутые кубы плоскостями $x = p$, $y = q$, $z = s$, $p, q, s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Получаем разбиение T_0 ранга 0. Каждый из полученных кубов разбиваем на 1000 равных кубов плоскостями, параллельными координатным плоскостям, расстояние между которыми равно $\frac{1}{10}$. Получаем разбиение T_1 ранга 1. И так далее. Получаем разбиения T_m ранга m, $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Пусть теперь G — ограниченное непустое множество в пространстве. Ограниченность означает, что оно содержится в некотором шаре достаточно большого радиуса.

Рассмотрим множества s_m — объединения кубов ранга m, полностью содержащиеся в G. Если таких кубов нет, то считаем, что $s_m = \varnothing$. Также рассмотрим множества S_m, являющиеся объединением кубов ранга m, которые пересекаются с G хотя бы по одной точке. Пусть v_n — объем многогранника s_n, V_n — объем многогранника S_n. Как в случае плоскости, имеем последовательность неравенств

$$v_0 \leqslant v_1 \ldots \leqslant v_n \ldots \leqslant V_n \leqslant \ldots \leqslant V_1 \leqslant V_0. \tag{4.10.1}$$

Поэтому мы можем ввести понятие *внутреннего* V_* и *внешнего* V^* объема тела G. А именно положим

$$V_* = V_*(G) = \sup\{v_n : n = 0, 1, 2, \ldots\},$$

а

$$V^* = V^*(G) = \inf\{V_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Неравенства (4.10.1) показывают, что $V_* \leqslant V^*$.

Определение 4.10.1. *Множество G называется кубируемым или измеримым по Жордану, если $V_* = V^* = V$. Само число $V = V(G)$ называется объемом или (трехмерной) мерой Жордана множества G. Объем пустого множества считается равным нулю.*

Это понятие объема обладает теми же свойствами 1, 2, 3, 4, что и понятие площади на плоскости (см. § 4.9).

Для вычисления объема произвольного тела одномерного интеграла Римана, в общем, недостаточно. Но во многих случаях можно его использовать. Рассмотрим тело G со следующими свойствами: оно расположено между двумя плоскостями $x = a,\ x = b,\ a < b$, кубируемо и для каждого $x \in [a, b]$ множество, являющееся пересечением плоскости $\{(t, y, z) :\ t = x\}$ и G, квадрируемо и имеет площадь $P(x)$.

Теорема 4.10.1. *Объем тела G вычисляется по формуле*

$$V(G) = \int\limits_a^b P(x)\,dx. \tag{4.10.2}$$

Формула (4.10.2) является обобщением принципа Кавальери, говорящего о том, что многогранники с равными площадями в сечении имеют равные объемы.

Рассмотрим, например, тело G, получающееся вращением криволинейной трапеции для функции $y = y(x),\ x \in [a, b]$, вокруг оси OX, функция $y(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a, b]$. Тогда для всякого $x \in [a, b]$ площадь соответствующего сечения (которое является кругом радиуса $y(x)$) равна $\pi y^2(x)$. Отсюда и из формулы (4.10.2) получаем

Следствие 4.10.1. *Объем тела G вычисляется по формуле*

$$V(G) = \pi \int\limits_a^b y^2(x)\,dx. \tag{4.10.3}$$

В формуле (4.10.3) кривую $y = y(x)$ можно задавать параметрически.

Если данная кривая вращается вокруг оси OY, то формула (4.10.3) меняет свой вид.

Следствие 4.10.2. *Пусть тело G ограничено поверхностями, образованными вращением кривой $y = y(x),\ x \in [a, b]$, вокруг оси OY и вращениями отрезков $\{(x, y) :\ y = y(a),\ x \in [0, a]\}$, и $\{(x, y) :\ y = y(b),\ x \in [0, b]\}$, вокруг оси OY, причем функция $y = y(x)$ непрерывна и неотрицательна на $[a, b]$, тогда объем V тела G вычисляется по формуле*

$$V = 2\pi \int\limits_a^b xy(x)\,dx.$$

Приведем примеры.

Пример 4.10.1. Найти объем V эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1.$$

Решение. Это тело расположено между плоскостями $x = -a$ и $x = a$. Чтобы найти площадь сечения, запишем границу этого эллипсоида в виде

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}.$$

У получившегося эллипса полуоси равны, соответственно,

$$\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

поэтому его площадь равна

$$\pi \frac{bc}{a^2}(a^2 - x^2).$$

Отсюда и из теоремы 4.10.1 (формула (4.10.2)) имеем

$$V = \pi \frac{bc}{a^2} \int\limits_{-a}^{a} (a^2 - x^2)\, dx = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Пример 4.10.2. Найти объем V тела, полученного вращением вокруг оси OX криволинейной трапеции, образованной графиком функции

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}, \quad x \in [-b, b],$$

называемым *цепной линией.*

Решение. По формуле (4.10.3) имеем

$$V = \pi a^2 \int\limits_{-b}^{b} \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}\, dx = \frac{\pi a^2}{2} \int\limits_{-b}^{b} \left(1 + \operatorname{ch} \frac{2x}{a}\right) dx =$$

$$= \left(\frac{\pi a^2 x}{2} + \frac{\pi a^3}{4} \operatorname{sh} \frac{2x}{a}\right)\Bigg|_{-b}^{b} = \pi a^2 b + \frac{\pi a^3}{2} \operatorname{sh} \frac{2b}{a}.$$

4.11. Площадь поверхности вращения

Понятие поверхности и тем более площади поверхности требует более глубоких знаний анализа. Здесь мы ограничимся изучением специальных поверхностей — поверхностей вращения.

Пусть $\gamma = \{(x, y) : \ \vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t)), t \in [a, b]\}$ — кривая, лежащая в полуплоскости $y > 0$. Рассмотрим разбиение $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ отрезка $[a, b]$ с диаметром $|T| = \lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta t_i$.

Впишем в кривую γ ломаную с вершинами в точках $\vec{r}(t_i) = (x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, n$. При вращении звена $\Delta \vec{r}_i = \vec{r}(t_i) - r(t_{i-1})$ ломаной вокруг оси OX получится поверхность усеченного конуса с площадью

$$l_i = \pi(y_{i-1} + y_i)|\Delta \vec{r}_i|,$$

а при вращении всей ломаной — поверхность с площадью

$$L_T = \sum_{i=1}^{n} l_i = \pi \sum_{i=1}^{n} (y_{i-1} + y_i)|\Delta \vec{r}_i|.$$

Определение 4.11.1. *Если существует предел*

$$\lim_{\lambda \to 0} L_T,$$

то он называется площадью L поверхности, образованной вращением кривой γ вокруг оси OX.

Теорема 4.11.1. *Если γ — гладкая кривая, лежащая в полуплоскости $y > 0$, то поверхность, образованная вращением этой кривой вокруг оси OX, имеет площадь L и эта площадь равна*

$$L = 2\pi \int\limits_a^b y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt = 2\pi \int\limits_0^S y(s)\,ds, \tag{4.11.1}$$

где s — переменная длина дуги кривой γ, S — длина всей кривой γ.

Доказательство. Рассмотрим сначала естественную параметризацию кривой, когда в качестве параметра берется переменная длина дуги s, $s \in [0, S]$.

Берем разбиение $T = \{s_0, s_1, \ldots, s_n\}$ отрезка $[0, S]$. Сравним сумму L_T с интегральной суммой для функции $2\pi y(s)$, т.е. с выражением

$$\sigma_T = 2\pi \sum_{i=1}^{n} y(s_i)\Delta s_i.$$

Имеем

$$|\sigma_T - L_T| = \pi \left| \sum_{i=1}^{n} 2y(s_i)\Delta s_i - \pi \sum_{i=1}^{n} \left(2y(s_i) + (y(s_{i-1}) - y(s_i))\right) |\Delta \vec{r}_i| \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi \sum_{i=1}^{n} |y(s_i)| \left(\Delta s_i - |\Delta \vec{r}_i|\right) + \pi \sum_{i=1}^{n} |y(s_i) - y(s_{i-1})|\,|\Delta \vec{r}_i| \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi M \left(\sum_{i=1}^{n} \Delta s_i - \sum_{i=1}^{n} |\Delta \vec{r}_i| \right) + \pi\omega(r, T) \sum_{i=1}^{n} |\Delta \vec{r}_i|,$$

где

$$M = \max_{[a,b]} |y(t)|,$$

а $\omega(\vec{r}, T)$ есть максимум из колебаний функции $|\vec{r}(t)|$ на отрезках $[s_{i-1}, s_i]$.

Сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta s_i = S$ — длине кривой, а сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} |\Delta \vec{r}_i|$ стремится к S при $\lambda \to 0$ по определению длины кривой. Предел

$$\lim_{\lambda \to 0} \omega(\vec{r}, T) = 0$$

в силу равномерной непрерывности функции $|\vec{r}(t)|$. Поэтому

$$\lim_{\lambda \to 0} (\sigma_T - L_T) = 0.$$

Таким образом, вторая часть в формуле (4.11.1) доказана. Первое равенство в формуле (4.11.1) получается после замены $s = s(t)$, достаточно вспомнить (теорема 4.8.2), что

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt.$$

$\square$

Следствие 4.11.1. *Если кривая задана явным уравнением $y = y(x)$, $x \in [a, b]$, то для площади L поверхности вращения справедлива формула*

$$L = 2\pi \int\limits_a^b y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx. \tag{4.11.2}$$

Пример 4.11.1. Найти площадь L сферы радиуса R.

Решение. Эта сфера может быть получена вращением полуокружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [-R, R]$, вокруг оси OX. Но гораздо удобнее пользоваться формулой не (4.11.2), а (4.11.1), задавая эту полуокружность параметрически:

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t, \quad t \in [0, \pi].$$

Имеем

$$x' = -R\sin t,\ y' = R\cos t,\ \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = R,$$

тогда по формуле (4.11.1) получим

$$L = 2\pi \int\limits_0^\pi R^2 \sin t\, dt = 4\pi R^2.$$

Пример 4.11.2. Найти площадь L поверхности, образованной вращением вокруг оси OX дуги цепной линии

$$y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}, \quad x \in [-b, b].$$

Решение. По формуле (4.11.2) имеем

$$L = 2\pi a \int\limits_{-b}^{b} \operatorname{ch}\frac{x}{a}\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}dx =$$

$$= 2\pi a \int\limits_{-b}^{b} \operatorname{ch}^2\frac{x}{a}\, dx = \pi a \left(2b + a\operatorname{sh}\frac{2b}{a}\right).$$

4.12. Некоторые приложения в механике

Пусть M — материальная точка массы m с координатами x и y. Произведения mx и my называются *статическими моментами* этой точки относительно осей, соответственно, OY и OX.

Рассмотрим плоскую кривую γ, заданную параметрически,

$$\vec{r}(t) = \{x(t), y(t)\}, \quad t \in [a, b].$$

Так же, как в предыдущей лекции, будем считать, что γ — простая спрямляемая ориентированная кривая. Вдоль кривой γ распределена масса с плотностью $\rho = \rho(x, y)$, которая является неотрицательной непрерывной функцией. Если $\rho \equiv \text{const}$, то кривая называется *однородной* кривой.

Определим статические моменты этой кривой относительно координатных осей. Пусть $T = \{s_0, s_1, \ldots, s_n\}$ — разбиение отрезка $[0, S]$ с диаметром λ, где S — длина всей кривой γ. Выберем на отрезках $[s_{i-1}, s_i]$ по точке ξ_i и положим $x(\xi_i) = x_i,\ y(\xi_i) = y_i$.

Выражения $y_i\rho(x_i, y_i)\Delta s_i$ назовем *элементарными статическими моментами* части кривой γ относительно оси OX. Очевидно, что элементарный статический момент численно равен статическому моменту материальной точки массы $\rho(x_i, y_i)\Delta s_i$ с ординатой y_i. То есть мы как бы заменили эту часть кривой материальной точкой.

Определение 4.12.1. *Предел вида*

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} y_i\rho(x_i,y_i)\Delta s_i$$

называется статическим моментом M_x материальной кривой γ относительно оси OX.

Из определения видно, что статический M_x момент равен

$$M_x=\int_0^S y(s)\rho(x(s),y(s))\,ds.$$

В этом определении фактически используется естественная параметризация кривой γ. Если перейдем к произвольной параметризации кривой по теореме 4.8.2, то получим

$$M_x=\int\limits_a^b y(t)\rho(x(t),y(t))\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt.$$

Аналогично определяется *статический момент M_y* материальной кривой γ относительно оси OY:

$$M_y=\int\limits_0^S x(s)\rho(x(s),y(s))\,ds=\int\limits_a^b x(t)\rho(x(t),y(t))\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt.$$

Определение 4.12.2. *Точка плоскости $P(x_0,y_0)$, обладающая тем свойством, что если в нее поместить материальную точку массы, равной массе M кривой γ, то эта точка относительно любой координатной оси имеет статический момент, численно равный статическому моменту кривой относительно той же оси, называется центром тяжести кривой γ.*

Из данного определения получаем формулы

$$x_0=\frac{\int\limits_a^b x(t)\rho(x(t),y(t))\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt}{\int\limits_a^b \rho(x(t),y(t))\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt},\quad y_0=\frac{\int\limits_a^b y(t)\rho(x(t),y(t))\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt}{\int\limits_a^b \rho(x(t),y(t))\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt}.$$

Если кривая однородная, то формулы упрощаются:

$$x_0=\frac{1}{S}\int\limits_a^b x(t)\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt,\quad y_0=\frac{1}{S}\int\limits_a^b y(t)\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt. \tag{4.12.1}$$

В этом случае говорят о *геометрическом центре тяжести* кривой.

Сравнивая формулы (4.12.1) и формулу площади поверхности вращения из § 4.11, получим следующее утверждение.

Теорема 4.12.1 (первая теорема Гульдина)**.** *Площадь поверхности, полученная вращением кривой γ около некоторой, не пересекающей ее, оси, равна длине кривой, умноженной на длину окружности, описанной геометрическим центром тяжести этой кривой вокруг той же оси.*

Пример 4.12.1. Рассмотрим окружность радиуса a с центром в точке $(0, b)$, $0 < a < b$. Тогда ее геометрический центр тяжести есть точка $(0, b)$. Будем вращать эту окружность вокруг оси OX. Получим поверхность, называемую *тором.* Найти площадь L поверхности тора по теореме Гульдина.

Решение. Эта площадь равна

$$L = 2\pi a \cdot 2\pi b = 4\pi^2 ab.$$

Пример 4.12.2. Найти геометрический центр тяжести цепной линии

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}, \quad x \in [-b, b].$$

Решение. В силу симметрии цепной линии относительно оси OY имеем, что $M_y = 0$. Тогда $x_0 = 0$.

По теореме Гульдина,

$$L = 2\pi y_0 \cdot 2S,$$

где L — площадь поверхности вращения цепной линии вокруг оси OX; S — длина половины цепной линии.

Площадь L была вычислена в § 4.11 (пример 4.11.2), она равна

$$L = \pi a \left(2b + a \operatorname{sh} \frac{2b}{a} \right).$$

Найдем ее длину:

$$2S = \int\limits_{-b}^{b} \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int\limits_{-b}^{b} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}}\, dx =$$

$$= 2 \int\limits_{0}^{b} \operatorname{ch} \frac{x}{a}\, dx = 2a \operatorname{sh} \frac{x}{a} \Bigg|_0^b = 2a \operatorname{sh} \frac{b}{a}.$$

Тогда по теореме Гульдина имеем

$$y_0 = \frac{2b + a \operatorname{sh} \frac{2b}{a}}{4 \operatorname{sh} \frac{b}{a}}.$$

Глава 5

Числовые ряды

После изучения этой главы читатель должен уметь находить суммы числовых рядов, исследовать их на сходимость, используя признаки сходимости. Знать основные определения, формулы и признаки сходимости числовых рядов: необходимый признак сходимости, критерий Коши, признак сравнения, признаки Коши, Даламбера, Лейбница, Абеля, Дирихле. Владеть методами исследования сходимости числовых рядов.

5.1. Числовые ряды. Сходимость ряда

Рассмотрим в качестве приложения теории последовательностей специальный вид последовательностей — ряд, который играет важную роль в математическом анализе.

Определение 5.1.1. *Пусть $\{a_n\}$ — последовательность вещественных чисел. Тогда символ*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{5.1.1}$$

называется числовым рядом.

Определение 5.1.2. *Числа a_n, $n = 1, 2, \ldots$ называются членами ряда, элемент a_n называется n-м членом ряда.*

Определение 5.1.3. *Сумму*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \tag{5.1.2}$$

называют частичной суммой ряда или n-й частичной суммой ряда.

Определение 5.1.4. *Если последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм сходится, то ряд называется сходящимся. Если последовательность $\{S_n\}$ не имеет предела, то ряд называется расходящимся.*

Определение 5.1.5. *Число $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, если оно существует, называется суммой ряда. Будем писать*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Пример 5.1.1. Рассмотрим ряд, являющийся суммой геометрической прогрессии

$$a + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots, \quad a \neq 0. \tag{5.1.3}$$

Исследовать его на сходимость.

Решение. Частичная сумма

$$S_n = a + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, \quad q \neq 1.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \frac{a}{1-q}, & |q < 1, \\ \infty, & |q| > 1, \\ \text{не существует}, & q = -1. \end{cases}$$

При $q = 1$ частичная сумма $S_n = an \to \infty$ при $n \to \infty$. Поэтому при $q = 1$ ряд также расходится.

Таким образом, ряд (5.1.1) сходится при $|q| < 1$ к сумме $S = \dfrac{a}{1-q}$ и расходится при $|q| \geqslant 1$.

Особо отметим случай $q = -1,\ a = 1$. Ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n-1} + \ldots$$

является расходящимся.

Сейчас получим числовой ряд, сумма которого равна e (этот ряд удобно использовать для приближенного вычисления числа e).

Рассмотрим последовательность $\{\alpha_n\}$ из примера 1.8.8 (§1.8):

$$\alpha_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

При решении этого примера было установлено, что

$$\alpha_n < S_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Докажем теперь, что $S_n \leqslant e$.

Действительно, при любом фиксированном k и $k \leqslant n$ выполняется неравенство

$$1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < \alpha_n \tag{5.1.4}$$

(см. разложение α_n в § 1.8).

При $n \to \infty$ левая часть неравенства (5.1.4) стремится к S_k, а правая — к e, поэтому

$$S_k \leqslant e.$$

Теперь из соотношения

$$\alpha_n < S_n \leqslant e$$

при $n \to \infty$ получаем, что $\lim S_n = e$, но S_n — это частичная сумма ряда

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \ldots \tag{5.1.5}$$

Следовательно, число e есть сумма ряда (5.1.5).

5.1.1. Критерий Коши. Учитывая, что сходимость ряда (5.1.1) равносильна сходимости последовательности его частичных сумм (5.1.2), легко получить критерий Коши сходимости ряда. Для этого нужно переформулировать критерий Коши (теорема 1.8.1) сходимости последовательности $\{S_n\}$.

Теорема 5.1.1 (критерий Коши сходимости ряда)**.** *Ряд (5.1.1) сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $N \in \mathbb{N}$, что из $m > N$, $n > N$ следует*

$$|S_m - S_n| < \varepsilon. \tag{5.1.6}$$

Замечание 5.1.1. *Если взять $m > n$ и положить $m = n + p$, то неравенство (5.1.6) можно переписать в виде*

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Таким образом критерий Коши можно сформулировать так

Теорема 5.1.2 (критерий Коши сходимости ряда). *Ряд (5.1.1) сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $N \in \mathbb{N}$, что из $n > N$ и для любого $p \in \mathbb{N}$ следует*

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon. \tag{5.1.7}$$

Следствие 5.1.1. *Если у ряда изменить только конечное число членов, то полученный при этом новый ряд будет сходиться, если сходится исходный ряд, и будет расходиться, если исходный ряд расходится.*

Доказательство. Для исследования сходимости нового ряда следует использовать критерий Коши, считая, что число N (в этом критерии) больше, чем максимальный из номеров измененных членов ряда. Тогда условие (5.1.6) будет записано совершенно идентично для исходного и нового ряда. □

5.1.2. Необходимый признак сходимости ряда.

Следствие 5.1.2. *Если ряд $a_1 + \dots + a_n + \dots$ сходится, то n-й член ряда стремится к нулю при $n \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Доказательство. Достаточно положить в критерии $m = n + 1$. Тогда условие (5.1.6) перепишется в виде

$$|S_{n+1} - S_n| = |a_{n+1}| < \varepsilon.$$

Это неравенство (из определения предела последовательности) дает, что

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0. \quad \square$$

Существуют ряды, у которых $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, но эти ряды расходятся.

Пример 5.1.2. Исследовать сходимость ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots,$$

который будет часто встречаться в дальнейшем в курсе математического анализа.

Этот ряд называется *гармоническим*. Название связано с тем, что члены ряда удовлетворяют условию

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}\right).$$

А в этом случае говорят, что a_n есть *среднее гармоническое* между a_{n-1} и a_{n+1}.

Решение. Сходимость последовательности частичных сумм этого ряда

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

уже исследована в примере 1.8.4, там получено, что $\{S_n\}$ расходится. Следовательно, гармонический ряд расходится (но $a_n \to 0$ при $n \to \infty$).

5.2. Абсолютная сходимость ряда

5.2.1. Сходимость абсолютно сходящегося ряда.

Определение 5.2.1. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *называется абсолютно (безусловно) сходящимся, если сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Теорема 5.2.1. *Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.*

Доказательство. Справедливо неравенство

$$|a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| \leqslant |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}|,$$

из которого (с использованием критерия Коши (см. условие (5.1.7))) в предыдущем параграфе) и следует утверждение теоремы. □

Заметим, что из сходимости ряда в общем случае не следует абсолютная сходимость, т.е. абсолютная сходимость есть для ряда требование более сильное, чем просто сходимость. Это можно продемонстрировать на примере.

Пример 5.2.1. Исследовать на сходимость ряд

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \dots .$$

Решение. Частичные суммы ряда равны

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{2}{n+1}, & \text{если } n \text{ — нечетное,} \\ 0, & \text{если } n \text{ — четное.} \end{cases}$$

Ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$ и ряд сходится.

Ряд же, составленный из абсолютных величин его членов

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots ,$$

расходится. Доказательство этого факта осуществляется так же, как и для гармонического ряда.

Теорема 5.2.2 (сходимость рядов с неотрицательными членами)**.** *Ряд* $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$, *члены которого — неотрицательные числа, сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена сверху.*

Доказательство. Ясно, что $S_n \leqslant S_{n+1}$, так как $a_{n+1} \geqslant 0$, т.е. последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм возрастающая. Если эта последовательность ограничена сверху ($S_n \leqslant S$), но предел S_n существует по признаку сходимости Вейерштрасса для монотонной последовательности (теорема 1.8.2) и ряд сходится.

Если же ряд сходится и его сумма равна S, то, очевидно, $S_n \leqslant S$ и теорема полностью доказана. □

5.2.2. Признаки сравнения. Из предыдущего критерия вытекает следующая очень простая, но чрезвычайно полезная теорема.

Теорема 5.2.3 (признак сравнения)**.** *Пусть даны два ряда с неотрицательными членами*

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots , \tag{5.2.1}$$

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \ldots . \tag{5.2.2}$$

Если существует номер $N \in \mathbb{N}$, такой что при любом $n > N$ имеет место неравенство $a_n \leqslant b_n$, то из сходимости ряда (5.2.2) вытекает сходимость ряда (5.2.1), а из расходимости ряда (5.2.1) вытекает расходимость ряда (5.2.2).

Доказательство. Поскольку конечное число членов не влияет на сходимость ряда, можно, без ограничения общности, считать, что $a_n \leqslant b_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Обозначим частичные суммы ряда (5.2.1) через A_n, а ряда (5.2.2) — через B_n.

Пусть ряд (5.2.2) сходится и его сумма равна B.

Тогда $A_n \leqslant B_n \leqslant B$ для любого n, т.е. последовательность частичных сумм $\{A_n\}$ ограничена сверху и по теореме 5.2.2 ряд (5.2.1) сходится.

Пусть теперь ряд (5.2.1) расходится. Докажем расходимость ряда (5.2.2). Будем рассуждать от противного: допустим, что ряд (5.2.2) сходится. Тогда немедленно получаем (см. первую часть доказательства), что ряд (5.2.1) сходится. Полученное противоречие и завершает доказательство теоремы. □

Пример 5.2.2. Исследовать сходимость ряда

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \ldots , \tag{5.2.3}$$

используя признак сравнения.

Решение. Легко доказать сходимость ряда

$$1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\,n} + \ldots . \tag{5.2.4}$$

Его частичную суму S_n можно преобразовать следующим образом:

$$S_n = 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\,n} =$$

$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) =$$

$$= 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2,$$

и ряд (5.2.4) сходится.

Очевидно, что

$$0 < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)\,n}, \quad n = 2, 3, \ldots ,$$

и по признаку сравнения ряд (5.2.2) сходится.

Теорема 5.2.4 (мажорантный признак Вейерштрасса)**.** *Пусть даны два ряда*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots , \tag{5.2.5}$$

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \ldots , \tag{5.2.6}$$

причем ряд (5.2.6) сходится, и его члены неотрицательны (члены ряда (5.2.5) — произвольны). Если существует номер $N \in \mathbb{N}$, такой, что при любом $n > N$ имеет место неравенство $|a_n| \leqslant b_n$, то ряд (5.2.5) сходится абсолютно.

Доказательство. Немедленно следует из признака сравнения и теоремы 5.2.1. □

Пример 5.2.3. Показать абсолютную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n^2}$.

Решение. Ряд сходится абсолютно, так как $\left|\dfrac{\sin n}{n^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ для любого $n \in \mathbb{N}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ сходится.

Теорема 5.2.5 (признак сравнения в предельной форме)**.** *Пусть даны два ряда с положительными членами*

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots,$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots.$$

Если существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \neq 0,$$

то либо оба ряда сходятся, либо оба ряда расходятся.

Пример 5.2.4. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n^4 - 1}}. \tag{5.2.7}$$

Исследовать его сходимость.

Решение. Сравнивая этот ряд с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$, получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2n^4-1}}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\sqrt{2 - \frac{1}{n^4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0.$$

Поэтому ряд (5.2.7) сходится.

5.3. Признаки абсолютной сходимости рядов

Рассмотрим признаки сходимости рядов. Начнем с признаков абсолютной сходимости.

5.3.1. Признак Коши.

Теорема 5.3.1 (признак Коши)**.** *Пусть дан ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

и

$$\alpha = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Тогда справедливы утверждения:

a) если $\alpha < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится;

b) если $\alpha > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится;

c) если $\alpha = 1$, то вопрос о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ остается открытым, т.е. существуют как (абсолютно) сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых $\alpha = 1$.

Доказательство. A) Если $\alpha < 1$, то, используя свойство плотности вещественных чисел, найдем и зафиксируем число q так, что $\alpha < q < 1$.

В соответствии с определением верхнего предела последовательности найдем номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что при $n > N$ выполнено $\sqrt[n]{|a_n|} < q$. Тогда при $n > N$ будем иметь

$$|a_n| < q^n,$$

и, поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ при $|q| < 1$ сходится, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно (по мажорантному признаку Вейерштрасса).

B) Так как α является частичным пределом последовательности $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$, то найдется подпоследовательность $\{\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\}$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = \alpha.$$

Если $\alpha > 1$, то найдется номер $K \in \mathbb{N}$ такой, что при любом $k > K$ будет

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > 1 \quad \text{или} \quad |a_{n_k}| > 1.$$

Тем самым показано, что необходимое условие сходимости ($a_n \to 0$) для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ не выполнено, и поэтому он расходится.

C) Доказательство этого случая сводится к тому, чтобы привести пример абсолютно сходящегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

и расходящегося

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

для которых $\alpha = 1$.

Вычислим α для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$:

$$\alpha = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} = 1$$

(известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$).

Точно так же находим, что $\alpha = 1$ для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$. □

5.3.2. Признак Даламбера.

Теорема 5.3.2 (признак Даламбера)**.** *Пусть дан ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \neq 0 \quad \textit{для всех} \quad n \in \mathbb{N},$$

и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \alpha$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

a) если $\alpha < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно;*

b) если $\alpha > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится;*

c) если $\alpha = 1$, *то вопрос о сходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *остается открытым.*

Доказательство. A) Если $\alpha < 1$, то найдется число q такое, что $\alpha < q < 1$; зафиксируем q и найдем номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что при любом $n > N$ будет $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$ (используем для этого соответствующее свойство предела). Можно считать, что неравенство $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$ выполняется для всех $n \in \mathbb{N}$ (если это не так, то изменим первые N членов ряда, что не повлияет на характер его сходимости).

Оценим величину $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_1}\right|$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_1}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| \cdot \ldots \cdot \left|\frac{a_2}{a_1}\right| < q^n$$

или

$$|a_{n+1}| < |a_1| \cdot q^n.$$

Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_1| q^n$ сходится, поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно по признаку сравнения.

Пункты b) и c) доказываются аналогично соответствующим пунктам предыдущей теоремы. Необходимо сделать это самостоятельно. □

Пример 5.3.1. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 + (-1)^n)^n}{4^n}.$$

Решение. Используем признак Коши:

$$\alpha = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(2+(-1)^n)^n}{4^n}\right|} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{2+(-1)^n}{4} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{2+(-1)^{2k}}{4} = \frac{3}{4}.$$

Поэтому $\alpha < 1$ и ряд сходится.

Пример 5.3.2. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

Решение. Используем признак Даламбера:

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\, n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{(n+1)} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}.$$

Таким образом, $\alpha < 1$ и ряд сходится.

5.3.3. Интегральный признак Коши. Между сходимостью рядов и несобственных интегралов есть прямая связь.

Теорема 5.3.3 (интегральный признак Коши)**.** *Рассмотрим функцию* $y = f(x)$, *заданную на промежутке* $[1, +\infty)$, *которая является непрерывной, неотрицательной и монотонно убывающей на* $[1, +\infty)$. *Для того, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \tag{5.3.1}$$

необходимо и достаточно, чтобы сходился несобственный интеград

$$\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{5.3.2}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть сходится ряд (5.3.1). Рассмотрим его частичные суммы $S_n = f(1)+\ldots+f(n)$. Поскольку $f(i+1) \geqslant f(x) \geqslant 0$ при $x \in [i, i+1]$, то

$$f(i+1) = \int\limits_i^{i+1} f(i+1)\,dx \geqslant \int\limits_i^{i+1} f(x)\,dx.$$

Поэтому

$$S \geqslant S_{n+1} \geqslant \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx,$$

где S сумма ряда (5.3.1). Отсюда и в силу монотонности и неотрицательности функции $f(x)$ получаем, что

$$\int\limits_1^{h} f(x)\,dx \leqslant S \quad \text{для любого} \quad h \geqslant 1.$$

Лемма 4.7.1 тогда показывает, что интеграл (5.3.2) сходится.

Достаточность. Пусть интеграл (5.3.2) сходится. Тогда аналогичным образом получаем, что

$$S_n = f(1)+\ldots+f(n) \leqslant \int\limits_1^2 f(x)\,dx + \int\limits_2^3 f(x)\,dx + \ldots + \int\limits_n^{n+1} f(x)\,dx = \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$$

для любого n. Поэтому по теореме 5.2.2 ряд (5.3.1) сходится. □

Пример 5.3.3. Рассмотреть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}. \tag{5.3.3}$$

и исследовать его на сходимость.

Решение. Ясно, что при $p \geqslant 0$ ряд расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости.

Пусть $p > 0$. Взяв функцию $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$, мы видим, что $f(n) = \dfrac{1}{n^p}$ и функция f удовлетворяет всем условиям интегрального признака Коши. Используя пример 4.7.2, получаем, что при $p > 1$ ряд (5.3.3) сходится, а при $p \leqslant 1$ этот ряд расходится.

5.4. Условно сходящиеся ряды

5.4.1. Признак Лейбница.

Определение 5.4.1. *Ряд вида*

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots,$$

где числа $a_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$, и $a_n \to 0$ при $n \to \infty$ монотонно убывая, называется рядом Лейбница.

Ряд Лейбница является одним из видов *знакочередующихся* рядов, в которых члены ряда последовательно меняют знак.

Теорема 5.4.1 (признак Лейбница)**.** *Ряд Лейбница сходится, и его сумма $S \leqslant a_1$.*

Доказательство. Рассмотрим частичные суммы ряда Лейбница с четными номерами $S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$. Так как разности в круглых скобках неотрицательны (a_n монотонно убывает при $n \to \infty$), $a_{2n} > 0$, то

$$S_{2n} \leqslant a_1. \tag{5.4.1}$$

Последовательность S_{2n} возрастает, поскольку $S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n})$, и разности в круглых скобках вновь неотрицательны.

Следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$, а $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$ и

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (S_{2n} + a_{2n+1}) = S.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ и ряд Лейбница сходится.

Неравенство $S \leqslant a_1$ вытекает из неравенства (5.4.1). □

Пример 5.4.1. Исследовать на сходимость ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \dots.$$

Решение. Данный ряд сходится (но не абсолютно!) по признаку Лейбница.

Определение 5.4.2. *Ряд называется условно (неабсолютно) сходящимся, если сам ряд сходится, а ряд из модулей его членов расходится.*

Предыдущий пример дает условно сходящийся ряд.

5.4.2. Признаки условной сходимости рядов.

Теорема 5.4.2 (признак Абеля)**.** *Если для ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n \tag{5.4.2}$$

выполнены условия:

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;
2) последовательность $\{b_n\}$ монотонна;
3) последовательность $\{b_n\}$ ограничена,
то ряд (5.4.2) сходится.

Теорема 5.4.3 (признак Дирихле)**.** *Если для ряда (5.4.2) выполнены условия*
1) частичные суммы $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ *ограничены;*
2) последовательность $\{b_n\}$ *монотонна;*
3) последовательность $\{b_n\}$ *стремится к нулю при* $n \to \infty$*,*
то ряд (5.4.2) сходится.

Для *доказательства* этих признаков необходимо сначала рассмотреть преобразование, которая носит название "преобразование Абеля". Оно является аналогом интегрирования по частям для интегралов.

Пусть даны две конечных числовые последовательности $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Положим

$$A_k = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k.$$

Тогда $\alpha_1 = A_1$, $\alpha_2 = A_2 - A_1$, …, $\alpha_n = A_n - A_{n-1}$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \beta_k = A_1\beta_1 + \sum_{k=2}^{n} (A_k - A_{k-1})\beta_k = \sum_{k=1}^{n-1} A_k(\beta_k - \beta_{k+1}) + A_n\beta_n. \qquad (5.4.3)$$

В этом и состоит преобразование Абеля.

Лемма 5.4.1. *Если* $\beta_1, \ldots, \beta_n$ *— монотонная последовательность, а все* A_k *ограничены одним числом, т.е.* $|A_k| \leqslant C$*,* $k = 1, \ldots < n$*, то*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \beta_k \right| \leqslant C(|\beta_1| + 2|\beta_n|).$$

Доказательство. Из формулы (5.4.3) и монотонности последовательности $\{\beta_k\}$ получим

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \beta_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{n-1} A_k(\beta_k - \beta_{k+1}) + A_n\beta_n \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} |A_k| \cdot |\beta_k - \beta_{k+1}| + |A_n| \cdot |\beta_n| \leqslant$$

$$\leqslant C \cdot \left(\sum_{k=1}^{n-1} |\beta_k - \beta_{k+1}| + |\beta_n| \right) = C \cdot \left(\left| \sum_{k=1}^{n-1} (\beta_k - \beta_{k+1}) \right| + |\beta_n| \right) =$$

$$= C(|\beta_1 - \beta_n| + |\beta_n|) \leqslant C(|\beta_1| + 2|\beta_n|).$$

Доказательство теоремы 5.4.2. Пусть выполнен условия теоремы. Используем критерий Коши для доказательства (теорема 5.1.2 для ряда (5.4.2).

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим выражение

$$a_{n+1} \cdot b_{n+1} + \ldots + a_{n+p} \cdot b_{n+p}. \qquad (5.4.4)$$

Последовательность $b_{n+1}, \ldots, b_{n+p}$ — монотонна для любого $p \in \mathbb{N}$ и ограничена, поэтому $|b_n| \leqslant M$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то по критерию Коши существует номер N, что при $n > N$ и для любого $p \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Применяя к сумме (5.4.4) лемму 5.4.1, получим

$$|a_{n+1} \cdot b_{n+1} + \ldots + a_{n+p} \cdot b_{n+p}| < \varepsilon(|b_{n+1}| + 2|b_{n+p}| \leqslant \varepsilon \cdot 3M.$$

Т.е. для ряда (5.4.2) выполнен критерий Коши. □

Доказательство признака Дирихле аналогично.

Замечание 5.4.1. *Признак Дирихле сильнее признака Абеля, поскольку из ограниченности и монотонности последовательности $\{b_n\}$ следует ее сходимость к некоторому числу b. Поэтому для ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - b)$$

применим признак Дирихле, а ряд $b \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по услови признака Абеля.

Пример 5.4.2. Рассмотрим ряд

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

Исследовать его на сходимость.

Решение. Полагаем $b_n = \dfrac{1}{n}$, а последовательность a_n равна

$$1,\ 1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ -1, \dots$$

Тогда первая последовательность монотонно стремится к 0, а частичные суммы второй последовательности принимают три значения: 1, 2, 0. Поэтому они ограничены. По признаку Дирихле рассматриваемый ряд сходится. Отметим, что этот ряд не является рядом Лейбница.

5.5. Перестановки членов ряда

5.5.1. Перестановки членов абсолютно сходящегося ряда. Исследуем вопрос о перестановке членов сходящихся рядов.

Определение 5.5.1. *Пусть φ — взаимно-однозначное отображение множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ на себя. Перестановкой ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ назовем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$.*

Подчеркнем, что члены ряда при перестановке не меняются, не добавляются, не вычеркиваются, а переставляются на другие места.

Теорема 5.5.1. *Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно к сумме S, то любая перестановка этого ряда также сходится к тому же числу S.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда члены ряда неотрицательны $a_n \geqslant 0$ для всех $n \in N$. Пусть S сумма этого ряда, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ — перестановка этого ряда. Тогда для частичных сумм справедливо неравенство $S_n = a_1 + \ldots + a_n \leqslant S$.

Возьмем частичную сумму перестановки ряда $S_n^{\varphi} = a_{\varphi(1)} + \ldots + a_{\varphi(n)}$. Если через $m(n)$ обозначить максимальное из натуральных чисел $\varphi(1), \ldots, \varphi(n)$, то в силу неотрицательности членов ряда, $S_n^{\varphi} \leqslant S_{m(n)}$. Поэтому $S_n^{\varphi} \leqslant S$ для всех n. Таким образом, частичные суммы перестановки ряда ограничены сверху, так что перестановка ряда сходится к некоторому числу S^{φ} по теореме 5.2.2. Ясно, что $S^{\varphi} \leqslant S$.

Так как первоначальный ряд получается обратной перестановкой φ^{-1} из ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$, то $S \leqslant S^{\varphi}$. Поэтому $S = S^{\varphi}$.

Рассмотрим произвольный абсолютно сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с суммой S. Введем обозначения

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n, & \text{если} \quad a_n \geqslant 0 \\ 0, & \text{если} \quad a_n < 0, \end{cases} \quad a_n^- = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad a_n \geqslant 0 \\ -a_n, & \text{если} \quad a_n < 0. \end{cases}$$

Тогда $a_n = a_n^+ - a_n^-$, $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$. Поскольку ряд из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится и выполнены неравенства $0 \leqslant a_n^+ \leqslant |a_n|$ и $0 \leqslant a_n^- \leqslant |a_n|$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то по признаку сравнения ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ также сходятся, соответственно, к суммам S^+ и S^-. Очевидно, что $S = S^+ - S^-$.

По только что доказанной части теоремы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}^+$ сходится к числу S^+, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}^+$ сходится к числу S^-. Поэтому $S^\varphi = S^+ - S^- = S$. □

5.5.2. Теорема Римана. Для условно сходящихся рядов ситуация совершенно обратная.

Теорема 5.5.2 (Риман)**.** *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится условно, то для любого числа* A *найдется перестановка этого ряда, что сумма получившегося ряда будет равна* A*. Причем* A *может быть как конечным числом так и* $\pm\infty$*.*

Доказательство. Так как сам ряд сходится, а ряд из модулей расходится, то для рядов, введенных в предыдущей теореме,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty.$$

Пусть для определенности A — конечно и неотрицательно. Выберем из ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ подряд столько членов, чтобы их сумма превышала A и чтобы меньшее число таких членов было не больше A. Т.е.

$$a_1^+ + \ldots + a_{n_1}^+ > A,$$

а

$$a_1^+ + \ldots + a_{n_1-1}^+ \leqslant A.$$

Существование такого номера n_1 следует из расходимости соответствующего ряда.

Выберем теперь из ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ подряд столько членов, чтобы вычтя их из суммы уже выбранных членов, получить значение меньшее A и чтобы меньшее число членов не обладало таким свойством. Т.е.

$$a_1^+ + \ldots + a_{n_1}^+ - a_1 - - \ldots - a_{n_2}^- < A,$$

но

$$a_1^+ + \ldots + a_{n_1}^+ - a_1 - - \ldots - a_{n_2-1}^- \geqslant A.$$

Эту процедуру мы будем продолжать дальше, добавляя и вычитая члены рядов.

Полученные суммы будут ни чем иным, как некоторыми частичными суммами первоначального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. В целом мы получим новый ряд, он будет перестановкой первоначального. Так как $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, то разность между частичными суммами полученной перестановки и числом A будет стремиться к нулю. □

5.5.3. Умножение рядов. Рассмотрим арифметические операции над рядами. Если дан сходящийся к сумме A ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{5.5.1}$$

то для любой константы c выполнено равенство

$$c \cdot A_n = c \cdot (a_1 + \ldots + a_n) = ca_1 + \ldots + ca_n.$$

Поэтому ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$$

также сходится и его сумма равна $c \cdot S$. Так что сходящийся ряд можно почленно умножать на постоянную и его сходимость не изменится.

Если рассмотреть еще одни сходящийся к сумме B ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \tag{5.5.2}$$

то, действуя аналогичным образом, получим, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

сходится и его сумма равна $A + B$. Поэтому сходящиеся ряды можно почленно складывать.

Более сложная ситуация возникает, когда мы хотим перемножить сходящиеся ряды.

Что такое умножение рядов? Мы должны каждый член первого ряда умножить на каждый член второго ряда (как для конечных сумм) и затем расположить их както в виде элементов третьего ряда. Для конечных сумм все равно как эти элементы суммировать (от перестановки слагаемых сумма не меняется). Для бесконечных рядов теорема Римана показывает, что сумма ряда от перестановки может измениться. Поэтому вопрос с умножением рядов требует более внимательного рассмотрения.

Теорема 5.5.3. *Пусть даны два абсолютно сходящихся ряда (5.5.1) и (5.5.2). Сумма первого ряда равна A, сумма второго ряда равна B. Если рассмотреть третий ряд, составленный из всех произведений элементов первого ряда на элементы второго ряда $a_n \cdot b_k$, расположенных в произвольном порядке, то полученный ряд также сходится абсолютно к сумме $A \cdot B$.*

Доказательство. Рассмотрим ряды из модулей элементов этих двух рядов. Они сходятся. Возьмем всевозможные произведения модулей $|a_n| \cdot |b_k|$ и расположим их в ряд в каком-то порядке. Рассмотрим частичную сумму получившегося ряда

$$C_m = |a_{n_1}| \cdot |b_{k_1}| + \ldots + |a_{n_m}| \cdot |b_{k_m}|.$$

Пусть $\max\{n_1, \ldots, n_m\} = s(m)$, а $\max\{k_1, \ldots, k_m\} = p(m)$, тогда

$$C_m \leqslant (|a_1| + \ldots + |a_{s(m)}|) \cdot ((|b_1| + \ldots + |b_{p(m)}|) \leqslant M,$$

поскольку в данную сумму входят все элементы C_m и ряды из модулей сходятся. Так что частичные суммы C_m ограничены сверху и, следовательно, полученный ряд сходится абсолютно.

По теореме 5.5.1 любая перестановка абсолютно сходящегося ряда не меняет его суммы. Поэтому расположим элементы ряда из произведений в следующем порядке

$$a_1b_1 + a_2b_1 + a_2b_2 + a_2b_1 + a_3b_1 + a_3b_2 + a_3b_3 + a_2b_3 + a_1b_3 + \dots$$

Возьмем подпоследовательность последовательности его частичных сумм следующего вида

$$a_1b_1, \quad a_1b_1 + a_2b_1 + a_2b_2 + a_2b_1 = (a_1 + b_2)(b_1 + b_2),$$

$$a_1b_1 + a_2b_1 + a_2b_2 + a_2b_1 + a_3b_1 + a_3b_2 + a_3b_3 + a_2b_3 + a_1b_3 = (a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3),$$

и так далее. Полученная последовательность состоит и произведения частичных сумм рядов (5.5.1) и (5.5.2) и, следовательно, имеет своим пределом произведение AB. Это и есть сумма нужного нам ряда. $\square$

Глава 6

Функциональные последовательности и ряды

После изучения данной главы читатель должен уметь исследовать функциональные, степенные ряды, разлагать функции в степенной ряд и ряд Фурье. Знать основные определения, формулы и теоремы о функциональных рядах, степенных рядах и рядах Фурье: критерии равномерной сходимости, теорему о непрерывности, почленной дифференцируемости и интегрируемости функциональных последовательностей и рядов, первую и вторую теоремы Абеля, формулу Коши-Адамара, разложение в ряд Тейлора, понятие аналитической функции, формулу Эйлера, ортогональность тригонометрической системы функций, ядра Дирихле и Фейера, теорему Римана об осцилляции, принцип локализации, признаки сходимости ряда Фурье, теорему Фейера, теоремы Вейерштрасса о приближении, неравенство Бесселя и равенство Парсеваля, полноту и замкнутость систем функций. Владеть методами определения равномерной сходимости функциональных рядов и последовательностей, методами разложения в степенные ряды и ряды Фурье.

6.1. Сходимость функциональных последовательностей и рядов

Определение 6.1.1. *Пусть дана последовательность, элементами которой являются функции*

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots, \tag{6.1.1}$$

определенные на некотором множестве $E \subset \mathbb{R}$. Такая последовательность называется функциональной.

Зафиксируем число $x_0 \in E$ и рассмотрим числовую последовательность

$$f_1(x_0), f_2(x_0), \ldots, f_n(x_0), \ldots\ .$$

Допустим, что эта последовательность имеет предел, который естественно обозначить $f(x_0)$:

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0).$$

Пусть теперь для каждого $x \in E$ соответствующая числовая последовательность (6.1.1) имеет конечный предел $f(x)$:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x). \tag{6.1.2}$$

Определение 6.1.2. *Функция $f(x)$, $x \in E$, называется предельной функцией для функциональной последовательности (6.1.1), а сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ при $n \to \infty$ называют поточечной на множестве E.*

Будем далее изучать функциональные свойства $f(x)$: непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость. Задача эта не так проста, как может показаться. Например, из непрерывности всех функций $f_n(x)$ в точке x_0 не следует непрерывность функции $f(x)$ в этой же точке, т.е. свойства функций $f_n(x)$ не переносятся автоматически и не становятся свойствами предельной функции $f(x)$.

Определение 6.1.3. *Рассмотрим ряд, членами которого являются функции $u_n(x),\ x \in E$:*

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x). \tag{6.1.3}$$

Ряд (6.1.3) называется функциональным рядом.

Предположим, что этот ряд сходится при любом фиксированном $x \in E$. Обозначим его сумму $S(x)$:

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x), \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad x \in E. \tag{6.1.4}$$

И вновь возникает вопрос о функциональных свойствах суммы ряда $S(x)$. Обратим внимание, что и здесь стандартные утверждения типа "Сумма непрерывных функций есть функция непрерывная" неверны, так как речь идет о сумме бесконечного числа слагаемых $u_n(x)$.

Заметим, что функцию $S(x)$ можно рассматривать как предельную функцию для функциональной последовательности частичных сумм ряда (6.1.3)

$$S_1(x), S_2(x), \ldots, S_n(x), \ldots \tag{6.1.5}$$

и, таким образом, проводить изучение свойств $S(x)$, используя теорию функциональных последовательностей.

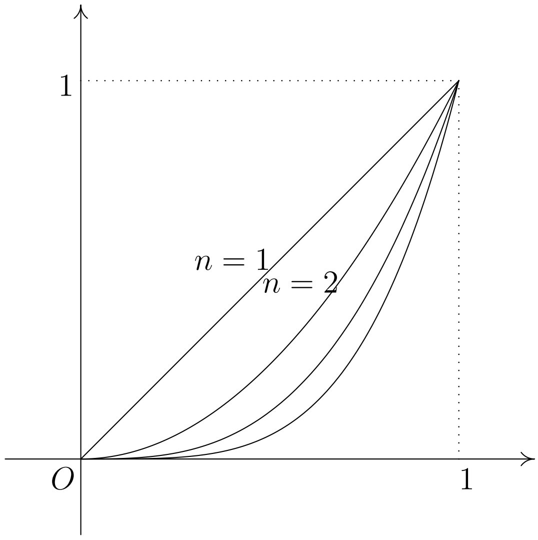

Рис 6.1.1. Графики функций $f_n(x) = x^n$

Верно и обратное. Имея функциональную последовательность (6.1.1), можно предельную функцию этой последовательности представить как сумму функционального ряда (6.1.3):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),$$

где $u_1(x) = f_1(x), \quad u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x), \quad n = 2, 3, \ldots$.

Таким образом, нет необходимости отдельно доказывать теоремы для последовательности (6.1.1) и для ряда (6.1.3). Формулировки же этих теорем легко следуют одна из другой. С определенной долей условности можно сказать, что в приложениях математического анализа чаще используется понятие функционального ряда, а в теории — функциональной последовательности.

Рассмотрим три примера конкретных функциональных последовательностей и соответствующих предельных функций.

Пример 6.1.1. Исследовать на сходимость последовательность $f_n(x) = x^n$, $x \in E = [0, 1]$, $n = 1, 2, \ldots$

Решение. Найдем предельную функцию $f(x)$.

Пусть $x = 1$, тогда $f_n(1) = 1$ и $f(1) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$. Если $x \in [0, 1)$, то $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$.

На рис. 6.1.1 представлены графики функций $f_n(x)$, а на рис. 6.1.2 — график предельной функции $f(x)$.

Отметим, что предельная функция $f(x)$ терпит разрыв в точке $x = 1$, в то время как все функции $f_n(x)$ непрерывны в этой точке.

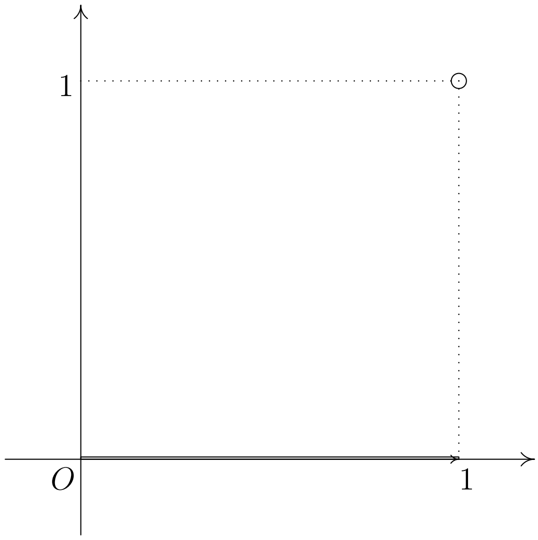

Рис 6.1.2. График предельной функции последовательности $f_n(x) = x^n$

Пример 6.1.2. Найти предел последовательности

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}, \quad x \in E = [0, 1], \quad n = 1, 2 \ldots.$$

Решение. Очевидно, что предельная функция

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1 + n^2x^2} = 0$$

для $x \in [0, 1]$.

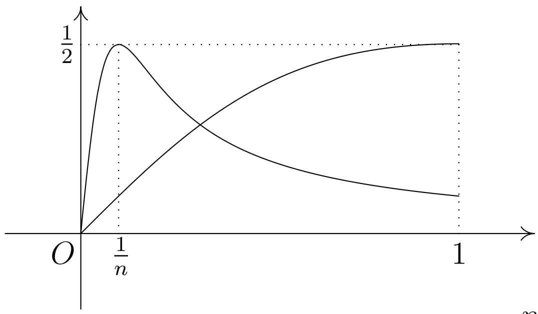

Рис 6.1.3. Графики функций $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2}$

Дадим геометрическую иллюстрацию. График функции

$$f_1(x) = \frac{x}{1 + x^2}$$

легко построить, используя стандартные приемы дифференциального исчисления.

График функции $f_n(x)$ можно получить путем "сжатия" графика функции $f_1(x)$ вдоль оси OX в n раз (в системе координат (x', y), $x' = nx$ график функции $f_n(x)$ выглядит так же, как график $f_1(x)$ в системе координат (x, y)) (рис. 6.1.3).

Отметим, что в рассматриваемом примере предельная функция $f(x) \equiv 0$ непрерывна.

Пример 6.1.3. Найти предел последовательности

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2x^2}, \quad x \in E = [0, 1], \quad n = 1, 2 \ldots \ .$$

Решение. Очевидно, что предельная функция

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x}{1 + n^2x^2} = 0$$

для $x \in [0, 1]$.

Графики функций $f_n(x)$ в этом примере получаются из графиков функций $f_n(x)$ примера 6.1.2 "сжатием" в n раз вдоль оси OY (рис. 6.1.4).

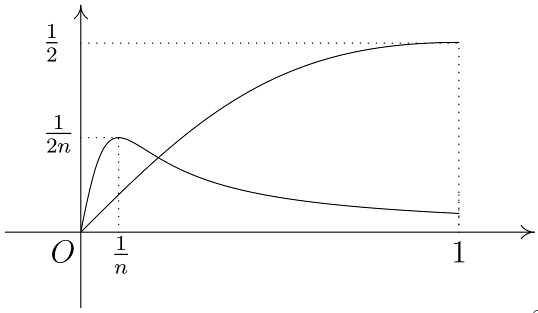

Рис 6.1.4. Графики функций $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + n^2x^2}$

6.2. Равномерная сходимость. Признаки равномерной сходимости

6.2.1. Определение равномерной сходимости. Анализируя процесс сходимости функциональной последовательности к предельной функции в примерах 6.1.2 и 6.1.3, можно отметить принципиальное различие в стремлении $f_n(x)$ к $f(x)$ при $n \to \infty$. Если в примере 6.1.3 графики функций $f_n(x)$ приближаются к графику предельной функции $f(x) = 0$ одновременно для всех x из промежутка $[0, 1]$, то в примере 6.1.2 такое одновременное для все $x \in [0, 1]$ сближение графиков отсутствует: для любого $n \in \mathbb{N}$ существует точка $x_n = \dfrac{1}{n}$, $\quad x_n \in [0, 1]$, такая, что

$$f_n(x_n) - f(x_n) = \frac{1}{2}.$$

Если выразить эти различия строго, то следует сказать, что в примере 6.1.3 имеет место *равномерная сходимость* последовательности $\{f_n(x)\}$ к предельной функции $f(x)$ на множестве $E = [0, 1]$, а в примере 6.1.2 равномерная сходимость на этом множестве отсутствует.

Дадим точное определение. Обозначим через ρ_n величину

$$\sup_{x \in E} \big| f(x) - f_n(x) \big|,$$

предполагая, что она конечна ($\rho_n = \dfrac{1}{2n}$ в примере 6.1.3 и $\rho_n = \dfrac{1}{2}$ в примере 6.1.2).

Определение 6.2.1. *Последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на множестве E к предельной функции $f(x)$ при $n \to \infty$, если $\rho_n \to 0$, когда $n \to \infty$.*

В противном случае говорят, что последовательность сходится *неравномерно* на множестве E.

Теперь уже ясно, что последовательность $\{f_n(x)\}$ из примера 6.1.3 сходится равномерно к своей предельной функции $f(x)$ на множестве $E = [0, 1]$, так как

$$\rho_n = \frac{1}{2n} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty),$$

а последовательность из примера 6.1.2 сходится неравномерно на том же множестве (а только в каждой точке).

Исследуем на равномерную сходимость последовательность $\{f_n(x)\}$ из примера 6.1.1. Вычислим ρ_n:

$$\rho_n = \sup_{x\in[0,1]} \bigl|f(x) - f_n(x)\bigr| = \sup_{x\in[0,1)} \bigl|0 - x^n\bigr| = 1.$$

Второе равенство в этой цепочке справедливо, так как супремум в точке $x = 1$ достигаться не может $\bigl(f(1) - f_n(1) = 0\bigr)$.

Последовательность $f_n(x) = x^n$ сходится неравномерно на множестве [0,1] и на множестве $[0, 1)$ тоже.

Нужно также понимать, что равномерная сходимость зависит и от множества, на котором мы ее исследуем. Так в примере 6.1.1, если мы рассмотрим не всю область сходимости, а, например, отрезок $[0, 1/2]$, то $\rho_n = 1/2^n \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому на данном множестве равномерная сходимость имеет место.

Часто используют и другое определение равномерной сходимости.

Определение 6.2.2. *Последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на множестве E к предельной функции $f(x)$ при $n \to \infty$, если*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_\varepsilon \quad \forall x \in E \ \Rightarrow \ \bigl|f(x) - f_n(x)\bigr| < \varepsilon. \tag{6.2.1}$$

Эквивалентность определений 6.2.1 и 6.2.2 очевидна.

Определим теперь понятие равномерной сходимости функционального ряда на множестве E.

Определение 6.2.3. *Функциональный ряд (6.1.3) равномерно сходится на множестве E, если последовательность его частичных сумм $\{S_n(x)\}$ равномерно сходится на множестве E к своей предельной функции $S(x)$.*

6.2.2. Критерий Коши. Сформулируем и докажем критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности.

Теорема 6.2.1 (критерий Коши)**.** *Для того чтобы функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходилась на множестве E, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \forall n > N_\varepsilon \ \forall p > 0 \ \forall x \in E \ \Rightarrow \ \bigl|f_{n+p}(x) - f_n(x)\bigr| < \varepsilon. \tag{6.2.2}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на множестве E к своей предельной функции $f(x)$. Проверим выполнение условия (6.2.2). Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем N, используя определение 6.2.2. А теперь оценим величину $\bigl|f_{n+p}(x) - f_n(x)\bigr|$ для $n > N$.

$$\bigl|f_{n+p}(x) - f_n(x)\bigr| = \bigl|f_{n+p}(x) - f(x) + f(x) - f_n(x)\bigr| \leqslant$$

$$\leqslant \left|f_{n+p}(x) - f(x)\right| + \left|f(x) - f_n(x)\right| < 2\varepsilon$$

для всех $x \in E$, и условие (6.2.2) выполнено.

Достаточность. Пусть выполнено условие (6.2.2). Зафиксируем $x \in E$. Тогда условие (6.2.2) превращается в условие Коши сходимости числовой последовательности $\{f_n(x)\}$, значит, эта последовательность сходится к числу $f(x)$. Таким образом, установлена поточечная сходимость функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ к предельной функции $f(x)$. Запишем теперь неравенство из условия (6.2.2):

$$\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon, \quad \forall n > N, \quad \forall x \in E,$$

и перейдем в нем к пределу при $p \to \infty$. Получим неравенство

$$\left|f(x) - f_n(x)\right| \leqslant \varepsilon, \quad \forall n > N, \quad \forall x \in E.$$

Так как последнее неравенство выполняется для всех $x \in E$, то и

$$\rho_n = \sup_{x \in E}\left|f(x) - f_n(x)\right| \leqslant \varepsilon \quad \forall n > N$$

или $\rho_n \longrightarrow 0$ при $n \to \infty$. А это означает равномерную сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E. □

Запишем два очевидных утверждения.

Теорема 6.2.2. *Пусть даны две равномерно сходящиеся на множестве E функциональные последовательности $\{f_n(x)\}$, $\{\varphi_n(x)\}$ и α — действительное число. Тогда последовательности*

$$\{f_n(x) + \varphi_n(x)\} \quad \text{и} \quad \{\alpha f_n(x)\}$$

также равномерно сходятся на множестве E.

Теорема 6.2.3. *Если последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на множестве E и $E' \subset E$, то $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно и на множестве E'.*

6.2.3. Признаки равномерной сходимости. Докажем ряд признаков равномерной сходимости. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x). \tag{6.2.3}$$

Теорема 6.2.4 (мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости)**.** *Если члены ряда (6.2.3) удовлетворяют на множестве E неравенствам*

$$\left|u_n(x)\right| \leqslant a_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где a_n — вещественные числа, и если числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{6.2.4}$$

сходится, то функциональный ряд (6.2.3) сходится на множестве E абсолютно и равномерно.

Доказательство. Проверим выполнение условия (6.2.2) для последовательности частичных сумм $S_n(x)$. В силу сходимости числового ряда (6.2.4) справедливо следующее утверждение:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ \forall p > 0\ \Rightarrow\ a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p} < \varepsilon. \tag{6.2.5}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и оценим величину $\left|S_{n+p}(x) - S_n(x)\right|$, предполагая, что $n > N$ и N найдено из условия (6.2.5):

$$\left|S_{n+p}(x) - S_n(x)\right| \leqslant \left|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+p}(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|u_{n+1}(x)\right| + \left|u_{n+2}(x)\right| + \dots + \left|u_{n+p}(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p} < \varepsilon,$$

т.е.

$$\left|S_{n+p}(x) - S_n(x)\right| < \varepsilon \quad \text{для} \quad \forall n > N, \quad \forall p > 0, \quad \forall x \in E,$$

что и означает равномерную и абсолютную сходимость функционального ряда на множестве E. □

Прежде чем сформулировать следующий признак, дадим несколько определений.

Определение 6.2.4. *Говорят, что семейство функций $\mathcal{F} = \{f\}, \quad f : E \to Y \subset \mathbb{R}$ равномерно ограничено на множестве E, если существует такое число M, что для любой функции $f \in \mathcal{F}$ справедливо соотношение*

$$\left|f(x)\right| \leqslant M \quad \textit{для всех} \quad x \in E.$$

Определение 6.2.5. *Последовательность функций $\{f_n(x)\}, \quad f_n : E \to Y \subset \mathbb{R}$, называется возрастающей на множестве E, если для любого $x_0 \in E$ таковой является числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}$.*

Аналогично определяется убывающая функциональная последовательность.

Убывающие и возрастающие последовательности называются *монотонными.*

Теорема 6.2.5 (признак Абеля равномерной сходимости)**.** *Если на множестве E для ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \tag{6.2.6}$$

выполнены условия

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно сходится на множестве E;

2) последовательность функций $\{b_n(x)\}$ монотонна на E;

3) последовательность функций $\{b_n(x)\}$ равномерно ограничена на E,

то ряд (6.2.6) сходится равномерно на E.

Теорема 6.2.6 (признак Дирихле равномерной сходимости)**.** *Если на множестве E для ряда (6.2.6) выполнены условия*

1) частичные суммы $S_n^a(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно ограничены на E;

2) последовательность функций $\{b_n(x)\}$ монотонна на множестве E;

3) последовательность функций $\{b_n(x)\}$ равномерно стремится к нулю на множестве E,

то ряд (6.2.6) сходится равномерно на E.

Доказательство этих признаков проходит также, как доказательство признаков Абеля и Дирихле (теоремы 5.4.2 и 5.4.3) сходимости ряда только используется критерий Коши равномерной сходимости.

6.3. Предельный переход под знаком функциональной последовательности и функционального ряда

Докажем теорему.

Теорема 6.3.1. *Пусть на множестве E задана функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$, для которой выполняются два условия:*

1) последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на множестве E к своей предельной функции $f(x)$;

2) существует

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in E}} f_n(x) = a_n$$

для всех $n \in \mathbb{N}$ (x_0 — предельная точка множества E).

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) последовательность $\{a_n\}$ сходится, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$;

2) существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, и он равен A, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

Доказательство. Запишем условие Коши равномерной сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ (теорема 6.2.1):

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \forall p > 0 \ \forall x \in E \ \Rightarrow \ |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Переходя к пределу в последнем неравенстве при $x \to x_0$, получим (см. условие 2 рассматриваемой теоремы):

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N \ \forall p > 0 \ \Rightarrow \ |a_{n+p} - a_n| \leqslant \varepsilon,$$

что означает сходимость числовой последовательности $\{a_n\}$. Обозначим ее предел через A:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A,$$

и утверждение 1 теоремы 6.3.1 доказано.

Докажем теперь второе утверждение теоремы. По определению предела функции необходимо оценить величину $\big|f(x) - A\big|$ в окрестности точки x_0. Зафиксируем число $\varepsilon > 0$ и выберем номер n_0 так, чтобы одновременно выполнялись два неравенства:

$$\big|f(x) - f_{n_0}(x)\big| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{для всех} \quad x \in E,$$

$$\big|A - a_{n_0}\big| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Это можно сделать в силу равномерной сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ на множестве E и в силу того, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

Так как $\lim\limits_{x\to x_0} f_{n_0}(x) = a_{n_0}$, то для фиксированного $\varepsilon > 0$ выполняется условие

$$\exists\delta > 0 \quad \forall x \in E \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow \big|f_{n_0}(x) - a_{n_0}\big| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Теперь

$$\big|f(x) - A\big| \leqslant \big|f(x) - f_{n_0}(x)\big| + \big|f_{n_0}(x) - a_{n_0}\big| + \big|a_{n_0} - A\big| < \varepsilon,$$

лишь только $x \in E$ удовлетворяет неравенству

$$0 < |x - x_0| < \delta,$$

и теорема доказана. $\square$

Как простое следствие доказанного утверждения получается теорема.

Теорема 6.3.2. *Если члены функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ непрерывны в точке $x_0 \in E$ и последовательность сходится равномерно на множестве E, то предельная функция $\{f(x)\}$ непрерывна в точке x_0.*

Для *доказательства* теоремы достаточно заметить, что величина a_n, $n = 1, 2, \ldots$, из теоремы 6.3.1 в новых условиях равна $f_n(x_0)$, тогда $A = f(x_0)$, и окончательно получается равенство

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

$\square$

Сформулируем аналоги теорем 6.3.1 и 6.3.2 для функциональных рядов.

Теорема 6.3.3. *Пусть члены функционального ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{6.3.1}$$

определены на множестве E, причем выполнены два условия:

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на множестве E к $S(x)$;

2) для предельной точки x_0 множества E существует $\lim\limits_{x \to x_0} u_n(x) = a_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится к сумме A;

2) существует $\lim\limits_{x \to x_0} S(x) = A$, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{x \to x_0} u_n(x)$.

Теорема 6.3.4. *Если члены функционального ряда (6.3.1) есть непрерывные функции в точке $x_0 \in E$ и ряд сходится равномерно на множестве E, то сумма ряда $S(x)$ непрерывна в точке x_0.*

Доказательство этих теорем легко провести по аналогии с доказательством теорем 6.3.1 и 6.3.2.

Замечание 6.3.1. *Возвращаясь к примерам 6.1.1, 6.1.2, 6.1.3 (§ 6.1), легко видеть, что условиям теоремы 6.3.2 удовлетворяет только функциональная последовательность из примера 6.1.3.*

В примере 6.1.2 последовательность сходится неравномерно на множестве $E = [0, 1]$, тем не менее предельная функция $f(x) \equiv 0$ непрерывна на множестве E, т.е. условие равномерной сходимости в теореме 6.3.2 является достаточным, но не необходимым.

6.4. Почленная интегрируемость и дифференцируемость функциональной последовательности и функционального ряда

Докажем теорему.

Теорема 6.4.1. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *задана последовательность* $\{f_n(x)\}$ *непрерывных функций, равномерно сходящаяся на этом множестве к предельной функции* $f(x)$.

Тогда последовательность

$$\left\{ \int\limits_a^x f_n(t)\,dt \right\}$$

сходится равномерно для $x \in [a, b]$ *к своей предельной функции*

$$\int\limits_a^x f(t)\,dt \quad \textit{при} \quad n \to \infty,$$

т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^x f_n(t)\,dt = \int\limits_a^x \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt = \int\limits_a^x f(t)\,dt \tag{6.4.1}$$

и, в частности,

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(t)\,dt = \int\limits_a^b f(t)\,dt.$$

Доказательство. Из условий теоремы следует, что предельная функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и, значит, интегрируема на этом отрезке. Необходимо доказать равенство (6.4.1) и равномерную сходимость для $x \in [a, b]$:

$$\left| \int\limits_a^x f(t)\,dt - \int\limits_a^x f_n(t)\,dt \right| \leqslant \int\limits_a^x \bigl|f(t) - f_n(t)\bigr|\,dt \leqslant \int\limits_a^b \rho_n\,dt = \rho_n \cdot (b - a),$$

где $\rho_n = \max\limits_{x\in[a,b]} \bigl|f(x) - f_n(x)\bigr| \longrightarrow 0, \quad n \to \infty.$ □

Замечание 6.4.1. *Условие непрерывности функций* $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ *в теореме 6.4.1 не является обязательным. Можно было бы потребовать только интегрируемость этих функций, несколько усложнив доказательство.*

Сформулируем аналог теоремы 6.4.1 для функционального ряда, оставляя доказательство читателю.

Теорема 6.4.2. *Пусть члены функционального ряда (6.3.1) определены и непрерывны на отрезке* $[a, b]$, *ряд сходится равномерно на этом отрезке и его сумма есть функция* $S(x)$.

Тогда

$$\int\limits_{x_0}^x S(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{x_0}^x u_n(t)\,dt \quad (a \leqslant x_0 \leqslant b),$$

причем сходимость ряда в последнем равенстве равномерная для $x \in [a, b]$.

В частности,

$$\int\limits_a^b S(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(t)\,dt,$$

т.е. ряд (6.3.1) можно почленно интегрировать.

Теорема 6.4.3. *Пусть члены функционального ряда (6.3.1) определены и непрерывно дифференцируемы на отрезке* $[a, b]$.

Пусть также выполнены условия:

1) ряд (6.3.1) сходится в некоторой точке $x_0 \in [a, b]$*;*

2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$*, составленный из производных членов ряда (6.3.1), сходится равномерно на отрезке* $[a, b]$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) ряд (6.3.1) равномерно сходится на отрезке $[a, b]$*;*

2) производная суммы этого ряда $S(x)$ *существует и вычисляется по формуле*

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x),$$

т.е. ряд (6.3.1) можно почленно дифференцировать.

Доказательство. Обозначим сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ через $\varphi(x)$. Для этого ряда выполнены все условия предыдущей теоремы, и поэтому его можно почленно интегрировать ($x, x_0 \in [a, b]$):

$$\int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{x} u_n'(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left[u_n(x) - u_n(x_0)\right], \tag{6.4.2}$$

причем последний ряд сходится равномерно. Обозначим его члены $w_n(x) = u_n(x) - u_n(x_o)$. Тогда ряд (6.3.1) можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(w_n(x) + u_n(x_0)\big) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0),$$

т.е. представить его как сумму двух равномерно сходящихся рядов на отрезке $[a, b]$ (ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ числовой и сходится равномерно на любом множестве, так как его члены не зависят от x) и, значит, доказать первое утверждение теоремы.

Обозначая сумму ряда (6.3.1) через $S(x)$, перепишем равенство (6.4.2) в виде

$$\int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt = S(x) - S(x_0).$$

Дифференцируя его по x, получим требуемый результат:

$$\varphi(x) = S'(x) \quad \text{или} \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

□

Теорема о дифференцируемости предельной функции функциональной последовательности может быть сформулирована и доказана аналогичным образом.

6.5. Степенные ряды. Радиус и интервал сходимости

Дадим следующее определение.

Определение 6.5.1. *Функциональный ряд вида*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots, \tag{6.5.1}$$

где a_k, $k = 0, 1, 2, \dots$ *— вещественные числа, а* x *— вещественная переменная, называется степенным рядом.*

Теорема 6.5.1 (первая теорема Абеля). *Если ряд (6.5.1) сходится в точке* $x_0 \neq 0$, *то он сходится абсолютно на интервале* $(-|x_0|, |x_0|)$ *и сходится равномерно на любом промежутке*

$$-q \leqslant x \leqslant q,$$

где q *удовлетворяет неравенству* $0 < q < |x_0|$ *(рис. 6.5.1).*

Доказательство. Из сходимости ряда (6.5.1) в точке x_0 следует, что его общий член в этой точке $(a_nx_0^n)$ стремится к 0 при $n \to \infty$, значит, существует такое число M, что

$$|a_nx_0^n| \leqslant M \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Воспользуемся теперь признаком Вейерштрасса равномерной сходимости ряда. Оценим для этого общий член ряда (6.5.1) для $x \in [-q, q]$.

$$|a_nx^n| = |a_nx_0^n|\left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leqslant M\left|\frac{q}{x_0}\right|^n, \quad -q \leqslant x \leqslant q.$$

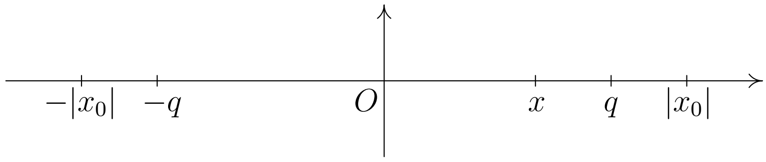

Рис 6.5.1. Интервал сходимости степенного ряда

Ряд с общим членом $M\left|\frac{q}{x_0}\right|^n$ сходится (это сумма геометрической прогрессии со знаменателем $\left|\frac{q}{x_0}\right| < 1$), следовательно, ряд (6.5.1) сходится абсолютно и равномерно для $x \in [-q, q]$. □

Замечание 6.5.1. *В силу произвольности величины* q $(q < |x_0|)$ *ряд (6.5.1) сходится для* $-|x_0| < x < |x_0|$. *Но в этом открытом интервале сходимость не всегда равномерная.*

Теорема 6.5.2. *Для каждого степенного ряда (6.5.1) существует такое неотрицательное число* R *(или* $R = +\infty$ *), что:*

1) если $R \neq 0, R \neq +\infty$, *то ряд (6.5.1) абсолютно сходится для* x *из интервала* $(-R, R)$ *и расходится при* $|x| > R$;

2) если $R = +\infty$, *то ряд сходится для любого* x;

3) если $R = 0$, *то ряд сходится только в одной точке* $x = 0$.

Доказательство. Пусть E — множество точек, в которых ряд (6.5.1) сходится. Это множество не пустое, так как при $x = 0$ ряд сходится.

Введем величину R с помощью формулы

$$R = \sup_{x \in E} |x|.$$

Ясно, что $R \geqslant 0$ или $R = +\infty$.

Докажем утверждение 1). Пусть $x_0 \in (-R, R)$. Покажем, что в точке x_0 ряд (6.5.1) сходится. Зафиксируем значение $\bar{x}$, что $|x_0| < |\bar{x}| < R$), для которого ряд (6.5.1) сходится. Это возможно сделать на основании определения числа R как точной верхней границы. Тогда, по первой теореме Абеля, ряд (6.5.1) сходится в точке x_0. Если же точка x_0 такова, что $|x_0| > R$, то расходимость ряда в этой точке немедленно следует из определения числа R.

Утверждение 2) доказывается методом от "противного" с использованием первой теоремы Абеля, и наконец утверждение 3) очевидно. □

Определение 6.5.2. *Число R называется радиусом сходимости ряда (6.5.1).*

Определение 6.5.3. *Промежуток $(-R, R)$ называется интервалом сходимости ряда (6.5.1) ($R > 0$).*

Заметим, что при $x = R$ и $x = -R$ степенной ряд (6.5.1) может как сходиться, так и расходиться.

6.6. Свойства суммы степенного ряда

6.6.1. Формула Коши-Адамара. Для вычисления радиуса сходимости R существует формула Коши-Адамара. Она будет получена в следующей теореме.

Теорема 6.6.1 (Коши-Адамар)**.** *Радиус сходимости ряда (6.5.1) есть число, обратное величине*

$$A = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|},$$

при $A \neq 0$, $A \neq \infty$, т.е. $R = 1/A$. Если $A = 0$, то $R = \infty$, и если $A = \infty$, то $R = 0$.

Доказательство. Докажем два неравенства $R \cdot A \leqslant 1$ и $R \cdot A \geqslant 1$. Начнем с первого. Пусть $R > 0$. Зададим число R_1, такое, что $0 < R_1 < R$. Тогда при $x = R_1$ ряд (6.5.1) сходится, и поэтому существует число M, такое, что

$$\left|a_n R_1^n\right| \leqslant M \quad \text{для всех} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

или

$$R_1 \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \sqrt[n]{M} \quad \text{для всех} \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Теперь

$$R_1 \cdot A = R_1 \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} R_1 \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{M} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{M} = 1,$$

т.е. $R_1 \cdot A \leqslant 1$. В силу произвольности R_1 $(0 < R_1 < R)$ можно написать

$$R \cdot A \leqslant 1.$$

Это неравенство верно и при $R = 0$.

Докажем далее, что $R \cdot A \geqslant 1$. Пусть $R < +\infty$ и $R_1 > R$. Тогда в точке $x = R_1$ ряд (6.5.1) расходится и тем более расходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| R_1^n$. Следовательно, по признаку Коши сходимости числового ряда (теорема 5.3.1)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n| R_1^n} \geqslant 1$$

или

$$R_1 \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = R_1 \cdot A \geqslant 1,$$

откуда получаем неравенство

$$R \cdot A \geqslant 1,$$

которое верно и при $R = +\infty$.

Окончательно имеем, что $R \cdot A = 1$ или $R = 1/A$. □

Теорема 6.6.2. *Степенной ряд сходится абсолютно и равномерно в промежутке* $[-r, r]$*, где* $0 < r < R$*.*

Доказательство. Легко следует из определения числа R и первой теоремы Абеля. $\square$

6.6.2. Вторая теорема Абеля.

Теорема 6.6.3. *Степенной ряд сходится равномерно в промежутке* $[0, R]$*, если он сходится при* $x = R$*.*

Доказательство. Проверим условия признака Абеля равномерной сходимости. Запишем для этого исследуемый ряд в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n \cdot \left(\frac{x}{R}\right)^n.$$

Тогда ряд с общим членом $a_n R^n$ (в признаке Абеля он играет роль функции $a_n(x)$) сходится равномерно на промежутке $[0, R]$ (он сходится равномерно на любом промежутке, так как не зависит от x).

Последовательность $b_n(x) = \left(\dfrac{x}{R}\right)^n$ монотонна и равномерно ограничена для $x \in [0, R]$. $\square$

Исследуем сначала вопрос непрерывности суммы степенного ряда в интервале сходимости и на его концах.

Теорема 6.6.4. *Если* $R > 0$*, то сумма степенного ряда есть функция, непрерывная в промежутке* $(-R, R)$*.*

Доказательство. Пусть x_0 — произвольная точка из промежутка $(-R, R)$. Докажем непрерывность суммы ряда (6.5.1) в этой точке.

В силу свойства плотности множества вещественных чисел существует число $r > 0$, такое, что

$$|x_0| < r < R.$$

Степенной ряд по теореме 6.6.2 сходится равномерно в промежутке $[-r, r]$, следовательно, сумма ряда есть функция, непрерывная в этом промежутке (см. теорему 6.3.4 § 6.3), в том числе и в точке $x_0 \in [-r, r]$. $\square$

Теорема 6.6.5 (вторая теорема Абеля)**.** *Если степенной ряд сходится при* $x = R$*, то его сумма непрерывна и в точке* $x = R$*, т.е. для* $x \in (-R, R]$*.*

Доказательство. По теореме 6.6.3 степенной ряд сходится равномерно в промежутке $[0, R]$. Так как члены ряда $a_n x^n$ непрерывны в этом промежутке, то по теореме 6.3.4 сумма ряда непрерывна для $x \in [0, R]$, т.е. и в точке $x = R$. $\square$

6.6.3. Интегрируемость и дифференцируемость сумм степенных рядов.

Исследуем теперь вопрос интегрируемости и дифференцируемости суммы степенного ряда.

Теорема 6.6.6. *Степенной ряд (6.5.1) можно почленно интегрировать в промежутке* $[0, x]$*,* $|x| < R$*, так, что*

$$\int_0^x S(t)\,dt = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \dots + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \dots\ .$$

Если ряд (6.5.1) сходится и при $x = R$, то интегрирование возможно на промежутке $[0, R]$.

Доказательство. Ряд (6.5.1) равномерно сходится в промежутке $[0, x], |x| < R$ (см. теорему 6.6.2). Следовательно, его можно почленно интегрировать в этом промежутке по теореме 6.4.2. $\square$

Теорема 6.6.7. *Степенной ряд (6.5.1) можно почленно дифференцировать внутри его промежутка сходимости, так, что*

$$S'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots, \quad x \in (-R, R). \tag{6.6.1}$$

Это равенство справедливо и при $x = R$, если ряд (6.6.1) сходится в этой точке.

Доказательство. Обозначим радиус сходимости ряда (6.6.1) через R'. Радиус сходимости ряда (6.5.1) по-прежнему обозначаем буквой R. Покажем, что

$$R' \geqslant R.$$

Для этого возьмем любую точку x, $|x| < R$, и покажем, что ряд (6.6.1) в этой точке сходится. Пусть еще число r таково, что $|x| < r < R$. Тогда общий член ряда (6.6.1) по абсолютной величине можно оценить следующим образом:

$$n|a_n||x|^{n-1} = n|a_n| \cdot r^n \cdot \left|\frac{x}{r}\right|^{n-1} \cdot \frac{1}{r} \leqslant \frac{Mn}{r} \cdot \left|\frac{x}{r}\right|^{n-1},$$

так как $|a_n|r^n \leqslant M$ для всех $n \in N$.

Ряд с общим членом $\dfrac{Mn}{r}\left|\dfrac{x}{r}\right|^{n-1}$ сходится по признаку Даламбера $q = \left|\dfrac{x}{r}\right| < 1$, а, следовательно, по признаку сравнения сходится абсолютно и ряд (6.6.1) в точке x. Это означает, что $R' \geqslant R$.

Покажем, что выполняется и неравенство

$$R' \leqslant R.$$

Тем самым будет доказано, что $R' = R$.

Пусть точка x такова, что

$$|x| < R'.$$

Легко видеть, что ряд (6.5.1) также сходится в этой точке. Действительно, справедливо очевидное неравенство

$$|a_n||x|^n \leqslant n|a_n||x|^n = |x|(n|a_n||x|^{n-1}),$$

из которого сразу и следует по признаку сравнения необходимый результат: ведь ряд с общим членом $|x| \cdot (n|a_n||x|^{n-1})$ сходится.

По теореме 6.6.2 ряд (6.6.1) сходится равномерно в отрезке $[-r, r], \quad 0 < r < R$. Следовательно, выполнены все условия теоремы 6.4.3 и равенство (6.6.1) выполняется для $x \in [-r, r]$. В силу произвольности числа r $(0 < r < R)$ равенство (6.6.1) выполняется для $x \in (-R, R)$. Если ряд сходится в точке $x = R$, то, рассуждая аналогично (применяя только теорему 6.4.2), можно доказать равенство (6.6.1) и для точки $x = R$. $\square$

Следствие 6.6.1. *Степенной ряд вида (6.5.1) имеет на своем интервале сходимости производные любого порядка.*

Замечание 6.6.1. *Рассматриваются степенные ряды более общего вида*

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots . \tag{6.6.2}$$

Такой ряд не отличается принципиально от степенного ряда в форме (6.5.1): простой заменой переменной $y = x - x_0$ его можно свести к уже изученному типу. Все свойства сумм рядов вида (6.5.1) справедливы для рядов вида (6.6.2).

Интервал сходимости для ряда (6.6.2) будет иметь вид

$$(x_0 - R, x_0 + R).$$

6.7. Разложение функций в степенные ряды. Ряд Тейлора

В математическом анализе и его приложениях большую роль играет теория представления некоторой функции $f(x)$ в виде суммы степенного ряда $S(x)$.

Определение 6.7.1. *Будем говорить, что функция $f(x)$ на интервале $(-R, R)$ может быть разложена в степенной ряд, если существует степенной ряд, сходящийся к $f(x)$ на указанном интервале.*

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 6.7.1. *Для того чтобы функция $f(x)$ могла быть разложена в степенной ряд на интервале $(-R, R)$, необходимо, чтобы эта функция имела производные любого порядка для $x \in (-R, R)$.*

Доказательство вытекает из следствия 6.6.1. □

Теорема 6.7.2. *Если функция $f(x)$ может быть разложена в степенной ряд на интервале $(-R, R)$, то это разложение единственно.*

Доказательство. Действительно, коэффициенты степенного ряда a_n, $n = 0$, 1, $2, \dots$, для функции $f(x)$ вычисляются по формулам

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots . \tag{6.7.1}$$

Достаточно записать равенство

$$f^{(n)}(x) = n! a_n + a_{n+1}(n+1)! x + \dots$$

и положить в нем $x = 0$. □

Определение 6.7.2. *Степенной ряд, коэффициенты которого определяются формулами (6.7.1), называется рядом Маклорена функции $f(x)$.*

При разложении в степенной ряд вида (6.6.2) коэффициенты a_n, $n = 0, 1, 2, \dots$ вычисляются по формуле

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{6.7.2}$$

и ряд в этом случае называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$.

Из определения 6.7.2 и теоремы 6.7.2 немедленно следует теорема. □

Теорема 6.7.3. *Если функция $f(x)$ может быть разложена в степенной ряд на интервале $(-R, R)$, то этот ряд является ее рядом Маклорена и коэффициенты ряда определяются по формуле (6.7.1) (или Тейлора, если разложение происходит на промежутке $(x_0 - R, x_0 + R)$, а коэффициенты вычисляются по формуле (6.7.2)).*

Сформулируем и докажем последнюю теорему в этой серии.

Теорема 6.7.4. *Для того чтобы функция $f(x)$ могла быть разложена в ряд Тейлора на интервале $(-R, R)$ (или на интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$), необходимо и достаточно, чтобы остаточный член в формуле Маклорена (соответственно, в формуле Тейлора) стремился к 0 на указанном интервале.*

Доказательство. Запишем формулу Тейлора для функции $f(x)$ при $x_0 = 0$ (см. §2.8, формула 2.8.2):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x), \quad x \in (-R, R)$$

или

$$f(x) = S_n(x) + r_n(x), \quad x \in (x_0 - R, x_0 + R), \tag{6.7.3}$$

где $S_n(x)$ — частичная сумма ряда Маклорена. Из формулы (6.7.3) и следует утверждение теоремы 6.7.4. $\square$

Приведем пять стандартных разложений, которые постоянно используются в анализе и получаются очевидным образом из соответствующих разложений по формуле Тейлора.

1. Функция e^x:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Функция $\sin x$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. Функция $\cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4. Функция $(1+x)^\alpha$, α — произвольное вещественное число:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots,$$

$x \in (-1, 1)$. Данный ряд называется *биномиальным рядом.*

5. Функция $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots, \quad x \in (-1, 1].$$

Приведем одно достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора.

Теорема 6.7.5. *Пусть функция $f(x)$ имеет на интервале $(-h, h)$, $h > 0$, производные всех порядков и*

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant M \quad \text{для всех} \quad x \in (-h, h) \quad \text{и для всех} \quad n \in \mathbb{N},$$

тогда $f(x)$ разложима на интервале $(-h, h)$ в степенной ряд вида (6.5.1).

Доказательство. Применим теорему 6.7.4 и рассмотрим остаточный член $r_n(x)$ в формуле Маклорена. Запишем его в форме Лагранжа (теорема 2.8.3)

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad c \in (0, x), \quad x \in (-h, h).$$

Из условия теоремы все производные ограничены на $(-h,h)$, т.е. $|f^{(n)}(x)| \leqslant M$. Выражение

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty \quad \text{для любого} \quad x\in(-h,h).$$

Так что $r_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$. $\square$

6.8. Функции комплексного переменного

6.8.1. Сходимость на комплексной плоскости и ряды с комплексными членами. Более естественно степенные ряды нужно рассматривать на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Чтобы об этом точно говорить необходимо ввести некоторые определения и обозначения. Мы будем придерживаться определений и свойств комплексных чисел из § 11.1 Дополнения.

Поскольку понятие модуля комплексного числа определено и модуль обладает свойствами модуля вещественного числа, то определение сходимости последовательности комплексных чисел дается также как для вещественных чисел.

Определение 6.8.1. *Для любого положительного числа ε ε-окрестностью комплексного числа z_0 называется открытый круг вида $\{z\in\mathbb{C}: \ |z-z_0|<\varepsilon\}$.*

Определение 6.8.2. *Последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ сходится к числу $z_0\in\mathbb{C}$, если $|z-z_0|\to 0$ при $n\to\infty$.*

Если представить $z_n = x_n + iy_n$, а $z_0 = x_0 + iy_0$, то из неравенств

$$|x_n - x_0| \leqslant |z_n - z_0|, \quad |y_n - y_0| \leqslant |z_n - z_0|, \quad |z_n - z_0| \leqslant |x_n - x_0| + |y_n - y_0|$$

следует, что последовательность комплексных чисел сходится к числу z_0 тогда и только тогда, когда последовательность их действительных частей сходится к действительной части z_0, а последовательность мнимых частей сходится к мнимой части числа z_0. Поэтому свойства сходящихся последовательностей из §§ 1.7, 1.8, 1.9 полностью переносятся на последовательности комплексных чисел, за исключением предельного перехода в неравенствах, поскольку в области комплексные чисел отсутствует понятие порядка.

Приведем, например, формулировку критерия Коши.

Определение 6.8.3. *Последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ называется фундаментальной или последовательность Коши, если выполнено условие: для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер $N\in\mathbb{N}$, что для всех $m,n>N$ справедливо неравенство $|z_n - z_m|<\varepsilon$.*

Теорема 6.8.1 (критерий Коши)**.** *Последовательность комплексных чисел сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Для *доказательства* достаточно применить обычный критерий Коши для последовательностей действительных и мнимых частей рассматриваемой последовательности. $\square$

Рассмотрим ряд из комплексных чисел вида

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots \tag{6.8.1}$$

Определение 6.8.4. *Суммой ряда (6.8.1) называется предел последовательности его частичных сумм $S_n = z_1 + \ldots + z_n$ при $n\to\infty$. В этом случае ряд называется сходящимся, в противном случпе — расходящимся.*

Критерий Кошм можно для рядов сформулировать так

Теорема 6.8.2 (критерий Коши сходимости ряда)**.** *Ряд (6.8.1) сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$, что для $n > N$ и для любого $p \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство*

$$|z_{n+1} + \ldots + z_{n+p}| < \varepsilon.$$

Также как для ряда свещественными членами, выполняется необходимый признак сходимости.

Следствие 6.8.1. *Если ряд (6.8.1) сходится, то $z_n \to 0$ при $n \to \infty$.*

Определим абсолютную сходимость ряда.

Определение 6.8.5. *Ряд (6.8.1) сходится абсолютно, если сходится ряд из модулей его членов, т.е. сходится ряд*

$$|z_1| + \ldots + |z_n| + \ldots$$

Из критерия Коши и неравенства $|z_{n+1}+\ldots+z_{n+p}| \leqslant |z_{n+1}|+\ldots+|z_{n+p}|$ получаем утверждение

Теорема 6.8.3. *Если ряд (6.8.1) сходится абсолютно, то он сходится.*

Признаки Коши, Даламбера, мажорантный признак Вейерштрасса остаются справедливыми для рядов с комплексными членами, поскольку они являются признаками абсолютной сходимости. Признаки Лейбница, Абеля, Дирихле нельзя сформулировать для рядов с комплексными членами, поскольку в области комплексных чисел нет понятия монотонных последовательностей.

6.8.2. Степенные ряды с комплексными членами. Определим степенной ряд с комплексными членами следующим образом.

Определение 6.8.6. *Ряд вида*

$$a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \ldots \quad . \tag{6.8.2}$$

называется степенным рядом на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Здесь z — комплексная переменная, z_0, a_n — комплексные числа.

Для этого случая используется вся теория, изложенная выше: определяется радиус сходимости, интервал сходимости превращается в круг сходимости $|z-z_0| < R$ и т.д. Справедлива первая теорема Абеля в той же формулировке, за исключением понятия равномерной сходимости, которое мы здесь не даем.

Например, применяя признак Коши к ряду

$$|a_0| + |a_1| \cdot |(z-z_0)| + |a_2| \cdot |(z-z_0)|^2 + \cdots + |a_n| \cdot |(z-z_0|)^n + \ldots,$$

получаем формулу Коши-Адамара.

Теорема 6.8.4 (формула Коши-Адамара)**.** *Для радиуса сходимости R ряда (6.8.2) справедлива формула*

$$\frac{1}{R} = A = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

при этом ряд (6.8.2) сходится абсолютно в круге $\{z: \ |z-z_0| < R\}$ и расходится при $|z-z_0| > R$.

6.8.3. Формула Эйлера. Степенные ряды позволяют ввести в рассмотрение элементарные функции комплексного переменного $e^z, \cos z, \sin z$ и т.д. Например, по определению полагают ($z_0 = 0$), что

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Основанием для такого равенства является разложение функции e^x, $x \in \mathbb{R}$, в ряд Маклорена

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R},$$

а сходимость данного ряда следует из его абсолютной сходимости.

Аналогично определяются функции $\cos z$, $\sin z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$:

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad z \in \mathbb{C};$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad z \in \mathbb{C};$$

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad z \in \mathbb{C};$$

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Из последних разложений легко получить равенства

$$\cos(ix) = \operatorname{ch} x, \quad \sin(ix) = i \operatorname{sh} x,$$

которые объясняют употребление слов "косинус" и "синус" в названиях функций $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$.

Данные функции сохраняют многие свойства вещественных функций.

Упражнение 6.8.1. Показать, что

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w, \quad \sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad \sin(z+w) = \sin z \cdot \cos w + \cos z \cdot \sin w.$$

Для доказательства этих формул нужно перемножить ряды, стоящие в этих формулах и применить формулу бинома Ньютона.

Одной из самых фундаментальных формул в математике является *формула Эйлера*, связывающая между собой функции e^z, $\sin z$ и $\cos z$ в комплексной плоскости.

Теорема 6.8.5 (Эйлер)**.** *Справедлива формула*

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \tag{6.8.3}$$

Доказательство. Вычислим функцию e^z в точке iz:

$$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \dots + \frac{(iz)^n}{n!} + \dots =$$
$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}\right) +$$
$$+ i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots\right),$$

т.е.

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

□

Заменив в равенстве (6.8.3) аргумент z на $-z$, получим

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z. \tag{6.8.4}$$

Из формул (6.8.3) и (6.8.4) легко вывести, что

$$\begin{cases} \cos z &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \\ \sin z &= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \end{cases}$$

или для действительной переменной x

$$\begin{cases} \cos x &= \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \\ \sin x &= \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}). \end{cases} \tag{6.8.5}$$

Следствие формулы Эйлера также является соотношение

$$e^{\pi i} = -1,$$

связывающее между собой алгебру (i), арифметику (1), геометрию (π) и математический анализ (e).

Также следствием формулы Эйлера является соотношение

$$e^{z+2\pi i} = e^z,$$

говорящее о том, что экспонента становится *периодической функций* с чисто мнимым периодом $2\pi i$.

Формула Эйлера позволяет ввести *показательную форму* комплексного числа

$$z = re^{i\varphi},$$

где r — модуль комплексного числа, а φ его аргумент.

Формула Муавра становится совсем простой и наглядной

$$z^n = r^n \cdot e^{in\varphi}.$$

6.8.4. Непрерывность и дифференцируемость в комплексной области. Для того, чтобы говорить о свойствах суммы степенного ряда, нужно определить понятия непрерывности и дифференцируемости функций, заданных на множествах комплексной плоскости. Такие функции $w = f(z)$ будут иметь множеством определение — некоторые множества на плоскости $\mathbb{C}$ и их множество значений также лежит в $\mathbb{C}$.

Определение 6.8.7. *Пусть функция $w = f(z)$ определена на множестве $E \subset \mathbb{C}$. Она называется непрерывной в точке $z_0 \in E$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $z \in E$, $|z - z_0| < \delta$ следует, что $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.*

В дальнейшем будем рассматривать такие множества E, что всякая точка $z_0 \in E$ входит в E вместе с некоторой ε-окрестностью. Такие множества называют *открытими.*

Используя стандартное обозначение предела, определение непрерывности можно переписать так

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Примерами непрерывных функций являются линейные функции, многочлены, рациональные функции (кроме точек, в которых знаменатель обращается в 0). Сумма, разность, произведение, частное двух непрерывных функций являются также непрерывными функциями. Сложная функция, составленная из непрерывных функций — непрерывна. Доказательства этих свойств не отличаются от тех, которые даются для случая вещественных функций. Более сложным является утверждение.

Теорема 6.8.6. *Если степенной ряд вида (6.8.2) сходится в некоторой окрестности точки z_0, то его сумма $f(z)$ непрерывна в точке z_0 и $f(z_0) = a_0$.*

Доказательство. Рассмотрим разность

$$f(z) - a_0 = a_1(z - z_0) + \ldots + a_n(z - z_0)^n + \ldots = (z - z_0)[a_1 + \ldots + a_n(z - z_0)^{n-1} + \ldots].$$

Ряд, стоящий в квадратных скобках также сходится в некоторой окрестностьи точки z_0 и является степенным рядом, тогда метод доказательства первой теоремы Абеля показывает, что в некоторой окрестности точки z_0 этот ряд представляет собой ограниченную по модулю функцию. Т.е.

$$|a_1 + \ldots + a_n(z - z_0)^{n-1} + \ldots| \leqslant M \quad \text{при} \quad |z - z_0| \leqslant h$$

для некоторых $M > 0$ и $h > 0$. Поэтому $|f(z) - a_0| \leqslant M|z - z_0|$ при $|z - z_0| \leqslant h$. откуда и следует непрерывность $f(z)$ в точке z_0. □

Определение 6.8.8. *Производной функции $w = f(z)$ в точке z_0 назовем величину*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Также как в вещественном случае существование производной эквивалентно равенству

$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0) \quad \text{при} \quad z \to z_0.$$

Также как в вещественном случае справедливы правила нахождения производных (дифференцирования) арифметических операций и сложной функции.

Пример 6.8.1. Показать, что если $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$ — многочлен степени n, то $P'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + \ldots + a_1$.

Решение. Доказательство следует из того, что

$$\lim_{z \to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)(z^{n-1} + z^{n-1} z_0 + \ldots + z_0^{n-1})}{z - z_0} = n z_0^{n-1}$$

и правила дифференцирования суммы функций.

Теорема 6.8.7. *Если степенной ряд вида (6.8.2) сходится в некоторой окрестности точки z_0, то его сумма $f(z)$ дифференцируема в точке z_0 и $f'(z_0) = a_1$.*

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{a_1(z - z_0) + \ldots + a_n(z - z_0)^n + \ldots}{z - z_0} = a_1 + \ldots + a_n(z - z_0)^{n-1} + \ldots$$

Ряд

$$a_2(z - z_0) + \ldots + a_n(z - z_0)^{n-1} + \ldots = (z - z_0)[a_2 + \ldots + a_n(z - z_0)^{n-2} + \ldots].$$

Рассуждая как в предыдущей теореме, получаем, что ряд в квадратных скобках ограничен по модулю в некоторой окрестности точки z_0. Поэтому все, написанное выше, выражение стремится к нулю при $z \to 0$. Следовательно,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = a_1.$$

□

6.8.5. Аналитические функции. Применяя инндукцию, получаем из теоремы 6.8.7.

Следствие 6.8.2. *Если степенной ряд вида (6.8.2) сходится в некоторой окрестности точки z_0, то его сумма $f(z)$ имеет в точке z_0 производные любого порядка и выполняются равенства $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

Так что сходящийся степенной ряд (6.8.2) является *рядом Тейлора* для своей суммы.

Определение 6.8.9. *Функция $w = f(z)$ называется аналитической в точке z_0, если в некоторой окрестности точки z_0 ее можно представить в виде сходящегося степенного ряда вида (6.8.2).*

Функции e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$ являются аналитическими в точке 0. Более того, если мы разложим эти функции в ряды Тейлора в любой точке z_0, то как нетрудно убедится эти ряды Тейлора будут сходящимися. Поэтому данные функции — аналитичны в любой точке комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

В теории функций комплексного переменного будет доказан замечательный факт, резко отличающий эту теорию от теории вещественных функций. А именно, оказывается если функция $f(z)$ имеет производную в каждой точке из некоторой окрестности z_0, то она аналитична в точке z_0. Так что из существования одной производной в окрестности точки следует существование *всех* произволных. На этой удивительной ноте мы покидаем комплексную плоскость.

6.9. Ряд Фурье по тригонометрической системе функций

Определение 6.9.1. *Ряд вида*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{6.9.1}$$

называется тригонометрическим рядом, а числа a_n, b_n, $n = 1, 2, \ldots$ — его коэффициентами.

Частичные суммы ряда (6.9.1) есть линейные комбинации функций из системы

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots \ . \tag{6.9.2}$$

Определение 6.9.2. *Система функций (6.9.2) называется тригонометрической системой.*

Лемма 6.9.1. *Тригонометрическая система функций (6.9.1) имеет следующие свойства:*

1. Интеграл по отрезку $[-\pi, \pi]$ от произведения двух различных функций этой системы равен 0, т.е.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, \cos mx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, \sin mx \, dx = 0, \quad n \neq m,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, \cos mx \, dx = 0, \quad m, n = 1, 2, \ldots,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots\ .$$

2. Интеграл по отрезку $[-\pi, \pi]$ *от функций* $\sin^2 nx$, $\cos^2 nx$, $n = 1, 2 \dots$, *равен* π, *т.е.*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx = \pi, \quad n = 1, 2, \dots,$$

а

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2\,dx = 2\pi.$$

Доказательство. Докажем, например, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,\sin mx\,dx = 0, \quad n \neq m.$$

Имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,\sin mx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n-m)x - \cos(n+m)x]\,dx =$$

$$= \left.\frac{\sin(n-m)x}{2(n-m)}\right|_{-\pi}^{\pi} - \left.\frac{\sin(n+m)x}{2(n+m)}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Остальные равенства доказываются аналогично. □

Предположим теперь, что ряд (6.9.1) сходится на некотором множестве E, обозначим его сумму $f(x)$ и выясним вопрос о том, как связаны коэффициенты a_n, b_n, $n \in \mathbb{N}$, ряда (6.9.1) с функцией $f(x)$.

Теорема 6.9.1. *Пусть на промежутке* $[-\pi, \pi]$ *ряд (6.9.1) сходится равномерно и* $f(x)$ *— его сумма,*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad x \in [-\pi, \pi]. \tag{6.9.3}$$

Тогда

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n = 1, 2, \dots\ . \tag{6.9.4}$$

Доказательство. Равенство (6.9.3) можно почленно интегрировать на промежутке $[-\pi, \pi]$, так как выполнены все условия теоремы 6.4.2:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = \pi a_0$$

(по лемме 6.9.1 все интегралы под знаком суммы равны 0). Следовательно,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx.$$

Для вычисления коэффициента a_m, $m = 1, 2, \dots$, умножим равенство (6.9.3) на $\cos mx$:

$$f(x) \cos mx = \frac{a_0}{2} \cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx\, \cos mx + b_n \sin nx\, \cos mx,\ x \in [-\pi, \pi].$$

Ряд в последнем равенстве по-прежнему сходится равномерно для $x \in [-\pi, \pi]$ (для доказательства этого факта достаточно воспользоваться критерием Коши (теорема 6.2.1, § 6.2) для последовательности частичных сумм ряда (6.9.3)), и его можно почленно интегрировать на промежутке $[-\pi, \pi]$:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\, dx = a_m \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx\, dx = \pi a_m, \quad m = 1, 2, \dots\ .$$

(Здесь снова использована лемма 6.9.1.) Для коэффициента a_m, таким образом, получаем формулу

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\, dx, \quad m = 1, 2, \dots\ .$$

Аналогично доказывается и равенство

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx\, dx, \quad m = 1, 2, \dots\ .$$

□

Рассмотрим теперь класс функций $\{f(x)\}$, интеграл от которых сходится абсолютно на отрезке $[-\pi, \pi]$ (возможно в несобственном смысле). Из сходимости интеграла

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \big|f(x)\big|\, dx$$

вытекает по признаку сравнения существование следующих интегралов:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx, \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} \big|f(x)\, \cos nx\big|\, dx,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \cos nx\, dx, \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} \big|f(x)\, \sin nx\big|\, dx,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \sin nx\, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Эти интегралы потребуются при построении теории рядов Фурье.

Определение 6.9.3. *Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда тригонометрический ряд (6.9.1), коэффициенты которого задаются формулами (6.9.4), называется рядом Фурье функции $f(x)$ на промежутке $[-\pi, \pi]$, а числа a_0, a_n, b_n, $n \in \mathbb{N}$ — коэффициентами Фурье этой функции.*

Построим ряд Фурье для функции $f(x)$. Будем обозначать это построение следующим образом:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad (6.9.5)$$

(коэффициенты здесь вычислены по формулам (6.9.4)).

Писать знак равенства в соотношении (6.9.5) нельзя, так как не решен вопрос о сходимости ряда в этой записи. Тем более неизвестно, какова сумма записанного ряда и совпадает ли она для каких-то x с функцией $f(x)$. Дальнейшие рассуждения будут направлены на то, чтобы ответить на эти вопросы (о сходимости ряда Фурье и о его сумме). Докажем сначала фундаментальную теорему, которая описывает, в частности, поведение коэффициентов Фурье при $n \to \infty$.

6.10. Теорема Римана об осцилляции

Теорема 6.10.1 (Риман)**.** *Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на множестве $[a, w)$ (конечном или бесконечном), то*

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_a^w f(x) \cos \nu x \, dx = \lim_{\nu\to\infty} \int_a^w f(x) \sin \nu x \, dx = 0. \qquad (6.10.1)$$

Следствие 6.10.1. *Коэффициенты Фурье абсолютно интегрируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции стремятся к 0 при $n \to \infty$.*

Доказательство теоремы проведем сначала для класса так называемых ступенчатых функций.

Определение 6.10.1. *Функция $\varphi(x)$, определенная на всей числовой оси, называется ступенчатой, если существует отрезок $[a, b]$ и его разбиение P точками x_i $i = 0, 1, \ldots, n$*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

такое, что функция $\varphi(x)$ постоянна на каждом из промежутков $[x_{i-1}, x_i)$, $\quad i = 1, 2, \ldots, n$, и равна нулю вне $[a, b)$, т.е. $\varphi(x) = c_i$, если $x \in [x_{i-1}, x_i)$, $\quad i = 1, 2, \ldots, n$. Когда c_i принимает только одно значение, равное 1, функция $\varphi(x)$ называется одноступенчатой.

Доказательство теоремы 6.10.1. Пусть функция $\varphi(x)$ — ступенчатая и функции $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, — одноступенчатые, причем

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [x_{i-1}, x_i) \\ 0, & \text{если } x \notin [x_{i-1}, x_i). \end{cases}$$

Легко видеть, что функция $\varphi(x)$ есть линейная комбинация таких одноступенчатых функций

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x)$$

и что ступенчатые функции абсолютно интегрируемы на множестве $(-\infty, \infty)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|\,dx = \int\limits_{a}^{b} |\varphi(x)|\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} |c_i|\,dx = \sum_{i=1}^{n} |c_i| \Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Для одноступенчатой функции теорема Римана справедлива:

$$\lim_{\nu\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\sin\nu x\,dx = \lim_{\nu\to\infty} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \sin\nu x\,dx =$$

$$= \lim_{\nu\to\infty} \frac{\cos\nu x_{i-1} - \cos\nu x_i}{\nu} = 0.$$

Справедлива она и для ступенчатой функции, которая является линейной комбинацией одноступенчатых. □

Прежде чем проверить теорему для произвольной абсолютно интегрируемой функции, необходимо доказать лемму.

Лемма 6.10.1. *Для любой функции $f(x)$, абсолютно интегрируемой на множестве $[a, w)$ (конечном или бесконечном), существует последовательность ступенчатых функций $\{\varphi_n(x)\}$, такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{a}^{w} \bigl|f(x) - \varphi_n(x)\bigr|\,dx = 0. \tag{6.10.2}$$

Доказательство леммы. Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на множестве $[a, w)$. Пусть $\varepsilon > 0$ зафиксировано. Согласно определению несобственного интеграла выполняется условие

$$\exists b \quad a < b < w \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{b}^{w} \bigl|f(x)\bigr|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{6.10.3}$$

причем на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ интегрируема в обычном смысле.

Тогда, если $s_T(f)$ есть нижняя сумма Дарбу функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, соответствующая разбиению T с диаметром $|T|$, то

$$\lim_{|T|\to 0} s_T(f) = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

Это означает, что существует такое разбиение T_0 отрезка $[a, b]$, что

$$0 \leqslant \int\limits_{a}^{b} (f(x)\,dx - s_{T_0}(f))\,dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.10.4}$$

Нижнюю сумму Дарбу $s_{T_0}(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ можно понимать как интеграл на отрезке $[a, b]$ от ступенчатой функции $\varphi(x)$, которая определяется равенствами

$$\varphi(x) = \begin{cases} m_i, & \text{если } x \in [x_{i-1}, x_i),\ i = 1, 2, \ldots n, \\ 0, & \text{если } x \notin [a, b). \end{cases}$$

Неравенство (6.10.4) теперь можно переписать в виде

$$0 \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx - \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

или

$$0 \leqslant \int\limits_a^b \bigl(f(x) - \varphi(x)\bigr)\,dx = \int\limits_a^b \bigl|f(x) - \varphi(x)\bigr|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$(f(x) \geqslant \varphi(x), \quad x \in [a,b])$$

и теперь окончательно записать уже для промежутка $[a,w)$

$$\int\limits_a^w \bigl|f(x) - \varphi(x)\bigr|\,dx = \int\limits_a^b \bigl|f(x) - \varphi(x)\bigr|\,dx + \int\limits_b^w \bigl|f(x) - \varphi(x)\bigr|\,dx <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \int\limits_b^w \bigl|f(x)\bigr|\,dx < \varepsilon$$

(здесь использовано неравенство из условия (6.10.3) и тот факт, что $\varphi(x) = 0$ для $x \notin [a,b)$).

Если брать в качестве ε числа $\dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, то по доказанному выше можно найти ступенчатые функции $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, такие, что

$$\int\limits_a^w \bigl|f(x) - \varphi_n(x)\bigr|\,dx < \frac{1}{n},$$

что и доказывает лемму. □

Докажем теперь теорему Римана для произвольной абсолютно интегрируемой на множестве $[a,w)$ функции $f(x)$. Зафиксируем снова $\varepsilon > 0$ и по лемме 6.10.1 подберем ступенчатую функцию $\varphi(x)$, такую, что

$$\int\limits_a^w \bigl|f(x) - \varphi(x)\bigr|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для $\varphi(x)$ теорема Римана уже доказана, и поэтому для выбранного $\varepsilon > 0$

$$\exists \nu_\varepsilon \quad \forall \nu > \nu_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \Bigl|\int\limits_a^w \varphi(x) \sin \nu x\,dx\Bigr| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть теперь $\nu > \nu_\varepsilon$. Тогда

$$\Bigl|\int\limits_a^w f(x) \sin \nu x\,dx\Bigr| = \Bigl|\int\limits_a^w \bigl(f(x) - \varphi(x) + \varphi(x)\bigr) \sin \nu x\,dx\Bigr| \leqslant$$

$$\leqslant \Bigl|\int\limits_a^w \bigl(f(x) - \varphi(x)\bigr) \sin \nu x\,dx\Bigr| + \Bigl|\int\limits_a^w \varphi(x) \sin \nu x\,dx\Bigr| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_a^w \left|f(x)-\varphi(x)\right|\left|\sin\nu x\right| dx + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \int\limits_a^w \left|f(x)-\varphi(x)\right| dx + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

□

Теорему Римана иногда называют теоремой об осцилляции.

6.11. Ядра Дирихле и Фейера

6.11.1. Ядро Дирихле и его свойства. Построим для абсолютно интегрируемой на отрезке $[-\pi,\pi]$ функции $f(x)$ ее ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

и рассмотрим конечные суммы

$$S_n(x,f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \tag{6.11.1}$$

которые играют роль частичных сумм функционального ряда. Преобразуем формулу (6.11.1), используя выражения (6.9.4) для коэффициентов a_k, b_k:

$$S_n(x,f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos kt\,\cos kx + \sin kt\,\sin kx)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right] dt.$$

Если обозначить через $D_n(u)$ функцию

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos ku, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{6.11.2}$$

то

$$S_n(x,f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x)\,f(t)\,dt. \tag{6.11.3}$$

Определение 6.11.1. *Выражение (6.11.3) для $S_n(x,f)$ называется интегралом Дирихле, а функция $D_n(u)$ — ядром Дирихле.*

Ядро Дирихле обладает простыми, но важными для дальнейшего свойствами, которые будут сформулированы в следующей лемме.

Лемма 6.11.1. *Ядро Дирихле $D_n(u)$ является функцией:*
1) четной;
2) непрерывной для $u \in (-\infty,+\infty)$;
3) периодической с периодом 2π,
для которой выполняются равенства

а) $\displaystyle \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} D_n(u)\,du = 1;$

б) $\displaystyle D_n(u) = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{\sin\frac{u}{2}}, \quad u \neq 0.$

Доказательство. Четность, непрерывность и периодичность функции $D_n(u)$ следует непосредственно из ее определения по формуле (6.11.2). Интегрирование $D_n(u)$ на промежутке $[0,\pi]$ дает равенство

$$\int\limits_0^{\pi} \Big(1+2\sum_{k=1}^{n}\cos ku\Big)\,du=\pi,$$

что и доказывает формулу а). Докажем равенство б):

$$D_n(u)=1+2\sum_{k=1}^{n}\cos ku=\frac{1}{\sin\frac{u}{2}}\left(\sin\frac{u}{2}+\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{u}{2}\cos ku\right)=$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{u}{2}}\left[\sin\frac{u}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{2k+1}{2}u-\sin\frac{2k-1}{2}u\right)\right]=$$

$$=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{\sin\frac{u}{2}},\quad u\neq 0.$$

Заметим, что $D_n(0)=2n+1$ и

$$\lim_{u\to 0}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{\sin\frac{u}{2}}=2n+1.$$

□

6.11.2. Ядро Фейера и его свойства. Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi,\pi]$, причем $f(-\pi)=f(\pi)$. Будем считать, что эта функция периодически, с периодом 2π, продолжена на всю числовую ось. Пусть $S_n(x,f)$, $n=0,1,2,\ldots$, частичные суммы Фурье функции $f(x)$ и введем в рассмотрение величины

$$\sigma_n(x,f)=\frac{S_0(x,f)+S_1(x,f)+\cdots+S_n(x,f)}{n+1},\quad n=0,1,2,\ldots\,. \tag{6.11.4}$$

Определение 6.11.2. *Суммы $\sigma_n(x,f)$, $n=0,1,2,\ldots$, называются суммами Фейера n-го порядка.*

Аналогично, используя ядра Дирихле $D_n(x)$, $n=0,1,2,\ldots$, введем величины

$$\Phi_n(x)=\frac{D_0(x)+D_1(x)+\cdots+D_n(x)}{n+1},\quad n=0,1,2,\ldots\,. \tag{6.11.5}$$

Определение 6.11.3. *Выражения $\Phi_n(x)$, $n=0,1,2,\ldots$, называются ядрами Фейера n-го порядка функции $f(x)$.*

Ядра Фейера обладают свойствами, которые будут описаны следующей леммой (по аналогии с леммой 6.11.1).

Лемма 6.11.2. *Ядро Фейера $\Phi_n(x)$, $n=0,1,2,\ldots$ является функцией:*
1) четной;
2) непрерывной для $x\in(-\infty,+\infty)$;
3) периодической, с периодом 2π,
для которой выполняются равенства:

а) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(x)\,dx=1;$

б) $\Phi_n(x) = \dfrac{1}{n+1}\dfrac{\sin^2 \dfrac{n+1}{2}x}{\sin^2 \frac{x}{2}}, \quad x \neq 0;$

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{\delta\leqslant|x|\leqslant\pi} \Phi_n(x) = 0,$ *где число* δ *произвольно* $, 0 < \delta < \pi$.

Доказательство. Четность, непрерывность, периодичность функции $\Phi_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ и равенство *а)* следуют из соответствующих свойств функции $D_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Докажем равенство *б).*

$$(n+1)\Phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} D_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin\frac{2k+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{2k+1}{2}x}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos kx - \cos(k+1)x}{2\sin^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{1-\cos(n+1)x}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\sin^2\frac{n+1}{2}x}{\sin^2\frac{x}{2}},$$

причем $\Phi_n(0) = n+1$.

И, наконец, для доказательства равенства *в)* зафиксируем δ, $0 < \delta < \pi$, и запишем следующие соотношения:

$$M(\delta) = \max_{\delta\leqslant|x|\leqslant\pi} \Phi_n(x) = \frac{1}{n+1} \max_{\delta\leqslant|x|\leqslant\pi} \frac{\sin^2\frac{n+1}{2}x}{\sin^2\frac{x}{2}} \leqslant \frac{1}{(n+1)\sin^2\frac{\delta}{2}},$$

из которых и следует равенство в). □

6.12. Принцип локализации

Теорема 6.12.1 (принцип локализации)**.** *Пусть функция* $f(x)$ *определена, абсолютно интегрируема на отрезке* $[-\pi, \pi]$ *и периодически продолжена с промежутка* $[-\pi, \pi]$ *на всю числовую ось. Тогда для любого* $\delta > 0$ *интегралы*

$$\int\limits_{-\pi+x}^{-\delta+x} D_n(t-x)\, f(t)\, dt \to 0, \qquad \int\limits_{\delta+x}^{\pi+x} D_n(t-x)\, f(t)\, dt \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty.$$

Таким образом существование и величина предела сумм Фурье $S_n(x, f)$ в точке x при $n \to \infty$ зависит только от значений функции $f(x)$ на отрезке $[x-\delta, x+\delta]$.

Доказательство. Продолжим периодически функцию $f(x)$ с промежутка $[-\pi, \pi]$ на всю числовую ось и обозначим полученную функцию также $f(x)$ (продолженная функция может отличаться от заданной $f(x)$ в точке $x = \pi$, если $f(-\pi) \neq f(\pi)$, но на величине коэффициентов Фурье это возможное отличие никак не скажется).

Преобразуем выражение $S_n(x, f)$ из формулы (6.11.3), сделав замену переменной интегрирования $u = t - x$ и пользуясь периодичностью функций $D_n(u)$ и $f(x+u)$:

$$S_n(x, f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi-x}^{\pi-x} D_n(u) f(x+u)\, du = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(u) f(x+u)\, du.$$

Далее,

$$S_n(x, f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{0} D_n(u) f(x+u)\, du + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{\pi} D_n(u) f(x+u)\, du =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} D_n(t)f(x-t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} D_n(t)f(x+t)\,dt$$

(здесь в первом интеграле сделана замена $u = -t$, а во втором $u = t$). Теперь

$$S_n(x,f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} D_n(t)\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\,dt. \tag{6.12.1}$$

Выберем число δ произвольно из промежутка $(0,\pi)$. Тогда можно записать:

$$S_n(x,f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\delta} D_n(t)\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\,dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi} D_n(t)\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\,dt.$$

Подставим во второй интеграл последнего равенства выражение для $D_n(u)$ из леммы 6.11.1 (формула б)

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin(2n+1)\frac{t}{2}\,dt$$

и отметим, что функция

$$\frac{f(x+t)+f(x-t)}{\sin\frac{t}{2}}$$

абсолютно интегрируема на промежутке $[\delta,\pi]$. Следовательно, этот интеграл при $n \to \infty$ по теореме 6.10.1 стремится к нулю, т.е. предел суммы Фурье $S_n(x,f)$ определяется только пределом интеграла

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\delta} D_n(t)\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\,dt \quad \text{при } n\to\infty.$$

□

Замечание 6.12.1. *Из теоремы 6.12.1 следует, что суммы Фурье $S_n(x,f_1)$ и $S_n(x,f_2)$ двух различных функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ сходятся или расходятся одновременно в точке x, если эти функции совпадают в сколь угодно малой δ-окрестности точки x. При этом коэффициенты ряда Фурье для $f_1(x)$ и $f_2(x)$ могут быть совершенно различными: ведь при их вычислении используются значения функций из промежутка $[-\pi,\pi]$, где они различны.*

6.13. Сходимость ряда Фурье в точке

6.13.1. Признак Дини. Приведем два признака сходимости ряда Фурье в точке. Отметим сразу, что для сходимости необходимо накладывать некоторые ограничения на поведение функций в отрезке $[-\pi,\pi]$, более жесткие, чем абсолютная интегрируемость. Даже непрерывные на $[-\pi,\pi]$ функции могут иметь расходящийся ряд Фурье в точке $x \in [-\pi,\pi]$.

Пусть далее функция $f(x)$ *кусочно–непрерывна* на отрезке $[-\pi,\pi]$ (т.е. $f(x)$ может иметь лишь конечное число точек разыва первого рода) и пусть $x_0 \in [-\pi,\pi]$.

Обозначим через S_0 число, такое, что

$$S_0 = \begin{cases} f(x_0), & \text{если } x_0 \text{ — точка непрерывности } f(x), \\ \dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}, & \text{если } x_0 \text{ — точка разрыва } f(x), \end{cases}$$

и введем в рассмотрение функцию

$$g(t) = f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2S_0.$$

Теорема 6.13.1 (признак Дини). *Ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к числу S_0 в точке x_0, если при некотором $\delta > 0$ существует интеграл*

$$\int\limits_0^\delta \frac{|g(t)|}{t}\,dt.$$

Доказательство. Покажем, что в условиях теоремы

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0, f) = S_0.$$

Для оценки разности $S_n(x_0, f) - S_0$ воспользуемся формулой (6.12.1) и леммой 6.11.1 (равенство а):

$$S_n(x_0, f) - S_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi D_n(t)\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2}\,dt - S_0\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi D_n(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi D_n(t)\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0}{2}\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi D_n(t)\frac{g(t)}{2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{\sin\frac{2n+1}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\frac{g(t)}{2}\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{g(t)\cdot t/2}{t\cdot\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt.$$

Функция

$$\frac{g(t)}{t}\cdot\frac{t/2}{\sin\frac{t}{2}}$$

в последнем интеграле абсолютно интегрируема на множестве $(0, \pi]$, следовательно, по теореме 6.10.1 этот интеграл стремится к 0 при $n \to \infty$, что и доказывает теорему. □

6.13.2. Признак Липшица. Рассмотрим еще одни признак сходимости ряда Фурье.

Теорема 6.13.2 (признак Липшица). *Ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в точке x_0 к значению $f(x_0)$, если:*

1) $f(x)$ непрерывна в точке x_0;

2) существуют числа $L > 0$ и $\alpha > 0$, такие, что для малых $|t|$ выполняется неравенство

$$\Big|f(x_0+t) - f(x_0)\Big| \leqslant Lt^\alpha. \tag{6.13.1}$$

Доказательство. Проверим справедливость признака Дини в условиях теоремы 6.13.2. Оценим интеграл

$$\int\limits_0^\delta \frac{|g(t)|}{t}\,dt = \int\limits_0^\delta \frac{\big|f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0)\big|}{t}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^\delta \frac{\big|f(x_0+t)-f(x_0)\big|}{t}\,dt + \int\limits_0^\delta \frac{\big|f(x_0-t)-f(x_0)\big|}{t}\,dt.$$

Но два последних интеграла сходятся. Например,

$$\int\limits_0^\delta \frac{\big|f(x_0+t)-f(x_0)\big|}{t}\,dt \leqslant \int\limits_0^\delta \frac{L}{t^{1-\alpha}}\,dt,$$

где $1-\alpha < 1$, что и определяет сходимость, а значит, и выполнение признака Дини.

□

Следствие 6.13.1. *Ряд Фурье дифференцируемой в точке x_0 функции $f(x)$ сходится в этой точке к значению $f(x_0)$.*

Это следует из того, что для дифференцируемой в точке x_0 функции выполняется равенство

$$f(x_0 \pm t) - f(x_0) = A(\pm t) + o(t), \quad t \to 0,$$

из которого и вытекает условие (6.13.1). Действительно,

$$\big|f(x_0 \pm t) - f(x_0)\big| \leqslant |A|t + |o(t)| = \left(|A| + \frac{|o(t)|}{t}\right)\cdot t \leqslant L\cdot t,$$

где t — достаточно малое неотрицательное число; L — некоторая константа

$$\left(0 \leqslant |A| + \frac{|o(t)|}{t} \leqslant L\right).$$

Неравенство (6.13.1) называется *условием Липшица* (или *условием Гельдера*) для функции $f(x)$ в точке x_0.

6.14. Суммирование рядов Фурье методом Чезаро

6.14.1. Суммирование рядов методом Чезаро. Пусть дан числовой ряд

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \tag{6.14.1}$$

и пусть $\{S_n\}$ — последовательность его частичных сумм ($S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$). Рассмотрим также последовательность $\{\sigma_n\}$,

$$\sigma_n = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n}, \quad n = 1, 2, \dots\ . \tag{6.14.2}$$

Определение 6.14.1. *Говорят, что ряд (6.14.1) суммируется методом средних арифметических (методом Чезаро) к числу σ, если выполняется равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma. \tag{6.14.3}$$

Можно доказать следующую теорему.

Теорема 6.14.1. *Если числовой ряд (2.1.1) сходится в обычном смысле к числу S ($S_n \to S$ при $n \to \infty$), то он суммируем и методом средних арифметических и притом к тому же числу S $\quad(\sigma_n \to S, \quad n \to \infty)$.*

Таким образом, новое определение суммы ряда содержит обычное определение как частный случай. Метод суммирования, обладающий таким свойством, называется *регулярным.*

Однако существуют ряды, которые расходятся в обычном смысле, но суммируются методом Чезаро.

Пример 6.14.1. Исследовать на суммируемость методом Чезаро ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n+1} + \dots . \tag{6.14.4}$$

Решение. Этот ряд расходится в обычном смысле, так как суммы S_n, $n = 1, 2, \dots$,

$$S_n = \begin{cases} 1, \text{ если } n \text{ — нечетное,} \\ 0, \text{ если } n \text{ — четное,} \end{cases}$$

не стремятся ни к какому пределу.

Но последовательность $\{\sigma_n\}$,

$$\sigma_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, \text{ если } n \text{ — четное,} \\ \dfrac{k}{2k-1}, \text{ если } n \text{ — нечетное, } n = 2k-1 \end{cases}$$

сходится к числу $\sigma = \dfrac{1}{2}$ при $n \to \infty$ и ряд (6.14.4) суммируется методом Чезаро.

6.14.2. Теорема Фейера. Из формулы

$$S_n(x, f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(u) f(x+u)\, du$$

сразу следует равенство (см. § 6.11)

$$\sigma_n(x, f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(u) f(x+u)\, du, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{6.14.5}$$

с использованием которого легко доказать следующую теорему.

Теорема 6.14.2 (Фейер). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$, то*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x, f) = f(x),$$

причем сходимость последовательности $\{\sigma_n(x, f)\}$ к $f(x)$ равномерная на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и оценим модуль разности

$$f(x) - \sigma_n(x, f).$$

Заметим, что если функцию $f(x)$ периодически продолжить на всю числовую ось, то она будет всюду непрерывна, так как выполнено условие $f(-\pi) = f(\pi)$. Будем далее предполагать, что $f(x)$ периодически продолжена. Тогда

$$\bigl|f(x) - \sigma_n(x, f)\bigr| = \Bigl|\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\Phi_n(u)\, du - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(u) f(x+u)\, du\Bigr| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Big| \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(u)\,[f(x) - f(x+u)]\,du\Big| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(u)\Big|f(x) - f(x+u)\Big|\,du =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{-\delta} \Phi_n(u)\Big|f(x) - f(x+u)\Big|\,du + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(u)\Big|f(x) - f(x+u)\Big|\,du +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi} \Phi_n(u)\Big|f(x) - f(x+u)\Big|\,du.$$

При записи последних соотношений использованы равенство *а)* из леммы 6.11.2, формула (6.14.5), неотрицательность функции $\Phi_n(u)$, наконец число δ выбрано произвольно, $0 < \delta < \pi$.

Зафиксируем теперь $\delta = \delta_0$ так, чтобы второй интеграл в последнем равенстве стал меньше $\dfrac{\varepsilon}{3}$. Возможность такой оценки следует из цепочки неравенств:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(u)\Big|f(x) - f(x+u)\Big|\,du \leqslant \sup_{-\delta\leqslant u\leqslant\delta}\Big|f(x) - f(x+u)\Big| \cdot \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(u)\,du \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{-\delta\leqslant u\leqslant\delta}\Big|f(x) - f(x+u)\Big| \cdot \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(u)\,du =$$

$$= \sup_{-\delta\leqslant u\leqslant\delta}\Big|f(x) - f(x+u)\Big|.$$

В силу непрерывности функции $f(x)$ в точке x существует δ_0, такое, что

$$\sup_{-\delta_0\leqslant u\leqslant\delta_0}\Big|f(x) - f(x+u)\Big| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Далее, легко видеть, что интегралы на промежутках $[-\pi, -\delta_0]$ и $[\delta_0, \pi]$ также можно оценить сверху величиной $\dfrac{\varepsilon}{3}$, выбрав для этого достаточно большое n. Пусть для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $\big|f(x)\big| \leqslant M$, тогда

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\delta_0}^{\pi} \Phi_n(u)\Big|f(x) - f(x+u)\Big|\,du \leqslant \frac{1}{2\pi}\max_{\delta_0\leqslant u\leqslant\pi}\Phi_n(u)\int\limits_{\delta_0}^{\pi}\Big|f(x) - f(x+u)\Big|\,du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2M}{2\pi}\cdot\max_{\delta_0\leqslant u\leqslant\pi}\Phi_n(u)\cdot(\pi - \delta_0) < \frac{\varepsilon}{3}, \text{если } n > N$$

(так как $\max\limits_{\delta_0\leqslant u\leqslant\pi}\Phi_n(u) \to 0$ при $n \to \infty$).

Интеграл на промежутке $[-\pi, -\delta_0]$ оценивается аналогично. Следовательно, если $n > N$,

$$\Big|f(x) - \sigma_n(x, f)\Big| < \varepsilon \quad \text{для } x \in [-\pi, \pi],$$

что и доказывает теорему. $\square$

6.15. Теоремы Вейерштрасса о приближении

6.15.1. Приближение тригонометрическими многочленами.

Определение 6.15.1. *Функции вида*

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos kx + B_k \sin kx$$

называются тригонометрическими многочленами (порядка n, если $A_n^2 + B_n^2 > 0$).

Теорема 6.15.1 (Вейерштрасс)**.** *Если функция f непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$, то для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой тригонометрический многочлен $T(x)$, что*

$$\Big| f(x) - T(x) \Big| < \varepsilon$$

для $x \in [-\pi, \pi]$.

Доказательство. Так как выполнены все условия теоремы 6.14.2 (§ 6.14), то в качестве $T(x)$ можно взять $\sigma_n(x, f)$ с достаточно большим номером n. Очевидно, что сумма Фейера $\sigma_n(x, f)$ есть тригонометрический многочлен. □

6.15.2. Приближение алгебраическими многочленами.

Теорема 6.15.2 (Вейерштрасс)**.** *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для любого числа $\varepsilon > 0$ существует алгебраический многочлен $P(x)$ ($P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_l x^l$), такой, что*

$$\Big| f(x) - P(x) \Big| < \varepsilon$$

для $x \in [a, b]$.

Доказательство. Запишем линейное отображение отрезка $[0, \pi]$ на отрезок $[a, b]$

$$x = a + \frac{b-a}{\pi} t, \quad t \in [0, \pi].$$

Произведем с помощью этого отображения замену переменной у функции $f(x)$ и новую функцию от аргумента t обозначим $f^*(t)$, т.е.

$$f^*(t) = f\left(a + \frac{b-a}{\pi} t\right), \quad t \in [0, \pi].$$

Продолжим функцию $f^*(t)$ четным образом на отрезок $[-\pi, 0]$. Тогда для таким образом построенной функции $f^*(t)$, $t \in [-\pi, \pi]$, выполнены все условия предыдущей теоремы, и поэтому для любого фиксированного числа $\varepsilon > 0$ существует тригонометрический многочлен $T(t)$, такой, что

$$\Big| f^*(t) - T(t) \Big| < \frac{\varepsilon}{2}$$

для $t \in [-\pi, \pi]$.

В свою очередь $T(t)$ можно представить суммой степенного ряда

$$T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k, \tag{6.15.1}$$

который сходится для $t \in (-\infty, +\infty)$ и равномерно сходится на любом конечном промежутке (см. первую теорему Абеля 6.5.1, § 6.5). Следовательно, существует алгебраический многочлен $P(t)$, такой, что

$$\Big|T(t) - P(t)\Big| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{6.15.2}$$

для $t \in [-\pi, \pi]$. В качестве $P(t)$ достаточно взять частичную сумму $S_l(x)$ степенного ряда (6.15.1) с номером l, обеспечивающим выполнение неравенства (6.15.2) для $t \in [-\pi, \pi]$.

Теперь

$$\Big|f^*(t) - P(t)\Big| \leqslant \Big|f^*(t) - T(t)\Big| + \Big|T(t) - P(t)\Big| < \varepsilon.$$

Заменяя в последнем неравенстве переменную t через x, найдем, что

$$\Big|f(x) - P\Big(\pi\frac{x-a}{b-a}\Big)\Big| < \varepsilon$$

для $x \in [a, b]$. Но $P\Big(\pi\dfrac{x-a}{b-a}\Big)$ есть, очевидно, алгебраический многочлен от переменной x, и теорема доказана. □

Замечание 6.15.1. *Пусть $f(x)$ есть непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция и последовательность $\{\varepsilon_n\}$ такова, что $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда по теореме 6.15.2 для любого натурального числа n существует алгебраический многочлен $P_n(x)$, такой, что*

$$\Big|f(x) - P_n(x)\Big| < \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad x \in [a, b],$$

т.е. последовательность многочленов $\{P_n(x)\}$ равномерно сходится к функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ (отметим, что индекс n в обозначении многочлена $P_n(x)$ не связан со степенью многочлена, а указывает номер элемента функциональной последовательности).

Итак, мы получили *фундаментальное* для всего математического анализа утверждение.

Теорема 6.15.3 (Вейерштрасс). *Всякая непрерывная функция может быть представлена как предел равномерно сходящейся последовательности многочленов.*

Верно и обратное утверждение.

Теорема 6.15.4. *Предел равномерно сходящейся последовательности многочленов на отрезке $[a, b]$ есть непрерывная функция на отрезке $[a, b]$.*

Это простое следствие теоремы 6.3.2 (лекция 6.3).

Таким образом, получено характеристическое свойство непрерывных функций, и оказалось, что класс непрерывных функций "не далек" от класса алгебраических многочленов.

6.15.3. Полные системы функций. Доказанные теоремы Вейерштрасса можно сформулировать с более общей точки зрения, используя другую терминологию.

Определение 6.15.2. *Пусть $\mathfrak{M}$ есть некоторое множество функций $\{f(x)\}$, определенных на отрезке $[a, b]$. Система функций*

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$$

называется полной для множества $\mathfrak{M}$ в смысле равномерного приближения, если для любой функции $f \in \mathfrak{M}$ и для любого числа $\varepsilon > 0$ существует конечное число функций $\varphi_{n_1}(x), \varphi_{n_2}(x), \dots, \varphi_{n_k}(x)$ и такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, что

$$\left| f(x) - \lambda_1 \varphi_{n_1}(x) - \lambda_2 \varphi_{n_2}(x) - \dots - \lambda_k \varphi_{n_k} \right| < \varepsilon$$

для любого $x \in [a, b]$.

Запишем теперь новые формулировки теорем 6.15.1 и 6.15.2.

Теорема 6.15.5. *Система тригонометрических функций*

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x, \dots$$

полна в смысле равномерного приближения для множества непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$ функций, принимающих на концах этого отрезка равные значения.

Теорема 6.15.6. *Система функций*

$$1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$$

полна в смысле равномерного приближения для множества всех непрерывных на любом отрезке функций.

Определение 6.15.3. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на отрезке $[a, b]$. Величина*

$$\sqrt{\int\limits_a^b \left[f(x) - g(x)\right]^2 dx}$$

называется средним квадратичным отклонением на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ от функции $g(x)$.

Определение 6.15.4. *Система функций*

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$$

называется полной в смысле среднеквадратичного приближения для некоторого множества $\mathfrak{R}$ функций, определенных на отрезке $[a, b]$, если для любой функции $f(x) \in \mathfrak{R}$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существует такая конечная линейная комбинация функций системы, что ее среднеквадратичное отклонение на $[a, b]$ от функции $f(x)$ меньше ε.

Нетрудно доказать следующие теоремы (они получаются как простые следствия теорем 6.15.1 и 6.15.2).

Теорема 6.15.7. *Система тригонометрических функций полна в смысле среднеквадратичного приближения в множестве непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$ функций, принимающих на концах этого отрезка равные значения.*

Замечание 6.15.2. *Слегка усложнив доказательство, можно отказаться в теореме 6.15.7 от условия $f(-\pi) = f(\pi)$.*

Замечание 6.15.3. *Можно доказать, что система тригонометрических функций полна в смысле среднеквадратичного приближения во множестве функций, интегрируемых в квадрате на $[-\pi, \pi]$.*

Теорема 6.15.8. *Система функций*

$$1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$$

полна в смысле среднеквадратичного приближения во множестве непрерывных на отрезке $[a, b]$ *функций.*

6.16. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля

6.16.1. Свойство минимальности коэффициентов Фурье. В этом параграфе рассматривается класс функций $\{f(x)\}$, квадрат которых интегрируем на $[-\pi, \pi]$, т.е.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx < \infty. \tag{6.16.1}$$

Этот класс включается в класс абсолютно интегрируемых на отрезке $[-\pi, \pi]$ функций, так как справедливо неравенство

$$|f| \leqslant \bigl(1 + |f|^2\bigr)/2.$$

Из абсолютной интегрируемости $f(x)$, вообще говоря, не следует интегрируемость $f^2(x)$.

Пример 6.16.1. Проверить эти свойства для функции $f(x) = 1/\sqrt{x}$, $x \in (0, 1]$.

Решение. Нетрудно понять, что она интегрируема на $(0, 1]$, но ее квадрат таковым не является.

Теорема 6.16.1. *Пусть* $f(x)$ *— функция с интегрируемым на* $[-\pi, \pi]$ *квадратом и* $S_n(x, f)$ *— сумма Фурье порядка* n *этой функции.*

Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} \bigl[f(x) - S_n(x, f)\bigr]^2\,dx = \min_{\{T_n(x)\}} \int_{-\pi}^{\pi} \bigl[f(x) - T_n(x)\bigr]^2\,dx, \tag{6.16.2}$$

где $T_n(x)$ *— тригонометрический многочлен степени не выше* n.

Доказательство. Рассмотрим тригонометрический многочлен

$$T_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos kx + B_k \sin kx \tag{6.16.3}$$

степени n. Непосредственно интегрируя $T_n(x)$ на промежутке $[-\pi, \pi]$, получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} T_n^2(x)\,dx = \pi \left(\frac{A_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \bigl(A_k^2 + B_k^2\bigr) \right) \tag{6.16.4}$$

(при вычислении интеграла необходимо использовать лемму 6.9.1 из § 6.9).

Преобразуем далее интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} \bigl[f(x) - T_n(x)\bigr]^2\,dx, \tag{6.16.5}$$

применяя равенство (6.16.4) и снова лемму 6.9.1:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \bigl[f(x) - T_n(x)\bigr]^2\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} T_n^2(x)\,dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x) T_n(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx + \pi\Big(\frac{A_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k^2 + B_k^2\Big) -$$

$$-2\Big[\frac{A_0}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{n} A_k \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx + B_k \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx\Big] =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx + \pi\Big(\frac{A_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k^2 + B_k^2\Big) - 2\pi\Big(\frac{a_0 A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k A_k + b_k B_k\Big) +$$

$$+\pi\Big[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\Big] - \pi\Big[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\Big] =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx + \pi\Big[\frac{(A_0 - a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (A_k - a_k)^2 + (B_k - b_k)^2\Big] -$$

$$-\pi\Big[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\Big] = M + N - P,$$

где

$$M = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx, \quad N = \pi\Big[\frac{(A_0 - a_o)^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (A_k - a_k)^2 + (B_k - b_k)^2\Big],$$

$$P = \pi\Big[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\Big] \quad (M, N, P \geqslant 0). \tag{6.16.6}$$

Таким образом, интеграл (6.16.5) представлен в виде суммы трех слагаемых, причем только величина N зависит от выбора коэффициентов A_k, B_k. Если положить $A_k = a_k$ и $B_k = b_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$, то $N = 0$ и интеграл (6.16.5) принимает в этом случае $\big(T_n(x) = S_n(x, f)\big)$ минимальное значение. □

6.16.2. Неравенство Бесселя.

Теорема 6.16.2 (неравенство Бесселя)**.** *Если a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots, n$, и b_n, $n = 1$, $2, \ldots, n$, — коэффициенты Фурье функции $f(x)$ с интегрируемым квадратом на промежутке $[-\pi, \pi]$, то справедливо неравенство Бесселя*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k^2 + b_k^2\big) \leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx. \tag{6.16.7}$$

Доказательство. Используем обозначения (6.16.6) из доказательства предыдущей теоремы. Ясно, что

$$M + N - P \geqslant 0,$$

и если $T_n(x) = S_n(x, f)$, то

$$M \geqslant P \quad (N = 0)$$

или

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx \geqslant \pi\Big[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k^2 + b_k^2\big)\Big]. \tag{6.16.8}$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx \geqslant \pi\Big[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k^2 + b_k^2\big)\Big].$$

Существование предела или, другими словами, сходимость числового ряда

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k^2 + b_k^2\big)$$

следует из неравенства (6.16.8) (частичные суммы числового ряда с неотрицательными членами ограничены сверху).

Следствие 6.16.1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ *(уже известное свойство коэффициентов Фурье).*

6.16.3. Равенство Парсеваля. Можно показать, что в формуле (6.16.7) на самом деле стоит знак равенства. Докажем это для более узкого класса функций, чем класс, который рассмотрен в теореме 6.16.2.

Теорема 6.16.3. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$, тогда справедливо равенство Парсеваля*

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k^2 + b_k^2\big)\,. \tag{6.16.9}$$

Доказательство. Из теоремы 6.15.7 следует, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует тригонометрический многочлен $T_n(x)$, такой, что

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big[f(x) - T_n(x)\Big]^2 dx < \varepsilon. \tag{6.16.10}$$

Справедливы также неравенства

$$0 \leqslant M - P = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big[f(x) - S_n(x,f)\Big]^2 dx \leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big[f(x) - T_n(x)\Big]^2 dx$$

(см. теорему 6.16.1) или, используя условие (6.16.10),

$$0 \leqslant \frac{1}{\pi}\big(M - P\big) < \varepsilon,$$

т.е.

$$0 \leqslant \frac{1}{\pi}\big(M - P\big) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \Big[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\Big] < \varepsilon.$$

Тем более

$$0 \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \Big[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2\Big] < \varepsilon.$$

В силу произвольности числа ε из последнего неравенства и следует равенство Парсеваля (6.16.9). $\square$

Следствие 6.16.2. *В предположениях теоремы справедлива формула*

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big[f(x)-S_n(x,f)\Big]^2\,dx=0.$$

6.17. Почленное дифференцирование и интегрирование рядов Фурье

6.17.1. Дифференцирование рядов Фурье.

Определение 6.17.1. *Функция $f(x)$ называется кусочно-гладкой на отрезке $[a,b]$, если она и ее первая производная имеют не более чем конечное число точек разрыва первого рода на $[a,b]$.*

Теорема 6.17.1. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$ и для нее записан ряд Фурье*

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx.$$

Если $f(x)$ кусочно-гладкая на отрезке $[-\pi,\pi]$, то

$$f'(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\big(-na_n\sin nx+nb_n\cos nx\big),$$

т.е. ряд Фурье для производной получается из ряда Фурье самой функции почленным дифференцированием (о сходимости ряда для $f'(x)$ ничего не известно).

Доказательство. Из условий теоремы следует, что $f'(x)$ непрерывна на промежутке $[-\pi,\pi]$ за исключением конечного числа точек, в которых она имеет разрывы первого рода. Для такой функции $f'(x)$ можно вычислить коэффициенты Фурье α_n, $n=0,1,2,\ldots$, β_n, $n=1,2,\ldots$:

$$\alpha_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f'(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\big(f(\pi)-f(-\pi)\big)=0,$$

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{n}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=nb_n,$$
$$n=1,2,\ldots\ .$$

Аналогично получим, что $\beta_n=-na_n$, $n=1,2,\ldots$. □

Лемма 6.17.1. *Пусть $f(x)$ имеет на отрезке $[-\pi,\pi]$ непрерывные производные до порядка $k-1$ включительно и кусочно непрерывную производную порядка k $(k\geqslant 1)$, причем*

$$f^{(l)}(-\pi)=f^{(l)}(\pi),\quad l=0,1,\ldots,k-1,$$

и пусть

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx.$$

Тогда

$$|a_n|\leqslant\frac{\varepsilon_n}{n^k},\quad |b_n|\leqslant\frac{\varepsilon_n}{n^k},\quad n=1,2,\ldots,$$

где $\varepsilon_n\geqslant 0$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n^2$ сходится.

Доказательство. Применяя теорему 6.17.1 последовательно k раз, получим

$$f^{(k)}(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx,$$

где либо

$$\alpha_n = \pm n^k a_n, \quad \beta_n = \pm n^k b_n, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{6.17.1}$$

либо

$$\alpha_n = \pm n^k b_n, \quad \beta_n = \pm n^k a_n, \quad n = 1, 2, \dots \ . \tag{6.17.2}$$

Так как интеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left[f^{(k)}(x)\right]^2 dx$ существует, то из неравенства Бесселя (теорема 6.16.2) следует сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 + \beta_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2,$$

$$\left(\varepsilon_n = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}, \quad n = 1, 2, \dots\right).$$

Если выполняются условия (6.17.1), то

$$|a_n| \leqslant \frac{|\alpha_n|}{n^k} \leqslant \frac{\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}}{n^k} = \frac{\varepsilon_n}{n^k}$$

и

$$|b_n| \leqslant \frac{|\beta_n|}{n^k} \leqslant \frac{\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}}{n^k} = \frac{\varepsilon_n}{n^k}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Такие же оценки справедливы и в случае выполнения условий (6.17.2). □

Лемма устанавливает порядок малости коэффициентов Фурье функции $f(x)$ в зависимости от ее дифференциальных свойств

$$\left(|a_n| = o\left(\frac{1}{n^k}\right), \quad |b_n| = o\left(\frac{1}{n^k}\right), \quad n \to \infty\right).$$

Сформулируем без доказательства теорему, которая определяет характер сходимости ряда Фурье к функции $f(x)$ также в зависимости от ее дифференциальных свойств.

Теорема 6.17.2. *Пусть функция $f(x)$ имеет на отрезке $[-\pi, \pi]$ непрерывные производные до порядка $k-1$ включительно и кусочно непрерывную производную порядка $k \quad (k \geqslant 1)$, причем*

$$f^{(l)}(-\pi) = f^{(l)}(\pi), \quad l = 0, 1, 2, \dots, k-1.$$

Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ равномерно сходится к $f(x)$ для $x \in [-\pi, \pi]$, причем выполняется неравенство

$$\left|f(x) - S_n(x, f)\right| \leqslant \frac{\eta_n}{n^{k-\frac{1}{2}}} \quad \left(\lim_{n\to\infty} \eta_n = 0\right).$$

Доказательство теоремы базируется на использовании неравенств для коэффициентов Фурье из леммы 6.17.1.

6.17.2. Интегрирование рядов Фурье.

Теорема 6.17.3. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Тогда

$$\int_0^t f(x)\,dx = \int_0^t \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \big(a_n \cos nx + b_n \sin nx\big)\,dx =$$

$$= \frac{a_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nt + \frac{b_n}{n}(1 - \cos nt),$$

причем последний ряд сходится к функции $\int\limits_0^t f(x)\,dx$ *равномерно для* $t \in [-\pi, \pi]$.

Доказательство. Рассмотрим функцию (интеграл с переменным верхним пределом)

$$F(t) = \int_0^t \left[f(x) - \frac{a_0}{2}\right] dx.$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям предыдущей теоремы при $k = 1$ $\Big(F'(x) = f(x) - a_0/2, \quad F(-\pi) = F(\pi) = 0\Big)$, поэтому ее ряд Фурье сходится равномерно для $x \in [-\pi, \pi]$, так что

$$F(t) = \frac{\bar{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n \cos nt + \bar{b}_n \sin nt. \tag{6.17.3}$$

Вычислим коэффициенты $\bar{a}_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, и $\bar{b}_n$, $n = 1, 2, \ldots$:

$$\bar{a}_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos nt\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} F(t) \frac{\sin nt}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right] \sin nt\,dt = -\frac{b_n}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Аналогично,

$$\bar{b}_n = \frac{a_n}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Для вычисления $\bar{a}_0$ положим в равенстве (6.17.3) $t = 0$

$$0 = \frac{\bar{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n.$$

Или

$$\frac{\bar{a}_0}{2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$$

и, наконец,

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(-\frac{b_n}{n} \cos nt + \frac{a_n}{n} \sin nt\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nt + \frac{b_n}{n}(1 - \cos nt),$$

что вместе с равенством

$$F(t) = \int\limits_0^t f(x)\,dx - \frac{a_0}{2}t$$

дает требуемый результат. □

6.17.3. Ряды Фурье в случае произвольного интервала. Пусть функция $f(x)$ задана в промежутке $[-l, l]$ и периодически продолжена на всю числовую ось с периодом $2l$. Построим ряд Фурье функции $f(x)$ для $x \in [-l, l]$.

Произведем замену переменной x с помощью формулы

$$y = \frac{\pi}{l}x, \quad x \in [-l, l].$$

Тогда $y \in [-\pi, \pi]$ и для функции $f\left(\dfrac{y}{\pi}\right) = \bar{f}(y)$ могут быть использованы все ранее полученные результаты для рядов Фурье. В частности,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(y)\,dy; \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(y)\cos ny\,dy,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(y)\sin ny\,dy, \quad n = 1, 2, \ldots$$

и

$$\bar{f}(y) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos ny + b_n \sin ny.$$

Вернемся к переменной x во всех этих соотношениях:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{6.17.4}$$

и тем самым получим форму записи ряда Фурье для функции, заданной в промежутке $[-l, l]$.

Если $x \in [a, b]$, то нетрудно, используя формулы (6.17.4), записать ряд Фурье функции $f(x)$ и на множестве $[a, b]$. Периодически продолжим функцию $f(x)$ на всю числовую ось с периодом $2l = b - a$. Теперь воспользуемся формулами (6.17.4), где $l = \dfrac{b-a}{2}$. Интегралы при вычислении коэффициентов Фурье можно брать по промежутку $[a, b]$. Замена отрезка $[-l, l]$ на отрезок $[a, b]$ не изменит интегралов, так как функция $f(x)$ периодически продолжаема на всю ось с периодом $2l$, функции $\cos\dfrac{n\pi x}{l}$, $\sin\dfrac{n\pi x}{l}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ также имеют период $2l$.

(Известно, что
$$\int\limits_{-l}^{l} \varphi(x)\,dx = \int\limits_{C}^{C+2l} \varphi(x)\,dx,$$
где $\varphi(x)$ — периодическая, с периодом $2l$, функция; C — произвольное число.)

Ряд Фурье для четной функции записывается более компактно:
$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l},$$
где
$$a_n = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad b_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$
а для нечетной
$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l},$$
где
$$b_n = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad a_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots\ .$$

Объясняется такое упрощение свойствами интеграла от четной (или нечетной) функции на промежутке, симметричном относительно начала координат. Например,
$$\int\limits_{-l}^{l} g(x)\,dx = 0,$$
если $g(x)$ — нечетная функция.

6.17.4. Комплексная запись ряда Фурье. Пусть для функции $f(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$, записан ряд Фурье
$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Формулы (6.8.5) (§ 6.8) приводят этот ряд к виду
$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2}\big(e^{inx} + e^{-inx}\big) + \frac{b_n}{2i}\big(e^{inx} - e^{-inx}\big) =$$
$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\big(a_n - b_n i\big)e^{inx} + \frac{1}{2}\big(a_n + b_n i\big)e^{-inx}.$$
Положим
$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n i), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + b_n i), \quad c_{-n} = \bar{c}_n, \quad n = 1, 2, \ldots\ .$$
Тогда
$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}. \tag{6.17.5}$$

Для коэффициентов ряда (6.17.5) легко получить единую форму:

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n i) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)[\cos nx - i\sin nx]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx.$$

Аналогично

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\,dx.$$

Предполагается, что сходимость ряда (6.17.5) определяется с помощью частичных сумм

$$S_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}.$$

Глава 7

Дифференциальное исчислении функций многих переменных

После изучения этой главе читатель должен ументь исследовать функции многих переменных, находить экстремум функции, производные по направлению, производные неявных функций, решать задачи на условный экстремум. Знать основные определения, формулы и теоремы дифференциального исчисления функций многих переменных: открытые, замкнутые и компактные множества и их свойства, теоремы о среднем, формулу Тейлора, необходимые и достаточные условия экстремума, теорему о неявных функциях и системах неявных функций, теорему об обратном отображении, зависимость и независимость функций, метод множителей Лагранжа. Владеть методами решения задач из данной главы.

7.1. Пространство $\mathbb{R}^n$

7.1.1. Модуль вектора и расстояние между векторами. В дальнейшем будем рассматривать одну из реализаций n-мерного евклидова пространства (§ 11.15), а именно пространство $\mathbb{R}^n$.

Элементами этого пространства являются n–мерные вектора–строки

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Сложение векторов и умножение на действительное число определяются покомпонентно, т.е. если x и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — два вектора, то

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$

а

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

для действительного числа λ.

Очевидно, что так введенные операции превращают $\mathbb{R}^n$ в n-мерное действительное линейное пространство.

Скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ определяется так:

$$(x, y) = x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n.$$

Аксиомы скалярного произведения выполняются, и, следовательно, $\mathbb{R}^n$ есть евклидово пространство.

С помощью скалярного произведения (см. § 11.15) в евклидовом пространстве можно ввести понятие *длины* (или *модуля*) вектора $|x|$ следующим образом:

$$|x| = \sqrt{(x, x)}.$$

Определим теперь расстояние между векторами.

Определение 7.1.1. *Пусть x и y — векторы из $\mathbb{R}^n$, расстоянием между векторами называется модуль разности этих векторов $|x - y|$.*

Теорема 7.1.1. *Расстояние обладает следующими свойствами:*

1) $|x-y| \geqslant 0$ *и* $|x-y| = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = y$ *(неотрицательность);*

2) $|x-y| = |y-x|$ *(симметричность);*

3) $|x-y| \leqslant |x-z|+|z-y|$ *для любых векторов* x, y, z *(неравенство треугольника).*

Доказательство. Свойства 1) и 2) очевидны. Докажем свойство 3). Напомним неравенство Коши-Буняковского (теорема 11.15.4):

$$|(x,y)| \leqslant |x| \cdot |y|.$$

Тогда

$$|x-y|^2 = |(x-z)+(z-y)|^2 = ((x-x)+(z-y),(x-x)+(z-y)) =$$
$$= (x-z,x-z)+2(x-z,z-y)+(z-y,z-y) \leqslant |x-z|^2+2|(x-z,z-y)|+|z-y|^2 \leqslant$$
$$\leqslant |x-z|^2+2|x-z|\cdot|z-y|+|z-y|^2 = (|x-z|+|z-y|)^2.$$

Откуда и следует неравенство треугольника. □

7.1.2. Открытые и замкнутые множества. Функция расстояния позволяет определить понятие *окрестности* точки $x \in \mathbb{R}^n$.

Определение 7.1.2. *Пусть* $x \in \mathbb{R}^n$ *и число* $\varepsilon > 0$*. Множество всех точек* $y \in \mathbb{R}^n$*, таких, что*

$$|y-x| < \varepsilon,$$

называется открытым n-мерным шаром радиуса ε *с центром в точке* x *или* ε*-окрестностью точки* x *и обозначается* $U_x(\varepsilon)$*.*

В случае прямой $\mathbb{R}^1$ окрестность — это интервал длины 2ε с центром в этой точке. В случае плоскости $\mathbb{R}^2$ окрестность есть круг без граничных точек с центром в данной точке радиуса ε. В $\mathbb{R}^3$ окрестность есть обычный шар с центром в x.

Кроме *шаровых* окрестностей, можно рассматривать *прямоугольные* окрестности точки x, т.е. множества векторов y, удовлетворяющих условиям

$$|y_1-x_1| < \delta_1, \ldots, |y_n-x_n| < \delta_n$$

для некоторых положительных чисел $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$.

Лемма 7.1.1. *Любая шаровая окрестность точки* x *содержится в некоторой прямоугольной окрестности и содержит некоторую прямоугольную окрестность точки* x*. Любая прямоугольная окрестность точки* x *содержится в некоторой шаровой окрестности и содержит некоторую шаровую окрестность точки* x*.*

Эта лемма позволяет во многих случаях заменять шаровую окрестность на прямоугольную и наоборот.

Пусть E — некоторое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$.

Определение 7.1.3. *Точка* $x \in E$ *называется внутренней точкой* E*, если существует окрестность этой точки* $U_x(\varepsilon)$*, целиком лежащая в* E*.*

Шаровую окрестность в этом определении можно заменить на прямоугольную по лемме 7.1.1.

Определение 7.1.4. *Множество точек* E *называется открытым, если оно состоит только из внутренних точек.*

По определению также полагают, что пустое множество открыто.

Примером открытого множества служит все пространство $\mathbb{R}^n$.

Пример 7.1.1. Показать, что любая шаровая окрестность $U_x(\varepsilon)$ точки x и любая прямоугольная окрестность точки x являются открытыми множествами.

Решение. Действительно, рассмотрим точку $y \in U_x(\varepsilon)$, тогда $|y - x| = \delta < \varepsilon$. Поэтому шар $U_y(\varepsilon - \delta) \subset U_x(\varepsilon)$, поскольку для точек $z \in U_y(\varepsilon - \delta)$ выполнены неравенства

$$|z - x| = |(z - y) + (y - x)| \leqslant |z - y| + |y - x| < (\varepsilon - \delta) + \delta = \varepsilon.$$

Открытые множества обладают следующими свойствами (доказательство этих свойств легко следует из определения):

1) объединение любого (конечного или бесконечного) числа открытых множеств есть множество открытое;

2) пересечение любого *конечного* числа открытых множеств также открыто.

Пересечение бесконечного числа открытых множеств может не быть открытым.

Пример 7.1.2. Показать, что пересечение всех шаровых окрестностей точки x состоит из одной точки x.

Решение. Это свойство очевидно, Данное множество не является открытым, поскольку вообще не содержит внутренних точек.

Определение 7.1.5. *Точка x называется предельной точкой множества E, если в любой окрестности $U_x(\varepsilon)$ этой точки содержится хотя бы одна точка из E, не совпадающая с x.*

Сама предельная точка может и не принадлежать E.

Это определение можно было дать и так: x — предельная точка E, если любая окрестность точки x содержит бесконечное число элементов из E.

Вместо шаровых окрестностей в этих определениях можно брать прямоугольные окрестности.

Множество предельных точек для E часто обозначают через E' и называют *производным множеством.*

Пример 7.1.3. Показать, что конечное множество E не имеет предельных точек, т.е. $E' = \varnothing$.

Решение. Это свойство, очевидно, следует из определения предельной точки.

Определение 7.1.6. *Множество E называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки, т.е. $E' \subset E$.*

По определение, пустое множество замкнуто.

Конечное множество замкнуто.

Свойства замкнутых множеств (доказательство очевидно следует из определения):

1) объединение *конечного* числа замкнутых множеств замкнуто;

2) пересечение любого числа (конечного или бесконечного) замкнутых множеств также замкнуто.

Теорема 7.1.2. *Дополнение в $\mathbb{R}^n$ к открытому множеству — замкнуто, а дополнение к замкнутому множеству открыто.*

Доказательство. Пусть E — открытое множество. Пусть $x^{(0)}$ — предельная точка дополнения $\mathbb{R}^n \setminus E$. Если $x^{(0)} \in E$, то, поскольку E — открыто, существует окрестность $U_{x^{(0)}}(\varepsilon)$ этой точки полностью лежащая в E. Что противоречит определению предельной точки.

Пусть E — замкнуто, и точка $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \setminus E$. Если точка $x^{(0)}$ не является внутренней, то всякая ее окрестность $U_{x^{(0)}}(\varepsilon)$ пересекается с E. Так что $x^{(0)}$ — предельная точка E, не принадлежащая E. Получили противоречие с замкнутостью E. $\square$

Определение 7.1.7. *Точка x называется граничной точкой множества E, если любая окрестность точки x содержит как точки E, так и точки дополнения $\mathbb{R}^n \setminus E$. Множество граничных точек E называется границей E и обозначается ∂E.*

Множество граничных точек любого множества замкнуто.

Определение 7.1.8. *Областью в $\mathbb{R}^n$ называется открытое множество D, любые две точки которого можно соединить ломаной, полностью лежащей в D.*

7.1.3. Компактные множества.

Определение 7.1.9. *Множество K называется компактным множеством или компактом, если из любого покрытия этого множества открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.*

Теорема 7.1.3 (принцип Бореля-Лебега)**.** *Для того чтобы множество K было компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнутым и ограниченным.*

Ограниченность множества означает, что оно содержится в некотором шаре достаточно большого радиуса. Величина $d = \inf\limits_{x,y \in K} |x - y|$ называется диаметром K.

Доказательство. Пусть K — компактно, а точка $x^{(0)}$ — предельная точка K и $x^{(0)} \notin K$. Для любой точки $x \in K$ рассмотрим окрестность $U_x(\varepsilon)$, не содержащую $x^{(0)}$. Эта система окрестностей образует открытое покрытие K. Их него можно выбрать конечное подпокрытие, скажем $U_{x^{(1)}}(\varepsilon_1)$, ..., $U_{x^{(m)}}(\varepsilon_m)$.

Так как $x^{(0)} \notin U_{x^{(1)}}(\varepsilon_1) \cup \ldots \cup U_{x^{(m)}}(\varepsilon_m)$, то окрестность $U_{x^{(0)}}(\varepsilon)$ также не пересекается с этим объединением, если $0 < \varepsilon < \min\{|x^{(0)} - x^{(1)}| - \varepsilon_1, \ldots, |x^{(0)} - x^{(m)}| - \varepsilon_m\}$. И таким образом $U_{x^{(0)}}(\varepsilon)$ не пересекается с K, что противоречит определению предельной точки.

Также доказывается ограниченность K.

Пусть теперь K — замкнуто и ограничено. Рассмотрим открытое покрытие K, т.е. систему открытых множеств U_α, $\alpha \in A$, таких что $\bigcup\limits_{\alpha \in A} \supset K$. Предположим, что из данного покрытия нельзя выбрать конечного подпокрытия.

Дальше можно рассуждать как при доказательства принципа Бореля-Лебега из § 1.5. Так как E ограничено, то найдется прямоугольное множество

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n : \ a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, \ldots, a_n \leqslant x_n \leqslant b_n\}$$

достаточно больших размеров, что $K \subset U$. Деля каждый отрезок $[a_j, b_j]$ пополам, получим разбиение множества K на 2^n частей (некоторые из этих частей могут быть и пустыми). Выберем ту из частей (скажем K_1), которая также не допускает выбора конечного подпокрытия. Поступим с K_1 также. Получим последовательность вложенных множеств K_j, диаметры которых стремятся к нулю при $j \to \infty$.

Использую принцип Коши-Кантора к проекциям этих множеств на оси координат, получим в пересечении этих множеств точку $x^{(0)}$, которая, очевидно, является предельной точкой K. Следовательно, $x^{(0)} \in K$. Тогда найдется открытой множество U_{α_1} из рассматриваемой системы множеств, содержащее $x^{(0)}$. В частности, $x^{(0)}$ входит в U_{α_1} вместе с некоторым шаром $U_{x^{(0)}}$.

Так как диаметры K_j стремятся к нулю и все K_j содержат $x^{(0)}$, то начиная с какого-то номера эти множества содержатся в $U_{x^{(0)}}$, значит и в U_{α_1}. Таким образом, K_j покрываются одним множеством из системы U_α, $\alpha \in A$. Получили противоречие. $\square$

Теорема 7.1.4 (принцип Больцано-Вейерштрасса). *Любое ограниченное бесконечное множество в $\mathbb{R}^n$ имеет хотя бы одну предельную точку.*

Доказательство вполне аналогично доказательсту такого-же принципа на числовой прямой (§1.5).

Теорема 7.1.5 (принцип Кантора). *Любое семейство компактных множеств, вложенных друг в друга, имеет хотя бы одну общую точку. Другими словами, если семейство компактных множеств $\{K_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, обладает свойством, что $K_i \subset K_j$ при $i > j$, то пересечение этих множеств не пусто. Более того, если диаметры K_i стремятся к нулю при $i \to \infty$, то пересечение всех множеств K_i состоит из одной точки.*

7.2. Предел функции в $\mathbb{R}^n$

7.2.1. Предел последовательности. Начнем с определения предела последовательности элементов пространства $\mathbb{R}^n$.

Определение 7.2.1. *Пусть каждому натуральному числу $m \in \mathbb{N}$ поставлена в соответствие некоторая точка $x^{(m)} \in \mathbb{R}^n$. Тогда говорят, что задана последовательность $\{x^{(m)}\}$, $m = 1, 2, \ldots$, точек пространства $\mathbb{R}^n$.*

Определение 7.2.2. *Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется пределом последовательности $\{x^{(m)}\}$ при $m \to \infty$, если числовая последовательность $|x^{(m)} - a| \to 0$ при $m \to \infty$. Записывают это так:*

$$\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = a.$$

Сама последовательность в этом случае называется сходящейся, в противном случае — расходящейся.

Используя понятие окрестности, легко установить, что последовательность $\{x^{(m)}\}$ сходится к точке a тогда и только тогда, когда для любого положительного числа ε существует такой номер M, что для всех номеров $m > M$ выполняется включение

$$x^{(m)} \in U_a(\varepsilon).$$

Шаровые окрестности здесь могут быть заменены прямоугольными окрестностями.

Теорема 7.2.1. *Для того чтобы последовательность $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)})$ сходилась к точке $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $j = 1, 2, \ldots, n$ выполнялись условия*

$$\lim_{m\to\infty} x_j^{(m)} = a_j.$$

Доказательство. Необходимость. Пользуясь неравенством $|x_j^{(m)} - a_j| \leqslant |x^{(m)} - a|$, получим

$$|x_j^{(m)} - a_j| \leqslant |x^{(m)} - a| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

т.е. $|x_j^{(m)} - a_j| \to 0$ при $m \to \infty$ для $j = 1, \ldots, n$.

Обратно, пусть $|x_j^{(m)} - a_j| \to 0$ при $m \to \infty$ для $j = 1, \dots, n$. Тогда из неравенства

$$|x^{(m)} - a| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |x_j^{(m)} - a_j|$$

получим $|x^{(m)} - a| \to 0$ при $m \to \infty$. □

Это утверждение показывает, что все основные свойства предела числовой последовательности переносятся на случай предела последовательности точек пространства $\mathbb{R}^n$.

Свойства предела последовательности:

1) сходящаяся последовательность ограничена;

2) сходящаяся последовательность не может иметь двух различных пределов;

3) если

$$\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = a, \quad \lim_{m\to\infty} y^{(m)} = b,$$

то последовательности $x^{(m)} + y^{(m)}$, $(x^{(m)}, y^{(m)})$ также сходятся и

$$\lim_{m\to\infty} \left(x^{(m)} + y^{(m)}\right) = a + b,$$

$$\lim_{m\to\infty} (x^{(m)}, y^{(m)}) = (a, b);$$

4) если последовательность $x^{(m)}$ сходится к a, а числовая последовательность λ_m — к числу λ, то последовательность $\lambda_m x^{(m)}$ также сходится, причем

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_m x^{(m)} = \lambda a.$$

Справедлив также критерий Коши.

Теорема 7.2.2. *Для того, чтобы последовательность $x^{(m)}$ являлась сходящейся необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon >$ существовал номер $M > 0$, что для всех номеров $m, k > M$ выполнялось неравенство $|x^{(m)} - x^{(k)}| < \varepsilon$.*

Если m_k — строго возрастающая последовательность натуральных чисел, то последовательность $x^{(m_k)}$ называется *подпоследовательностью* последовательности $x^{(m)}$.

Определение 7.2.3. *Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется частичным пределом последовательности $x^{(m)}$, если найдется подпоследовательность этой последовательности, сходящаяся к a.*

Сходящаяся последовательность имеет только один частичный предел, равный пределу последовательности. Как следствие теоремы Больцано–Вейерштрасса для множеств можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 7.2.3 (принцип Больцано-Вейерштрасса для последовательностей)**.** *Всякая ограниченная последовательность имеет хотя бы один частичный предел.*

Понятие предельной точки множества также можно сформулировать на языке последовательностей. Точка a является предельной точкой множества E, если существует последовательность различных точек множества E, сходящаяся к a.

Понятие компактного множества также может быть дано на языке последовательностей.

Теорема 7.2.4. *Множество K компактно тогда и только тогда, когда из каждой последовательности элементов множества K можно выбрать сходящуюся подпоследовательность к элементу из K.*

7.2.2. Предел функции. Перейдем к рассмотрению предела функции.

Будем рассматривать, как правило, *числовые* функции, т.е. функции с областью определения, лежащей в $\mathbb{R}^n$, и с областью значений, лежащей в $\mathbb{R}$.

Определение 7.2.4. *Пусть функция f определена на множестве E и точка a есть предельная точка множества E. Говорят, что функция f имеет предел A при $x \to a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$, что как только $0 < |x - a| < \delta$, $x \in E$, то $|f(x) - A| < \varepsilon$. Записывают это так:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Данное определение называется определением предела функции *по Коши.*

Аналогично дается понятие предела функции при $|x| \to \infty$.

Определение 7.2.5. *Пусть по-прежнему точка a есть предельная точка E, а функция f определена на E. Говорят, что функция f имеет пределом число A при $x \to a$, если для любой последовательности точек $x^{(m)}$ множества E, сходящейся к a, числовая последовательность $f(x^{(m)})$ сходится к A.*

Это определение называют определением предела *по Гейне.*

Теорема 7.2.5. *Определения предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.*

Доказательство полностью повторяет доказательство данного утверждения на числовой прямой.

Теорема 7.2.6 (критерий Коши существования предела)**.** *Для того чтобы функция f имела предел при $x \to a$, необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа ε существовало положительное число δ, для которого как только $0 < |x - a| < \delta$, $0 < |y - a| < \delta$, $x, y \in E$, то $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

Свойства предела функции такие же, как и предела последовательности.

Предел, который мы определили, еще называют кратным пределом, а в случае пространства R^2 — двойным пределом.

Можно также говорить о повторных пределах. Например, в R^2 это предел вида

$$\lim_{x \to a} \lim_{y \to b} f(x, y).$$

Приведем одно утверждение о связи между двойным и повторным пределами.

Теорема 7.2.7. *Пусть функция $f(x, y)$ определена в некотором прямоугольнике E, содержащем точку (x_0, y_0). Если существует двойной предел этой функции при $(x, y) \to (x_0, y_0)$, равный A, и для каждого $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ существует предел*

$$\lim_{x \to x_0} f(x, y) = \varphi(y),$$

то существует повторный предел, равный A:

$$\lim_{y \to y_0} \varphi(y) = \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = A.$$

7.3. Непрерывность функций в $\mathbb{R}^n$

Определение 7.3.1. *Пусть функция f определена на множестве E и точка $a \in E$ является предельной для E. Функция f называется непрерывной в точке a, если*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Если точка $a \in E$ не является предельной для E (в этом случае она называется *изолированной*), то обычно считают, что всякая функция, определенная на E, непрерывна в этой точке.

Можно переформулировать данное определение на языке последовательностей и на языке ε–δ.

Определение 7.3.2. *Функция f, определенная на E, называется непрерывной на множестве E, если она непрерывна в каждой точке множества E. Класс всех непрерывных на E функций обозначается через $\mathcal{C}(E)$.*

Отметим ряд свойств непрерывных функций:

1) если функции f и g, определенные на E, непрерывны в точке a, то их сумма, разность, произведение и частное (последнее, если $g(a) \neq 0$) также непрерывны в точке a;

2) пусть функция g, определенная на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, непрерывна в точке $a \in E$, а функции $f_1, f_2, \ldots, f_n$, определенные на множестве $F \subset \mathbb{R}^k$, непрерывны в точке $b \in F$. Причем $(f_1(y), f_2(y), \ldots, f_n(y)) \in E$, если $y \in F$, а $f_j(b) = a_j,\ j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда сложная функций $g(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ непрерывна в точке $b \in F$.

Как следствие этих свойств и непрерывности основных элементарных функций, заданных в $\mathbb{R}^1$, получаем утверждение.

Теорема 7.3.1. *Элементарные функции непрерывны в области своего определения.*

Приведем ряд теорем для функций, непрерывных на множествах.

Теорема 7.3.2. *Всякая функция, непрерывная на компакте, ограничена на нем и достигает на нем своих верхней и нижней граней.*

Это аналог теоремы Вейерштрасса о функциях, непрерывных на отрезке.

Доказательство. Пусть f — непрерывна на K, но неограничена. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ найдется точка $x^{(m)} \in K$, для которой $|f(x^{(m)}| \geqslant m$. Выберем по теореме 7.2.4 сходящуюся подпоследовательность $x^{(m_k)}$ к какой-то точке $x^{(0)} \in K$. Получим, $f(x^{(m_k)}) \to f(x^{(0)})$ при $k \to \infty$, в частности подпоследовательность $f(x^{(m_k)})$ — ограничена. Что противоречит предположению.

Пусть $A = \sup\limits_{x \in K} f(x)$ и $f(x) < A$ для всех $x \in K$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \dfrac{1}{A - f(x)}$. Так как знаменатель не обращается в 0, то данная функция — непрерывна на K. По только что доказанной части теоремы она ограничена, т.е.

$$0 < \varphi(x) = \frac{1}{A - f(x)} \leqslant C.$$

Отсюда $f(x) < A - \dfrac{1}{C}$, что противоречит определению точной верхней границы. $\square$

Теорема 7.3.3. *Если функция, непрерывная в области, принимает в этой области два значения, то она принимает и все значения, заключенные между ними.*

Для *доказательства* достаточно соединить точки, в которых эти два значения принимаются, ломаной и применить теорему Больцано-Коши для числовой прямой. $\square$

Это аналог теоремы Больцано-Коши о промежуточном значении.

Определение 7.3.3. *Функция f, определенная на множестве E, называется равномерно непрерывной на этом множестве, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что как только $|x - y| < \delta$, $x, y \in E$, то $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

Равномерно непрерывная функция на E, очевидно, непрерывна на E. Обратное, вообще говоря, не верно. Это мы видели на примерах функций одного переменного. Тем не менее, справедливо следующее утверждение.

Теорема 7.3.4 (Кантора о равномерной непрерывности)**.** *Функция, непрерывная на компакте, равномерно непрерывна.*

Доказательство полностью повторяет доказательство теоремы Кантора на числовой прямой (см. § 1.14).

Определение 7.3.4. *Пусть функция f определена на множестве E. Модулем непрерывности функции f (обозначается $\omega(\delta, f, E)$) называется выражение*

$$\omega(\delta, f, E) = \sup_{|x-y|<\delta} |f(x) - f(y)|\,, \quad x, y \in E.$$

Модуль непрерывности является возрастающей функцией δ.

Следствие 7.3.1. *Для того чтобы функция f была равномерно непрерывной на множестве E, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta, f, E) = 0.$$

Мы видим, что свойства непрерывных функций многих переменных во многом повторяют свойства непрерывных функций на числовой оси, вплоть до их доказательств.

7.4. Частные производные и дифференциал

7.4.1. Частные производные.

Определение 7.4.1. *Пусть в некоторой окрестности точки $x^{(0)} = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ задана функция $y = f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$. Фиксируя все переменные кроме i-ой: $x_1 = x_1^0, \ldots,\ x_{i-1} = x_{i-1}^0,\ x_{i+1} = x_{i+1}^0, \ldots,\ x_n = x_n^0$ получим функцию одного переменного x_i: $y = f(x_1^0,\ \ldots,\ x_{i-1}^0,\ x_i,\ x_{i+1}^0,\ \ldots,\ x_n^0)$. Обычная производная этой функции в точке x_i^0 называется частной производной функции $y = f(x)$ в точке $x^{(0)}$ по x_i и обозначается через $\dfrac{\partial f\left(x^{(0)}\right)}{\partial x_i} = \dfrac{\partial y}{\partial x_i} = y'_{x_i}(x^{(0)})$.*

Если обозначить $\Delta_{x_i} f = f(x_1^0,\ \ldots,\ x_{i-1}^0,\ x_i^0 + \Delta x_i,\ x_{i+1}^0,\ \ldots,\ x_n^0) - f(x_1^0,\ \ldots,\ x_{i-1}^0,\ x_i^0,\ x_{i+1}^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ — приращение функции по переменной x_i, и вспомнить определение обычной производной, то можно написать, что

$$\frac{\partial f\left(x^{(0)}\right)}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} f}{\Delta x_i}.$$

Частный дифференциал $d_{x_i} f$ определяется по формуле

$$d_{x_i} y = \frac{\partial y}{\partial x_i}\, dx_i$$

и тем самым является линейной функцией переменной dx_i, которая называется *дифференциалом независимой переменной x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.*

В случае $n = 1$ частная производная совпадает с обычной производной, а частный дифференциал с обычным дифференциалом.

Из определения частных производных следует, что для их вычисления можно использовать все правила вычисления обычных производных.

Пример 7.4.1. Рассмотрим функцию $z = xye^{xy}$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Решение. Зафиксируем x, получим функцию одного переменного y и найдем ее производную:
$$\frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy} + xye^{xy}\frac{\partial}{\partial y}(xy) = (x + x^2y)e^{xy}.$$

Замечание 7.4.1. *Для функции одной переменной из существования производной функции в точке следует ее непрерывность в этой точке. Для $n \geqslant 2$ это уже не так, то есть из сущесвования всех часных производных функции в точке не следует ее непрерывность в этой точке. Приведем соответствующий пример для $n = 2$.*

Пример 7.4.2. Пусть
$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad xy = 0, \\ 1, & \text{если} \quad xy \neq 0. \end{cases}$$
Показать, что $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$. Однако эта функция разрывна в точке $(0,0)$.

Решение. Легко видеть, что частные производнуе в нуле этой функции равны нулю. То, что эта функция разрывна в нуле следует из того, что, например, ее предел вдоль прямой $y = x$ при $(x,y) \to (0,0)$ равен 1, а $f(0,0) = 0$.

7.4.2. Дифференцируемость функции в точке. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности $U_{x^{(0)}}(\delta)$ точки $x^{(0)} = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ и пусть $x \in U_{x^{(0)}}(\delta)$. Обозначим $\Delta x_i = x_i - x_i^0$ и $\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$, а $\rho = \rho(x, x^{(0)}) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i^2} < \delta$.

Определение 7.4.2. *Величину $\Delta y = f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)})$ назовем полным приращением функции.*

Определение 7.4.3. *Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке $x^{(0)}$, если существуют числа A_1, …, A_n такие, что*
$$\Delta y = A_1\Delta x_1 + \cdots + A_n\Delta x_n + \alpha(\Delta x),$$
где $\alpha(\Delta x) = \varepsilon(\Delta x)\rho$, $\rho \neq 0$, $\lim\limits_{\rho\to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$.

Определение 7.4.4. *В случае дифференцируемости функции $y = f(x)$ в точке $x^{(0)}$ линейная функция $A_1dx_1 + \cdots + A_ndx_n$ переменных Δx_1, …, Δx_n называется (полным) дифференциалом функции f в точке $x^{(0)}$ и обозначается $dy(x^{(0)})$.*

Таким образом
$$dy = A_1\Delta x_1 + \cdots + A_n\Delta x_n.$$

Вместо Δx_i употребляются такие равнозначные обозначения dx_i, $i = 1, \ldots, n$, то есть пишут
$$dy = A_1dx_1 + \cdots + A_ndx_n.$$

Отметим, что функция $\alpha(\Delta x)$ из определения (7.4.3) обладает свойством

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\rho} = 0,$$

поэтому по аналогии с функциями одного переменного будем обозначать ее $o(\rho)$ при $\rho \to 0$. Применяя это обозначение, определение дифференцируемости можно записать в виде

$$\Delta y = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n + o(\rho), \qquad \rho \to 0.$$

Лемма 7.4.1. *Функция $\alpha = \alpha(\Delta x)$ представима в виде $\alpha(\Delta x) = \varepsilon(\Delta x)\rho$, $\rho \neq 0$, $\lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha(\Delta x) = \varepsilon_1(\Delta x)\Delta x_1 + \dots + \varepsilon_n(\Delta x)\Delta x_n$, $\rho \neq 0$, $\lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon_1 = \dots = \lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon_n = 0$.*

Доказательство. Пусть $\alpha = \varepsilon\rho$ при $\rho \to 0$, тогда $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon \frac{\Delta x_i}{\rho} \Delta x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i \Delta x_i$, где $\varepsilon_i = \varepsilon \frac{\Delta x_i}{\rho}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Заметим, что $\left|\frac{\Delta x_i}{\rho}\right| \leqslant 1$, и тогда $|\varepsilon_i| \leqslant |\varepsilon|$. Поэтому $\lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon_i = 0$ для $i = 1, 2, \dots, n$.

Обратно, пусть $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i \Delta x_i$, $\rho \neq 0$, $\lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon_i = 0$. Тогда $\alpha = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{\rho} \Delta x_i \right) \rho = \varepsilon \cdot \rho$, где $\varepsilon = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{\rho} \Delta x_i$. Нетрудно видеть, что $|\varepsilon| < \sum\limits_{i=1}^{n} |\varepsilon_i|$. Поэтому $\varepsilon \to 0$ при $\rho \to 0$.

□

Теорема 7.4.1. *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x^{(0)}$, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Действительно, из определения дифференцируемости функции в точке и неравенств $|\Delta x_i| \leqslant \rho$, $i = 1, \dots, n$, следует, что $\Delta y \to 0$ при $\rho \to 0$, что и означает непрерывность функции $y = f(x)$ в точке $x^{(0)}$.

□

Теорема 7.4.2. *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x^{(0)}$ и $dy = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i dx_i$ ее дифференциал в этой точке, то в точке $x^{(0)}$ у функции $y = f(x)$ существуют частные производные и*

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} = A_i, \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

Таким образом, $dy = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$.

Доказательство. Из определения дифференцируемости и леммы 7.4.1 $\Delta y = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i + \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i \Delta x_i$. Положим $\Delta x_1 = \dots = \Delta x_{i-1} = \Delta x_{i+1} = \dots = \Delta x_n = 0$, тогда $\Delta_{x_i} y = A_i \Delta x_i + \varepsilon_i \Delta x_i$ и $\frac{\Delta_{x_i} y}{\Delta x_i} = A_i + \varepsilon_i$. Переходя к пределу при $\Delta x_i \to 0$, получим $\frac{\partial y}{\partial x_i} = A_i$ для $i = 1, 2, \dots, n$.

□

Замечание 7.4.2. *Из теоремы 7.4.2 следует единственность дифференциала у дифференцируемой функции.*

Заметим, что обратное утверждение к теореме 7.4.2 неверно. В качестве примера рассмотрим функцию двух переменных

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2>0, \\ 0, & \text{если } x=y=0. \end{cases}$$

Эта функция имеет в точке $(0,0)$ частные производные $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$, однако не является непрерывной (а значит и дифференцируемой) в этой точке.

Сформулируем без доказательства условия дифференцируемости функции в терминах свойств частных производных.

Теорема 7.4.3. *Если функция $y = f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$ частные производные $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$, которые непрерывны в самой точке $x^{(0)}$, тогда функция $y = f(x)$ дифференцируема в этой точке.*

Определение 7.4.5. *Функция, имеющая в некоторой точке (или на некотором открытом множестве) непрерывные частные производные, называется непрерывно дифференцируемой в этой точке (соответственно на этом множестве).*

Отметим, что проверка непрерывности частных производных зачастую оказывается проще, чем непосредсвенная проверка дифференцируемости функции, а понятие дифференцируемости функции играет важную роль в ряде разделов теории функции многих переменных.

7.4.3. Дифференцирование сложной функции.

Теорема 7.4.4. *Пусть функция $f(x)$, $x = (x_1,\ldots,x_n)$, определена в некоторой окрестности точки $x^{(0)} = (x_1^0,\ldots,x_n^0)$, а функции $x_i = x_i(t)$, $t = (t_1,\ldots,t_k)$, $i = 1,\ldots,n$, определены в некоторой окрестности точки $t^{(0)} = (t_1^0,\ldots,t_k^0)$ и $x_i^0 = x_i(t^{(0)})$, $i = 1,\ldots,n$. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x^{(0)}$, а функции $x_i = x_i(t)$, $i = 1,\ldots,n$, дифференцируемы в точке $t^{(0)}$, то сложная функция $f(x(t)) = f(x_1(t),\ldots,x_n(t))$ определена в некоторой окрестности точки $t^{(0)}$ и дифференцируема в этой точке. При этом дифференциал df функции $f(x(t))$ в точке $t^{(0)}$ может быть записан в следующих двух видах:*

$$df = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f(x(t^{(0)}))}{\partial t_j} dt_j,$$

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i}\, dx_i, \qquad \textit{где} \quad dx_i = dx_i(t)|_{t=t^{(0)}}.$$

Доказательство. Условия теоремы обеспечивают существование таких окрестностей $U_{x^{(0)}}(\eta)$ и $V_{t^{(0)}}(\delta)$ точек $x^{(0)}$ и $t^{(0)}$ соответственно, что для $t \in V_{t^{(0)}}(\delta)$ точка $x(t) \in U_{x^{(0)}}(\eta)$ и в окрестности $V_{t^{(0)}}(\delta)$ определена сложная функция $f(x(t))$.

Функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x^{(0)}$, поэтому для $r = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i^2 < \eta$ имеем

$$\Delta f = f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \Delta x_i + \varepsilon \cdot r,$$

где $\varepsilon = \varepsilon(\Delta x)$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{r\to 0} \varepsilon = 0$. Доопределим функцию $\varepsilon(\Delta x)$ в нуле по непрерывности: $\varepsilon(0) = 0$.

В силу дифференцируемости функций $x_i = x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, в точке $t^{(0)}$ для $\rho = \sum\limits_{j=1}^{k} \Delta t_j^2 < \delta$ имеем

$$\Delta x_i = x_i(t^{(0)} + \Delta t) - x_i(t^{(0)}) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j} \Delta t_j + \varepsilon_i \rho, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $\lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Подставляя полученные для Δx_i выражения в формулу для Δf, получим

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j} \Delta t_j + \beta,$$

где $\beta = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \varepsilon_i \rho + \varepsilon r$. Переставляя порядок суммирования, имеем

$$\Delta f = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j} \right) \Delta t_j + \beta.$$

В силу непрерывности функций $x_i = x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, в точке $t^{(0)}$ имеем $\lim\limits_{\rho \to 0} \Delta x_i = 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{\rho \to 0} r = 0$. Отсюда в силу теоремы о непрерывности сложной функции $\lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon = 0$.

Покажем, что $\beta = o(\rho)$, $\rho \to 0$. Действительно, $\dfrac{\beta}{\rho} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \varepsilon_i + \varepsilon \dfrac{r}{\rho}$, а отношение $\dfrac{r}{\rho}$ ограничено:

$$\frac{1}{\rho} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2} \leqslant \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{n} |\Delta x_i| \leqslant \sum_{i=n}^{k} \left(\sum_{j=1}^{k} \left| \frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j} \right| \frac{|\Delta t_j|}{\rho} + \varepsilon_i \right).$$

Так как $\dfrac{|\Delta t_j|}{\rho} \leqslant 1$ и функции ε_i также ограничены, то отношение $\dfrac{r}{\rho}$ ограничено. Но тогда $\lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{\beta}{\rho} = \sum\limits_{i=1}^{n} \lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \varepsilon_i + \lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon \cdot \dfrac{r}{\rho} = 0$.

Дифференцируемость сложной функции $f(x(t))$ в точке $t^{(0)}$ доказана.

Из формулы для приращения Δf имеем

$$df(x^{(0)}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j} \Delta t_j.$$

Отсюда, учитывая, что $\sum\limits_{j=1}^{k} \dfrac{\partial x_i}{\partial t_j} \Delta t_j = dx_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, получаем для дифференциала сложной функции выражение

$$df(x^{(0)}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} dx_i,$$

где $dx_i = dx_i(t)|_{t=t^{(0)}}$.

$\square$

Отметим, что обе записи дифференциала:

$$df = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f(x(t^{(0)}))}{\partial t_j} dt_j,$$

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} dx_i, \qquad dx_i = dx_i(t)|_{t=t^{(0)}}$$

выглядят одинаково в том смысле, что в них дифференциал равен сумме произведений частных производных на соответствующие дифференциалы. Однако, в первом случае dt_j — дифференциалы независимых переменных, а во второй формуле dx_i — дифференциалы функций. Это свойство называется *инвариантностью формы первого дифференциала* относительно выбора переменных.

Следствие 7.4.1. *В условиях теоремы 7.4.4 справедлива следующая формула для вычисления частных производных сложной функции:*

$$\frac{\partial f(x(t))}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x(t))}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Доказательство. Из теоремы 7.4.4 имеем

$$df(x(t^{(0)})) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} dx_i,$$

где $dx_i = \sum\limits_{j=1}^{k} \dfrac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j} dt_j$.

После изменения порядка суммирования получим

$$df(x(t^{(0)})) = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x(t^{(0)}))}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j} \right) dt_j,$$

что в силу единственности дифференциала и доказывает следствие.

□

Инвариантность формы первого дифференциала широко используется при практическом вычислении дифференциалов и частных производных. Так, если u, v функции какого-то числа переменных, то легко убедится в справедливости следующих правил

1. $d(u+v) = du + dv$,
2. $d(u \cdot v) = vdu + udv$,
3. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$.

Пример 7.4.3. Найти дифференциал функции $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$.
Решение.

$$dz = d\left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y}\right) = \frac{1}{1 + \dfrac{x^2}{y^2}} d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{xdy - ydx}{x^2} = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}.$$

7.5. Производная по направлению. Градиент

Пусть в некоторой окрестности точки $x^{(0)} = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ определена функция $y = f(x)$ и точка $x^{(1)} = (x_1^1, \dots, x_n^1)$ принадлежит этой окрестности. Проведем прямую через точки $x^{(0)}$ и $x^{(1)}$, или, что то же прямую через точку $x^{(0)}$ в направлении вектора

$$l = \left(\frac{x_1^1 - x_1^0}{\rho}, \dots, \frac{x_n^1 - x_n^0}{\rho}\right),$$

где $\rho = \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i^1 - x_i^0)^2$.

Уравнение этой прямой имеет вид

$$x_i = x_i^0 + \frac{x_i^1 - x_i^0}{\rho}s, \qquad i = 1, 2, \dots, n, \qquad -\infty < s < +\infty.$$

Учитывая, что $\left|\dfrac{x_1^i - x_i^0}{\rho}\right| \leqslant 1$, обозначим $\cos\alpha_i = \dfrac{x_1^i - x_i^0}{\rho}$, $i = 1, 2, \dots, n$, и назовем числа $\cos\alpha_i$ направляющими косинусами прямой

$$x_i = x_i^0 + s \cdot \cos\alpha_i, \qquad i = 1, 2, \dots, n, \qquad -\infty < s < +\infty.$$

Нетрудно проверить, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \cos^2\alpha_i = 1$.

Определение 7.5.1. *Производной функции $f(x)$ в направлении вектора $l = (\cos\alpha_1, \dots, \cos\alpha_n)$ называется производная по переменной s сложной функции $f(x_1^0 + s \cdot \cos\alpha_1, \dots, x_n^0 + s \cdot \cos\alpha_n)$.*

Определение 7.5.2. *Вектор с координатами*

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_n}$$

называется градиентом функции $f(x)$ в точке $x^{(0)}$ и обозначается $\operatorname{grad} f$.

Если $l_i = (0, \dots, 0, 1, 0 \dots, 0)$ координатные орты $i = 1, 2, \dots, n$, то $\operatorname{grad} f = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} l_i$.

Часто оказывается удобным использование символического *вектора Гамильтона*

$$\nabla = \sum_{i=1}^{n} l_j \frac{\partial}{\partial x_i},$$

называемого *наблой*. Набла является обозначением определенной операции, которую следует произвести над функцией. Для функции $f(x)$, по определению, полагаем

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} l_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Таким образом, $\operatorname{grad} f$ и ∇f являются обозначением одного и того же выражения.

Теорема 7.5.1. *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой точке $x^{(0)} = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, тогда в этой точке функция $f(x)$ имеет производную по любому направлению $l = (\cos\alpha_1, \dots, \cos\alpha_n)$ и эта производная может быть найдена по формуле*

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cos\alpha_i = (\operatorname{grad} f, l),$$

где $(\cdot,\cdot)$ *означает скалярное произведение векторов.*

Доказательство. К сложной функции $f(x^{(0)}+sl)$, где $l=(\cos\alpha_1,\ldots,\cos\alpha_n)$ применим формулу для вычисления производной, полученную в следствии 7.4.1.

□

7.6. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора

7.6.1. Частные производные высших порядков. Пусть частная производная $\dfrac{\partial y}{\partial x_i}$ по аргументу x_i функции $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, определенной в области D, существует в каждой точке области D. В этом случае указанная частная производная представляет собой функцию переменных $x_1,x_2,\ldots,x_n$ также определенную в области D.

Может случится, что эта функция $\dfrac{\partial y}{\partial x_i}$ имеет частную производную по аргументу x_k в некоторой точке x области D. Тогда указанную частную производную по аргументу x_k называют *второй частной производной или частной производной второго порядка* функции $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ в точке x сначала по аргументу x_i а затем по аргументу x_k и обозначают одним из следующих символов:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_k\partial x_i},\qquad f_{x_ix_k},\qquad y_{x_ix_k}.$$

При этом, если $i\neq k$, то частная производная $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x_k\partial x_i}$ называется *смешанной* частной производной второго порядка. После того как введено понятие второй частной производной, можно последовательно ввести понятие третьей частной производной, затем четвертой и т.д.

Определение 7.6.1. *Если предположить, что нами уже введено понятие* $(m-1)$*-ой частной производной функции* $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *по аргументам* $x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_{m-1}}$ *(отдельные или даже все номера которых могут совпадать) и что эта* $(m-1)$*-я частная производная имеет в точке* x *частную производную по аргументу* x_{i_m}*, то указанную частную производную называют* m*-ой частной производной (или частной производной* m*-го порядка) функции* $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *в точке* x *по аргументам* $x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_m}$.

Таким образом, мы вводим понятие m-й частной производной индуктивно, переходя от первой частной производной к последующим. Соотношение, определяющее m-ю частную производную по аргументам $x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_m}$, имеет вид

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m}\partial x_{i_{m-1}}\ldots\partial x_{i_2}\partial x_{i_1}}=\frac{\partial}{\partial x_{i_m}}\left(\frac{\partial^{m-1}f}{\partial x_{i_{m-1}}\ldots\partial x_{i_2}\partial x_{i_1}}\right).$$

Если не все индексы $i_1,i_2,\ldots,i_m$ совпадают между собой, то частная производная $\dfrac{\partial^m f}{\partial x_{i_m}\ldots\partial x_{i_2}\partial x_{i_1}}$ называется *смешенной* частной производной m-го порядка.

Так как частная производная функции по аргументу x_i определяется как обыкновенная производная одной переменной x_i при фиксированных значениях остальных переменных, то методика вычисления частных производных высших порядков предполагает умение вычислять только обыкновенные производные первого порядка.

Пример 7.6.1. Найти частные производные второго порядка функции $f=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

Решение.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{x}{x^2+y^2},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

В рассмотренном примере смешанные частные производные $\dfrac{\partial^2 f}{x\partial y}$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ равны друг другу. Вообще говоря, значения смешанных производных зависят от порядка, в котором производятся последовательные дифференцирования.

Пример 7.6.2. Показать, что смешанные частные производные $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ функции

$$f=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{при } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{при } x^2+y^2=0\end{cases}$$

в точке $(0,0)$ существуют, но не равны друг другу.

Решение. Найдем частную производную по переменной x.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases} \dfrac{y(x^4-y^4+4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & \text{при } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{при } x^2+y^2=0.\end{cases}$$

Тогда

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right|_{x=0,y=0}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0,y\neq 0}-\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0,y=0}\right)=-1.$$

Проводя аналогичные вычисления, получим $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{x=0,y=0}=1$. Таким образом, в точке $(0,0)$ смешанные производные не равны: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\neq\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.

Выясним достаточное условие независимости значений смешанных производных от порядка, в котором производятся последовательные дифференцирования.

Теорема 7.6.1. *Пусть функция $f(x,y)$ определена вместе со своими частными производными f'_x, f'_y, f''_{xy} и f''_{yx} в некоторой окрестности точки (x_0,y_0), причем производные f''_{xy} и f''_{yx} непрерывны в этой точке, тогда*

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0).$$

Доказательство. Пусть функция $f(x,y)$ определеная вместе с производными f'_x, f'_y, f''_{xy} и f''_{yx} в δ-окрестности точки (x_0,y_0) и пусть Δx и Δy фиксированы так, что $\Delta x^2+\Delta y^2<\delta^2$. Будем обозначать символом Δ_x, соответственно символом Δ_y, приращение функции $f(x,y)$ по аргументу x, соответственно, по аргументу y, в точке (x_0,y_0). Положим $\Delta_{xy}f=\Delta_x(\Delta_y f)$, $\Delta_{yx}f=\Delta_y(\Delta_x f)$ и покажем, что $\Delta_{xy}f=\Delta_{yx}f$. Действительно,

$$\Delta_{xy}f=\Delta_x(\Delta_y f)=\Delta_x[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]=$$

$$=[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)]-[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)].$$

Аналогично,

$$\Delta_{yx} f = \Delta_y(\Delta_x f) = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, , y_0 + \Delta y)] -$$

$$-[f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)].$$

Таким образом, $\Delta_{xy} f = \Delta_{yx} f$. Обозначим

$$\varphi(x) = f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0),$$

тогда

$$\Delta_{yx} f = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0).$$

В силу того, что в рассматриваемой окрестности точки (x_0, y_0) существует частная производная f'_x, функция $\varphi(x)$ дифференцируема на отрезке с концами в точках x_0 и $x_0 + \Delta x$.

По теореме Лагранжа о конечных приращениях получим

$$\Delta_{xy} f = \varphi'(x_0 + \theta_1 \Delta x)\Delta x, \qquad 0 < \theta_1 < 1.$$

Но $\varphi'(x) = f'_x(x, y_0 + \Delta y) - f'_x(x, y_0)$, поэтому

$$\Delta_{xy} f = [f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) - f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0)]\Delta x.$$

Применяя еще раз ту же теорему о конечных приращениях, но теперь уже по переменной y будем иметь

$$\Delta_{xy} f = f''_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta x \Delta y,$$

$$0 < \theta_1 < 1, \qquad 0 < \theta_2 < 1.$$

Совершенно аналогично, полагая

$$\psi(y) = f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y),$$

получим

$$\Delta_{yx} f = \psi(y_0 + \Delta y) - \psi(y_0) = \psi'(y_0 + \theta_3 \Delta y)\Delta y =$$

$$= [f'_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta_3 \Delta y) - f'_y(x_0, y_0 + \theta_3 \Delta y)]\Delta y =$$

$$= f''_{yx}(x_0 + \theta_4 \Delta x, y_0 + \theta_3 \Delta y)\Delta x \Delta y,$$

$$0 < \theta_3 < 1, \qquad 0 < \theta_4 < 1.$$

Так как $\Delta_{xy} f = \Delta_{yx} f$, то равны между собой и правые части равенств. Сокращая на $\Delta x \Delta y$ при $\Delta x \neq 0$ и $\Delta y \neq 0$, получим

$$f''_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y) = f''_{yx}(x_0 + \theta_4 \Delta x, y_0 + \theta_3 \Delta y),$$
$$0 < \theta_i < 1, \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

В силу непрерывности частных производных f''_{xy} и f''_{yx} в точке (x_0, y_0) в пределе из последнего равенства получим, что $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$. Теорема доказана.

□

Замечание 7.6.1. *Из доказанной теоремы по индукции легко следует, что если у функции n переменных смешанные частные производные m-го порядка непрерывны в некоторой точке, а производные низших порядков определены и непрерывны в окрестности этой точки, то частные производные порядка m не зависят от порядка дифференцирования.*

Это следует из того, что любые две последовательности дифференцирования, отличающиеся только порядком дифференцирования (т.е. такие, что по каждому фиксированному аргументу они содержат одно и то же суммарное число дифференцирований), можно перевести одну в другую конечным числом шагов, при каждом из которых меняется порядок дифференцирования только по двум пременным, а другие остаются при этом фиксированными. Таким образом, при каждом шаге фактически рассматривается изменение порядка дифференцирования у функции лишь двух переменных, т.е. в этом случае мы находимся в условиях вышедоказанной теоремы.

Поясним это на примере. Докажем, например, что

$$f'''_{xyz} = f'''_{zyx}.$$

Согласно вышесказанному, имеем последовательно

$$f'''_{xyz} = (f'_x)''_{yz} = (f'_x)''_{zy} = (f''_{xz})'_y = (f''_{zx})'_y = (f'_z)''_{xy} = (f'_z)''_{yx} = f'''_{zyx}.$$

Определение 7.6.2. *Функция, имеющая в некоторой точке (или, соответственно, на некотором открытом множестве) непрерывные частные производные всех порядков до некоторого порядка m включительно, называется m раз непрерывно дифференцируемой в этой точке (на этом множестве).*

Заметим, что, для того чтобы функция имела в точке (на открытом множестве) непрерывные частные производные всех порядков до некоторого порядка m включительно, достаточно, чтобы она имела в этой точке (на этом множестве) непрерывные частные производные порядка m. Действительно, из непрерывности всех частных производных порядка m в точке (на открытом множестве) вытекает непрерывность всех частных производных порядка $m-1$ в рассматриваемой точке (на рассматриваемом множестве). Из непрерывности частных производных порядка $m-1$ вытекает (в случае $m > 1$) непрерывность частных производных порядка $m-2$ и т.д.

7.6.2. Дифференциалы высших порядков. В дальнейшем для удобства изложения будем обозначать дифференциалы не только символом d, но символом δ, например, писать не только $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$, но и $\delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\delta y$, причем дифференциал какой-либо функции будем называть ее *первым дифференциалом.*

Пусть функция $y = f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, имеет непрерывные частные производные первого и второго порядка в некоторой области D. Из непрерывности частных производных следует (теорема 7.4.3) дифференцируемость функции $y = f(x)$ в области D. Таким образом, для всех точек области D определен дифференциал

$$dy = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i.$$

Частные производные $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, в силу сделанных преположений относительно функции $f(x)$ сами являются дифференцируемыми в области D. Поэтому дифференциал dy, рассматривается как функция переменных x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, в свою очередь является дифференцируемой на D функцией. Вычислим дифференциал от первого дифференциала dy, считая, что dx_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, фиксированными, а $x \in E$. Новое дифференцирование обозначим δ:

$$\delta(dy) = \delta\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\delta \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right) dx_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\delta x_j\right)dx_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}dx_i \delta x_j.$$

Отметим, что при сделанных относительно функции $f(x)$ предположениях при вычислении частных производных можно не обращать внимание на порядок дифференцирования. В результате мы получим билинейную форму переменных dx_i,δx_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, являющуюся симметричной в силу теоремы о независимости порядка дифференцирования.

Полагая $dx_i = \delta x_i$, получим соответствующую ей квадратичную формулу

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j,$$

которая и называется *вторым дифференциалом* функции $y = f(x)$ в точке $x \in E$. Таким образом, мы пришли к определению

Определение 7.6.3. *Вторым дифференциалом (или дифференциалом второго порядка) d^2y функции $y = f(x)$ в точке x называется квадратичная форма от дифференциалов dx_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, независимых переменных, соответствующая билинейной форме дифференциала от первого дифференциала, т.е.*

$$d^2y = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j.$$

Дифференциал любого порядка вводится по индукции. Именно, в предположении непрерывности у рассматриваемой функции $y = f(x)$ всех ее частных производных до порядка m включительно в некоторой области, получить ее дифференциал $d^m y$ порядка m, надо взять дифференциал от дифференциала $d^{m-1}y$ порядка $m-1$: $\delta(d^{m-1}y) =$ и положить $\delta x_i = dx_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Легко убедится, (в случае, когда $x_1, \ldots, x_n$, являются независимыми переменными) что при соответствующих условиях на дифференцируемость функции $y = f(x)$, справедлива формула

$$d^m y = \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_m=1}^{n}\frac{\partial^m f(x)}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_m}}dx_1 dx_2 \ldots dx_{i_m}.$$

Замечание 7.6.2. *Следует иметь в виду, если функция $y = f(x(t))$ сложная, $x_i = x_i(t_1, \ldots, t_k)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то второй дифференциал функции f, записанный через дифференциалы dx_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, уже не будет, как правило иметь вид $d^2 f = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j$, а будет выглядеть сложнее. Таким образом, в случае дифференциалов порядка больше единицы не имеет место инвариантность формы дифференциала относительно выбора и переменных.*

Пример 7.6.3. Найти второй дифференциал функции $z = f(x, y)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$.

Решение. В силу инвариантности формы первого дифференциала имеем $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$. Далее, вычисляя второй дифференциал и учитывая, что dx, dy — дифференциалы функций от переменных u, v, получаем

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x}d^2 x + \frac{\partial z}{\partial y}d^2 y.$$

7.6.3. Формула Тейлора. Для формулировки основного результата удобно воспользоваться мультииндексной формой записи дифференциала произвольного порядка. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — вектор с целыми неотрицательными компонентами. Обозначим $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$. Формула полинома Ньютона выглядит следующим образом:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} x^\alpha.$$

Доказывается она индукцией по n с базой индукции $n = 2$, т.е. известной формулой бинома Ньютона. Формула полинома Ньютона позволяет нам переписать выражение для дифференциала m-ого порядка функции $y = f(x)$ в виде

$$d^m y = \sum_{|\alpha|=m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x^\alpha} dx^\alpha,$$

где $\dfrac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x^\alpha} = \dfrac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_1^{\alpha_n}}$, $dx^\alpha = (dx_1)^{\alpha_1} \ldots (dx_n)^{\alpha_n}$. Иногда для частных производных используют также обозначения

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_1^{\alpha_n}}.$$

Теорема 7.6.2 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа)**.** *Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой ε-окрестности точки $x^{(0)}$ и $(m+1)$ раз дифференцитруема в этой окрестности. Для точки из указанной окрестности справедлива формула*

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \frac{D^\alpha f(x^{(0)})}{\alpha!} (x - x^{(0)})^\alpha + \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{D^\alpha f(x^{(0)} + \theta(x - x^{(0)}))}{\alpha!} (x - x^{(0)})^\alpha,$$

где $0 < \theta < 1$. Вторая сумма в формуле называется остаточным членом в форме Лагранжа.

Доказательство. Точки $x^{(0)}$ и x соединим отрезком $(1-t)x^{(0)} + tx = x^{(0)} + t(x - x^{(0)})$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Очевидно, что этот отрезок лежит в ε-окрестности точки $x^{(0)}$ и можно рассматривать сложную функцию $F(t) = f(x^{(0)} + t(x - x^{(0)}))$. Эта функция является $(m+1)$ раз дифференцируемой на отрезке $[0, 1]$, поэтому для нее справедлива формула Тейлора порядка m с остаточным членом в форме Лагранжа

$$F(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} t^k + \frac{F^{(m+1)}(\theta t)}{(m+1)!} t^{m+1}, \qquad 0 < \theta < 1.$$

Отметим, что $F(1) = f(x)$. Вычисляя последовательно производные функции $F(t)$, найдем, что

$$F^{(k)}(t) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} D^\alpha f(x^{(0)} + t(x - x^{(0)})).$$

Найдем из последней формулы $F^{(k)}(0)$ и $F^{(m+1)}(\theta t)$, подставим полученные выражения в формулу Тейлора для функции $F(t)$ и положим $t = 1$.

□

Замечание 7.6.3. *Можно показать, что остаточный член формулы Тейлора может быть так же записан и в форме $o(\rho^m)$, $\rho \to 0$. Этот способ записи называется формой Пеано. Здесь $\rho = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)^2}$.*

Замечание 7.6.4. *Вместо ε-окрестности точки $x^{(0)}$ в теореме 7.6.2 можно рассматривать любую выпуклую область, содержащую точку $x^{(0)}$. Утверждение теоремы остается при этом справедливым.*

Как следствие теоремы 7.6.2 при $m = 0$ легко получается многомерный вариант формулы конечных приращений.

Теорема 7.6.3. *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в области $D \subset \mathbb{R}^n$, то для каждой пары точек a, b из этой области существует такое θ, $0 < \theta < 1$, что*

$$f(b) - f(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial f(a + \theta(b-a))}{\partial x_i}(b_i - a_i),$$

где $a + \theta(b-a) = (a_1 + \theta(b_1 - a_1), \dots, a_n + \theta(b_n - a_n))$.

Эта формула и называется формулой конечных приращений Лагранжа.

В качестве применеия теоремы 7.6.3 докажем следующее утверждение.

Теорема 7.6.4. *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в выпуклой области $D \subset \mathbb{R}^n$ и имеет в D ограниченные частные производные, то она равномерно непрерывна в этой области.*

Доказательство. Если

$$\left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right| \leqslant C, \qquad i = 1, 2, \dots, n, \qquad x \in E$$

(C — постоянная), то для любых двух точек $x' = (x'_1, \dots, x'_n)$ и $x'' = (x''_1, \dots, x''_n)$ из формулы конечных приращений следует

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\xi)}{\partial x_i}|x''_i - x'_i| \leqslant Cn\rho(x', x''),$$

где ξ — некоторая точка отрезка с концами в точках x' и x''. Поэтому, если задано $\varepsilon > 0$ достаточно взять $\delta = \frac{\varepsilon}{Cn}$, чтобы для любых точек $x' \in D$ и $x'' \in D$ таких, что $\rho(x', x'') < \delta$ выполнялось неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

$\square$

7.7. Экстремумы функций многих переменных

7.7.1. Необходимое условие экстремума.

Определение 7.7.1. *Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$. Точка $x^{(0)} \in E$ является точкой строгого максимума (соответственно точкой строгого минимума), если существует такая окрестность $U_{x^{(0)}}$ точки $x^{(0)}$, что для всех $x \in U_{x^{(0)}} \cap E$, $x \neq x^{(0)}$, выполняется неравенство $f(x) < f(x^{(0)})$ (соответственно неравенство $f(x) > f(x^{(0)})$).*

Таким образом, точка строго максимума (соответственно точка строгого минимума) характеризуется тем, что $\Delta f = f(x) - f(x^{(0)}) < 0$ (соответственно $\Delta f > 0$) при всех $x \in U_{x^{(0)}} \cap E$, $x \neq x^{(0)}$.

Определение 7.7.2. *Если для точки $x^{(0)}$ существует такая окрестность $U_{x^{(0)}}$, что при всех $x \in U_{x^{(0)}} \cap E$ выполняется условие $f(x) \leqslant f(x^{(0)})$ (соответственно $f(x) \geqslant f(x^{(0)})$), то $x^{(0)}$ называется просто точкой максимума (соответственно точкой минимума).*

Определение 7.7.3. *Точки (строгого) максимума и минимума функции называются точками (строгого) экстремума.*

Теорема 7.7.1. *Пусть функция $f(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, определена в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$, если она является точкой экстремума функции $f(x)$ и в ней существует какая-либо производная $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ (j может принимать одно из значений $1, 2, \dots, n$), то она равна нулю, $\dfrac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_j} = 0$.*

Следствие 7.7.1. *Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке экстремума $x^{(0)}$, то ее дифференциал равен нулю в этой точке, $df(x^{(0)}) = 0$.*

Доказательство теоремы и следствия. Пусть для определенности $j = 1$. Если $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots x_n^{(0)})$ является точкой экстремума для функции $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$, то $x_1^{(0)}$ является точкой экстремума для функции $f(x_1, x_2^{(0)}, \dots x_n^{(0)})$ одной переменной x_1, поэтому, если существует производная $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ то по теореме Ферма она равна нулю, т.е.

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_1} = \left|\frac{df(x_1, x_2^{(0)}, \dots x_n^{(0)}}{dx_1}\right|_{x_1 = x_1^{(0)}} = 0.$$

Аналогично обстоит дело в случае любой переменной x_j, $j = 2, \dots, n$.

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке экстремума $x^{(0)}$, то в этой точке существуют все ее производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, и, согласно доказанному, все они равны нулю, поэтому и

$$df(x^{(0)}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} dx_i = 0.$$

□

Пример 7.7.1. Найти точки экстремума функции $z = x^2 + y^2$.

Решение. Точки экстремума в силу доказанного находятся среди тех, для которых $dz = 0$. Так как $dz = 2xdx + 2ydy$, то условие $dz = 0$ выполняется в единственной точке $(0, 0)$. В этой точке $z = 0$, во всех других точках $z = x^2 + y^2 > 0$. Поэтому $(0, 0)$ является точкой строгого минимума для функции $z = x^2 + y^2$.

Пример 7.7.2. Найти точки экстремума функции $z = x^2 - y^2$.

Решение. Поступая аналогично предыдущему примеру находим, что условие $dz = 0$ снова выполняется в точке $(0, 0)$ и в этой точке $z = 0$. Однако, при $y = 0$ и любых $x \neq 0$ имеем $z > 0$, а при $x = 0$ и любом $y \neq 0$ имеем $z < 0$. Поэтому точка $(0, 0)$ не является точкой экстремума, и, значит, функция $z = x^2 - y^2$ вообще не имеет экстремальных точек.

7.7.2. Достаточное условие строго экстремума. Напомним несколько определение из курса линейной алгебры (см. главу 11).

Определение 7.7.4. *Квадратичная форма* $A(x) = A(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, *называется положительно определенной (соответственно отрицательно определенной), если* $A(x) > 0$ ($A(x) < 0$) *для любой точки* $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.

Квадратичная форма, являющаяся положительно или отрицательно определенной, называется также просто определенной (или знакоопределенной) квадратичной формой).

Лемма 7.7.1. *Пусть* S *— единичная сфера в* $\mathbb{R}^n$*:*

$$S = \{x : x_1^2 + \ldots x_n^2 = 1\},$$

и пусть $A(x)$ *— определенная квадратичная форма; тогда*

$$\inf_{x\in S} |A(x)| = \mu > 0.$$

Доказательство. Функция $A(x)$ является многочленом второй степени по переменным $x_1, \ldots, x_n$, поэтому $A(x)$, а, следовательно, и $|A(x)|$ непрерывны во всем пространстве $\mathbb{R}^n$. Отсюда вытекает, что функция $|A(x)|$ непрерывна на компакте S. Согласно теореме Вейрштрасса, функция $|A(x)|$ достигает на S своей нижней грани, т.е. существует такая точка $x^{(0)} \in S$, что

$$\mu \stackrel{def}{=} \inf_{x\in S} |A(x)| = |A(x^{(0)})|.$$

По определению знакоопределенной квадратичной формы $|A(x)| > 0$ для всех точек $x \in S$, значит, в частности, $\mu = |A(x^{(0)})| > 0$.

□

Определение 7.7.5. *Пусть функция* f *дифференцируема в точке* $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. *Если* $df(x^{(0)}) = 0$, *то* $x^{(0)}$ *называется стационарной точкой функции* f.

Очевидно, что точка $x^{(0)}$, в которой функция f дифференцируема, является стацинарной в том и только в том случае, если

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Согласно следствию из теоремы 7.7.1, точка экстремума, в которой функция f дифференцируема, является стационарной; обратное, конечно, вообще говоря, неверно: не всякая стационарноя точка, в которой функция дифференцируема является точкой экстремума (см. пример 7.7.2).

Теорема 7.7.2 (достаточное условие строгого экстремума)**.** *Пусть функция* f *определена и имеет непрерывные производные второго порядка в некоторой окрестности точки* $x^{(0)}$. *Пусть* $x^{(0)}$ *является стацинарной точкой функции* f. *Тогда если квадратичная форма*

$$A(dx_1, \ldots, dx_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_i}\, dx_i dx_j,$$

(т.е. второй дифференциал функции f *в точке* $x^{(0)}$*) положительно определена (отрицательно определена), то* $x^{(0)}$ *является точкой строгого минимума (соответственно точкой строгого максимума); если же квадратичная форма неопределена, то в точке* $x^{(0)}$ *нет экстремума.*

Доказательство. Пусть $U_{x^{(0)}}(\delta_0)$ — δ_0-окрестность, стационарной для функции f точки $x^{(0)}$, в которой функция f имеет непрерывные вторые производные. Пусть точка

$$x = x^{(0)} + dx = (x_1^{(0)} + dx_1, \ldots, x_n^{(0)} + dx_n)$$

принадлежит этой окрестности.

По формуле Тейлора (теорема 7.6.2), учитывая условия стационарности $df(x^{(0)}) = 0$, получим

$$\Delta f = f(x) - f(x^{(0)}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_i} dx_i dx_j + \varepsilon(dx)\rho^2,$$

где $dx = (dx_1, \ldots, dx_n)$, $\rho^2 = dx_1^2 + \cdots + dx_n^2$, и

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon(dx) = 0,$$

или

$$\Delta f = \frac{\rho^2}{2} \left[\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_i} \frac{dx_i}{\rho} \frac{dx_i}{\rho} + 2\varepsilon(dx) \right] = \frac{\rho^2}{2} \left[A\left(\frac{dx_1}{\rho}, \ldots, \frac{dx_n}{\rho} \right) + 2\varepsilon(dx) \right].$$

Точка $\left(\frac{dx_1}{\rho}, \ldots, \frac{dx_n}{\rho} \right)$ лежит на единичной сфере S (т.е. на сфере с центром в начале координат и радиусом, равным 1), ибо $\left(\frac{dx_1}{\rho} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{dx_n}{\rho} \right)^2 = 1$.

Пусть квадратичная форма $A(dx)$ знакоопределена. Тогда, согласно лемме 7.7.1, $\inf\limits_S |A(x)| = \mu > 0$. Выберем δ, $0 < \delta < \delta_0$, так, чтобы $2|\varepsilon(dx)| < \mu$ при $\rho < \delta$. Тогда при $\rho < \delta$, т.е. при $x = x^{(0)} + dx \in U_{x^{(0)}}(\delta)$ и $dx \neq 0$, все выражение в квадратных скобках в правой части формулы для Δf будет иметь тот же знак, что и первое слагаемое $A\left(\frac{dx_1}{\rho}, \ldots, \frac{dx_n}{\rho} \right)$:

$$\operatorname{sign} \Delta f = \operatorname{sign} A\left(\frac{dx_1}{\rho}, \ldots, \frac{dx_n}{\rho} \right).$$

Поэтому, если квадратичная форма $A(dx)$ является положительно определенной, то $\Delta f > 0$, а если отрицательно определенной, то $\Delta f < 0$ при $x^{(0)} + dx \in \overset{\circ}{U}(x^{(0)}, \delta)$. Значит, в первом случае $x^{(0)}$ является точкой строгого минимума, а во втором — точкой строгого максимума.

Пусть теперь квадратичная форма $A(dx)$ является неопределенной. Это означает, что существуют две точки $dx' = (dx_1', \ldots, dx_n')$ и $dx'' = (dx_1'', \ldots, dx_n'')$, что $A(dx_1', \ldots, dx_n') > 0$, а $A(dx_1'', \ldots, dx_n'') < 0$. Мы можем на основании этого сразу сказать, что приращение функции Δf меняет знак в любой окрестности точки $x^{(0)}$, так как точки $x^{(0)} + dx' = (x_1^{(0)} + dx_1', \ldots, x_n^{(0)} + dx_n')$ и $x^{(0)} + dx'' = (x_1^{(0)} + dx_1'', \ldots, x_n^{(0)} + dx_n'')$ могут, вообще говоря, и не принадлежать области определения функции f. Однако, нужный нам результат будет следовать из того, что квадратичная форма $A(dx)$ сохраняет один и тот же знак или равенство нулю на каждой прямой, проходящей через точку $x^{(0)}$, из которой удалена сама эта точка, а значение $A\left(\frac{dx}{\rho}\right)$, $dx \neq 0$, вообще не зависит от выбора точки на этой прямой.

□

Сформулируем теперь теорему 7.7.2 для случая двух переменных, выразив условия, накладываемые на квадратичную форму $A(dx)$, в явном виде через вторые частные производные.

Теорема 7.7.3. *Пусть функция $f(x, y)$ определена и имеет непрерывные частные производные второго порядка в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), которая является стационарной для $f(x, y)$, т.е. в ней*

$$f'_x = f'_y = 0.$$

Тогда если в точке (x_0, y_0)

$$f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2 > 0,$$

то она является точкой строгого экстремума, а именно строгого максимума, если в ней

$$f''_{xx} < 0,$$

и строгого минимума, если

$$f''_{xx} > 0.$$

Если в точке (x_0, y_0)

$$f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2 < 0,$$

то экстремума в ней нет.

Наконец, когда

$$f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 0$$

в точке (x_0, y_0), то необходимо дополнительное исследование.

Покажем на примерах, что, когда имеет место соотношение $f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 0$, экстремум может быть, а может и не быть.

Пример 7.7.3. Исследовать функцию $z = x^2 + 2xy + y^2$ на экстремум.

Решение. У этой функции точка $(0, 0)$ является стационарной точкой, и в ней $z''_{xx} = z''_{yy} = z''_{xy} = 2$, и, значит, соотношение $z''_{xx} z''_{yy} - (z''_{xy})^2 = 0$ выполняется. Замечая, что $z = (x + y)^2$, видим, что всюду $z \geqslant 0$, причем $z = 0$ на прямой $x + y = 0$. Поэтому точка $(0, 0)$ является точкой экстремума, правда, нестрогого.

Пример 7.7.4. Исследовать функцию $z = xy^3$ на экстремум.

Решение. Для данной функции точка $(0, 0)$ является стационарной точкой, и в ней $z''_{xx} = z''_{yy} = z''_{xy} = 0$, поэтому условие $z''_{xx} z''_{yy} - (z''_{xy})^2 = 0$ также выполняется. Однако в силу того, что в формулу, задающую эту функцию, переменные x и y входят в нечетных степенях, функция меняет знак в любой окрестности нуля, значит, $(0, 0)$ не является точкой экстремума.

7.8. Теорема о неявной функции

Будем обозначать $(x, y) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ точки $(n + 1)$-мерного пространства $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Пусть F — функция переменных (x, y), нас будет интересовать вопрос о том, при каких условиях функциональное уравнение $F(x, y) = 0$ однозначно разрешимо относительно y, т.е. однозначно определяет явную функцию $y = f(x)$ такую, что $F(x, f(x)) \equiv 0$. В этом случае говорят о *неявном задании* (или о *неявной функции*) функции $y = f(x)$. Другой вопрос состоит в том, когда эта явная функция непрерывна и дифференцируема.

Теорема 7.8.1. *Пусть функция $F(x, y)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, y_0)$ пространства $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, причем частная производная $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ непрерывна в точке $(x^{(0)}, y_0)$. Если $F(x^{(0)}, y_0) = 0$ и $\dfrac{\partial F(x^{(0)}, y_0)}{\partial y} \neq 0$, то*

1) для любого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность точки $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ и единственная определенная в этой окрестности функция $y = f(x)$ такая, что $|f(x) - y_0| < \varepsilon$, $f(x^{(0)}) = y_0$ и $F(x, f(x)) = 0$;

2) Функция $f(x)$ дифференцируема в указанной окрестности точки $x^{(0)}$.

Доказательство. 1) Пусть для определенности $\dfrac{\partial F(x^{(0)}, y_0)}{\partial y} > 0$. Тогда в силу непрерывности частной производной $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ в точке $(x^{(0)}, y_0)$ и свойства сохранения знака нерерывной функции найдется окрестность $B((x^{(0)}, y_0))$ точки $(x^{(0)}, y_0)$, в которой $\dfrac{\partial F}{\partial y} > 0$. Эту окрестность возьмем в виде шара достаточно малого радиуса с центром в точке $(x^{(0)}, y_0)$. Фиксируем теперь любое $\varepsilon > 0$ такое, что точки $(x^{(0)}, y_0 - \varepsilon)$ и $(x^{(0)}, y_0 + \varepsilon)$ лежат внутри шара B. Рассмотрим функцию $F(x^{(0)}, y)$ переменной y на отрезке $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$.

Так как $\dfrac{\partial F(x^{(0)}, y_0)}{\partial y} > 0$ на отрезке $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$, то функция $F(x^{(0)}, y)$ возрастает на этом отрезке. Поскольку $F(x^{(0)}, y_0) = 0$, то $F(x^{(0)}, y_0 - \varepsilon) < 0$, а $F(x^{(0)}, y_0 + \varepsilon) > 0$.

Рассмотрим теперь две функции $F(x, y_0 - \varepsilon)$ и $F(x, y_0 + \varepsilon)$ переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$. В точке $x^{(0)}$ эти функции принимают значения разных знаков и в силу теоремы о сохранении знака непрерывной функции найдутся окрестности точек $(x^{(0)}, y_0 - \varepsilon)$ и $(x^{(0)}, y_0 + \varepsilon)$, в которых эти функции сохраняют знак. Таким образом, найдется $\delta > 0$ такое, что $F(x, y_0 - \varepsilon) < 0$ и $F(x, y_0 + \varepsilon) > 0$ для $x \in U_{x^{(0)}}(\delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i - x_i^0| < \delta, i = 1, 2, \ldots, n\}$. Кроме того, возьмем δ так, чтобы для $x \in U_{x^{(0)}}(\delta)$ точки $(x^{(0)}, y_0 - \varepsilon)$ и $(x^{(0)}, y_0 + \varepsilon)$ лежали в шаре $B(x^{(0)}, y_0)$. При таком выборе δ все точки $(n+1)$-мерного параллелепипеда $\Pi = \{(x, y) : |x_i - x_i^0| < \delta, |y - y_0| < \varepsilon, i = 1, 2, \ldots, n\}$ лежат в шаре $B(x^{(0)}, y_0)$.

Покажем теперь, что уравнение $F(x, y) = 0$ однозначно разрешимо в параллелепипеде Π, т.е. для любой точки $x = (x_1, \ldots, x_n)$ такой, что $|x_i - x_i^0| < \delta$, $i = 1, 2, \ldots, n$, найдется $y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ такое, что $F(x, y) = 0$. Фиксируем x и рассмотрим функцию $F(x, y)$ переменной y. Так как $\dfrac{\partial F}{\partial y} > 0$ на отрезке $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$, то функция строго возрастает на этом отрезке, а так как она принимает на концах отрезка значения разных знаков, то по теореме Коши о промежуточных значениях найдется y такое, что $F(x, y) = 0$. В силу строгой монотонности функции $F(x, y)$ такое y единственное. Тем самым определена функция f, которая каждой точке $x \in U(x^{(0)}, \delta)$ ставит в соответствие число $y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$, причем для этой функции $f(x)$ справедливы следующие соотношения:

$$y_0 = f(x^{(0)}) \qquad F(x, y) = 0, \quad \text{и} \quad |f(x) - y_0| < \varepsilon.$$

2) Докажем сначала, что функция $y = f(x)$ непрерывна для всех $x \in U_{x^{(0)}}(\delta)$. Так как для любой точки $x \in U_{x^{(0)}}$ выполнены те же условия, что и для точки $x^{(0)}$ (а именно, любой точке $x \in U_{x^{(0)}}$ соответствует точка $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$ такая, что $F(x, y) = 0$, F дифференцируема и $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ в некоторой окрестности точки), то достаточно доказать непрерывность в точке $(x^{(0)}, y_0)$. А эта непрерывность следует из процедуры построения функции $y = f(x)$, описанной в пункте 1 доказательства. Действительно, для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдено $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in U_{x^{(0)}}(\delta)$ выполняется неравенство $|f(x) - f(x^{(0)})| < \varepsilon$. Условие непрерывности функции $y = f(x)$ в точке $x \in U_{x^{(0)}}$ запишем в следующем виде:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0, \qquad \text{где} \qquad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Как и непрерывность, дифференцируемость функции $y = f(x)$ достаточно доказать для точки $(x^{(0)}, y_0)$. Пусть $\Delta y = f(x^{(0)}+\Delta x)-f(x^{(0)})$, тогда $F(x^{(0)}+\Delta x, y_0+\Delta y) = 0$ и так как $F(x^{(0)}, y_0) = 0$, то полное приращение функции F равно нулю: $\Delta F = 0$. Но в силу дифференцируемости функции F в точке $(x^{(0)}, y_0)$ это полное приращение имеет согласно теореме 7.6.3 вид

$$\Delta F = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + \varepsilon_i \right) \Delta x_i + \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \varepsilon_0 \right) \Delta y.$$

Здесь все частные производные $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ берутся в точке $(x^{(0)}, y_0)$ и $\lim\limits_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_i = \lim\limits_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_0 = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Из непрерывности функции $y = f(x)$ в точке $x^{(0)}$ следует, что $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$, а так как $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x^{(0)}, y_0) \neq 0$, то при $\Delta x \to 0$ и $\dfrac{\partial F}{\partial y} + \varepsilon_0 \neq 0$. После деления на $\dfrac{\partial F}{\partial y} + \varepsilon_0$ получим

$$\Delta y = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i} + \varepsilon_i}{\dfrac{\partial F}{\partial y} + \varepsilon_0} \Delta x_i.$$

По теореме о пределе частного двух функций можно утверждать, что

$$-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i} + \varepsilon_i}{\dfrac{\partial F}{\partial y} + \varepsilon_0} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} + \mu_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \mu_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Таким образом, окончательно получаем

$$\Delta y = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \Delta x_i,$$

где $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \mu_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Полученная формула и доказывает дифференцируемость функции $f(x)$ в точке $x^{(0)}$.

□

Замечание 7.8.1. *При доказательстве теоремы 7.8.1 получены и формулы для частных производных неявной функции $y = f(x)$, определяемой уравнением $F(x, y) = 0$:*

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

7.9. Теорема о системе неявных функций

В предыдущем параграфе мы рассматривали вопрос о существовании и дифференцируемости неявной функции, определяемой одним уравнением. В данном параграфе мы рассмотрим аналогичный вопрос для совокупности m (m — любое натуральное число) неявных функций, определенных системой уравнений. Точнее, предположим, что m функций

$$y_j = f_j(x), \quad j = 1, \ldots, m$$

переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ищутся как решение системы m функциональных уравнений

$$F_i(x, y) = 0, \quad j = 1, \ldots, m,$$

где $y = (y_1, \ldots, y_m)$.

Нас интересует вопрос о разрешимости этой системы относительно переменных $y = (y_1, \ldots, y_m)$. Под термином "решение системы уранений" мы будем понимать набор m функций $(f_1(x), \ldots, f_m(x)) = f(x)$ таких, что при подстановке этих функций в систему все уравнения этой системы обращаются в тождества. Это решение мы будем называть непрерывным (дифференцируемым) в некоторой области D изменения переменных $x_1, \ldots, x_n$, если каждая из функций $f_j(x)$ непрерывна (дифференцируема) в области D.

Обозначим $\mathbb{R}^{n+m}$ пространство переменных $(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$, кроме того, пусть $F = (F_1, \ldots, F_m)$. Для набора функций F введем *определитель Якоби (якобиан)* по переменным y

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

будем обозначать кратко $\dfrac{\partial F}{\partial y}$.

Теорема 7.9.1 (о системе неявных функций)**.** *Пусть функции $F_j(x, y)$, $j = 1, \ldots, m$, дифференцируемы в некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)}) \in \mathbb{R}^{n+m}$, причем частные производные этих функций по переменным y непрерывны в этой точке. Если*

$$F_j(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0,\ j = 1, \ldots, m \quad \textit{и}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x^{(0)}, y^{(0)}) \neq 0,$$

то для любого набора положительных чисел $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ найдется окрестность $U_{x^{(0)}}$ точки $x^{(0)}$ и определенные в этой окрестности функции $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ такие, что

1) $\left|f_j(x) - y_j^{(0)}\right| < \varepsilon_j,\ j = 1, \ldots, m;$

2) $F_j(x, f(x)) \equiv 0,\ j = 1, \ldots, m;$

3) $f_j(x)$ дифференцируемы в $U_{x^{(0)}}$.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по числу уравнений m. Для $m = 1$ теорема доказана в §7.8. Поэтому достаточно, предположив ее справедливочть для $(m-1)$-го уравнения, доказать ее справедливость для m уравнений. Т.к. по условию теоремы якобиан $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x^{(0)}, y^{(0)}) \neq 0$, то хотя бы один из миноров этого якобиана $(m-1)$-го порядка также не равен нулю. Не ограничивая общности, можно считать, что не равен нулю минор

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_{m-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}} \end{vmatrix}.$$

Тогда, в силу предположения индукции первые $(m-1)$ уравнений можно решить относительно $y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$. Точнее, для любых достаточно малых положительных $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{m-1}$ найдется окрестность $U_{(x^{(0)}, y_m^{(0)})} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ точки $(x^{(0)}, y_m^{(0)})$, в которой определены дифференцируемые функции

$$y_j = \varphi_j(x, y_m),\ j = 1, \ldots, m-1,$$

удовлетворяющие первым $(m-1)$ уравнениям системы и условиям

$$\left|\varphi_j(x, y_m) - y_j^{(0)}\right| < \varepsilon_j,\ j = 1, \ldots, m-1.$$

Найденные функции $\varphi_j(x, y_m)$ подставим в левую часть последнего из уравнений системы. При этом левая часть последнего из уравнений системы превращается в функцию зависящую от $x_1, \ldots, x_n, y_m$:

$$F_m(x_1, \ldots, x_n, \varphi_1(x, y_m), \ldots, \varphi_{m-1}(x, y_m), y_m) = \Psi(x, y_m).$$

Эта функция дифференцируема в некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, y_m^{(0)})$ в силу теоремы о дифференцируемости сложной функции. Задача свелась к тому, чтобы доказать разрешимость уравнения

$$\Psi(x, y_m) = 0$$

относительно y_m. Для этого достаточно доказать, что частная производная $\dfrac{\partial \Psi}{\partial y_m}$ непрерывна и не равна нулю в точке $(x^{(0)}, y_m^{(0)})$. Вычислим производную $\dfrac{\partial \Psi}{\partial y_m}$. Подставим в первые $(m-1)$ уравнений системы $F_j(x, y) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, m$, функции $y_j = \varphi(x, y_m)$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$, являющиеся решением этих уравнений, и продифференцируем полученные при этом тождества по y_m. Получим

$$\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial F_j}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_m} + \frac{\partial F_j}{\partial y_m} = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, m-1. \tag{7.9.1}$$

Продифференцировав по y_m соотношение

$$F_m(x, \varphi_1(x, y_m), \ldots, \varphi_{m-1}(x, y_m), y_m) = \Psi(x, y_m),$$

получим равенство

$$\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial F_j}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_m} + \frac{\partial F_m}{\partial y_m} = \frac{\partial \Psi}{\partial y_m}. \tag{7.9.2}$$

Умножим теперь равенства (7.9.1) и (7.9.2) на соответствующие алгебраические дополнения $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ элементов последнего столбца якобиана $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ и после этого сложим эти равенства. Получим

$$\sum_{i=1}^{m-1}\frac{\partial\varphi_j}{\partial y_m}\left[\Delta_1\frac{\partial F_1}{\partial y_j}+\Delta_2\frac{\partial F_2}{\partial y_j}+\cdot\Delta_m\frac{\partial F_m}{\partial y_j}\right]+$$
$$+\left[\Delta_1\frac{\partial F_1}{\partial y_m}+\Delta_2\frac{\partial F_2}{\partial y_m}+\cdot\Delta_m\frac{\partial F_m}{\partial y_m}\right]=\Delta_m\frac{\partial\Psi}{\partial y_m}.$$

Так как сумма произведений элементов данного столбца определителя на соответствующие алгебраические дополнения этого (другого) столбца равна определителю (нулю), то мы получим

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\Delta_m\frac{\partial\Psi}{\partial y_m}.$$

Здесь Δ_m — алгебраическое дополнение последнего элемента последнего столбца якобиана, по предположению $\Delta_m\neq 0$ в точке $(x^{(0)},y^{(0)})$.

Таким образом, получаем, что $\dfrac{\partial\Psi}{\partial y_m}=\dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\Delta_m}$. Отсюда следует непрерывность частной производной $\dfrac{\partial\Psi}{\partial y_m}$ в точке $(x^{(0)},y_m^{(0)})$ и тот факт, что эта производная отлична от нуля в этой точке. Тем самым к уравнению применима теорема 7.8.1 о неявной функции. Согласно этой теореме для достаточно малого положительного ε_m найдется окрестность $U_{x^{(0)}}$ точки $x^{(0)}\in\mathbb{R}^n$ такая, что в ней определена функция $y_m=f_m(x)$, которая удовлетворяет условию $|f_m(x)-y_m^{(0)}|<\varepsilon_m$ и является непрерывным и дифференцируемым решением уравнения $\Psi(x,y_m)=0$. Подставляя найденную функцию в функции $y_j=\varphi_j(x,y_m),\quad j=1,2,\ldots,m-1$, мы получим функции $y_j=\varphi_j(x,f_m(x))=f_j(x),\quad j=1,2,\ldots,m-1$, зависящие только от переменных $x=(x_1,\ldots,x_n)$. В силу теоремы о дифференцируемости сложной функции, эти функции дифференцируемы в точке $x^{(0)}$. Таким образом, мы получили набор m дифференцируемых в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$ функций

$$y_j=f_j(x),\quad j=1,2,\ldots,m,$$

которые удовлетворяют системе уравнений:

$$F_j(x,f_1(x),\ldots,f_m(x))=0,\qquad j=1,2,\ldots,m,$$

для которого выполняется условие

$$|f_j(x)-y_j^{(0)}|<\varepsilon_j,\qquad j=1,2,\ldots,m.$$

В единственности полученного решения $f(x)=(f_1(x),\ldots,f_m(x))$, удовлетворяющего условию $|f_j(x)-y_j^{(0)}|<\varepsilon_j$, $j=1,2,\ldots,m$, можно убедиться проследив основные моменты "создания" этого решения. Действительно, единственность набора функций $\varphi_1(x,y_m),\ldots,\varphi_{m-1}(x,y_m)$ следует из предположения индукции. Теорема 7.8.1 о неявной функции обеспечивает единственность функции $y_m=f_m(x)$.

□

Замечание 7.9.1. *Найти частные производные неявных функций $f(x)=(f_1(x)\ldots,f_m(x))$, определяемых системой уравнений*

$$F_j(x,y)=0\qquad j=1,2,\ldots,m,\tag{7.9.3}$$

где $y = (y_1, \ldots, y_m)$, можно следующим образом. Подставим $f(x)$ в систему уравнений (7.9.3) и продифференцируем полученные тождества по x_k. Получим

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial y_m}{\partial x_k} + \frac{\partial F_1}{\partial x_k} = 0, \\
&\vdots \quad \ldots \quad \vdots \quad \ldots \quad \vdots \quad \ldots \quad \vdots \quad \ldots \quad \vdots \quad \ldots \\
&\frac{\partial F_m}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \cdots + \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial y_m}{\partial x_k} + \frac{\partial F_m}{\partial x_k} = 0.
\end{aligned}$$

Это система линейных уранений относительно неизвестных $\frac{\partial y_1}{\partial x_k}, \frac{\partial y_2}{\partial x_k}, \ldots, \frac{\partial y_m}{\partial x_k}$ с определителем, равным якобиану $\frac{\partial F}{\partial y}$. Якобиан отличен от нуля в некоторой окрестности точки $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$, поэтому система уравнений имеет единственное решение, которое можно найти, напрмер, по формулам Крамера.

Доказанная теорема о неявных функциях является одной из основных теорем математического анализа и имеет много разнообразных приложений в различнх его разделах. Она относится к числу "чистых теорем существования": ни из ее формулировки, ни из приведенного ее доказательства не следует, вообще говоря, никакого конкретного метода для решения системы уравнений. Такие методы, как правило приближенные, являются предметом изучения других разделов математики. А теорема 7.9.1 дает объективную уверенность, что проводя правильно соответствующие вычисления, мы действительно вычисляем искомое решение системы.

7.10. Теорема об обратном отображении

В данном параграфе будем рассматривать отображение: $f : E \to \mathbb{R}^m, \quad E \subset \mathbb{R}^n$, т.е. соответствия, которые каждой точке $x = (x_1, \ldots, x_n)$ множества E из n-мерного арифметического пространства $\mathbb{R}^n$, ставят в соответствие точку $y = (y_1, \ldots, y_n)$ m-мерного пространства $\mathbb{R}^m$. Задание такого отображения равносильно заданию m функций $f_j : E \to \mathbb{R}$, которые называются координатными функциями отображения и пишется

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_m).$$

Отображение называется *непрерывным (дифференцируемым)*, если таковыми являются все координатные функции этого отображения.

Определение 7.10.1. *Матрица, составленная из частных производных координатных функций*

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\|_{m \times n}$$

называется матрицей Якоби отображения f. В случае $m = n$ определитель матрицы Якоби

$$\det \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\|$$

называется якобианом отображения f и обозначается

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Мы уже имели дело с якобианом в предыдущем параграфе.

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n_x$, $\quad D \subset \mathbb{R}^m_y$, $\quad y = f(x)$ — отображение множества E в $\mathbb{R}^m_y$, причем $f(E) \subset D$ и $z = g(y)$ — отображение D в $\mathbb{R}^p_z$, т.е. $f : E \to D$, $\quad g : D \to \mathbb{R}^p$. В этом случае имеет смысл композиция $g \circ f : E \to \mathbb{R}^p$, отображающая множество $E \subset \mathbb{R}^n$ в p-мерное пространство $\mathbb{R}^n$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \qquad x \in E.$$

Напомним, что отображение $f : E \to \mathbb{R}^m$, $\quad E \subset \mathbb{R}^n$ называется *взаимно однозначным,* или *инъекцией,* если для любых $x^{(1)}, x^{(2)} \in E$ из условия $x^{(1)} \neq x^{(2)}$ следует $f(x^{(1)}) \neq f(x^{(2)})$. В этом случае говорят также, что множество E взаимно однозначно отображается на множество $f(E)$, т.е. $f : E \to f(E)$ является биекцией. В этом случае на множестве $f(E)$ существует обратное отображение f^{-1} такое, что $f^{-1}(y) = x$, где x таково, что $f(x) = y$. Поэтому $f^{-1}(f(x)) = x$, т.е. композиция $f^{-1} \circ f$ является тождественным отображением. Из соответствующих теорем для функций нетрудно получить, что *композиция непрерывных (дифференцируемых) отображений является отображением непрерывным (дифференцируемым).*

Из формулы дифференцирования сложной функции получаем следующее: если $z_k = g_k(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, $\quad k = 1, 2, \ldots, p$, а $y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\quad i = 1, 2, \ldots, m$, то

$$\frac{\partial z_k}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial z_k}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_j}, \quad k = 1, 2, \ldots, p, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

что согласно правилу умножения матриц означает, что матрица

$$\left\| \frac{\partial z_k}{\partial x_j} \right\|_{p \times n} = \left\| \frac{\partial z_k}{\partial y_i} \right\|_{p \times m} \cdot \left\| \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right\|_{m \times n},$$

т.е. *матрица Якоби композиции отображений f и g равна произведению матриц Якоби этих отображений.*

Если $m = n = p$ в силу известного свойства определителя произведения матриц получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x},$$

т.е. якобиан композиции $z = f(g(x))$ отображений равен произведению якобианов отображений $y = f(x)$ и $z = g(y)$. Заметим еще, что якобиан тождественного отображения $\mathrm{id}\,(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равен единице, а поскольку $f^{-1} \circ f$ — тождественное отображение, то якобианы взаимно обратных отображений $y = f(x)$ и $x = g(y)$ связаны соотношением

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \cdot \frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 1.$$

Эта формула является очевидным обощением формулы для производной обратной функции одного переменного $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

Рассмотрим вопрос о существовании отображения, обратного данному. В случае $n = 1$ для непрерывно дифференцируемой на отрезке функции условие необращения в ноль ее производной влечет ее строгую монотонность и, следовательно, является достаточным для существования обратной непрерывно дифференцруемой функции. В случае же произвольного n ситуация существенно усложняется: аналогичные условия, налагаемые на дифференциальные свойства отображения позволяют утверждать лишь что локально, т.е. в окрестности точки, существует обратное отображение.

Теорема 7.10.1 (об обратном отображении)**.** *Пусть*

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x) \ldots, f_n(x))$$

непрерывно дифференцируемое отображение области $G \subset \mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^n$. Если якобиан $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ этого отображения не равен нулю в точке $x^{(0)} \in G$, то существуют такие окрестности $U_{x^{(0)}}$ и $V_{y^{(0)}}$ точек $x^{(0)}$ и $y^{(0)} = f(x^{(0)})$ соответственно, что $f(x), \quad x \in U_{x^{(0)}}$ является взаимно однозначным отображением на окрестность $V_{y^{(0)}}$, а обратное отображение непрерывно дифференцируемо в окрестности $V_{y^{(0)}}$.

Доказательство. Рассмотрим функции $F_i(x,y) = f_i(x) - y_i, \quad i = 1,2,\ldots,n$. С их помощью система равенств $y_i = f_i(x), \quad i = 1,2,\ldots,n$, определяющая отображение f, перепишется в виде системы уравнений

$$F_i(x,y) = 0, \qquad i = 1,2,\ldots,n.$$

При этом функции $F_i(x,y)$ определены и непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$ (например, в $\mathbb{G} \times \mathbb{R}^n_y$). Кроме того,

$$F\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) = 0 \quad \text{и} \quad \left.\frac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right|_{(x^{(0)}, y^{(0)})} = \left.\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right|_{x^{(0)}} \neq 0.$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 7.9.1 о разрешимости системы уравнений. В силу этой теоремы найдутся такие окрестности $U^*_{x^{(0)}}$ и $V_{y^{(0)}}$ точек $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$ соответственно такие единственные функции

$$x_j = g_j(y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad j = 1,2,\ldots,n,$$

что отображение $x = g(y)$ взаимно однозначно отображает $V_{y^{(0)}}$ в $U^*_{x^{(0)}}$ и имеет место тождество $f\left(g(y)\right) = y, \quad y \in V_{y^{(0)}}$. Таким образом g является отображением, обратным к отбражению f, оно также непрерывно дифференцируемо. Положим $U_{x^{(0)}} = U^*_{x^{(0)}} \cap f^{-1}\left(V_{y^{(0)}}\right)$ — это искомая окрестность точки $x^{(0)}$.

□

7.11. Зависимость функций

7.11.1. Необходимое условие зависимости функций.

Определение 7.11.1. *Пусть на открытом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ заданы непрерывно дифференцируемые функции*

$$y_i = f_i(x), \quad i = 1,2,\ldots,m, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in G.$$

Если существует открытое множество $D \subset \mathbb{R}^{m-1}$ и определенная на D непрерывно дифференцируемая функция $\Phi(y_1, \ldots, y_{m-1})$ такая, что в любой точке $x \in G$ выполняются условия

$$(f_1(x), \ldots, f_{m-1}(x)) \in D \quad \text{и} \quad f_m(x) = \Phi\left(f_1(x), \ldots, f_{m-1}(x)\right),$$

то функция $f_m(x)$ называется зависимой на множестве G от функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots, f_{m-1}(x)$.

Определение 7.11.2. *Если среди функций системы*

$$y_i = f_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in G,$$

есть функция, зависимая от остальных на множестве G, то эта система называется зависимой на множестве G.

Если ни одна из функций системы не зависит от остальных на множестве G, то эта система называется независимой на множестве G.

Главную роль в вопросе зависимости системы функций играет матрица Якоби этой системы

$$\left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\|_{m \times n}.$$

Теорема 7.11.1 (необходимое условие зависимости функций)**.** *Пусть $m \leqslant n$ и система функций $y_i = f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ зависима на открытом множестве G. Тогда в любой точке множества G ранг матрицы Якоби этой системы меньше m.*

Доказательство. По условию, по крайней мере одна из функций системы зависит от остальных. Пусть для определенности $f_m(x)$ зависит от $f_1(x), \ldots, f_{m-1}(x)$:

$$f_m(x) = \Phi\left(f_1(x), \ldots, f_{m-1}(x)\right), \quad x \in G,$$

где Φ — непрерывно дифференцируемая функция от $m-1$ аргументов $y_1, \ldots, y_{m-1}$. Отсюда имеем

$$\frac{\partial y_m}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Эта формула означает, что $m-$ я строка матрицы Якоби является линейной комбинацией остальных строк матрицы и, следовательно, ее ранг меньше m в каждой точке $x \in G$.

□

Следствие 7.11.1. *Пусть $m = n$ и система функций $y_i = f_i(x), \quad j = 1, 2, \ldots, n$, $x \in G$ зависима на G. Тогда якобиан $\dfrac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, y_2, \ldots, x_n)} = 0$ для всех $x \in G$.*

Доказательство. Следует из теоремы 7.11.1 при $m = n$.

□

Следствие 7.11.2 (достаточные условия независимости фунций)**.** *Пусть $m \leqslant n$ и пусть ранг матрицы Якоби системы функций равен m хотя бы в одной точке открытого множества G. Тогда система независима на множестве G.*

Доказательство. Легко получается методом от противного.

□

Замечание 7.11.1. *Поскольку строки матрицы Якоби $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ являются координатами градиентов ∇f_i функции f_i, то теорему 7.11.1 можно переформулировать следующим образом.*

Если система функций $y_i = f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in G$ зависима на открытом множестве G, то градиенты $\nabla f_1, \ldots, \nabla f_m$ этих функций линейно зависимы в каждой точке G.

7.11.2. Достаточные условия зависимости функций. Приведем без доказательства достаточные условия зависимости функций.

Теорема 7.11.2 (достаточные условия зависимости функций)**.** *Пусть ранг матрицы Якоби системы функций*

$$y_i = f_i(x),\ i = 1, 2, \ldots, m,\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in G$$

в каждой точке открытого множества G не превышает числа r, $r < m \leqslant n$, а в некоторой точке $x^{(0)} \in G$ равен r, т.е.

$$\left.\frac{\partial(y_{i_1}, \ldots, y_{i_r})}{\partial(x_{j_1}, \ldots, x_{j_r})}\right|_{x^{(0)}} \neq 0.$$

Тогда фунции $y_{i_k} = f_{i_k}(x)$, $k = 1, 2, \ldots, r$, независимы на множестве G и существует окрестность точки $x^{(0)}$ такая, что любая из оставшихся $m - r$ функций зависит на этой окрестности от указанных r функций.

Замечание 7.11.2. *Утверждение теоремы 7.11.2 имеет локальный характер. Это означает, что при выполнении условий теоремы только на некоторой окрестности точки $x^{(0)}$ (а не на всем множестве G) данная система функций является зависимой системой.*

Пример 7.11.1. Исследовать на зависимость систему функций

$$u = \sin(x + y), \qquad v = \cos(x + y).$$

Решение. Якобиан этой системы

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \cos(x + y) & \cos(x + y) \\ -\sin(x + y) & -\sin(x + y) \end{vmatrix} = 0$$

для всех (x, y). Легко видеть, что ранг матрицы Якоби равен единице во всех точках плоскости. Согласно теореме 7.11.2 функции зависимы в окрестности каждой точки плоскости. В данном случае зависимость легко найти в явном виде, например, на открытом множестве $G = \{(x, y) :\, \cos(x + y) > 0\}$ она может быть задана формулой $v = \sqrt{1 - u^2}$.

7.12. Условный экстремум

В математике и ее приложениях часто встречается задача об отыскании экстремумов функции, аргументы которой удовлетворяют дополнительным условиям связи. Экстремумы такого рода называют *условными,* чтобы отличить их от изученных ранее в §7.7 экстремумов (безусловных).

Пусть на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^{n+m}$ заданы m функций

$$F_i(x, y), \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

переменных $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, $(x, y) \in G$. Обозначим через E множество тех точек, в которых все эти функции обращаются в ноль:

$$E = \{(x, y) \in G :\, F_i(x, y) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Уравнения

$$F_i(x, y) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

будем называть *уравнениями связи.*

Определение 7.12.1. *Пусть на множестве G задана функция $F_0(x, y)$. Точка $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) \in G$ называется точкой условного экстремума функции F_0 при выполнении уравнения связи, если она является точкой обычного экстремума сужения функции F на множество E.*

Иначе говоря, здесь значение функции $F_0(x, y)$ в точке $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$ сравнивается не со всеми ее значениями в достаточно малой окрестности этой точки, а только со значениями в точках, принадлежащих одновременно указанной достаточно малой окрестности и множеству E. Как и в случае обычных экстремумов, можно, естественно, рассматриваить точки условного экстремума и точки строгого условного экстремума.

Пример 7.12.1. Рассмотрим функцию

$$F(x, y) = x^2 + y^2$$

и уравнение связи

$$x + y - 1 = 0.$$

Найти условный экстремум функции F при выполнении уравнения связи.

Решение. Из уравнения связи имеем $y = 1 - x$, откуда

$$F(x, 1 - x) = 2x^2 - 2x + 1.$$

Таким образом, при выполнении условия связи функция F является функцией одного переменного. Ее экстремум находится элементарно: приравнивая к нулю ее производную (необходимое условие экстремума), получим $2x - 1 = 0$, откуда $x = \frac{1}{2}$. В этой точке рассматриваемая функция, очевидно, имеет минимум (она является многочленом второй степени с положительным коэффициентом при старшем члене). Значению $x = \frac{1}{2}$, согласно уравнению связи, соответствует $y = \frac{1}{2}$.

Следовательно, в точке $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ функция $F(x, y)$ достигает минимума относительно уранения связи $x + y - 1 = 0$. Геометрически это означает, что точка параболоида $z = x^2 + y^2$, проектирующаяся в точку $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, является самой низкой из всех его точек, лежащих над прямой $x + y - 1 = 0$. Этот пример показывает, что точка, в которой функция достигает условного экстремума, не является, вообще говоря, точкой экстремума этой функции.

Пример 7.12.2. Рассмотрим функцию $F(x, y) = y^2 - x^2$ и уравнение связи $y = 2x$. Найти условный экстремум.

Решение. Имеем $F(x, 2x) = 3x^2$, т.е. при выполнении уравнения связи рассматриваемая функция также является функцией одного переменного и, очевидно, достигает минимума при $x = 0$.

Значению $x = 0$, согласно уравнению связи, соответствует значение $y = 0$, а поэтому функция $F(x, y) = y^2 - x^2$ имеет в точке $(0, 0)$ условный минимум относительно уравнения связи $y = 2x$.

Следут заметить, что в этом случае сама функция $F(x, y)$ не имеет ни максимума, ни минимума ни в какой точке плоскости. Таким образом, рассмотренный пример показывает, что функция может не иметь экстремума, но при определенных уравнениях связи может иметь условный экстремум.

В дальнейшем будем предполагать, что

1) все функции $F_0, F_1, \ldots, F_m$ непрерывно дифференцируемы в открытом множестве G;

2) в рассматриваемой точке $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$ якобиан $\dfrac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}$ отличен от нуля. В силу теоремы 7.9.1 для достаточно малых положительных $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ найдется такая

окрестность $U_{x^{(0)}}$ точки $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, в которой определены функции $y_i = f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, удовлетворяющие условиям $|f_i(x) - y_i^{(0)}| < \varepsilon_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, и являющиеся (единственным) дифференцируемым решением уравнений связи $F_i(x, y) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Подставляя найденные функции в $F_0(x, y)$ получим

$$F_0(x, f(x)) = F(x_1, \ldots, x_n, f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) = \Phi(x_1, \ldots, x_n).$$

Таким образом задача об отыскании условного экстремума функции $F_0(x, y)$ сводится к задаче об отыскании обычного экстремума функции $\Phi(x) = F_0(x, f(x))$. Данная схема решения задач об условном экстремуме была реализована в приведенных выше примерах.

Согласно теореме 7.7.3 необходимым условием экстремума функции $\Phi(x)$ в точке $x^{(0)}$ является равенство нулю в этой точке ее дифференциала

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} dx_n = 0,$$

относительно любых $dx_1, \ldots, dx_n$. В силу инвариантности формы первого дифференциала и формулы $\Phi(x) = F_0(x, f(x))$ последнее равенство можно переписать в виде

$$\frac{\partial F_0}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial F_0}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial F_0}{\partial y_1} dy_1 + \ldots + \frac{\partial F_0}{\partial y_m} dy_m = 0 \qquad (7.12.1)$$

(В этой формуле все частнве производные берутся в точке $(x^{(0)}, y^{(0)}$.) Отметим, что в последнем равенстве дифференциалы $dy_1, \ldots, dy_m$ являются дифференциалами функций $y_i = f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, так что это равенство не является тождеством относительно $dy_1, \ldots, dy_m$.

Продифференцировав тождества $F_i(x, f(x)) \equiv 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, получим

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial F_i}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial F_i}{\partial y_1} dy_1 + \ldots + \frac{\partial F_i}{\partial y_m} dy_m = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \qquad (7.12.2)$$

Так как $\left.\dfrac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}\right|_{(x^{(0)}, y^{(0)})} \neq 0$, то из системы уравнений (7.12.2) можно найти $dy_1, \ldots, dy_m$ и подставить в (7.12.1). Собирая в полученном равенстве члены, содержащие $dx_1, \ldots, dx_n$ будем иметь

$$A_1 dx_1 + \ldots + A_n dx_n = 0,$$

где через $A_1, \ldots, A_n$ обозначены некоторые рациональные выражения от частных производных $F_0, F_1, \ldots, F_m$. Так как последнее равенство является тождеством относительно $dx_1, \ldots, dx_n$ ($x_1, \ldots, x_n$ — независимые переменные), то $A_1 = 0, \ldots, A_n = 0$.

Таким образом, мы получили *необходимые условия* существования условного экстремума функции $F_0(x, y)$ при наличии связей $F_i(x, y) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m:$

$$A_1 = 0, \ldots, A_n = 0, F_1 = 0, \ldots, F_m = 0.$$

Эти равенства представляют собой систему $n + m$ уравнений для отыскания $n + m$ координат точки возможного условного экстремума.

Для отыскания точек возможного условного экстремума часто используется *метод неопределенных множителей Лагранжа.*

Умножим равенства (7.12.2) на (неопределенные) множители λ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, и сложим их почленно с равенством (7.12.1). В результате получим равенство

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial L}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial L}{\partial y_1} dy_1 + \ldots + \frac{\partial L}{\partial y_m} dy_m = 0, \qquad (7.12.3)$$

где символом $L = L(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ обозначается функция

$$L = F_0 + \lambda_1 F_1 + \ldots + \lambda_m F_m.$$

Определение 7.12.2. *Функция L называется функцией Лагранжа, а множители $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ множителями Лагранжа.*

Выберем $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ так, чтобы выполнялись равенства $\dfrac{\partial L}{\partial y_1} = 0, \ldots, \dfrac{\partial L}{\partial y_m} = 0$ или

$$\frac{\partial F_0}{\partial y_j} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_j} + \ldots \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial y_j} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Полученная система линейных (относительно $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$) уравнений имеет определитель, который равен якобиану $\dfrac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}$ и, следовательно, согласно условию 2) он отличен от нуля.

Подставляя найденные $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ в (7.12.3), получим

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial L}{\partial x_n} dx_n = 0.$$

Поскольку переменные $x_1, \ldots, x_n$ независимы, то последнее равенство является тождеством относительно $dx_1, \ldots, dx_n$, поэтому

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \ldots, \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0.$$

Таким образом, для отыскания точек возможного экстремума функции $F_0(x, y)$ при наличии уравнений связи $F_i(x, y) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, нужно найти точки возможного безусловного экстремума функции Лагранжа $L = F_0 + \lambda_1 F_1 + \ldots + \lambda_m F_m$:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \ldots, \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0, \frac{\partial L}{\partial y_1} = 0, \ldots, \frac{\partial L}{\partial y_m} = 0$$

и учесть уравнения связи

$$F_1 = 0, \ldots, F_m = 0.$$

Т.е. нужно решить систему $n + 2m$ уравнений с $n + 2m$ неизвестными, среди которых $n + m$ координат точек возможного экстремума и m неопределенных множителей Лагранжа.

Приведем (без доказательства) достаточные условия (строгого) условного экстремума.

Теорема 7.12.1 (достаточные условия условного экстремума). *Пусть $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$ удовлетворяет уравнениям связи $F_i(x, y) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$ и является стационарной точкой функции Лагранжа, т.е. в этой точке*

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \ldots, \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0, \frac{\partial L}{\partial y_1} = 0, \ldots, \frac{\partial L}{\partial y_m} = 0.$$

Если второй дифференциал d^2L функции Лагранжа в точке $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$ является положительно (отрицательно) определенной квадратичной формой переменных $dx_1, \ldots, dx_n, dy_1, \ldots, dy_m$ при условии, что они удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial F_i}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial F_i}{\partial y_1} dy_1 + \ldots + \frac{\partial F_i}{\partial y_m} dx_m = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m,$$

то $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$ является точкой строгого условного минимума (максимума) функции $F_0(x, y)$ относительно уравнений связи $F_i(x, y) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Замечание 7.12.1. *Если второй дифференциал функции Лагранжа в рассматриваемой точке окажется положительно (отрицательно) определенным и без выполнения условий связи, то он будет таковым, конечно, и при их выполнении.*

Пример 7.12.3. Найти точки экстремума функции $F_0(x, y) = xy$, когда точка (x, y) лежит на прямой $x - y = 0$.

Решение. Функцией Лагранжа в данном случае является $L(x, y) = xy - \lambda(x - y)$, и так как $\dfrac{\partial L}{\partial x} = y - \lambda$, $\dfrac{\partial L}{\partial y} = x + \lambda$, то для определения стационарных точек функции $L(x, y)$, удовлетворяющих условиям связи, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ y - \lambda = 0, \\ x + \lambda = 0, \end{cases}$$

из которых следует, что $x = y = \lambda = 0$.

Исследуем в точке $(0, 0)$ второй дифференциал функции $L(x, y)$ при выполнении условий связи, т.е. когда $dx - dy = 0$. Имеем

$$d^2L = 2dxdy,$$

и, значит, при выполнении условий связи

$$d^2F = 2dx^2 > 0,$$

т.е. второй дифференциал, являясь неопределенной квадратичной формой, при выполнении условий связи превращается в положительно определенную квадратичную форму. Поэтому $(0, 0)$ является точкой строгого условного минимума для рассмотренной задачи. Впрочем в данном случае это легко усмотреть и сразу: вдоль прямой $x - y = 0$ функция $F_0(x, y) = xy$ примет вид $F_0(x, x) = x^2$, имея, очевидно, в точке $x = 0$ строгий минимум.

Глава 8

Кратный интеграл Римана

8.1. Кратный интеграл

После изучения данной главы читатель должен уметь вычислять двойные, тройные, кратные интегралы, находить площади, объемы тел и площади поверхностей. Проводить замену переменных в кратных интегралах. Знать основные формулы, определения, преобразования и теоремы для кратного интеграла Римана и несобственного интеграла Римана: меру Жордана, свойства сумм Дарбу, критерии интегрируемости, интегрируемость различных классов функций, теоремы Фубини и сведении кратного интеграла к повторному, формулу замены переменных в кратном интеграле, сходимость несобственных интегралов. Владеть методами исследований собственного и несобственного интегралов.

8.1.1. Мера Жордана (n-мерный случай). Обобщим понятие меры Жордана на случай пространства $\mathbb{R}^n$.

Определение 8.1.1. *Гиперплоскостью в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется множество точек $x \in \mathbb{R}^n$, координаты x_i которых удовлетворяют линейному уравнению вида*

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_0 = 0, \qquad a_1^2 + \dots + a_n^2 > 0,$$

где a_i, $i = 1, 2, \dots, n$, — фиксированные числа.

При $n = 3$ понятие гиперплоскости совпадает с понятием обычной плоскости в $\mathbb{R}^3$.

Рассмотрим разбиение T_m пространства $\mathbb{R}^n$ ранга m. Для этого разбиваем все пространство на замкнутые кубы гиперплоскостями $\{x_i = l_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $l_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Получаем разбиение T_0 ранга 0. Каждый из полученных кубов разбиваем на 10^n равных кубов гиперплоскостями $\{x_i = l_i/10\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $l_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Получаем разбиение T_1 ранга 1. И так далее. Получаем разбиение T_m ранга m ($m = 0, 1, \dots$), представляющее собой совокупность всех замкнутых кубов вида

$$Q_m = \left\{ x : \frac{l_i}{10^m} \leqslant x_i \leqslant \frac{l_{i+1}}{10^m}, i = 1, \dots, n \right\}.$$

Назовем Q_m кубом ранга m.

В $\mathbb{R}^1$ кубы Q_m — отрезки, в $\mathbb{R}^2$ кубы Q_m — квадраты, в $\mathbb{R}^3$ кубы Q_m — обычные кубы.

Определение 8.1.2. *Мерой $\mu(Q_m)$ куба Q_m назовем число 10^{-nm}, то есть $\mu(Q_m) = 10^{-nm}$.*

В случае $\mathbb{R}^1$ мера — это длина, в случае $\mathbb{R}^2$ мера — это площадь, в случае $\mathbb{R}^3$ мера — это объем.

Пусть G — ограниченное непустое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим множества s_m — объединение кубов ранга m, полностью содержащихся в G. Если таких кубов нет, то считаем, что $s_m = \varnothing$. Также рассмотрим множества S_m — объединение кубов ранга m, которые пересекаются с G хотя бы в одной точке.

Пусть $\mu(s_m)$ — мера многогранника s_m (мера многогранника s_m — это сумма мер кубов, из которых он состоит), а $\mu(S_m)$ — мера многограника S_m. Если множество $s_m = \varnothing$, то полагаем, что $\mu(s_m) = 0$.

Имеет место последовательность неравенств

$$\mu(s_0) \leqslant \mu(s_1) \leqslant \dots \leqslant \mu(s_m) \leqslant \dots \leqslant \mu(S_m) \leqslant \dots \leqslant \mu(S_1) \leqslant \mu(S_0).$$

Положим

$$\mu_* = \mu_*(G) = \sup\{\mu(s_m)\}, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$
$$\mu^* = \mu^*(G) = \inf\{\mu(s_m)\}, \quad m = 0, 1, 2, \dots.$$

Отметим, что μ_* и μ^* — конечные числа.

Назовем μ_* — внутренней мерой множества G, а μ^* — внешней мерой множества G.

Для внутренней и внешней мер справедливо неравенство $0 \leqslant \mu_* \leqslant \mu^*$.

Определение 8.1.3. *Множество G называется измеримым по Жордану, если $\mu_* = \mu^* = \mu$.*

Число μ называется мерой Жордана множества G.

Объем пустого множества считается равным нулю.

Рассматриваемая в данном параграфе мера обладет теми же свойствами, что и понятие площади на плоскости или объема в $\mathbb{R}^3$ (см. §§4.9, 4.10).

Определение 8.1.4. *Множество G имеет Жорданову меру нуль, если для любого $\varepsilon > 0$ существует многогранник S_m ранга m такой, что*

$$\mu(S_m) < \varepsilon.$$

Теорема 8.1.1. *Для того, чтобы множество G было измеримо по Жордану необходимо и достаточно, чтобы его граница ∂G имела меру Жордана равную нулю.*

8.1.2. Определение кратного интеграла. Рассмотрим измеримое по Жордану множество $G \subset \mathbb{R}^n$. Разобьем множество G на k измеримых множеств G_i, $i = 1, \dots, k$, так, чтобы любые две части не имели общих внутренних точек и $G = \bigcup\limits_{i=1}^{k} G_i$. Обозначим через $\mu(G_i)$ — меру (объем) множества G_i, $T = \{G_i\}_{i=1}^k$ — разбиение множества G. Пусть на G определена функция $y = f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$. Выберем произвольным образом точки $P_i \in G_i$.

Определение 8.1.5. *Сумма*

$$\sigma = \sigma_T(f) = \sigma_T(f, P_i) = \sum_{i=1}^{k} f(P_i)\mu(G_i)$$

называется интегральной суммой Римана функции $f(x)$ на множестве G.

Определение 8.1.6. *Диаметр множества — это точная верхняя грань расстояний между двумя произвольными точками этого множества.*

Пусть $d = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} d_i$, где d_i — диаметр G_i.

Число d обычно называют мелкостью или диаметром разбиения $\{G_i\}_{i=1}^k$.

Определение 8.1.7. *Число I называется пределом интегральных сумм $\sigma_T(f)$ при $d \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что для любого разбиения множества G, у которого диаметр $d < \delta$, и для любого выбора точек P_i выполняется неравенство*

$$|\sigma_T(f) - I| < \varepsilon.$$

Определение 8.1.8. *Если существует $\lim\limits_{d\to 0} \sigma_T(f) = I$, то он называется n-кратным интегралом Римана от функции $f(x)$ по множеству G и обозначается*

$$\int\limits_G \cdots \int f(x_1, \dots x_n)\, dx_1 \dots dx_n = \int\limits_G f(x)\, dx.$$

Функцию $f(x)$ называют в этом случае *интегрируемой по Риману* на множестве G.

В $\mathbb{R}^2$ двукратный интеграл называют *двойным* и обозначают

$$\iint\limits_G f(x, y) dx dy.$$

В $\mathbb{R}^3$ трехкратный интеграл называют *тройным* и обозначают

$$\iiint\limits_G f(x, y, z) dx dy dz.$$

Пример 8.1.1. Пусть функция $f(x, y) = x \cdot y$ определена на множестве $G = [0, 1] \times [0, 1]$. Вычислить $\iint\limits_G f(x, y) dx dy$ как предел сумм Римана σ_T, где $T = \{G_{ij}\}$, $G_{ij} = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]$, точка P_{ij} — центр квадрата G_{ij}, $i, j = 1, \dots, n$.

Решение. Так как точка P_{ij} — центр квадрата G_{ij}, то ее координаты

$$\left(\frac{2i-1}{2n}, \frac{2j-1}{2n}\right), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Мера $\mu(G_{ij}) = \dfrac{1}{n^2}$ — площадь квадрата G_{ij}. Заметим, что диаметр разбиения $d \to 0$ при $n \to \infty$. Составим интегральную сумму σ_T.

$$\sigma_T = \sum_{i,j=1}^{n} f(P_{ij}) \cdot \mu(G_{ij}) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{2i-1}{2n} \cdot \frac{2j-1}{2n} \cdot \frac{1}{n^2} =$$

$$= \frac{1}{4n^4} \sum_{i,j=1}^{n} (4ij - 2i - 2j + 1) = \frac{(1+n)^2 n + n - 2}{4n^3}.$$

Перейдя к пределу в интегральной сумме σ_T при $n \to \infty$, получим

$$\iint\limits_G f(x, y) dx dy = \lim_{n\to\infty} \sigma_T = \frac{1}{4}.$$

8.2. Критерии интегрируемости

8.2.1. Суммы Дарбу. В отличии от интеграла Римана на прямой для кратного интеграла, в общем, не выполняется необходимое условие интегрируемость — ограниченность функции. Так, если множество G имеет меру 0, то любая функция f, заданная на G, интегрируема и интеграл от f равен нулю. Поэтому ограниченность функции при рассмотрении критериев интегрируемости выступает дополнительным требованием.

Пусть $y = f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ ограниченная функция, определенная на измеримом по Жордану множестве $G \subset \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим разбиение $T = \{G_i\}_{i=1}^m$ множества G. Пусть

$$M_i = \sup_{x \in G_i} f(x), \qquad m_i = \inf_{x \in G_i} f(x).$$

Определение 8.2.1. *Сумма* $S_T = S_T(f) = \sum\limits_{i=1}^m M_i \mu(G_i)$ *называется верхней суммой Дарбу функции* $f(x)$ *на множестве* G.

Определение 8.2.2. *Сумма* $s_T = \sum\limits_{i=1}^m m_i \mu(G_i)$ *называется нижней суммой Дарбу функции* $f(x)$ *на множестве* G.

Свойства сумм Дарбу

1. Для данного разбиения $T = \{G_i\}_{i=1}^m$ множества G верхняя и нижняя суммы есть точная верхняя и точная нижняя грани интегральных сумм $\sigma_T(f, P_i) = \sum\limits_{i=1}^m f(P_i)\mu(G_i)$, отвечающих этому разбиению и всевозможным выборам точек P_i.

В частности, верно

$$s_T \leqslant \sigma_T(f) \leqslant S_T.$$

Определение 8.2.3. *Разбиение* $T' = \left\{G'_j\right\}_{j=1}^k$ *называется измельчением разбиения* $T = \{G_i\}_{i=1}^m$, *если каждый элемент* G_i *второго разбиения либо является элементом первого разбиения, либо представляет собой объединение нескольких элементов этого первого разбиения.*

2. При измельчении разбиения верхняя интегральная сумма не увеличивается, а нижняя интегральня сумма не уменьшается, то есть

$$s_T \leqslant s_{T'} \leqslant S_{T'} \leqslant S_T.$$

3. Пусть $T'\left\{G'_i\right\}_{i=1}^m$ и $T''\left\{G''_i\right\}_{i=1}^k$ — два произвольных разбиения множества G. Тогда справедливо неравенство

$$S_{T'} \geqslant s_{T''}.$$

Определение 8.2.4. *Точная нижняя грань верхних сумм Дарбу называется верхним интегралом Дарбу и обозначается* $\overline{I}$.

Определение 8.2.5. *Точная верхняя грань нижних сумм Дарбу называется нижним интегралом Дарбу и обозначается* $\underline{I}$.

Лемма 8.2.1 (Дарбу)**.** *Верхний и нижний интегралы Дарбу являются пределами верхних и нижних сумм Дарбу соответственно при* $d \to 0$ *(*d *— диаметр разбиения).*

8.2.2. Критерии интегрируемости.

Теорема 8.2.1 (Риман)**.** *Ограниченная на измеримом по Жордану множестве G функция $f(x)$ интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение $T = \{G_i\}_{i=1}^m$ множества G, что*

$$S_T - s_T < \varepsilon,$$

где S_T, s_T — верхняя и нижняя суммы Дарбу функции $f(x)$, соответствующие разбиению T.

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на множестве G. Обозначим $I = \underset{G}{\int \cdots \int} f(x_1, \ldots x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда для данного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всякого разбиения $T = \{G_i\}_{i=1}^m$, для которого $d < \delta$, выполняется неравенство

$$|I - \sigma_T(f, P_i)| < \varepsilon/4 \tag{8.2.1}$$

независимо от выбора точек $P_i(x_1^i, \ldots, x_n^i) \in G_i$.

Зафиксируем разбиение $T = \{G_i\}_{i=1}^m$. Так как верхняя S_T и нижняя s_T суммы Дарбу являются точной верхней и точной нижней гранями интегральных сумм отвечающих разбиению T, то в G_i можно выбрать точки P_i' и P_i'' так, чтобы выполнялись неравенства

$$S_T - \sigma_T(f, P_i') < \varepsilon/4, \qquad \sigma_T(f, P_i'') - s_T < \varepsilon/4.$$

Сложим два последних неравенства

$$S_T - s_T < \varepsilon/2 + \sigma_T(f, P_i') - \sigma_T(f, P_i'').$$

Так как для интегральных сумм $\sigma_T(f, P_i')$ и $\sigma_T(f, P"_i)$ выполняется неравенство (8.2.1), то из последнего неравенства следует, что

$$S_T - s_T < \varepsilon.$$

Достаточность. Для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $T = \{G_i\}_{i=1}^m$, такое, что $S_T - s_T < \varepsilon$ и верно неравенство

$$s_T \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant S_T.$$

Тогда $\overline{I} - \underline{I} \leqslant \varepsilon$, но $\overline{I}$, $\underline{I}$ — константы. Следовательно,

$$\underline{I} = \overline{I} = I.$$

Для любого разбиения T множества G верно

$$s_T \leqslant \sigma_T(f, P_i) \leqslant S_T.$$

В последнем неравенстве перейдем к пределу при $d \to 0$. В силу леммы 8.2.1 величина I есть общий предел верхней и нижней сумм при $d \to 0$. Следовательно,

$$\lim_{d \to 0} \sigma_T(f, P_i) = I.$$

□

Теорема 8.2.2 (Дарбу)**.** *Ограниченная на измеримом по Жордану множестве функция интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда ее верхний и нижний интегралы Дарбу равны.*

8.3. Классы интегрируемых функций

Теорема 8.3.1. *Любая функция $f(x)$ непрерывная на замкнутом, измеримом по Жордану множестве G, интегрируема на этом множестве.*

Доказательство Так как G — измеримое множество, то G — ограниченное множество, то есть G — компакт. Функция $f(x)$, непрерывная на компакте, по теореме Кантора равномерно непрерывна на этом компакте.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого разбиения $T = \{G_i\}_{i=1}^m$ такого, что $d < \delta$ будет выполняться

$$M_i - m_i < \varepsilon$$

где $M_i = \sup\limits_{x \in G_i} f(x)$, $m_i = \inf\limits_{x \in G_i} f(x)$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Поэтому

$$S_T - s_T = \sum_{i=1}^m M_i \mu(G_i) - \sum_{i=1}^m m_i \mu(G_i) = \sum_{i=1}^m (M_i - m_i)\mu(G_i).$$

Таким образом,

$$S_T - s_T < \varepsilon \sum_{i=1}^m \mu(G_i) < \varepsilon \mu(G).$$

Следовательно, функция $f(x)$ интегрируема на G.

$\square$

Требование непрерывности подынтегральной функции слишком "жесткое". Для приложений важна следующая теорема, гарантирующая существование кратного интеграла для некоторого класса разрывных функций.

Теорема 8.3.2. *Если функция ограниченная на измеримом по Жордану компакте G и множество ее точек разрыва имеет жорданову меру нуль, то эта функция интегрируема на G.*

8.4. Свойства кратного интеграла

В этом параграфе представлены свойства кратного интеграла аналогичные свойствам определенного интеграла от функции одной переменной.

1. Пусть G — измеримое множество, тогда

$$\int \cdots \int\limits_G dx_1 \dots dx_n = \mu(G).$$

2. Пусть G и $\widetilde{G}$ — измеримые множества, $\widetilde{G} \subset G$, функция $f(x_1, \dots, x_n)$ ограничена и интегрируема на G. Тогда $f(x_1, \dots, x_n)$ интегрируема на $\widetilde{G}$.

3. *Линейность интеграла.* Если функции $f(x_1, \dots, x_n)$ и $g(x_1, \dots, x_n)$ интегрируемы на множестве G, то для любых действительных чисел α и β существует интеграл

$$\int \cdots \int\limits_G (\alpha f(x_1, \dots, x_n) + \beta g(x_1, \dots, x_n)) dx_1 \dots dx_n$$

и справедливо равенство

$$\int \cdots \int\limits_G (\alpha f(x_1, \dots, x_n) + \beta g(x_1, \dots, x_n)) dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \alpha \int\limits_G \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n + \beta \int\limits_G \cdots \int g(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n.$$

4. *Аддитивность интеграла.* Пусть $G = G_1 \cup G_2$, где G_1, G_2 — измеримые множества, на каждом из которых функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ интегрируема, тогда $f(x_1, \ldots, x_n)$ интегрируема на G. Если G_1 и G_2 не имеют общих внутренних точек, то

$$\int\limits_G \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \int\limits_{G_1} \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n + \int\limits_{G_2} \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n.$$

5. *Монотонность интеграла.* Если $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, \ldots, x_n)$ интегрируемы на измеримом множестве G и для всех $x \in G$ выполняется $f(x_1, \ldots, x_n) \leqslant g(x_1, \ldots, x_n)$, то

$$\int\limits_G \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n \leqslant \int\limits_G \cdots \int g(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n.$$

6. *Оценка интеграла по модулю.* Если $f(x)$ интегрируема и ограничена на измеримом множестве G, то функция $|f(x)|$ также интегрируема на G и

$$\left| \int\limits_G \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n \right| \leqslant \int\limits_G \cdots \int |f(x_1, \ldots, x_n)| dx_1 \ldots dx_n.$$

7. Если G и $\widetilde{G}$ — измеримые множества, $\widetilde{G} \subset G$, функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ неотрицательна, ограничена и интегрируема на G, то

$$\int\limits_{\widetilde{G}} \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \leqslant \int\limits_G \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

8. Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ интегрируема и неотрицательна на измеримом множестве G, $x^0 \in G$ и является внутренней точкой G, $f(x_1, \ldots, x_n)$ непрерывна в точке $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ и $f(x^0) > 0$. Тогда

$$\int\limits_G \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n > 0.$$

9. *Теорема о среднем.* Если $f(x_1, \ldots, x_n)$ интегрируема на измеримом множестве G и удовлетворяет неравенству

$$C_1 \leqslant f(x_1, \ldots, x_n) \leqslant C_2,$$

то существует такое число ν, $C_1 \leqslant \nu \leqslant C_2$, что

$$\int\limits_G \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = \nu \mu(G),$$

где $\mu(G)$ — мера множества G, C_1, C_2 — константы.

Если дополнительно потребовать, чтобы $f(x_1, \ldots, x_n)$ была непрерывна на G, а G является областью, то свойство 9 можно сформулировать в таком виде

$9'$. Существует точка $M^*(x_1, \dots, x_n) \in G$, такая что

$$\int\limits_G \cdots \int f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n = f(M^*)\mu(G).$$

8.5. Теоремы Фубини

8.5.1. Сведение двойного интеграла к повторному. Непрерывные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ ($\varphi(x) \leqslant \psi(x)$) заданы на отрезке $[a, b]$. Пусть на множестве (рис. 8.5.1)

$$G = \{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b, \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\} \tag{8.5.1}$$

определена функция $f(x, y)$.

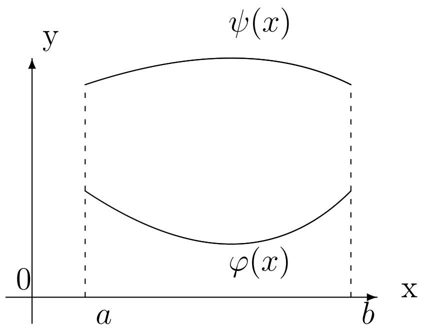

Рис 8.5.1. Множество G

Если для любого фиксированного $x \in [a, b]$ функция $f(x, y)$, как функция переменного y, интегрируема на отрезке $[\varphi(x), \psi(x)]$, то есть при любом $x \in [a, b]$ существует интеграл $\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy$ и функция $F(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то интеграл $\int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy \right) dx$ называют *повторным интегралом* и обозначают

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy.$$

Целью данного пункта является доказательство справедливости равенства

$$\iint\limits_G f(x, y)\, dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy, \tag{8.5.2}$$

Такого типа утверждения обычно называют теоремами Фубини.

Таким образом, (8.5.2) есть формула, по которой вычисляется двойной интеграл. Согласно (8.5.2) для нахождения двойного интеграла по области G надо сначала вычислить интеграл по y при фиксированном x, а затем получившуюся функцию проинтегрировать по x.

Рассмотрим сначала двойной интеграл по прямоугольнику со сторонами параллельными осям координат.

Теорема 8.5.1 (Фубини)**.** *Если для функции $f(x, y)$, определенной и ограниченной в прямоугольнике*

$$\Pi = \{a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d\}, \tag{8.5.3}$$

существует двойной интеграл

$$\iint\limits_{\Pi} f(x, y)\, dxdy, \tag{8.5.4}$$

а при каждом фиксированном значении x, $a \leqslant x \leqslant b$ существует однократный интеграл

$$J(x) = \int\limits_{c}^{d} f(x, y)\, dy, \tag{8.5.5}$$

то существует повторный интеграл

$$\int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{c}^{d} f(x, y)\, dy = \int\limits_{a}^{b} J(x)\, dx \tag{8.5.6}$$

и выполняется равенство

$$\iint\limits_{\Pi} f(x, y)\, dxdy = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{c}^{d} f(x, y)\, dy. \tag{8.5.7}$$

Доказательство. Рассмотрим разбиение $T = \{\Pi_{ij}\}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, k$, прямоугольника Π, разделив стороны прямоугольника Π точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b$ и $c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_k = d$. Таким образом, $\{\Pi_{ij}\} = \{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i,\ y_{j-1} \leqslant y \leqslant y_j\}$ (рис. 8.5.2)

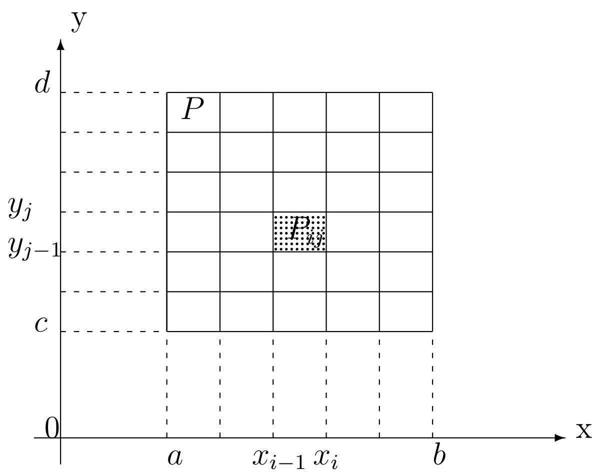

Рис 8.5.2. Разбиение прямоугольника

Пусть $m_{ij} = \inf\limits_{\Pi_{ij}} f(x, y)$, $M_{ij} = \sup\limits_{\Pi_{ij}} f(x, y)$. Выберем в каждом промежутке $[x_{i-1}, x_i]$ произвольную точку ξ_i. При $y_{j-1} \leqslant y \leqslant y_j$ выполняется $m_{ij} \leqslant f(\xi_i, y) \leqslant M_{ij}$. Интеграл $\int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi, y)\, dy$, существование которого следует из (8.5.5), удовлетворяет неравенствам

$$m_{ij}\Delta y_j \leqslant \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)\, dy \leqslant M_{ij}\Delta y_j, \qquad j = 1, \ldots, k, \tag{8.5.8}$$

где $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$.

Суммируя неравенства (8.5.8) по j от 1 до k, получим

$$\sum_{j=1}^{k} m_{ij}\Delta y_j \leqslant J(\xi_i) \leqslant \sum_{j=1}^{k} M_{ij}\Delta y_j, \qquad i = 1, \ldots, m,$$

где $J(\xi_i) = \int\limits_{c}^{d} f(\xi_i, y)\, dy$. Умножим каждое из получившихся неравенств на $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и просуммируем по i от 1 до k. В результате имеем неравенства

$$\sum_{i=1}^{m} \Delta x_i \sum_{j=1}^{k} m_{ij}\Delta y_j \leqslant \sum_{i=1}^{m} J(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{m} \Delta x_i \sum_{j=1}^{k} M_{ij}\Delta y_j, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Слева и справа в последнем равенстве стоят нижняя и верхняя суммы Дарбу, соответствующие двойному интегралу (8.5.4). Таким образом,

$$s_T \leqslant \sum_{i=1}^{m} J(\xi_i)\Delta x_i \leqslant S_T.$$

Внутри последнего неравенства стоит интегральная сумма для функции $J(x)$ по отрезку $[a, b]$. Устремим к нулю все Δx_i, Δy_j. Согласно условиям теоремы интеграл (8.5.4) существует, то верхние и нижние суммы Дарбу будут стремится к этому двойному интегралу. Следовательно, предел интегральной суммы $\sum\limits_{i=1}^{m} J(\xi_i)\Delta x_i$ совпадет с двойным интегралом (8.5.4). Таким образом,

$$\iint\limits_{\Pi} f(x, y)\, dxdy = \int\limits_{a}^{b} J(x)\, dx = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{c}^{d} f(x, y)\, dy.$$

$\square$

Отметим, что если функция f — непрерывна на прямоугольнике, то двойной интеграл от нее существует и существуют все интегралы $J(x)$, поэтому теорема 8.5.1 автоматически выполняется.

Меняя роли переменных x и y (и предполагая существование интеграла $J_1(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$), получаем аналогичное равенство

$$\iint\limits_{\Pi} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx.$$

Наконец, если наряду с двойным интегралом (8.5.4) существуют оба интеграла $J(x) = \int\limits_c^d f(x,y)\,dy$ и $J_1(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$, то

$$\iint\limits_{\Pi} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx.$$

Рассмотрим теперь вопрос о сведении двойного интеграла к повторному для случая криволинейной области G заданной (8.5.1).

Теорема 8.5.2 (Фубини)**.** *Если для функции $f(x,y)$, определенной и ограниченной в области G, существует двойной интеграл*

$$\iint\limits_{G} f(x,y)\,dxdy,$$

а при каждом фиксированном значении x, $a \leqslant x \leqslant b$ существует интеграл

$$J(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy,$$

то существует повторный интеграл

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$$

и выполняется равенство (8.5.2).

Доказательство. Обозначим через m минимальное значение функции $\varphi(x)$ на отрезке $[a;b]$, через M — максимальное значение функции $\psi(x)$ на отрезке $[a;b]$. Тогда множество G целиком попадает в прямоугольник $\Pi = [a;b] \times [m;M]$. Доопределим функцию $f(x,y)$ во всем прямоугольнике Π, полагая $f(x,y) = 0$ на множестве $\Pi \backslash G$ (рис. 8.5.3)

Доопределенную функцию обозначим $\widetilde{f}(x,y)$. Эта функция интегрируема на Π, так как множество ее точек разрыва — это множество точек разрыва функции $f(x,y)$, дополненное некоторым подмножеством границы множества G, которое имеет жорданову меру 0.

Применяя теорему 8.5.1 к прямоугольнику Π и функции $\widetilde{f}(x,y)$ получим

$$\iint\limits_{G} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{\Pi} \widetilde{f}(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_m^M \widetilde{f}(x,y)\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy.$$

$\square$

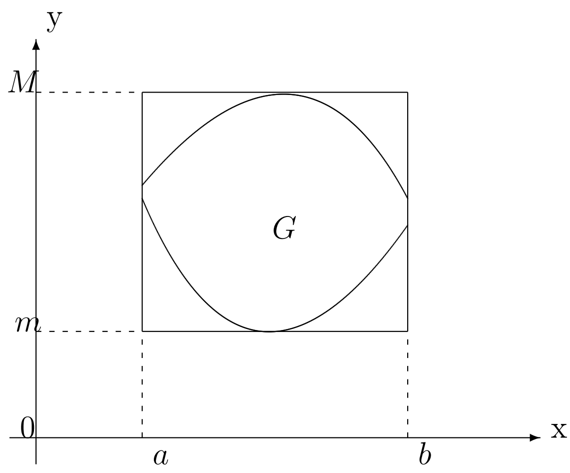

Рис 8.5.3. Множество П

Замечание 8.5.1. *Если множество G имеет вид*

$$G = \{(x, y) : \ a(y) \leqslant x \leqslant b(y), c \leqslant y \leqslant d\},$$

где c, d — константы, $a(y)$, $b(y)$ — непрерывные функции на отрезке $[c; d]$, ($a(y) \leqslant b(y)$ для всех $y \in [c; d]$), то для интегрируемой на множестве G функции $f(x, y)$ верно равенство

$$\iint\limits_G f(x, y)\, dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx.$$

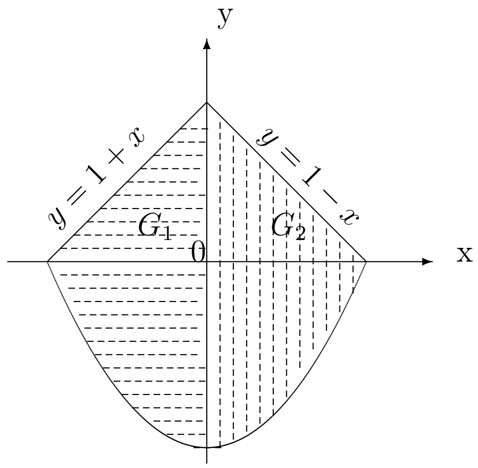

Рис 8.5.4. Разбиение $\{G_1, G_2\}$

Замечание 8.5.2. *Если множество G таково, что некоторые прямые параллельные осям координат пересекают его границу более чем в двух точках, то для представления двойного интеграла, взятого по этой области, в виде повторного множество G следует разбить на части, каждая из которых удовлетворяет* *условиям теоремы 8.5.2 и сводить к повторному каждый из соответствующих двойных интегралов.*

Пример 8.5.1. Свести двойной интеграл $\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy$ к повторному, где множество G ограничено кривыми $y = 1 - |x|$ и $y = x^2 - 1$.

Решение. Прямой $x = 0$ множество G разбивается на множества G_1 и G_2 вида (8.5.1) (рис. 8.5.4)

Таким образом, $G = G_1 \cup G_2$, где $G_1 = \{(x,y): \ -1 \leqslant x \leqslant 0, \ x^2 - 1 \leqslant y \leqslant 1 + x\}$ $G_2 = \{(x,y): \ 0 \leqslant x \leqslant 1, \ x^2 - 1 \leqslant y \leqslant 1 - x\}$.

Тогда двойной интеграл сводится к повторному следующим образом

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{G_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{G_2} f(x,y)\,dxdy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x^2-1}^{1+x} f(x,y)\,dy + \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x^2-1}^{1-x} f(x,y)\,dy.$$

Если мы хотим изменить порядок интегрирования, то следует рассматривать множество G как объединение двух множеств $G_3 = \{(x,y): \ 0 \leqslant y \leqslant 1, \ y-1 \leqslant y \leqslant 1-y\}$ и $G_4 = \{(x,y): \ -1 \leqslant y \leqslant 0, \ -\sqrt{y+1} \leqslant y \leqslant \sqrt{y+1}\}$ (рис. 8.5.5)

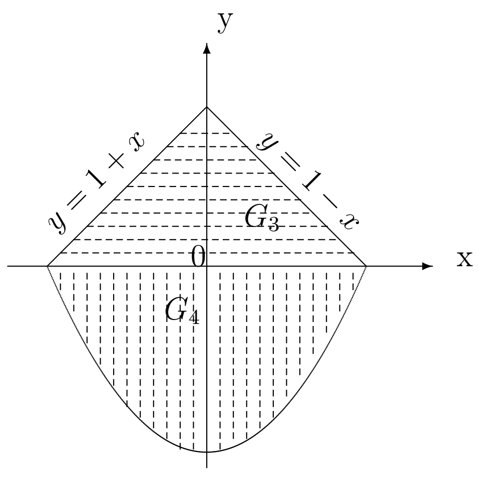

Рис 8.5.5. Разбиение $\{G_3, G_4\}$

Тогда двойной интеграл сводится к повторному следующим образом

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{G_3} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{G_4} f(x,y)\,dxdy =$$

$$= \int\limits_{1}^{0} dy \int\limits_{y-1}^{1-y} f(x,y)\,dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} f(x,y)\,dx.$$

8.5.2. Сведение тройного интеграла к повторному. В данном пункте рассмотрим два способа сведения тройного интеграла к повторному.

Пусть $G \subset R^3$, G — измеримое по Жордану множество.

Первый способ состоит в том, чтобы спроектировать множество на координатную плоскость, например, на Oxy. Проекция представляет собой некоторое плоское множество D. Предположим, что D — измеримо в $\mathbb{R}^2$.

Тогда

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{G(x,y)} f(x,y,z)\,dz,$$

где $G(x,y)$ — сечение множества G прямой, параллельной координатной оси Oz

Пусть каждая прямая параллельная оси Oz пересекает границу множества G не более, чем в двух точках, то есть множество G имеет вид

$$G = \{(x,y,z) : (x,y) \in D,\ \alpha(x,y) \leqslant z \leqslant \beta(x,y)\}, \tag{8.5.9}$$

где $\alpha(x,y) \leqslant \beta(x,y)$ для всех $(x,y) \in D$, $\alpha(x,y)$, $\beta(x,y)$ — непрерывные функции на множестве D.

Теорема 8.5.3 (Фубини)**.** *Если для функции $f(x,y,z)$ заданной и ограниченной на множестве G существует тройной интеграл*

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz,$$

а для каждой фиксированной точки $(x,y) \in D$, существует интеграл

$$I(x,y) = \int\limits_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz,$$

то повторный интеграл

$$\iint\limits_D dxdy \int\limits_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

существует и имеет место равенство

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz. \tag{8.5.10}$$

Доказательство этой теоремы повторяет доказательство теоремы 8.5.2 в плоском случае.

Если множество G имеет более сложный вид, чем (8.5.9), то для сведения взятого по нему кратного интеграла к повторному нужно это множество предварительно разбить на такие части, к каждой из которых применима формула (8.5.10).

Повторный интеграл в правой части (8.5.10) является результатом последовательного вычисления сначала интеграла по z при фиксированных x и y, а затем двойного интеграла по множеству D.

Выражение $I(x,y) = \int\limits_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz$ представляет собой функцию двух переменных. Если для этой функции и той области D, по которой она интегрируема, выполнены условия теоремы 8.5.2, то двойной интеграл

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$$

можно в свою очередь представить в виде повторного, взятого, например, сначала по y, а потом по x. В результате получаем равенство

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \int\limits_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

Это и есть окончательная формула, сводящая тройной интеграл к повторному. Ясно, что можно поменять ролями переменные x, y, z и свести тройной интеграл к повторному, взятому в каком-нибудь ином порядке. При этом всегда пределы интегрирования по какой-либо переменной зависит от тех координат, по которым еще не интегрировали.

Пример 8.5.2. Рассмотрим интеграл по области G, ограниченной поверхностями $x^2 + y^2 - z^2 + 2z = 1$ и $z = 0$. Свести этот интеграл к повторному интегралу.

Решение. Описанное множество представляет собой конус с вершиной в точке $(0,0,1)$ и основанием, лежащим в плоскости Oxy. Оно описывается неравенствами $x^2 + y^2 \leqslant (z-1)^2$ и $z \geqslant 0$.

Проекцией на плоскость Oxy будет круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Каждая точка (x,y) круга определяет сечение конуса по отрезку $0 \leqslant z \leqslant 1 - \sqrt{x^2+y^2}$, то есть функция $\alpha(x,y) = 0$, а функция $\beta(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$. Поэтому

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} dxdy \int\limits_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}} f(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int\limits_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}} f(x,y,z)\,dz$$

Второй способ сведения тройного интеграла к повторному состоит в том, что сначала множество G проектируется на какую-либо координатную ось, например, на Oz. Пусть I — проекция множества G на ось Oz. Затем, для каждого $z \in I$ построим сечение G плоскостью параллельной координатной плоскости Oxy, которое зависит от выбранного z. Обозначим это сечение $D(z)$. Тогда

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_I dz \int\limits_{D(z)} f(x,y,z)\,dxdy. \tag{8.5.11}$$

Условия, при которых имеет место формула (8.5.11), сформулированы в следующей теореме.

Теорема 8.5.4 (Фубини). *Пусть множество G измеримо по Жордану в $\mathbb{R}^3$, множество I измеримо по Жордану в $\mathbb{R}^1$, множество $D(z)$ измеримо по Жордану в $\mathbb{R}^2$ для любого $z \in I$. Пусть функция $f(x,y,z)$ интегрируема на G, а как функция от (x,y) интегрируема и ограничена на $D(z)$ для любого $z \in I$. Тогда верна формула (8.5.11).*

Пример 8.5.3. Свести тройной интеграл из примера 8.5.2 к повторному вторым способом.

Решение. Проекция на ось Oz — это множество тех значений z, при которых система указанных в примере 8.5.2 неравенств разрешима относительно x и y. Эта проекция есть отрезок $I = [0;1]$. Плоское множество $D(z)$ описывается неравенством $x^2 + y^2 \leqslant (z-1)^2$, в котором z играет роль параметра Таким образом,

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_0^1 dz \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant(z-1)^2} f(x,y,z)\,dxdy.$$

8.5.3. Общий случай. Аналогично трехмерному случаю кратные интегралы от функций любого числа переменных ($n > 3$) можно свести к повторным интегралам.

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное пространство, $\mathbb{R}^{n-1}$ — гиперплоскость $x_n = 0$. Рассмотрим измеримое по Жордану множество $G \subset \mathbb{R}^n$.

Обозначим $G_{x_1\ldots x_{n-1}}$ проекцию множества G на гиперплоскость $\mathbb{R}^{n-1}$, то есть

$$G_{x_1\ldots x_{n-1}} = \{(x_1,\ldots,x_{n-1},0):\ \text{существует } x_n, \text{ что } (x_1,\ldots,x_{n-1},x_n) \in G\}.$$

Пусть множество $G_{x_1\ldots x_{n-1}}$ измеримо в смысле $(n-1)$-мерной меры Жордана и замкнуто.

Пусть на множестве $G_{x_1\ldots x_{n-1}}$ заданы непрерывные функции $\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1})$ и $\psi(x_1,\ldots,x_{n-1})$ и множество G имеет вид

$$G = \{(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n):\ (x_1,\ldots,x_{n-1}) \in G_{x_1\ldots x_{n-1}},$$
$$\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1}) \leqslant x_n \leqslant \psi(x_1,\ldots,x_{n-1})\}.$$

Если функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ ограничена и интегрируема на G и для каждой фиксированной точки, принадлежащей проекции $G_{x_1\ldots x_{n-1}}$ существует интеграл

$$\int\limits_{\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{\psi(x_1,\ldots,x_{n-1})} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_n,$$

то справедлива формула

$$\overbrace{\int\cdots\int\limits_G}^{n\ \text{раз}} f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n = \tag{8.5.12}$$

$$= \overbrace{\int\cdots\int\limits_{G_{x_1\ldots x_{n-1}}}}^{n-1\ \text{раз}} dx_1\ldots dx_{n-1} \int\limits_{\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{\psi(x_1,\ldots,x_{n-1})} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_n.$$

которая сводит интегрирование функции n переменных к последовательному интегрированию функции одной переменной и функции $n-1$ переменных.

Если проекция $G_{x_1\ldots x_{n-1}}$ множества G на гиперплоскость $\mathbb{R}^{n-1}$ в свою очередь может быть представлена в виде аналогичном множеству G, то получившийся в правой части равенства (8.5.12) $(n-1)$-кратный интеграл можно свести к $(n-2)$-кратному интегралу. Продолжая этот процесс при соответствующих условиях, налагаемых на множество G и на подынтегральную функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$, кратный интеграл может быть вычислен с помощью последовательных интегрирований по каждой переменной в отдельности

$$\overbrace{\int\ldots\int}^{n\ \text{раз}}_{G} f(x_1,\ldots,x_n)\, dx_1\ldots dx_n =$$

$$= \int\limits_a^b dx_1 \int\limits_{\varphi_1(x_1)}^{\psi_1(x_1)} dx_2 \int\limits_{\varphi_2(x_1,x_2)}^{\psi_2(x_1,x_2)} dx_3 \ldots \int\limits_{\varphi_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{\psi_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})} f(x_1,\ldots,x_n)\, dx_n.$$

Пример 8.5.4. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_G\ldots\int dx_1\ldots dx_n,$$

взятый по множеству G, заданному неравенствами

$$x_1+x_2+\cdots+x_n \leqslant 1, \qquad x_i \geqslant 0, \qquad i=1,\ldots,n.$$

Решение. При сведении этого интеграла к повторному получаем

$$I = \int\limits_G\ldots\int dx_1\ldots dx_n =$$

$$= \int\limits_0^1 dx_1 \int\limits_0^{1-x_1} dx_2 \ldots \int\limits_0^{1-x_1-x_2-\cdots-x_{n-1}} dx_n.$$

Выполнив интегрирование по x_n и подставив пределы интегрирования, получим

$$I = \int\limits_0^1 dx_1 \int\limits_0^{1-x_1} dx_2 \ldots \int\limits_0^{1-x_1-x_2-\cdots-x_{n-2}} (1-x_1-x_2-\cdots-x_{n-1})dx_{n-1}.$$

Затем проинтегрируем по x_{n-1} и подставив пределы интегрирования, будем иметь

$$I = \int\limits_0^1 dx_1 \int\limits_0^{1-x_1} dx_2 \ldots \int\limits_0^{1-x_1-x_2-\cdots-x_{n-3}} \frac{(1-x_1-x_2-\cdots-x_{n-2})^2}{2!} dx_{n-2}.$$

Продолжая данный процесс, окончательно получим

$$I = \int\limits_0^1 \frac{(1-x_1)^{n-1}}{(n-1)!}\, dx_1 = \frac{1}{n!}.$$

8.6. Замена переменных в кратном интеграле

8.6.1. Отображение множеств. Пусть G, g - измеримые замкнутые множества, $G \subset R_x^n,\ g \subset R_u^n$.

Предположим, что на множестве g определены функции

$$\begin{array}{l} x_1 = \varphi_1(u_1, \dots, u_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \varphi_n(u_1, \dots, u_n), \end{array} \tag{8.6.1}$$

такие, что когда точка $(u_1, \dots, u_n)$ пробегает множество g, соответствующая ей точка $(x_1, \dots, x_n)$ пробегает множество G.

Таким образом, функции (8.6.1) определяют отображение множества g на множество G.

Пусть отображение (8.6.1) удовлетворяет следующим условиям:
A) Отображение (8.6.1) взаимнооднозначно, т.е. различным точкам множества g отвечают различные точки множества G.
B) Функции $\varphi_i(u_1, \dots, u_n)$, $i = 1, \dots, n$, непрерывны в g и имеют в g непрерывные частные производные первого полядка.
C) Якобиан отображения

$$\frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(u_1, \dots, u_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля во всех точках области g.

8.6.2. Криволинейные координаты. Формулам (8.6.1), которые в предыдущем пункте рассматривались как отображение множества g на множество G можно придать другой смысл.

Для наглядности положим $n = 2$ (рис. 8.6.1)

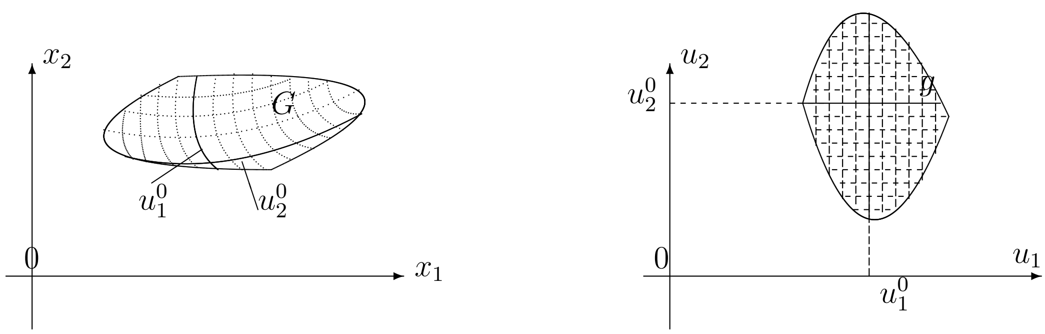

Рис 8.6.1. Криволинейные координаты

Рассмотрим на множестве g отрезок прямой $u_1 = u_1^0 = \text{const}$ (рис. 8.6.1). В области G ей соответствует гладкая линия, заданная параметрически

$$x_1 = \varphi_1(u_1^0, u_2); \qquad x_2 = \varphi_2(u_1^0, u_2), \tag{8.6.2}$$

где u_2 — параметр.

Отрезку прямой $u_2 = u_2^0 = \text{const}$ в области g соответствует в области G кривая

$$x_1 = \varphi_1(u_1, u_2^0); \qquad x_2 = \varphi_2(u_1, u_2^0), \tag{8.6.3}$$

где u_1 — параметр.

Определение 8.6.1. *Кривые* (8.6.2) *и* (8.6.3) *области* G, *в которой отображение* (8.6.1) *переводит прямые из* g, *параллельные координатным осям, называются координатными кривыми* u_1 *и* u_2 *на множестве* G.

Из взаимной однозначности отображения

$$x_1 = \varphi_1(u_1, u_2), \qquad x_1 = \varphi_2(u_1, u_2)$$

следует, что через каждую точку (x_1, x_2) множества G проходит единственная кривая вида (8.6.2), отвечающая постоянному значению u_1 и единственная кривая вида (8.6.3), отвечающая постоянному значению u_2. Следовательно, величины u_1 и u_2 можно рассматривать как координаты (отличные, конечно, от декартовых) точек множества G. Так как координатные кривые (8.6.2) и (8.6.3), отвечающие этим координатам, не будут, вообще говоря, прямыми, как в случае декартовой координатной сетки, то величины u_1 и u_2 называются *криволинейными координатами.*

Полярные коодинаты. Наиболее употребляемым примером криволинейных кодинат на плоскости — это *полярные координаты.* Они связаны с декартовыми координатами x и y соотношениями

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad (r \geqslant 0; \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi). \tag{8.6.4}$$

Координатными линиями для полярных координат служат концентрические окружности с центром в начале координат ($r = \text{const}$) и лучи, выходящие из этого центра ($\varphi = \text{const}$). Отображение (8.6.4) переводит полуполосу $r \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi$ в целую плоскость xy. Оно взаимнооднозначно всюду, кроме точки $x = 0,\ y = 0$, которой на плоскости $r\varphi$ отвечает промежуток $r = 0,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Исключив точку $x = 0$, $y = 0$, мы можем можем рассмотреть отображение плоскости xy на полуполосу $r > 0$, обратное (8.6.4). Это обратное отображение непрерывно всюду, кроме положительной полуоси x, так как, хотя лежащим на ней точкам отвечает значение φ, равное нулю, но если точка M приближается к этой полуоси снизу, то соответствующее значение φ стремится не к нулю, а к 2π. Таким образом, формулы (8.6.4) устанавливают отображение полуполосы $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ на плоскость xy, взаимнооднозначное и в обе стороны непрерывное всюду, кроме тех точек, в которых $r = 0$ или $\varphi = 0$.

Вычислим якобиан перехода от декартовых координат к полярным, т.е. якобиан преобразования (8.6.4). Получим

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Он отличен от нуля всюду, кроме точки $x = 0$, $y = 0$.

В пространстве $\mathbb{R}^3$ наиболее употребляемые криволинейные координаты: цилиндрические и сферические.

Цилиндрические координаты. Определим положение точки M в пространстве ее декартовой координатой z и полярными координатами r, φ ее проекции M_1 на плоскость Oxy (рис.8.6.2).

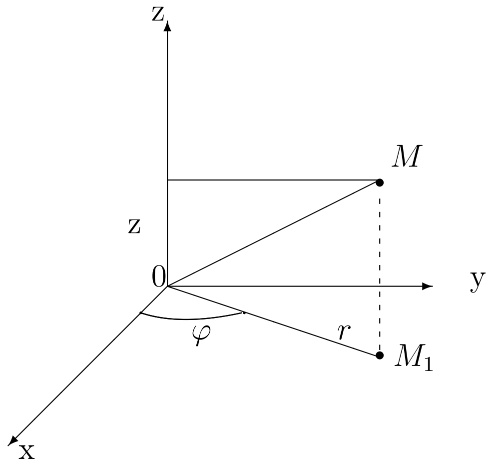

Рис 8.6.2. Цилиндрические координаты

Тройка чисел (r, φ, z) называется цилиндрическими координатами точки M. Переход от прямоугольных координат (x, y, z) к цилиндрическим (r, φ, z) задается формулами

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z. \tag{8.6.5}$$

Цилиндрическим координатам отвечают три семейства координатных поверхностей:
1) цилиндры,
2) вертикальные полуплоскости $\varphi = \text{const}$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$,
3) горизонтальные плоскости $z = \text{const}$ $(-\infty < z < \infty)$.

Вычислим якобиан отображения

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Формулы (8.6.5) определяют отображение множества

$$0 \leqslant r < +\infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty \tag{8.6.6}$$

пространства (r, φ, z) на все пространство (x, y, z). При этом каждой точке $(0, 0, z_0)$ отвечает на множестве, заданном (8.6.6), промежуток

$$r = 0, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad z = z_0.$$

В точках, лежащих на оси Oz отображение не будет взаимооднозначным. В остальных точках пространства отображение (8.6.5) является взаимооднозначным.

Сферические координаты. Пусть точка M — произвольная точка в пространстве (x, y, z), а M_1 — ее проекция на плоскость Oxy. Введем сферические координаты, которые определяются тройкой чисел (r, θ, φ), где r — расстояние точки M от начала координат, θ — угол между лучами OM и Oz, φ — угол между проекцией OM_1 отрезка OM на плоскость Oxy и положительным направлением оси Ox.

Связь между декартовыми и сферическими координатами определяется формулами

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi, \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi, \\ z &= r\cos\theta. \end{aligned} \tag{8.6.7}$$

Сферическим координатам отвечают три семейства координатных поверхностей:
1) сферы $r = \mathrm{const} \quad (0 \leqslant r < \infty)$
2) полуконусы $\theta = \mathrm{const}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$,
3) вертикальные плоскости $\varphi = \mathrm{const}$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$.

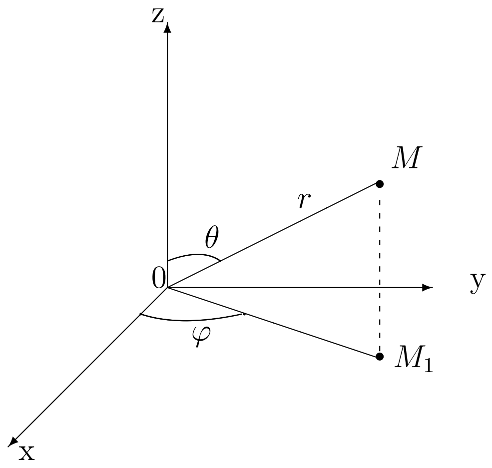

Рис 8.6.3. Сферические координаты

Якобиан перехода имеет вид

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta.$$

Иногда в качестве θ берется угол между лучами OM и OM_1 со знаком плюс, если $z > 0$, и со знаком минус, если $z < 0$. В этом случае $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, а в формулах (8.6.7) нужно заменить $\sin\theta$ на $\cos\theta$, а $\cos\theta$ на $\sin\theta$ и якобиан отображения равен $r^2\cos\theta$.

Формулы (8.6.7) определяют отображение множества

$$0 \leqslant r < +\infty, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi$$

пространства (r,θ,φ) на все пространство (x,y,z). Это отображение не является взаимнооднозначным для точек, лежащих на оси Oz.

8.6.3. Площадь в криволинейных координатах. Для наглядности рассмотрим случай $G \subset \mathbb{R}^2_x, \quad g \subset \mathbb{R}^2_u$.

Пусть формулы

$$x_1 = \varphi_1(u_1,u_2),$$
$$x_2 = \varphi_2(u_1,u_2)$$

задают отображение множества g на G, которое удовлетворяет условиям А)–В) §8.6.1 Рассмотрим на множестве G две пары близких координатных линий.

Первая пара

$$u_1 = u_1^0, \quad u_1 = u_1^0 + \Delta u_1.$$

Вторая пара

$$u_2 = u_2^0, \quad u_2 = u_2^0 + \Delta u_2.$$

Эти координатные линии вырезают на множестве G элемент площади $ABCD$. В силу малости фигуры $ABCD$ считаем, что $ABCD$ — параллелограмм. Стороны этого параллелограмма — векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{AB} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_1}du_1, \frac{\partial x_2}{\partial u_1}du_1\right),$$

$$\overrightarrow{AD} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_2 1}du_2, \frac{\partial x_2}{\partial u_2}du_2\right).$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1}du_1 & \frac{\partial x_2}{\partial u_1}du_1 \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2}du_2 & \frac{\partial x_2}{\partial u_2}du_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} \end{vmatrix} du_1du_2$$

Следовательно, площадь параллелограмма

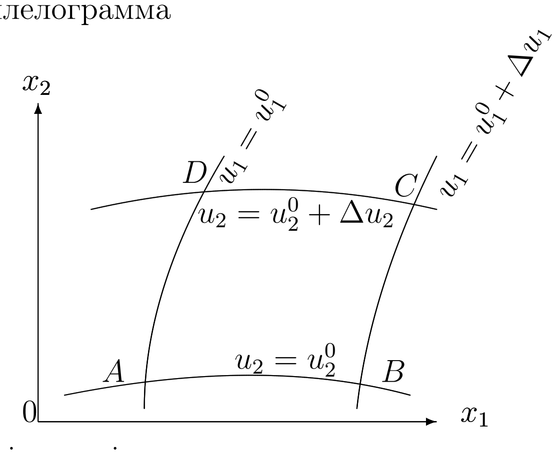

Рис 8.6.4. Криволинейный параллелограм

$$dS = \left|\frac{D(x_1, x_2)}{D(u_1, u_2)}\right| du_1du_2.$$

dS — элемент площади в криволинейных координатах u_1, u_2.

Площадь S всего множества получается суммированием всех таких элементов, т.е. представляется в виде двойного интеграла по множеству g.

$$\iint\limits_g \left|\frac{D(x_1, x_2)}{D(u_1, u_2)}\right| du_1du_2.$$

Рассмотрим снова полярные координаты. Линии $r = r_0$, $r = r_0 + dr$, $\varphi = \varphi_0$, $d\varphi = \varphi_0 + d\varphi$ вырезают на плоскости xy малый прямоугольник со сторонами dr и $r_0d\varphi$ (рис. 8.6.5).

Поэтому элемент площади в полярных координатах равен $r_0d\varphi dr$. Следовательно, площадь в полярных координатах выражается формулой

$$\iint\limits_g rdrd\varphi,$$

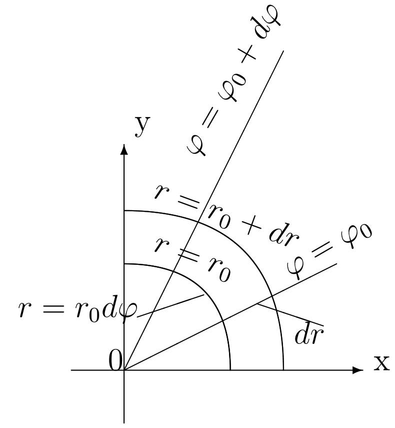

Рис 8.6.5. Криволинейный прямоугольник в полярных координатах

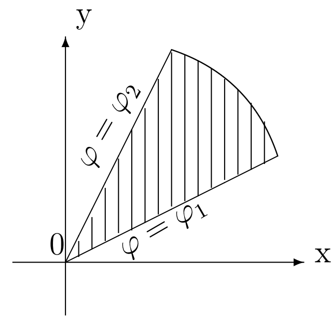

Рис 8.6.6. Криволинейный сектор

где g — область изменения переменных r и φ. В частности, если область G ограничена двумя лучами $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$ и кривой $r = r(\varphi)$, т.е. имеет вид, изображенный на рис. 8.6.6, то, преобразовав двойной интеграл в повторный, получим

$$S = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{0}^{r(\varphi)} r dr.$$

Выполнив здесь интегрирование по r, находим

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi) d\varphi.$$

Это известная формула площади фигуры в полярных координатах.

Замечание 8.6.1. *Геометрический смысл абсолютной величины якобиана отображения в данной точке — это коэффициент изменения меры множества в этой точке.*

8.6.4. Формула замены переменных в кратном интеграле.

Теорема 8.6.1. *Пусть g и G замкнутые измеримые множества, функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ ограничена на G и непрерывна всюду, кроме, быть может, некоторого* *множества точек жордановой меры нуль, а отображение* (8.6.1) *удовлетворяет условиям* A, B, C. *Тогда справедливо равенство*

$$\int\limits_G \cdots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$
$$= \int\limits_g \cdots \int f(\varphi_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, \varphi_n(u_1, \ldots, u_n)) \cdot \left| \frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{D(u_1, \ldots, u_n)} \right| du_1 \ldots du_n. \tag{8.6.8}$$

Равенство (8.6.8) есть формула замены переменных в кратном интеграле.

Замечание 8.6.2. *Формула замены переменных остается в силе, если условия* A *и* C *нарушаются на множестве точек жордановой меры нуль.*

Пример 8.6.1. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 1} \sqrt{x^2+y^2} dxdy$.

Решение. Для вычисления интеграла перейдем к полярным координатам. Множество g будет прямоугольником $0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

Поэтому

$$\iint\limits_G \sqrt{x^2+y^2} dxdy = \iint\limits_g r \cdot r dr d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^2 dr = \frac{2\pi}{3}.$$

Пример 8.6.2. Вычислить интеграл

$$\iiint\limits_G \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz,$$

где G — множество ограниченное поверхностью $x^2+y^2+z^2 = z$.

Решение. Область G представляет собой шар, ограниченный сферой, уравнение которой удобно записать в виде $x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. В прямоугольных координатах данный тройной интеграл можно свести к повторному следующим образом

$$I = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} dy \int\limits_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2-y^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dz.$$

Однако для вычисления тройного интеграла удобнее перейти к сферическим координатам (r, θ, φ), что в данном случае позволит упростить вид области интегрирования и саму подынтегральную функцию.

Введем сферические координаты

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta, \tag{8.6.9}$$

переменная φ изменяется от 0 до 2π, а при каждом значении φ переменная θ изменяется от 0 до $\pi/2$. Подставляя выражения (8.6.9) в уравнение сферы, получим $r^2 = r\cos\theta$, откуда $r = 0$ или $r = \cos\theta$. Эти две поверхности в пространстве (r, θ, φ) при $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ ограничивают снизу и сверху область g, которая является прообразом области G при отображении (8.6.9). Якобиан отображения (8.6.9) равен $r^2\sin\theta$, а подынтегральная функция в сферических координатах равна r. Вычисляя тройной интеграл по множеству g с помощью повторного интегрирования, получаем

$$I=\iiint\limits_{g} r^3\sin\theta\,drd\theta d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}d\theta\int\limits_0^{\cos\theta}r^3\sin\theta\,dr=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1}{4}\cos^4\theta\,\sin\theta\,d\theta=2\pi\cdot\frac{1}{4}\frac{1}{5}=\frac{\pi}{10}.$$

8.7. Приложения кратных интегралов

8.7.1. Площадь. Площадь плоской области G вычисляется с помощью двойного интеграла по этой области от функции, равной 1

$$\mu(G)=\iint\limits_{G}dxdy.$$

Использование двойного интеграла является более сильным методом, чем различные способы на основе определенного интеграла. В качестве иллюстрации получим формулу площади криволинейной трапеции.

Если G — это криволинейная трапеция, т.е. область, заданная неравенствами $a\leqslant x\leqslant b$, $0\leqslant y\leqslant f(x)$, то

$$S=\iint\limits_{G}dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_0^{f(x)}dy=\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Пример 8.7.1. Вычислить площадь, заключенную между кривыми $xy=1$, $xy=2$ и прямыми $x-2y=0$, $2x-y=0$.

Решение. Область описывается неравенствами $1\leqslant xy\leqslant 2$, и $0,5\leqslant y/x\leqslant 2$. В качестве новых параметров следует выбрать переменные $u=xy$, $v=y/x$. Тогда в новой системе координат (u,v) область будет прямоугольником: $1\leqslant u\leqslant 2$, $0,5\leqslant v\leqslant 2$. Поэтому

$$S=\iint\limits_{S}dxdy=\int\limits_1^2 du\int\limits_{0,5}^2 J(u,v)dv=\int\limits_1^2 du\int\limits_{0,5}^2\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|dv,$$

где $J(u,v)$ — якобиан. Для его вычисления выражаем переменные x и y через u и v :

$$\begin{cases}x=\sqrt{\frac{u}{v}},\\ y=\sqrt{uv},\end{cases}$$

после чего находим:

$$J(u,v)=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{uv}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v^3}}\\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}}\end{vmatrix}=\frac{1}{2v}.$$

Теперь получим окончательный результат:

$$S=\int\limits_1^2 du\int\limits_{0,5}^2\frac{dv}{2v}=\frac{1}{2}(\ln 2-\ln 0,5)=\ln 2.$$

8.7.2. Объем. Вычисление объемов аналогично вычислению площадей. Выигрыш от применения тройного интеграла при этом еще ощутимее.

Предположим, что тело G имеет простые сечения горизонтальными плоскостями (т.е. параллельными Oxy). Спроектируем G на ось Oz, тогда

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \int\limits_a^b dz \iint\limits_{S(z)} dxdy = \int\limits_a^b S(z)dz.$$

Мы как следствие получили формулу объема по площади параллельных сечений. Если ось Oz является осью вращения, то $S(z)$ — это площадь круга, и мы получаем формулу для объема тела вращения. Предположим, что тело ограничено цилиндрической поверхностью $\varphi(x, y) = 0$ и графиком некоторой функции $z = f(x, y)$, определенной внутри плоской области, высекаемой на Oxy цилиндрической поверхностью. Тогда объем можно вычислять так:

$$V = \iint\limits_S dxdy \int\limits_0^{f(x,y)} dz = \iint\limits_S f(x, y)dxdy.$$

Пример 8.7.2. Вычислить объем шара радиуса R.

Решение. Шар описывается неравенством $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$. Переходя к сферическим координатам, получим:

$$V = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int\limits_0^R r^2 dr = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

8.7.3. Приложения в механике. Кратные интегралы могут применяться для вычисления различных механических и физических величин.

На основании *плотности* может быть вычислена *масса* объемного тела. Если положение точек описывается их декартовыми координатами в пространстве, а плотность задается как функция трех переменных $\rho(x, y, z)$, то масса тела будет определяться интегралом

$$M = \iiint\limits_V \rho(x, y, z)dxdydz.$$

Важной характеристикой твердого тела в механике является его *центр тяжести.* В случае, когда тело представляет собой конечную совокупность материальных точек $P_i(x_i, y_i, z_i)$ с массами m_i, то координаты центра тяжести вычисляются по формулам

$$\overline{x} = \frac{\sum\limits_i x_i m_i}{M}, \quad \overline{y} = \frac{\sum\limits_i y_i m_i}{M}, \quad z = \frac{\sum\limits_i z_i m_i}{M}$$

(M — общая масса тела).

В случае же непрерывного распределния масс координаты центра тяжести вычисляются по аналогичным формулам

$$\overline{x} = \frac{1}{M}\iiint\limits_V x\rho(x, y, z)dxdydz, \quad \overline{y} = \frac{1}{M}\iiint\limits_V y\rho(x, y, z)dxdydz,$$

$$\overline{z} = \frac{1}{M}\iiint\limits_V z\rho(x, y, z)dxdydz,$$

где $\rho(x, y, z)$ — плотность распределения массы, M — его масса. Три интеграла, определяющие координаты центра тяжести называют *статистическими моментами* твердого тела.

В теории вращения твердого тела важную роль играет момент инерции тела. Для ситемы материальных точек момент инерции относительно, например, оси Oy вычисляется по формуле

$$I_y = \sum_i (x_i^2 + z_i^2) m_i.$$

Аналогом этой формулы для непрерывного тела является

$$I_y = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dxdydz,$$

где $\rho(x, y, z)$ — плотность твердого тела.

Моменты инерции относительно координатных плоскостей вычисляются по формулам

$$I_{yz} = \iiint\limits_V x^2\rho(x, y, z)dxdydz, \quad I_{xz} = \iiint\limits_V y^2\rho(x, y, z)dxdydz,$$

$$I_{xy} = \iiint\limits_V z^2\rho(x, y, z)dxdydz.$$

Моменты инерции относительно координатных осей

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}, \quad I_y = I_{xy} + I_{yz}, \quad I_z = I_{xz} + I_{yz}.$$

Момент инерции относительно начала координат — это

$$I_O = I_{xz} + I_{xy} + I_{yz}.$$

8.8. Несобственный кратный интеграл

8.8.1. Понятие несобственного кратного интеграла. В этом параграфе мы обобщим понятие кратного интеграла на случай неограниченной области интегрирования или неограниченной подинтегральной функции. Пусть G — открытое связное множество пространства $\mathbb{R}^n$. Множество $\overline{G}$ — замыкание G, которое получается путем присоединения к G его границы.

Определение 8.8.1. *Исчерпанием множества $G \subset \mathbb{R}^n$ называется последовательность $\{G_m\}$ открытых связных измеримых множеств, для которой*
1) для всех n $\overline{G}_m \subset G_{m+1}$;
2) объединение всех множеств G_m совпадает с G.

Пусть на множестве G определена функция $f(x)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, интегрируемая по Риману на любом измеримом ограниченном подмножестве G. Рассмотрим всевозможные исчерпания $\{G_m\}$ множества G.

Определение 8.8.2. *Если для любого такого исчерпания $\{G_n\}$ множества G существует предел последовательности*

$$I = \lim_{m\to\infty} a_m = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{\overline{G}_m}\cdots\int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n \tag{8.8.1}$$

и этот предел не зависит от выбора последовательности $\{G_m\}$, то этот предел называется несобственным интегралом от функции $f(x)$ по множеству G и обозначается

$$\int\limits_G f(x)dx \quad \text{или} \quad \int\limits_G \cdots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n. \tag{8.8.2}$$

При этом несобственный интеграл называется сходящимся. В противном случае, т.е. когда предела указанных выше последовательностей не существует, указанный интеграл называется расходящимся.

8.8.2. Интеграл от неотрицательной функции. Интеграл от неотрицательной функции по своим свойствам близок к одномерному несобственному интегралу. Если множество G исчерпывается множесвами G_m, то последовательность интегралов $\int\limits_{\overline{G}_m} f(x)dx$ является возрастающей и поэтому имеет предел, конечный или бесконечный. Оказывается, что этот предел вообще не зависит от выбора исчерпания области, а сходимость интеграла равносильна тому, что конечен предел последовательности интегралов.

Теорема 8.8.1. *Для сходимости несобственного интеграла* (8.8.2) *от неотрицательной в области G функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы хотя бы для одной последовательности G_n, была ограничена числовая последовательность* (8.8.1).

Теорема 8.8.2 (признак сравнения). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ всюду на открытом множестве G удовлетворяют условию $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. Тогда из сходимости несобственног интеграла $\int\limits_G g(x)dx$ вытекает сходимость несобственного интеграла $\int\limits_G f(x)dx$, а из расходимости $\int\limits_G f(x)dx$ следует расходимость $\int\limits_G g(x)dx$.*

Доказательство этой теоремы повторяет доказательство аналогичной теоремы для несобственного одномерного интеграла.

Пример 8.8.1. Пусть $G = \{(x, y) : 0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, функция $f(x)$ непрерывна на множестве G и для всех точек $(x, y) \in G$ удовлетворяет неравенствам $0 < M_1 \leqslant f(x, y) \leqslant M_2$. Исследовать сходимость интеграла

$$\iint\limits_G \frac{f(x, y)}{(x^2 + y^2)^p} dxdy.$$

Решение. Поскольку

$$\frac{M_1}{(x^2 + y^2)^p} \leqslant \frac{f(x, y)}{(x^2 + y^2)^p} \leqslant \frac{M_2}{(x^2 + y^2)^p},$$

то рассматриваемый интеграл сходится или расходится вместе с интегралом

$$\iint\limits_G \frac{dxdy}{(x^2 + y^2)^p}.$$

Последовательность $G_m = \{\frac{1}{m^2} \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ является исчерпанием множества G. Переходя к полярным координатам, получаем, что

$$\iint\limits_{G_m} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^p} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{1/m}^{1} \frac{dr}{r^{2p-1}} = 2\pi \int\limits_{1/m}^{1} \frac{dr}{r^{2p-1}}.$$

Следовательно,

$$\lim_{m\to\infty} \iint\limits_{G_m} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^p} = \lim_{m\to\infty} 2\pi \int\limits_{1/m}^{1} \frac{dr}{r^{2p-1}}.$$

Поэтому исходный интеграл сходится при $p < 1$ и расходится при $p \geqslant 1$.

8.8.3. Интеграл от знакопеременной функции.

Теорема 8.8.3. *Если* $\int\limits_G |f(x)|dx$ *сходится, то и* $\int\limits_G f(x)dx$ *сходится.*

Доказательство. Рассмотрим неотрицательные функции $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$ и $f_- = \max\{-f(x), 0\}$. Тогда $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$, $\quad |f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$. Из интегрируемости функции $|f(x)|$ следует интегрируемость функций $f_+(x)$ и $f_-(x)$, что в свою очередь приводит к заключению об интегрируемости $f(x)$.

□

Определение 8.8.3. *Интеграл* $\int\limits_G f(x)dx$ *называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл* $\int\limits_G |f(x)|dx$.

Из теоремы 8.8.3 следует, что абсолютная сходимость более жесткое условие, чем простая сходимость. Оба эти понятия встречаются в теории несобственных одномерных интегралах, рядах. Кратные несобственные интегралы в отличие от одномерного случая обладают тем свойством, что из обычной сходимости несобственного интеграла вытекает его абсолютная сходимость.

Теорема 8.8.4. *Для несобственных n-кратных интегралов при $n \geqslant 2$ понятия сходимости и абсолютной сходимости эквивалентны.*

8.8.4. Замена переменных в несобственном интеграле. Для несобственных интегралов верна формула замены переменных.

Пусть G, g — открытые множества, $G \subset R^n_x$, $g \subset R^n_u$.

Предположим, что на множестве g определены функции

$$\begin{gathered} x_1 = \varphi_1(u_1, \ldots, u_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \varphi_n(u_1, \ldots, u_n). \end{gathered} \tag{8.8.3}$$

Теорема 8.8.5. *Пусть $\psi : g \to G$ — отображение открытого множества g на открытое множество G, заданное формулами (8.8.3) и удовлетворяющее условиям A)–C) пункта 8.6.1. Если* $\int\limits_G f(x)dx$ *сходится, то и* $\int\limits_g (f\psi(u)) \left|\frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{D(u_1, \ldots, u_n)}\right| du$ *сходится и значения этих интегралов совпадают.*

Пример 8.8.2. Исследовать на сходимость и вычислить, в случае сходимости, несобственный кратный интеграл

$$I = \iint\limits_G e^{-x^2-y^2} dxdy, \quad G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\, y > 0\}.$$

Решение. Сведем кратный интеграл к повторному и получим

$$I = \int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dy = \int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dy = \left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2.$$

Поскольку однократный несобственный интеграл сходится, то и сходится рассматриваемый несобственный интеграл.

Для вычисления интеграла I воспользуемся теоремой 8.8.5, переходя к полярным координатам. При этом множество G переходит в полосу $G' = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : r \in (0;\infty),\, \varphi \in (0;\pi/2))\}$ и

$$I = \iint\limits_{G'} e^{-r^2} r dr = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{2} \int\limits_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr = -\frac{\pi}{2} e^{-r^2} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}.$$

Сравнивая полученные два значения, легко получаем, что

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Этот прием вычисления последнего интеграла принадлежит Пуассону.

8.8.5. Главное значение несобственного кратного интеграла. Обозначим через $B(R, x_0)$ n-мерный шар радиуса R с центром в точке x_0, и пусть начало координат находится в точке $0 \in E^m$.

Определение 8.8.4. *Пусть функция $f(x)$ определена при всех и интегрируема в каждом шаре $B(R,0)$. Будем говорить, что функция $f(x)$ интегрируема по Коши в $\mathbb{R}^n$, если существует предел*

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{B(R,0)} f(x)dx$$

Этот предел мы будем называть главным значением несобственного интеграла от функции $f(x)$ в смысле Коши и обозначать символом

$$\text{v.p.} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{B(R,0)} f(x)dx.$$

Пример 8.8.3. Вычислить

$$\text{v.p.} \int\limits_{R^2} xdxdy.$$

Решение. Нетрудно проверить, что для функции $f(x,y) = x$ в $\mathbb{R}^2$

$$\int\limits_{B(R,0)} xdxdy = 0,$$

тем самым функция $f(x,y) = x$ интегрируема по Коши в $\mathbb{R}^2$ и

$$\text{v.p.} \int\limits_{R^2} x dx dy = 0.$$

Отметим, что несобственный интеграл $\int\limits_{R^2} x dx dy$ расходится.

В случае, когда функция $f(x)$ имеет особенность в некоторой точке x_0 области $G \subset \mathbb{R}^n$ и $f(x)$ интегрируема в каждой области $G_R = G \setminus B(R, x_0)$, где $B(R, x_0) \subset G$, интеграл в смысле Коши вводиться как предел:

$$\text{v.p.} \int\limits_{G} f(x) dx = \lim_{R \to 0} \int\limits_{G_R} f(x) dx.$$

Глава 9

Интегралы, зависящие от параметра

В результате изучения этой главы читатель должен уметь вычислять и исследовать собственные и несобственные интегралы, зависящие от параметра. Использовать интегралы Эйлера, Фурье и преобразование Фурье для их вычисления. Знать основные определения, формулы и теоремы о собственных и несобственных интегралах, зависящих от параметра, классических интегралах: теоремы и непрерывности, интегрируемости, дифференцируемости собственных и несобственных интегралов, критерии и признаки равномерной сходимости, интегралы Дирихле, Эйлера-Пуассона, формулу Фруллани, Γ и B функции Эйлера. Владеть методами исследования интегралов от параметра на сходимость и равномерную сходимость.

9.1. Собственные интегралы, зависящие от параметра

Определение 9.1.1. *Пусть в замкнутом прямоугольнике*

$$\mathbb{P} = \{(x,y):\ a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d)\}$$

определена функция $f(x,y)$, интегрируемая по переменной x на отрезке $[a,b]$ при любом фиксированном значении y из отрезка $[c,d]$. В сформулированных условиях для любого $y \in [c,d]$ определена функция

$$I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx, \tag{9.1.1}$$

которая называется собственным интегралом, зависящим от параметра y.

Пример 9.1.1. Пусть задан прямоугольник

$$\mathbb{P} = \{(x,y):\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 2 \leqslant y \leqslant 4)\}$$

и функции

$$a)\ f(x,y) = x^2 + y^2, \quad (x,y) \in \mathbb{P};$$

$$b)\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{x}, & \text{если} \quad 0 < x \leqslant 1, \quad 2 \leqslant y \leqslant 4; \\ y, & \text{если} \quad x = 0, \qquad\quad 2 \leqslant y \leqslant 4. \end{cases}$$

Записать соответствующие функции $I(y)$.

Решение.

$$a)\quad I(y)=\int\limits_0^1 (x^2+y^2)\,dx,\quad y\in[2,4] \text{ или}$$

$$I(y)=\left(\frac{x^3}{3}+y^2x\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}+y^2,\quad y\in[2,4].$$

$$b)\quad I(y)=\int\limits_0^1 \frac{\sin xy}{x}\,dx,\quad y\in[2,4].$$

Функция $I(y)$ — не элементарна в этом случае. Исследование ее свойств, например, непрерывности представляет собой не простую задачу.

9.1.1. Геометрическая интерпретация значений функции $I(y)$**.** Поверхность $EGFH$ (рис. 9.1.1) — график функции $f(x,y)$, определенной в прямоугольнике $\mathbb{P}$.

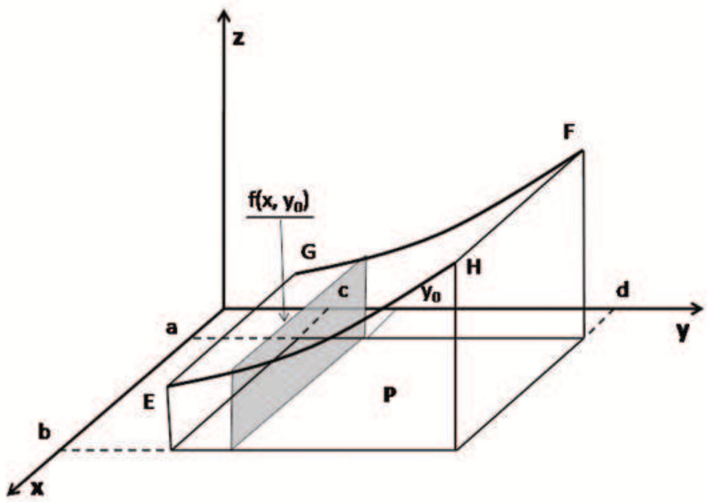

Рис 9.1.1. Геометрическая интерпретация значений собственного интеграла, зависящего от параметра

В плоскости $y=y_0, (y_0\in[c,d])$ получен график функции $f(x,y_0)$, как пересечение поверхности $EGFH$ и плоскости $y=y_0$. Затемнена площадь, которая численно равна значению функции $I(y)$ в точке y_0.

Для приведенного на этом рисунке графика $f(x,y)$ (поверхность $EGFH$) функция $I(y)$ монотонно возрастает.

Упражнение 9.1.1. Найти точку $y\in[c,d]$, для которой $I(y)$ имеет экстремум на отрезке $[c,d]$).

Если рассматривать $f(x,y)$ как значение плотности материальной пластины $\mathbb{P}$ в точке (x,y), то функция $I(y)$ даст линейную плотность этой пластины вдоль оси OY.

Функция $f(x,y)$ может быть задана и на множестве более общего вида, чем прямоугольник $\mathbb{P}$, например, на множестве D (см. рис. 9.1.2), где

$$D=\{(x,y):\ a(y)\leqslant x\leqslant b(y),\ c\leqslant y\leqslant d\} \tag{9.1.2}$$

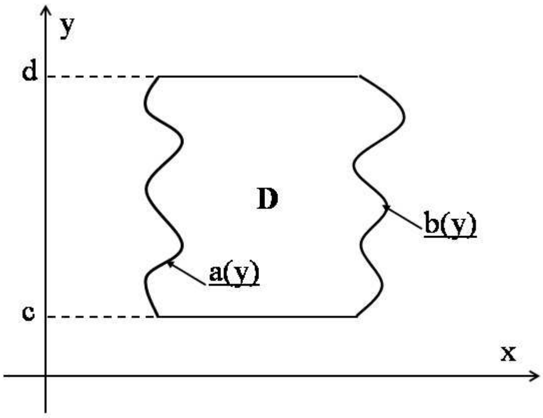

Рис 9.1.2. Область D для описания интеграла, зависящего от параметра (общий случай)

В этом случае на отрезке $[c, d]$ функция $I(y)$ задается формулой

$$I(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx. \tag{9.1.3}$$

Рассмотрим далее свойства непрерывности, интегрируемости и дифференцируемости функции $I(y)$ сначала для случая, когда пределы интегрирования $a(y)$ и $b(y)$ в равенстве (9.1.2) постоянны и функция $I(y)$ задается формулой (9.1.1).

9.1.2. Свойства непрерывности и дифференцируемости функции $I(y)$. Естественно, что свойства функции $I(y)$ определяются поведением функции $f(x, y)$ в прямоугольнике $\mathbb{P}$. Сформулируем, например, достаточное условие непрерывности $I(y)$.

Теорема 9.1.1. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна на прямоугольнике $\mathbb{P}$, то функция $I(y)$, определенная соотношением (9.1.1), непрерывна на отрезке $[c, d]$.*

Доказательство. Запишем формулу для приращения $\Delta I(y)$ функции $I(y)$ в точке y:

$$\Delta I(y) = I(y + \Delta y) - I(y) = \int\limits_a^b [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]\, dx. \tag{9.1.4}$$

Поскольку $\mathbb{P}$ — компакт, то по теореме Кантора (теорема 7.3.4) функция $f(x, y)$ равномерно непрерывна в прямоугольнике $\mathbb{P}$ и, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что

$$|f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}, \quad \text{если} \quad |\Delta y| < \delta.$$

Тогда легко оценить величину $|\Delta I(y)|$, используя формулу (9.1.4):

$$\begin{aligned} |\Delta I(y)| &= \left| \int\limits_a^b (f(x, y + \Delta y) - f(x, y))\, dx \right| \leqslant \\ &\leqslant \int\limits_a^b |f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| dx < \int\limits_a^b \frac{\varepsilon}{b - a}\, dx = \varepsilon, \end{aligned}$$

что означает непрерывность функции $I(y)$ для $y \in [c, d]$ и теорема доказана. $\square$

Теперь непрерывность функций $I(y)$ из примера 9.1.1 становится фактически очевидной.

Замечание 9.1.1. *Непрерывность функции $I(y)$ возможна иногда и в случае, когда $f(x, y)$ терпит разрыв в своей области определения $\mathbb{P}$. Например, определим разрывную функцию $f(x, y)$ в квадрате*

$$K = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1\}$$

как это показано на рис. 9.1.3 (график функции $f(x, y)$ затемнен). Легко видеть, что функция $I(y)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$.

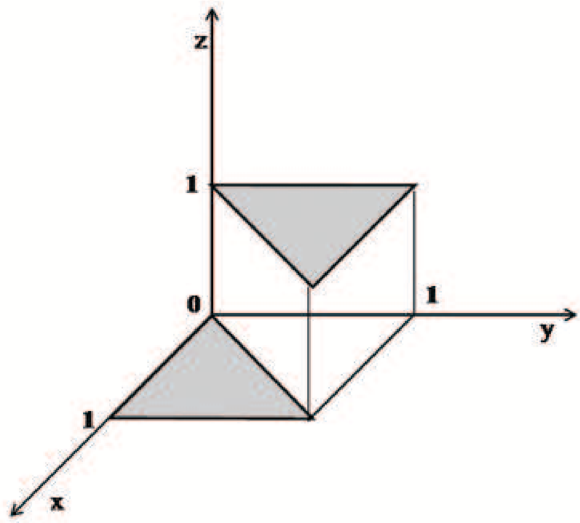

Рис 9.1.3. Непрерывность функции $I(y)$, когда $f(x, y)$ разрывна

Упражнение 9.1.2. Записать формулу для функции $I(y)$, если график функции $f(x, y)$ задан на рис. 9.1.3 (поверхность затемнена).

Теорема 9.1.2 (правило Лейбница)**.** *Если функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ непрерывны в прямоугольнике $\mathbb{P}$, то функция $I(y)$ дифференцируема на отрезке $[c, d]$, причем справедлива формула*

$$\frac{dI(y)}{dy} = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx, \tag{9.1.5}$$

т.е. в условиях теоремы интеграл, зависящий от параметра, можно дифференцировать по параметру под знаком интеграла.

Доказательство. Рассмотрим функции

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx \quad \text{и} \quad G(y) = \int_a^b f'_y(x, y)\, dx.$$

Они непрерывны на отрезке $[c, d]$ по предыдущей теореме. Заметим, что в доказательстве потребуется только непрерывность функции $G(y)$. Докажем, что справедливо равенство $I'(y) = G(y)$ для $y \in [c, d]$. Запишем для этого цепочку равенств:

$$\begin{aligned} I'(y) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{I(y+\Delta y) - I(y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \int\limits_a^b \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}\, dx = \\ &= \lim_{\Delta y \to 0} \int\limits_a^b \frac{f'_y(x, y+\theta\Delta y)\cdot \Delta y}{\Delta y}\, dx = \lim_{\Delta y \to 0} G(y+\theta\Delta y) = G(y) \\ & \quad y \in [c,d], \quad 0 < \theta < 1. \end{aligned}$$

Третье равенство указанной цепочки справедливо на основании теоремы Лагранжа о среднем по переменной y. В последнем равенстве использована непрерывность фукции $G(y)$, $y \in [c, d]$. □

Используя доказанную теорему, легко установить дифференцируемость функций $I(y)$ из примера 9.1.1.

9.1.3. Интегрируемость функции $I(y)$.

Теорема 9.1.3. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике $\mathbb{P}$, то функция $I(y)$ интегрируема на отрезке $[c, d]$, причем справедлива формула*

$$\int\limits_c^d I(y)\, dy = \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f(x,y)\, dx\right] dy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f(x,y)\, dy\right] dx$$

или

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\, dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\, dy \tag{9.1.6}$$

Доказательство. Докажем более общее равенство

$$\int\limits_c^t dy \int\limits_a^b f(x,y)\, dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^t f(x,y)\, dy. \tag{9.1.7}$$

для $t \in [c, d]$.

Известна формула для вычисления производной интеграла с переменным верхним пределом: $\left(\int\limits_a^t f(x)\, dx\right)'_t = f(t)$, если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Используем ее для вычисления производной по t левой части доказываемого равенства (9.1.7):

$$\left(\int\limits_c^t dy \int\limits_a^b f(x,y)\, dx\right)'_t = \left(\int\limits_c^t I(y)\, dy\right)'_t = I(t) = \int_a^b f(x,t)\, dx.$$

Для производной по t правой части того же равенства (9.1.7) получим тот же результат. Действительно,

$$\left(\int\limits_a^b dx \int\limits_c^t f(x,y)\,dy\right)'_t = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^t f(x,y)\,dy\right)'_t dx = \int_a^b f(x,t)\,dx.$$

Здесь в первом равенстве использовалась предыдущая теорема 9.1.2, а во втором — снова производная интеграла с переменным верхним пределом. Таким образом, левая и правая части соотношения (9.1.7) как функции переменной t имеют равные производные на отрезке $[c,d]$ и, следовательно, могут отличаться разве лишь на константу. Но при $t = c$ они совпадают (т.к. равны нулю), следовательно, они тождественно равны и для $t \in [c,d]$. При $t = d$ получится формула (9.1.6). $\square$

9.1.4. Интеграл от параметра с переменными пределами интегрирования. Пусть функция $f(x,y)$ задана в прямоугольнике $\mathbb{P}$, который заключает в себе область D, определенную равенством (9.1.2). Пусть также при любом фиксированном y из отрезка $[c,d]$ функция $f(x,y)$ интегрируема по x на отрезке $[a(y),b(y)]$. Тогда формула (9.1.3) определит функцию $I(y)$ для $y \in [c,d]$.

Исследуем ее на непрерывность и дифференцируемость.

Теорема 9.1.4. *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в прямоугольнике $\mathbb{P}$, а функции $a(y)$ и $b(y)$ непрерывны на отрезке $[c,d]$. Тогда функция $I(y)$, определенная соотношением (9.1.3), непрерывна на отрезке $[c,d]$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное $y_0 \in [c,d]$ и докажем непрерывность функции $I(y)$ в точке y_0. Представим $I(y)$ в следующей форме:

$$I(y) = \int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y)\,dx + \int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)\,dx - \int\limits_{a(y_0)}^{a(y)} f(x,y)\,dx. \qquad (9.1.8)$$

Найдем $\lim\limits_{y\to y_0} I(y)$ вычислив предел каждого слагаемого. Предел первого равен $I(y_0)$ (по теореме 9.1.1), а пределы второго и третьего равны нулю. Это легко следует из неравенств

$$\left|\int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)\,dx\right| \leqslant M|b(y)-b(y_0)|,$$

а

$$\left|\int\limits_{a(y_0)}^{a(y)} f(x,y)\,dx\right| \leqslant M|a(y)-a(y_0)|, \quad (M = \sup_{(x,y)\in\mathbb{P}} |f(x,y)|)$$

и непрерывности функций $a(y)$ и $b(y)$. Таким образом,

$$\lim_{y\to y_0} I(y) = I(y_0),$$

что и доказывает непрерывность функции $I(y)$ в произвольной точке $y_0 \in [c,d]$. $\square$

Достаточные условия дифференцируемости функции $I(y)$ сформулируем в следующей теореме.

Теорема 9.1.5. *Пусть функция $f(x,y)$ и ее производная $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в прямоугольнике $\mathbb{P}$, а функции $a(y)$ и $b(y)$ дифференцируемы на отрезке $[c,d]$. Тогда функция $I(y)$, определенная соотношением (9.1.3), дифференцируема на отрезке $[c,d]$ и ее производная $I'(y)$ вычисляется по формуле*

$$I'(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}\,dx + b'(y)f(b(y),y) - a'(y)f(a(y),y). \tag{9.1.9}$$

Доказательство. Дифференцируемость функции $I(y)$ и формула (9.1.9) легко получаются из представления $I(y)$ в виде суммы (9.1.8) для некоторого $y_0 \in [c,d]$. Производная первого слагаемого в точке y_0 равна $\int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} \dfrac{\partial f(x,y_0)}{\partial y}\,dx$. Это сразу следует из теоремы 9.1.2. Для производной второго слагаемого можно записать формулу

$$\lim_{\Delta y\to 0} \frac{\int\limits_{b(y_0)}^{b(y_0+\Delta y)} f(x,y_0+\Delta y)\,dx - \int\limits_{b(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y_0)\,dx}{\Delta y}, \tag{9.1.10}$$

которая после вычисления предела и дает нужный результат

$$b'(y_0)\cdot f(b(y_0),y_0). \tag{9.1.11}$$

Действительно, применяя теорему о среднем для первого интеграла числителя формулы (9.1.10) и замечая, что второй интеграл равен нулю, перепишем предел (9.1.10) в виде

$$\lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(\overline{x},y_0+\Delta y)[b(y+\Delta y)-b(y_0)]}{\Delta y}, \tag{9.1.12}$$

где $\overline{x}$ заключено между $b(y_0)$ и $b(y_0+\Delta y)$, причем

$$\lim_{\Delta y\to 0} \overline{x} = b(y_0).$$

Тогда очевидно, что предел (9.1.12) равен величине (9.1.11).

Рассуждая совершенно аналогично, найдем, что производная третьего слагаемого в правой части формулы (9.1.9), равна

$$-a'(y_0)\cdot f(a(y_0),y_0).$$

Тем самым доказана дифференцируемость функции $I(y)$ в произвольной точке $y_0 \in [c,d]$ и формула (9.1.9) для вычисления производной. □

Замечание 9.1.2. *Теоремы 9.1.4 и 9.1.5 верны и в случае, когда функция $f(x,y)$ задана лишь в области D и удовлетворяет в этой области тем же требованиям, что и в прямоугольнике $\mathbb{P}$.*

Приведем примеры на использование теоремы 9.1.1 о непрерывности интеграла, зависящего от параметра для вычисления предела.

Пример 9.1.2. Найти $\lim\limits_{y\to 0} \int\limits_{1}^{2} \sqrt{x^3+y^3}\,dx$.

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(x,y)=\sqrt{x^3+y^3},$$

определенную на прямоугольнике $\mathbb{P}=\{(x,y):\ 1\leqslant x\leqslant 2,\ -1\leqslant y\leqslant 1\}$. Тогда для интеграла

$$I(y)=\int\limits_1^2\sqrt{x^3+y^3}\,dx,\quad y\in[-1,1]$$

выполнены все условия теоремы 9.1.1 и, следовательно,

$$\lim_{y\to 0}I(y)=I(0).$$

Теперь вычисление искомого предела нетрудно осуществить:

$$\begin{aligned}\lim_{y\to 0}\int\limits_1^2\sqrt{x^3+y^3}\,dx &= \lim_{y\to 0}I(y)=I(0)=\\ &= \int\limits_1^2\sqrt{x^3}\,dx=\frac{2}{5}x^{5/2}\Big|_1^2=\frac{2}{5}(2^{5/2}-1).\end{aligned}$$

Пример 9.1.3. Найти $\displaystyle\lim_{y\to+0}\int\limits_0^1\frac{dx}{1+(1+xy)^{1/y}}$.

Решение. Функция $f(x,y)=\dfrac{1}{1+(1+xy)^{1/y}}$ определена на множестве

$$K=\{(x,y):\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0<y\leqslant 1\}.$$

Условия теоремы 9.1.1 не выполнены, т.к. множество K не замкнуто. Доопределим функцию по непрерывности в точках отрезка

$$K_0=\{(x,y):\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ y=0\}.$$

Найдем для этого предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to+0}}f(x,y),\ 0\leqslant x_0\leqslant 1$.

Пусть $x_0>0$. Тогда

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to+0}}\frac{1}{1+(1+xy)^{1/y}}=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to+0}}\frac{1}{1+(1+xy)^{\frac{1}{xy}\cdot x}}=\frac{1}{1+e^{x_0}}.$$

Здесь использован второй замечательный предел "число e" ($\lim\limits_{xy\to+0}(1+xy)^{\frac{1}{xy}}=e$) и условие, что $x>0$, если $x_0>0$.

Пусть теперь $x_0=0$. Найдем, что в этом случае предел

$$\lim_{\substack{x\to+0\\ y\to+0}}f(x,y)=\frac{1}{1+e^0}=\frac{1}{2}\quad\text{(при условии, что } x>0)$$

равен пределу

$$\lim_{\substack{x\to+0\\ y\to+0}}f(x,y)=\lim_{y\to+0}f(0,y)=\lim_{y\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\quad\text{(при условии, что } x=0).$$

Таким образом,

$$\lim_{\substack{x\to+0\\ y\to+0}} f(x,y)=\frac{1}{2}\quad \text{(при любом способе стремления } x\to+0,\ y\to+0).$$

Рассмотрим теперь функцию

$$g(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & (x,y)\in K\\ \dfrac{1}{1+e^x}, & (x,y)\in K_0,\end{cases}$$

которая определена и непрерывна на замкнутом множестве $\mathbb{P}=K\cup K_0=\{(x,y)\big|\, 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$. Теперь для вычисления предела достаточно заметить, что $f(x,y)=g(x,y)$ для $y>0$ и поэтому

$$\lim_{y\to+0}\int\limits_0^1 f(x,y)\,dx=\lim_{y\to+0}\int\limits_0^1 g(x,y)\,dx.$$

Но функция $G(y)=\int\limits_0^1 g(x,y)\,dx$ непрерывна для $y\in[0,1]$ по теореме 9.1.1. Следовательно,

$$\begin{aligned}\lim_{y\to+0} G(y) &= G(0)=\int\limits_0^1 g(x,0)\,dx=\int\limits_0^1\frac{dx}{1+e^x}=\\ &= \int\limits_0^1\frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}\,dx=1-\int\limits_0^1\frac{e^x dx}{1+e^x}=1-\ln(1+e^x)\Big|_0^1=\\ &= 1-\ln(1+e)+\ln 2=\ln\frac{2e}{1+e}.\end{aligned}$$

Ответ: $\lim\limits_{y\to+0}\int\limits_0^1\dfrac{dx}{1+(1+xy)^{1/y}}=\ln\dfrac{2e}{1+e}$.

9.2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Рассмотрим множество

$$\mathbb{P}_\infty=\{(x,y):\ a\leqslant x<\infty,\ c\leqslant y\leqslant d\}$$

для того, чтобы определить понятие несобственного интеграла, зависящего от параметра (рис. 9.2.1).

Определение 9.2.1. *Пусть на множестве $\mathbb{P}_\infty$ задана функция $f(x,y)$, интегрируемая по x в несобственном смысле на полупрямой $a\leqslant x<\infty$ при любом фиксированном $y\in[c,d]$, т.е. имеет смысл функция*

$$I(y)=\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx,\quad y\in[c,d],\tag{9.2.1}$$

которая называется несобственным интегралом (первого рода), зависящим от параметра y.

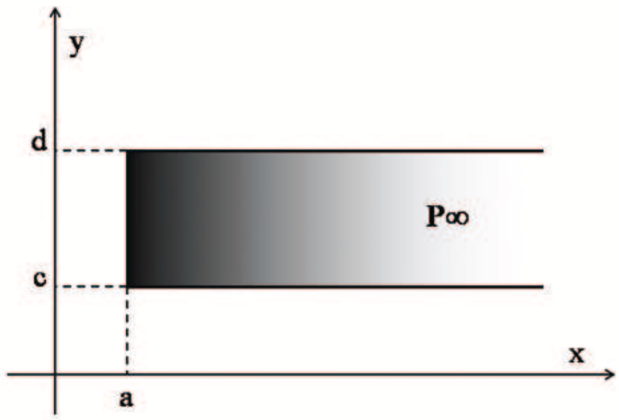

Рис 9.2.1. Множество $\mathbb{P}_\infty$

Изучим сейчас теорию несобственного интеграла, зависящего от параметра на примере интеграла первого рода. Соответствующая теория интегралов второго рода излагается практически аналогично (см. далее п. 9.2.5).

На рис. 9.2.2 изображен бесконечный кусок поверхности $EGHF$ — график функции $f(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{P}_\infty$. Затемнено сечение, площадь которого равна значению функции $I(y)$ в точке y_0.

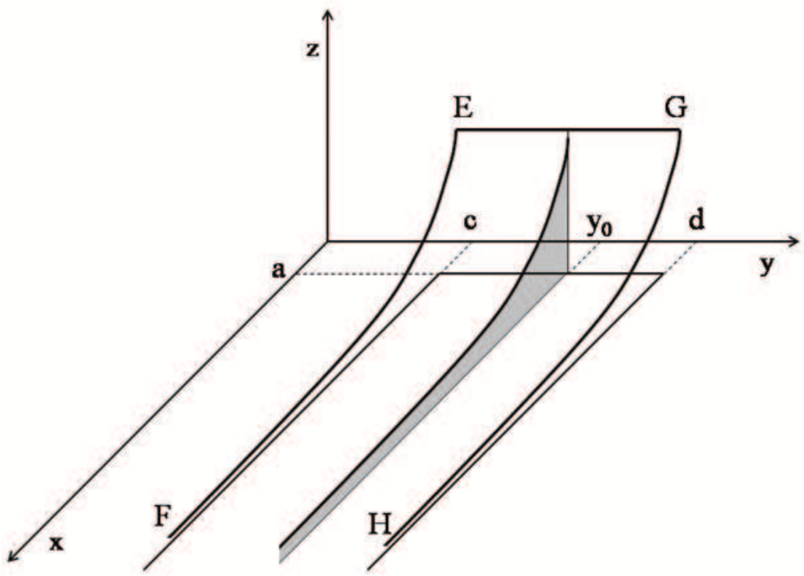

Рис 9.2.2. Геометрический смысл значений несобственного интеграла первого рода, зависящего от параметра

9.2.1. Равномерная сходимость несобственного интеграла, зависящего от параметра. Сформулируем понятие равномерной сходимости интеграла (9.2.1), которое играет важнейшую роль в теории таких интегралов.

Определение 9.2.2. *Несобственный интеграл (9.2.1) называется равномерно сходящимся по параметру y на отрезке* $[c, d]$, *если:*

1) он сходится на отрезке $[c, d]$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ существует $B \geqslant a$, что для всех $b > B$ и всех $y \in [c, d]$ выполнено неравенство $\left|\int\limits_b^{\infty} f(x, y)\,dx\right| < \varepsilon$.

Сформулируем критерий Коши равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра.

Теорема 9.2.1 (критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла)**.** *Для того чтобы несобственный интеграл (9.2.1) равномерно сходился по параметру y на отрезке $[c, d]$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало $B \geqslant a$, что для всех $y \in [c, d]$, для всех $b' > B$ и для всех $b'' > B$ выполнялось неравенство* $\left|\int\limits_{b'}^{b''} f(x, y)\,dx\right| < \varepsilon$.

Доказательство следует очевидным образом из определения равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра, и критерия Коши сходимости несобственного интеграла. □

На практике часто приходится пользоваться достаточными признаками равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра. Сформулируем некоторые из них.

Теорема 9.2.2 (мажорантный признак Вейерштрасса)**.** *Пусть функция $f(x, y)$ определена на множестве $\mathbb{P}_\infty$ и для каждого y из отрезка $[c, d]$ интегрируема по x на любом отрезке $[a, B]$. Пусть далее для всех точек множества $\mathbb{P}_\infty$ выполняется неравенство*

$$|f(x, y)| \leqslant g(x) \tag{9.2.2}$$

Тогда из сходимости интеграла $\int\limits_a^{\infty} g(x)\,dx$ *следует равномерная сходимость по y на отрезке $[c, d]$ интеграла (9.2.1).*

Доказательство. В силу критерия Коши сходимости несобственного интеграла от функции $g(x)$ выполняется условие

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B > a \quad \forall b' > B \quad \forall b'' > B \quad b'' > b' \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{b'}^{b''} g(x)\,dx < \varepsilon.$$

Применяя неравенство (9.2.2), получим

$$\left|\int\limits_{b'}^{b''} f(x, y)\,dx\right| \leqslant \int\limits_{b'}^{b''} g(x)\,dx < \varepsilon, \quad \text{для любого} \quad y \in [c, d].$$

Это означает выполнение критерия Коши равномерной сходимости интеграла (9.2.1). □

Признак Вейерштрасса, являясь достаточным признаком равномерной сходимости, гарантирует и абсолютную сходимость. Но существуют равномерно сходящиеся интегралы, у которых отсутствует абсолютная сходимость. Для исследования таких интегралов приведем объединенный признак Абеля-Дирихле.

Теорема 9.2.3 (признак Абеля-Дирихле)**.** *Пусть функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ для любого $y \in [c,d]$ интегрируемы по x на любом отрезке $[a,b] \subset [a,+\infty)$.*

Для равномерной сходимости по y интеграла

$$\int\limits_a^\infty f(x,y)g(x,y)\,dx$$

на отрезке $[c,d]$ достаточно, чтобы была выполнена любая из следующих двух пар условий:

a_1) Существует постоянная $M > 0$ такая, что для всех $b \in [a,+\infty)$ и для всех $y \in [c,d]$ выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_a^b f(x,y)\,dx\right| < M.$$

b_1) Для любого $y \in [c,d]$ функция $g(x,y)$ монотонна по x на промежутке $[a,+\infty)$ и $g(x,y)$ равномерно по y для $y \in [c,d]$ стремится к нулю при $x \to +\infty$.

a_2) Интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$ сходится равномерно по y на множестве $[c,d]$.

b_2) При каждом $y \in [c,d]$ функция $g(x,y)$ монотонна по x на промежутке $[a,+\infty)$ и существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$\bigl|g(x,y)\bigr| < M \quad \text{для всех} \quad x \in [a,+\infty) \quad \text{и всех} \quad y \in [c,d].$$

Доказательство проходит также, как доказательство признаков Абеля и Дирихле сходимости несобственного интеграла (см. § 4.7)только вместо обычного критерия Коши используется критерий равномерной сходимости (теорема 9.2.1). □

Сформулируем еще признак Дини равномерной сходимости несобственного интеграла.

Теорема 9.2.4 (признак Дини)**.** *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна и неотрицательна на множестве $\mathbb{P}_\infty$ и пусть для каждого $y \in [c,d]$ сходится несобственный интеграл (9.2.1). Если функция $I(y)$ непрерывна на отрезке $[c,d]$, тогда интеграл (9.2.1) сходится равномерно по y на отрезке $[c,d]$.*

Пример 9.2.1. Доказать, что интеграл

$$I(y) = \int\limits_0^\infty e^{-xy}\,dx \tag{9.2.3}$$

сходится равномерно по y на множестве $[c,d]$, $c > 0$.

Решение. Если $y \geqslant c > 0$, то исех $b > 0$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} 0 < \int\limits_b^{+\infty} e^{-xy}\,dx &= -\frac{1}{y}\int\limits_b^{+\infty} e^{-xy}\,d(-xy) = -\frac{1}{y}e^{-xy}\Big|_b^{+\infty} = \\ &= 0 + \frac{1}{y}e^{-by} < \frac{1}{c}e^{-bc}. \end{aligned}$$

Так как

$$\lim_{b\to+\infty} \frac{1}{c}e^{-bc} = 0,$$

то для любого $\varepsilon > 0$ существует $B > 0$, что для всех $b > B$ и для всех $y \in [c,d]$ выполнено условие $0 < \int\limits_b^{+\infty} e^{-xy}\,dx < \varepsilon$, т.е. по определению 9.2.2 интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-xy}\,dx$ сходится равномерно по y на $[c,d]$, $c > 0$.

Замечание 9.2.1. *Совершенно аналогично доказывается равномерная сходимость интеграла (9.2.3) по y на множестве $[c,+\infty]$, $c > 0$. Предварительно, правда, следует в определениях 9.2.1 и 9.2.2 (и во всех теоремах этого раздела) область задания параметра y (отрезок $[c,d]$) заменить на множество E, в частности, например, взять $E = [c,+\infty)$.*

Пример 9.2.2. Доказать, что интеграл (9.2.3) сходится неравномерно по y на множестве $(0,d]$, $d > 0$.

Решение. Воспользуемся отрицанием определения 9.2.1. Для этого нужно указать такое положительное число ε, что для любого $B > 0$ при некоторых значениях $b > B$ и $y_0 \in [0,d]$ справедливо неравенство

$$\int\limits_b^{+\infty} e^{-xy_0}\,dx \geqslant \varepsilon.$$

Возьмем $\varepsilon = 1, \quad b = \max(B+1,e)$ и $y_0 = \dfrac{1}{b}$. Тогда

$$\int\limits_b^{+\infty} e^{-xy_0}\,dx = \frac{1}{y_0}e^{-by_0} = \frac{b}{e} \geqslant 1,$$

что и требовалось проверить.

9.2.2. Непрерывность несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Теорема 9.2.5. *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на множестве $\mathbb{P}_\infty$, а интеграл (9.2.1) сходится равномерно на отрезке $[c,d]$. Тогда этот интеграл является непрерывной функцией от y на множестве $[c,d]$.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность функций

$$I_n(y) = \int\limits_a^{a+n} f(x,y)\,dx,$$

каждая из которых в силу теоремы 9.1.1 непрерывна на отрезке $[c,d]$. Очевидно, что из равномерной сходимости интеграла (9.2.1) вытекает равномерная сходимость к $I(y)$ функциональной последовательности $I_n(y)$, а значит и непрерывность предельной функции $I(y)$. $\square$

Пример 9.2.3. Исследовать на непрерывность функцию

$$I(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^y}$$

на отрезке $[2,5]$.

Решение. Покажем, используя критерий Коши, что исследуемый интеграл сходится равномерно на отрезке $[2,5]$. Действительно, для любой пары чисел $b_1, b_2,\ 1 < b_1 < b_2$ и любого $y \in [2,5]$ справедливо неравенство

$$0 < \int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{dx}{1+x^y} \leqslant \int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} b_2 - \operatorname{arctg} b_1.$$

Поскольку функция $\operatorname{arctg} t$ имеет предел при $t \to \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $B > 1$, что для любой пары чисел b_1, b_2 и из неравенства $B < b_1 < b_2$ следует неравенство $0 < \operatorname{arctg} b_2 - \operatorname{arctg} b_1 < \varepsilon$, т.е. $0 < \int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{dx}{1+x^y} < \varepsilon$ для всех $y \in [2,5]$. Тогда по теореме 9.2.5 функция $I(y) = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^y}$ непрерывна на отрезке $[2,5]$ (непрерывность подынтегральной функции $\frac{1}{1+x^y}$ на множестве $\mathbb{P}_\infty = \{(x,y) : 0 \leqslant x < +\infty,\ 2 \leqslant y \leqslant 5\}$ очевидна).

9.2.3. Дифференцируемость несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Теорема 9.2.6. *Пусть функция $f(x,y)$ и ее частная производня $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на множестве $\mathbb{P}_\infty$ и пусть для некоторого $y_0 \in [c,d]$ сходится интеграл*

$$I(y_0) = \int\limits_{a}^{+\infty} f(x,y_0)\,dx,$$

а интеграл

$$\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}\,dx$$

сходится равномерно по y на отрезке $[c,d]$. Тогда функция $I(y) = \int\limits_{a}^{+\infty} f(x,y)\,dx$ дифференцируема на отрезке $[c,d]$ и справедливо равенство

$$I'(y) = \int\limits_{a}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}\,dx. \tag{9.2.4}$$

Другими словами, в условиях теоремы производная интеграла равна интегралу от производной.

Доказательство сформулированной теоремы может быть проведено по той же схеме, что и доказательство теоремы 9.2.5. □

Пример 9.2.4. Найти производную функции

$$I(y) = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin xy}{x^2}\,dx, \quad y > 0$$

Решение. Проверим условия теоремы 9.2.6 на множестве

$$\mathbb{P}_\infty \ = \ \{(x,y):\, 1 \leqslant x < \infty, c \leqslant y \leqslant d\},$$

где $0 < c < d$. Функции $f(x,y) = \dfrac{\sin xy}{x^2}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x \cos xy}{x^2} = \dfrac{\cos xy}{x}$ непрерывны на $\mathbb{P}_\infty$.

Для $y_0 \in [c,d]$ интеграл $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin xy_0}{x^2}\,dx$ сходится. Достаточно использовать признак Вейерштрасса, $\left|\dfrac{\sin xy_0}{x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^2}$.

Интеграл $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}\,dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos xy}{x}\,dx$ сходится равномерно по y для $y \in [c,d]$ (можно использовать признак Абеля-Дирихле, $\dfrac{1}{x}$ стремится монотонно к нулю при $x \to +\infty$, величина $\left|\displaystyle\int\limits_1^b \cos xy\,dx\right|$ ограничена.) Таким образом все условия теоремы 9.2.6 выполнены. Следовательно, $I'(y) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos xy}{x}\,dx, \quad y \in [c,d]$. В силу произвольности c и d $\quad (0 < c < d)$ последний результат распространяется на множество $(0,+\infty)$. Заметим, что равномерная сходимость интеграла $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos xy}{x}\,dx$ на этом множестве отсутствует, в связи с чем и появилась необходимость привлечения отрезка $[c,d], \quad 0 < c < d$.

9.2.4. Теоремы о собственном и несобственном интегрировании несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Теорема 9.2.7. *Если выполнены условия теоремы 9.2.5, то интеграл (9.2.1) можно интегрировать по параметру y на отрезке $[c,d]$, причем*

$$\int\limits_c^d I(y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy. \tag{9.2.5}$$

Доказательство. Так как выплнены все условия теоремы 9.2.5, то функция $I(y)$ непрерывна на отрезке $[c,d]$ и, следовательно, интегрируема на этом отрезке. Докажем формулу (9.2.5). Воспользуемся равномерной сходимостью интеграла (9.2.1) и для данного $\varepsilon > 0$ укажем такое $B \geqslant a$, что при $b \geqslant B$ для всех $y \in [c,d]$ будет выполнено неравенство

$$\left|\int\limits_b^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{d-c}.$$

Считая, что $b > B$ и используя теорему 9.1.3 запишем:

$$\begin{aligned}\int\limits_c^d I(y)\,dy &= \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f(x,y)\,dx + \int\limits_b^{+\infty} f(x,y)\,dx\right] dy = \\ &= \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy + \int\limits_c^d dy \int\limits_b^{+\infty} f(x,y)\,dx\end{aligned}$$

или

$$\int\limits_c^d I(y)\,dy - \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_b^{+\infty} f(x,y)\,dx.$$

Тогда

$$\left|\int\limits_c^d I(y)\,dy - \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right| \leqslant \int\limits_c^d dy \left|\int\limits_b^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| < \int\limits_c^d \frac{\varepsilon}{d-c}\,dy = \varepsilon,$$

что и означает, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy$ по переменной x сходится и равен числу $\int\limits_c^d I(y)\,dy$. □

Сформулируем без доказательства теорему о несобственном интегрировании несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Теорема 9.2.8. *Пусть функция $f(x,y)$ неотрицательна и непрерывна на множестве $\mathbb{P}_\infty^\infty = \{(x,y):\ a \leqslant x < +\infty,\ c \leqslant y < +\infty\}$.*

Пусть интегралы

$I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ и $K(x) = \int\limits_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ непрерывны соответственно при $y \geqslant c$ и $x \geqslant a$. Тогда из сходимости одного из следующих двух несобственных интегралов $\int\limits_c^{+\infty} I(y)\,dy = \int\limits_c^{+\infty} dy \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} K(x)dx = \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ вытекает сходимость другого и равенство этих интегралов.

Приведем пример несобственного интегрирования несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Пример 9.2.5. Найти $\int\limits_0^{+\infty} I(y)\,dy$, где $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} ye^{-(1+x^2)y^2}\,dx$.

Решение. Проверим выполнение условий теоремы 9.2.8 на множестве

$$\mathbb{P}_\infty^\infty = \{(x,y):\ 0 \leqslant x < +\infty,\ c \leqslant y < +\infty,\ c > 0\}.$$

Функция $f(x,y) = ye^{-(1+x^2)y^2}$ неотрицательна и непрерывна на указанном множестве. Функция

$$\begin{aligned} K(x) &= \int\limits_c^{+\infty} ye^{-(1+x^2)y^2}\,dy = \int\limits_c^{+\infty} \left(-\frac{1}{2(1+x^2)}\right) e^{-(1+x^2)y^2} d\left[(1+x^2)y^2\right] = \\ &= -\frac{1}{2(1+x^2)} e^{-(1+x^2)y^2}\Big|_c^{+\infty} = \frac{e^{-(1+x^2)c^2}}{2(1+x^2)} \end{aligned}$$

непрерывна для любого x.

Функция $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} ye^{-(1+x^2)y^2}\,dx = y\cdot e^{-y^2}\cdot \int\limits_0^{+\infty} e^{-(xy)^2}\,dx$ непрерывна для $y \geqslant c$ как произведение непрерывных функций $y\cdot e^{-y^2}$ и $\int\limits_0^{+\infty} e^{-(xy)^2}\,dx$. Непрерывность последнего интеграла следует из теоремы 9.2.5 (точнее ее аналога, когда роль отрезка $[c,d]$ играет промежуток $[c,+\infty)$). Равномерную сходимость при этом по параметру $y\in[c,+\infty)$ легко установить используя признак Вейрштрасса

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-(xy)^2}\,dx \leqslant \int\limits_0^{+\infty} e^{-c^2x^2}\,dx, \quad y\in[c,\infty).$$

Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} K(x)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-(1+x^2)c^2}}{1+x^2}\,dx$ очевидным образом сходится и все условия теоремы 9.2.8 на множестве $\mathbb{P}_\infty^\infty$ выполнены. Ее использование дает:

$$\begin{aligned} \int\limits_c^{+\infty} I(y)\,dy &= \int\limits_c^{+\infty} dy \int\limits_0^{+\infty} ye^{-(1+x^2)y^2}\,dx = \\ &= \int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_c^{+\infty} ye^{-(1+x^2)y^2}\,dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-(1+x^2)c^2}}{1+x^2}\,dx. \end{aligned}$$

Обозначим последний интеграл $J(c)$. Нетрудно установить (по теореме 9.2.5) непрерывность функции $J(c)$ для $c\in[0,1]$ и записать цепочку равенств, которые и приведут к требуемому результату

$$\begin{aligned} \int\limits_0^{+\infty} I(y)\,dy &= \lim_{c\to+0}\int\limits_c^{+\infty} I(y)\,dy = \lim_{c\to+0}\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-(1+x^2)c^2}}{1+x^2}\,dx = \\ &= \lim_{c\to+0} J(c) = J(0) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

9.2.5. Несобственные интегралы от неограниченной функции, зависящие от параметра. Рассмотрим полуоткрытый прямоугольник

$$\mathbb{P}_b = \{(x,y):\ a\leqslant x\ <\ b,\ c\leqslant y\leqslant d\},$$

функцию $f(x,y)$, определенную на этом множестве $\mathbb{P}_b$ и неограниченную в окрестности точки $x = b$ при любом фиксированном $y \in [c,d]$ (см. рис. 9.2.3, поверхность $EGHF$ — график функции $f(x,y)$).

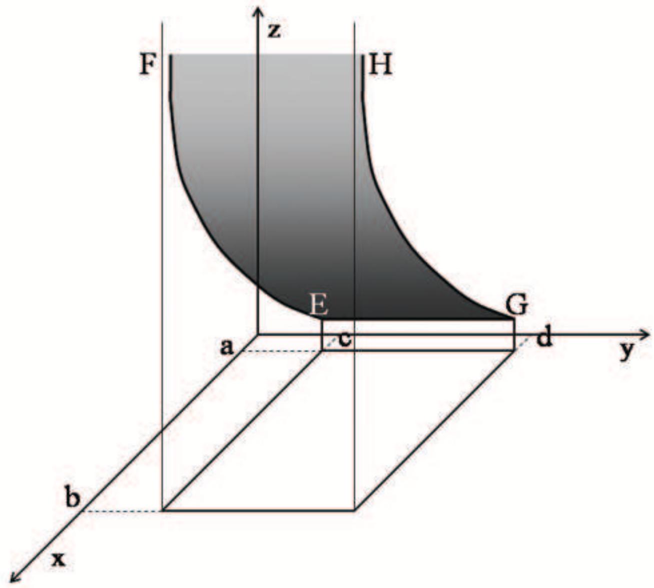

Рис 9.2.3. График функции $f(x,y)$ (затемненная поверхность $EGHF$)

Пусть несобственный интеграл (второго рода) $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ сходится при любом фиксированном $y \in [c,d]$. При этих условиях на отрезке $[c,d]$ определена функция

$$I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx, \tag{9.2.6}$$

которая называется несобственным интегралом второго рода, зависящим от параметра y.

Для несобственных интегралов второго рода без труда формулируется понятие равномерной сходимости, а также на этой базе записываются и доказываются теоремы о непрерывности, диференцируемости и интегрируемости функции $I(y)$ вида (9.2.6).

Заметим, что с помощью преобразования переменной x, несобственный интеграл второго рода, зависящий от параметра y, легко сводится к несобственному интегралу первого рода, зависящему от параметра.

9.3. Вычисление классических несобственных интегралов

9.3.1. Интеграл Дирихле. Интегралом Дирихле (или разрывным множителем Дирихле) обычно называют интеграл

$$I(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x}\,dx. \tag{9.3.1}$$

Вычислим его сначала при $y = 1$

$$I(1) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx. \tag{9.3.2}$$

Он имеет одну особенность за счет бесконечного промежутка интегрирования. Его сходимость очевидным образом следует из признака Дирихле сходимости несобственного интеграла. В точке $x = 0$ интеграл (9.3.2) особенности не имеет, т.к. подынтегральная функция $\dfrac{\sin x}{x}$ ограничена в окрестности нуля. Заметим, что вычисление интеграла (9.3.2) стандартным образом с помощью формулы Ньютона-Лейбница невозможно (интеграл $\displaystyle\int \frac{\sin x}{x}\, dx$ — "неберущийся"). Укажем другой путь с помощью теории интегралов, зависящих от параметра. Введем в рассмотрение интеграл

$$J(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x}\, dx, \tag{9.3.3}$$

который сходится при любом $\alpha \in [0, +\infty)$. Очевидно, что

$$J(0) = I(1).$$

Все операции для вычисления интеграла $J(0)$ разобьем на четыре последовательных этапа. Знаком "?" отметим равенства, требующие доказательства.

1) Вычисление $J'(\alpha)$

$$\begin{aligned} J'(\alpha) \ &\overset{?}{=}\ \int\limits_0^{+\infty} \left(e^{-\alpha x} \cdot \frac{\sin x}{x}\right)'_\alpha dx = -\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x\, dx = \\ &= \ -\frac{e^{-\alpha x}(\alpha \sin x - \cos x)}{1+\alpha^2}\Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{1+\alpha^2}, \quad \alpha > 0. \end{aligned}$$

2) Вычисление $J(\alpha)$

$$J(\alpha) \ = \ -\int \frac{d\alpha}{1+\alpha^2} = -\operatorname{arctg}\alpha + C, \quad \alpha > 0.$$

3) Отысканние константы интегрирования C

$$\begin{aligned} 0 \ &\overset{?}{=}\ \lim_{\alpha\to+\infty} J(\alpha) = -\lim_{\alpha\to+\infty} (\operatorname{arctg}\alpha + C) = -\tfrac{\pi}{2} + C \Rightarrow C = \tfrac{\pi}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow\ J(\alpha) = \tfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\alpha. \end{aligned}$$

4) Вычисление $J(0)$

$$J(0) \ \overset{?}{=}\ \lim_{\alpha\to+0} J(\alpha) = \lim_{\alpha\to+0} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\alpha\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Обоснуем теперь законность всех четырех шагов. Для доказательства справедливости первого проверим условия теоремы 9.2.6 (о дифференцируемости несобственного интеграла, зависящего от параметра). Функции $f(x,\alpha) = e^{-\alpha x} \cdot \dfrac{\sin x}{x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha} = -e^{-\alpha x} \cdot \sin x$ непрерывны на множестве

$$\mathbb{P}_\infty = \{(x,\alpha) :\ 0 \leqslant x < +\infty,\ c \leqslant \alpha \leqslant d,\ c > 0\},$$

если считать, что по определению $f(0,\alpha) = \lim\limits_{x\to+0} e^{-\alpha x} \cdot \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

Интеграл $J(\alpha_0) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha_0 x} \cdot \frac{\sin x}{x}\, dx$ сходится при некотором $\alpha_0 \in [c, d]$, так как он сходится для любого $\alpha \geqslant 0$.

Равномерная сходимость интеграла

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x\, dx \tag{9.3.4}$$

по параметру α для $\alpha_0 \in [c, d]$ легко следует из признака Вейерштрасса (теорема 9.2.2). Действительно, $|e^{-\alpha x} \sin x| \leqslant e^{-cx}, \quad \alpha \in [c, d]$, $c > 0$, и интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-cx}\, dx$ сходится.

Таким образом, все условия теоремы 9.2.6 выполнены и возможность дифференцирования функции $J(\alpha)$ на промежутке $[c, d]$, $c > 0$ по формуле (9.2.4) доказана. Заметим, что равномерная сходимость интеграла (9.3.4) на множестве $(0, d]$ отсутствует, а значит и доказать дифференцируемость функции $J(\alpha)$ на этом промежутке по теореме 9.2.6 невозможно.

Существование производной функции $J(\alpha)$ для $\alpha > 0$ следует из других соображений, а именно, из произвольности чисел c и d ($c > 0$, $c < d$). Условие ($\alpha > 0$) не позволяет результаты этого первого шага прямо использовать для вычисления величины $J(0)$, т.е. при $\alpha = 0$.

Второй шаг (отыскание первообразной) очевиден.

Третий шаг (вычисление постоянной интегрирования C) базируется на равенстве $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} J(\alpha) = 0$, которое следует из оценки $|J(\alpha)| \leqslant \frac{1}{\alpha}$. Действительно, верна следующая цепочка равенств и неравенств:

$$\begin{aligned} \big|J(\alpha)\big| &= \left| \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cdot \frac{\sin x}{x}\, dx \right| \leqslant \int\limits_0^{+\infty} \left| e^{-\alpha x} \cdot \frac{\sin x}{x} \right| dx = \\ &= \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx < \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\, dx = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\alpha}. \end{aligned}$$

Законность четвертого шага основана на непрерывности функции $J(\alpha)$ для $\alpha \in [0, +\infty)$ и, следовательно, справедливости равенства $J(0) = \lim\limits_{\alpha \to +0} J(\alpha)$. Проверим условия теоремы 9.2.5, которая и устанавливает непрерывность функции $J(\alpha)$ для $\alpha \in [0, +\infty)$.

Равномерная сходимость интеграла $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cdot \frac{\sin x}{x}\, dx$ для $\alpha \in [0, +\infty)$ доказывается с помощью признака Абеля-Дирихле (теорема 9.2.3, пара условий a_2, b_2, где $f(x, \alpha) = \frac{\sin x}{x}$ и $g(x, \alpha) = e^{-\alpha x}$). Непрерывность функции $f(x, \alpha) = e^{-\alpha x} \cdot \frac{\sin x}{x}$ для $x \geqslant 0$, $\alpha \geqslant 0$ уже установлена на первом этапе.

Таким образом, все операции при вычислении интеграла $J(0)$ законны и

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Рассмотрим теперь интеграл (9.3.1) и допустим, что $y > 0$. Сделаем в указанном интеграле замену переменной, полагая $xy = t$. Тогда

$$I(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

При $y < 0$ произведем замену переменной, полагая $xy = -t\,(t > 0)$. Тогда

$$I(y) = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = -\frac{\pi}{2}.$$

При $y = 0$ интеграл (9.3.1) равен нулю.

Итак, для интеграла Дирихле получено выражение

$$I(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x}\, dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \text{если } y > 0, \\ 0, & \text{если } y = 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{если } y < 0. \end{cases}$$

Разделив полученные равенства на $\frac{\pi}{2}$, получим аналитическую запись для известной функции $\operatorname{sign} y$, а именно:

$$\operatorname{sign} y = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x}\, dx, \quad y \in (-\infty, +\infty).$$

9.3.2. Интеграл Эйлера-Пуассона. Интеграл

$$J_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \tag{9.3.5}$$

называется интегралом Эйлера-Пуассона.

Рассмотрим функцию

$$\Psi(y) = \int_0^{+\infty} y e^{-(xy)^2}\, dx. \tag{9.3.6}$$

Для $y > 0$ функция $\Psi(y)$ легко вычисляется:

$$\Psi(y) = \int_0^{+\infty} y e^{-(xy)^2}\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-(xy)^2}\, d(xy) = \int_0^{+\infty} e^{-z^2}\, dz = J_0 = \mathrm{const}\,.$$

При $y = 0$ функция $\Psi(y)$, равна нулю, т.е.

$$\Psi(y) = \begin{cases} J_0, & \text{если } y > 0, \\ 0, & \text{если } y = 0. \end{cases}$$

Ясно, что несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} \Psi(y) \cdot e^{-y^2}\, dy \tag{9.3.7}$$

сходится и его значение не изменится, если функцию $\Psi(y)$ изменить в одной точке $y = 0$, положив $\Psi(0) = J_0$. Тогда последний интеграл равен

$$\int_0^{+\infty} J_0 e^{-y^2}\, dy = J_0 \int_0^{+\infty} e^{-y^2}\, dy = J_0^2.$$

и его вычисление приведет к требуемому результату — нахождению величины J_0.

Перепишем интеграл (9.3.7), подставив функцию $\Psi(y)$ в виде (9.3.6)

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} y e^{-(xy)^2}\, dx \right) e^{-y^2}\, dy = \int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} y e^{-(1+x^2)y^2}\, dx.$$

Последний интеграл вычислен в примере 9.2.5 с использованием теоремы о возможности изменения порядка интегрирования. Заметим, что в примере непосредственно применить эту теорему для рассматриваемого интеграла не удается, приходится вводить множество

$$\mathbb{P}_\infty^\infty = \{(x, y) : \ 0 \leqslant x < +\infty,\ c \leqslant y < +\infty,\ c > 0\}.$$

А уже затем предельным переходом при $c \to +0$ получать окончательный результат

$$J_0^2 = \int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} y e^{-(1+x^2)y^2}\, dx = \frac{\pi}{4}$$

или

$$J_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

9.3.3. Формула Фруллани. Пусть функция $f(x)$ непрерывна для $x \in [0, +\infty)$ и интеграл $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\, dx$ имеет смысл при некотором $A > 0$ (отметим, что тогда он имеет смысл при любом $A > 0$). Тогда справедлива формула Фруллани

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx = f(0) \ln \frac{b}{a}, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Для доказательства формулы рассмотрим функцию

$$F(x) = \int \frac{f(x)}{x} \quad \text{для} \quad x > 0$$

(отношение $\dfrac{f(x)}{x}$ непрерывно для $x > 0$ и первообразная $F(x)$ существует). Тогда

$$\int_A^{+\infty} \frac{f(ax)}{x}\, dx = \int_{A\cdot a}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt = F(+\infty) - F(A \cdot a).$$

Здесь $F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$, причем этот предел существует, т.к. интеграл

$$\int\limits_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx$$

сходится.

Аналогично получим

$$\int\limits_A^{+\infty} \frac{f(bx)}{x}\,dx = F(+\infty) - F(A\cdot b).$$

Следовательно,

$$\int\limits_A^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = F(A\cdot b) - F(A\cdot a) = \int\limits_{A\cdot a}^{b\cdot A} \frac{f(x)}{x}\,dx.$$

Применяя к последнему интегралу первую теорему о среднем и устремляя A к нулю, с учетом непрерывности функции $f(x)$ получаем

$$\lim_{A\to+0} \int\limits_A^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \lim_{A\to+0}\left(f(\xi)\ln\frac{b}{a}\right) = f(0)\ln\frac{b}{a},$$

где $A\cdot a < \xi < A\cdot b \quad (a<b)$.

Формула Фруллани доказана.

9.3.4. Вычисление интеграла $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}\,dx$**,** $0<a<b$**.** Очевидно, что указанный интеграл сходится. Он имеет только одну особенность (при $x\to+\infty$). В окрестности же нуля функция $\dfrac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}$ ограничена, т.к. существует предел

$$\lim_{x\to+0} \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2} = \lim_{x\to+0}\left(\frac{e^{-ax^2}-1}{x^2} - \frac{e^{-bx^2}-1}{x^2}\right) = b-a.$$

Рассмотрим функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-ax^2y}-e^{-bx^2}}{x^2}, & \text{если } x\neq 0,\ y\geqslant 0,\\ b-y, & \text{если } x=0,\ y\geqslant 0 \end{cases}$$

и несобственный интеграл, зависящий от параметра

$$I(y) = \int\limits_0^{+\infty} f(x,y)\,dx. \tag{9.3.8}$$

Легко проверить условия теоремы 9.2.6 на множестве

$$\mathbb{P}_\infty = \{(x,y):\ 0\leqslant x<+\infty,\ a\leqslant y\leqslant b,\ 0<a<b\}$$

для интеграла (9.3.8). Действительно, функции

$$f(x,y) \text{ и } f'_y(x,y) = \begin{cases} -e^{-x^2 y}, & \text{если } x \neq 0,\ y \geqslant 0, \\ -1, & \text{если } x = 0,\ y \geqslant 0, \end{cases}$$

непрерывны на множестве $\mathbb{P}_\infty$. (Проверить самостоятельно!) Интеграл (9.3.8) сходится при $y_0 = b$ ($I(b) = 0$). А интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx = -\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2 y}\,dx$$

сходится равномерно по y для $y \in [a,b]$ (используется признак Вейерштрасса, мажорирующая функция e^{-ax^2}). Тогда

$$\begin{aligned} I'(y) &= -\int\limits_0^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx = -\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2 y}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{y}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2 y}\,d(x\cdot\sqrt{y}) = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{y}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-z^2}\,dz = -\frac{1}{\sqrt{y}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{y}} \end{aligned}$$

(см. пункт 9.3.2, интерал Эйлера-Пуассона). Отсюда получается, что

$$I(y) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = -\sqrt{\pi\cdot y} + C.$$

Но $I(b) = 0$ и значение постоянной интегрирования C определяется: $C = \sqrt{\pi\cdot b}$.

Таким образом, функция $I(y)$ запишется в виде:

$$I(y) = -\sqrt{\pi\cdot y} + \sqrt{\pi\cdot b}.$$

Итак,

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2}\,dx = I(a) = \sqrt{\pi}(\sqrt{b} - \sqrt{a}) \quad (0 < a < b).$$

9.4. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье

Уже известно представление функции $f(x)$ в виде ряда Фурье. Такая функция должна быть обязательно периодической с конечным периодом. Если это условие не выполнено, то теория рядов Фурье не может быть использована, например, для представления функции $f(x)$ на всей числовой оси. Тогда может быть применен, так называемый интеграл Фурье. Изучим это понятие.

9.4.1. Определение интеграла Фурье и теорема о его сходимости. Будем считать, что функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей вещественной оси $(-\infty,+\infty)$, т.е. потребуем, чтобы существовал несобственный интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx. \tag{9.4.1}$$

Определение 9.4.1. *Будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит на бесконечной прямой $(-\infty,+\infty)$ классу RL_1 и писать $f(x) \in RL_1\,(-\infty,+\infty)$, если функция $f(x)$ интегрируема по Риману на любом сегменте и существует несобственный интеграл (9.4.1).*

Аналогично определяется класс функций $RL_1[0,+\infty)$.

Определение 9.4.2. *Пусть функция* $f(x) \in RL_1(-\infty,+\infty)$. *Интеграл*

$$\int\limits_0^{+\infty} [a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x]\,d\lambda, \quad |x| < \infty, \tag{9.4.2}$$

где

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt, \quad \lambda \in [0,+\infty) \tag{9.4.3}$$

и

$$b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\,dt, \quad \lambda \in [0,+\infty), \tag{9.4.4}$$

называется интегралом Фурье функции $f(x)$.

Заметим, что оба интеграла $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ существуют для любой функции $f(x) \in RL_1(-\infty,+\infty)$.

Подставляя в формулу (9.4.2) выражения (9.4.3) и (9.4.4) для $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$, получим, что функции $f(x) \in RL_1(-\infty,+\infty)$ сопоставляется интеграл Фурье

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt. \tag{9.4.5}$$

Как и в теории рядов Фурье, так и в теории интегралов Фурье, основная задача — это указать условия для функции $f(x)$, при выполнении которых интеграл Фурье сходится к $f(x)$ (в точке непрерывности) или к $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ (в точке разрыва первого рода).

Теорема 9.4.1 (признак Дини сходимости интеграла Фурье)**.** *Пусть функция* $f(x) \in RL_1(-\infty,+\infty)$ *и в точке* $x_0 \in (-\infty,+\infty)$ *существуют конечные односторонние пределы* $f(x_0 \pm 0) = \lim\limits_{x\to x_0\pm 0} f(x)$. *Если в точке* x_0 *выполнено условие Дини, т.е. существует* $h > 0$ *такое, что несобственный интеграл*

$$\int\limits_0^h \frac{\big|(f(x_0+t)+f(x_0-t)) - (f(x_0+0)+f(x_0-0))\big|}{t}\,dt$$

сходится, то интеграл Фурье (9.4.5) для функции $f(x)$ *сходится в точке* x_0 *к значению*

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

Следствие 9.4.1. *Пусть функция* $f(x) \in RL_1(-\infty,+\infty)$ *и кусочно непрерывна на любом конечном отрезке. Пусть для любого* $x_0 \in (-\infty,+\infty)$ *существуют конечные односторонние производные* $f'_-(x)$, $f'_+(x)$. *Тогда интеграл Фурье (9.4.5) для функции* $f(x)$ *сходится всюду на* $(-\infty,+\infty)$ *к функции* $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Заметим, что для четной функции $f(x) \in RL_1(-\infty, +\infty)$

$$a(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} f(t) \cos \lambda t \, dt, \quad b(\lambda) = 0, \tag{9.4.6}$$

следовательно, ее интеграл Фурье имеет вид

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \cos \lambda x \, d\lambda \int\limits_0^{+\infty} f(t) \cos \lambda t \, dt, \quad x \in (-\infty, +\infty). \tag{9.4.7}$$

Для нечетной функции $f(x)$ соответственно получим

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \sin \lambda x \, d\lambda \int\limits_0^{+\infty} f(t) \sin \lambda t \, dt, \quad x \in (-\infty, +\infty). \tag{9.4.8}$$

Если функция $f(x)$ определена в промежутке $[0, +\infty)$, $f(x) \in RL_1 [0, +\infty)$, то ее интеграл Фурье можно представить как в виде (9.4.7), так и в виде (9.4.8), доопределив $f(x)$ на промежутке $(-\infty, 0)$ в первом — четным, а во втором — нечетным образом.

9.4.2. Комплексная форма интеграла Фурье. Далее для простоты записи будем считать, что выполнены все условия следствия из теоремы 9.4.1 и функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой оси. Тогда справедлива формула Фурье

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(x-t) \, dt$$

и так как подынтегральная функция четная относительно переменной λ, то

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(x-t) \, dt. \tag{9.4.9}$$

Заменим в последнем интеграле формально функцию $\cos \lambda(x-t)$ на $\sin \lambda(x-t)$ и исследуем, когда такая формула

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \lambda(x-t) \, dt$$

имеет смысл.

Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \lambda(x-t) \, dt$ сходится, причем равномерно по переменной $\lambda \in (-\infty, +\infty)$ (см. признак Вейерштрасса, теорема 9.2.2). Следовательно, интеграл есть непрерывная функция переменной λ и интеграл уже от этой функции

$$\int\limits_{-\eta}^{+\eta} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \lambda(x-t) \, dt$$

существует и равен нулю для любого η (интегрируемая функция — нечетная). Однако при сделанных предположениях относительно функции f нельзя гарантировать сходимость несобственного интеграла по переменной λ

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda(x-t)\,dt,$$

но можно утверждать существование этого же интеграла по переменной λ в смысле главного значения, т.е. существование

$$\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda(x-t)\,dt, \tag{9.4.10}$$

причем этот интеграл равен нулю.

Формулу (9.4.9) можно также записать в виде

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(x-t)\,dt$$

или

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\left[\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(x-t)\,dt+\right. \\ &+ \left. i\cdot\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda(x-t)\,dt\right] \end{aligned} \tag{9.4.11}$$

(мнимая часть последнего выражения, т.е. интеграл (9.4.10)) равна нулю).

Используя формулу Эйлера $e^{ia}=\cos a+i\sin a$, перепишем равенство (9.4.11) в форме

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\lambda(x-t)}\,dt, \tag{9.4.12}$$

которая и называется комплексной записью интеграла Фурье.

9.4.3. Преобразование Фурье. Запишем формулу (9.4.12) в виде

$$f(x)=\text{v.p.}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x}\,d\lambda\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt. \tag{9.4.13}$$

Введем для интеграла по переменной t обозначение

$$\Phi(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\lambda t}\,dt. \tag{9.4.14}$$

Тогда формула (9.4.12) примет вид

$$f(x)=\text{v.p.}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\lambda)e^{i\lambda x}\,d\lambda. \tag{9.4.15}$$

Замечая определенную взаимосвязь между равенствами (9.4.14) и (9.4.15), дадим следующие определения.

Определение 9.4.3. *Функция Φ, которая ставится в соответствие функции f формулой*

$$\Phi(\lambda) = \text{v.p.}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt \tag{9.4.16}$$

называется преобразованием Фурье, иногда добавляют — прямым преобразованием Фурье, функции f и обозначается $F[f]$ или $\widehat{f}$.

Определение 9.4.4. *Функция Ψ, которая ставится в соответствие функции f формулой*

$$\Psi(x) = \text{v.p.}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)e^{i\lambda x}\,d\lambda \tag{9.4.17}$$

называется обратным преобразованием Фурье функции f и обозначается $F^{-1}[f]$.

Преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье определены на множестве функций, для которых интегралы (9.4.16) и (9.4.17) существуют в смысле главного значения. Это множество содержит в себе в частности, множество всех абсолютно интегрируемых на всей вещественной оси функций, для которых интегралы в формулах (9.4.16) и (9.4.17) можно понимать как обычные несобственные интегралы, а не только как интегралы в смысле главного значения. Терминология (прямое преобразование Фурье, обратное преобразование Фурье) оправдывается тем, что для определенного класса функций преобразования F и F^{-1} взаимно обратны. Это следует из леммы

Лемма 9.4.1. *Если функция $f(x)$*
a) непрерывна для $x \in (-\infty, +\infty)$,
b) абсолютно интегрируема на всей вещественной оси,
c) имеет конечные односторонние производные $f'_+(x)$ и $f'_-(x)$ для $x \in (-\infty, +\infty)$, то

$$F^{-1}[F[f]] = F[F^{-1}[f]] = f.$$

Доказательство. Из следствия к теореме 9.4.1 вытекает сходимость интеграла Фурье функции $f(x)$ к функции $f(x)$ для $x \in (-\infty, +\infty)$, т.е. равенство

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt.$$

От этого соотношения можно перейти к равенству (9.4.12), а затем к (9.4.13), которое уже записывается в виде

$$f = F^{-1}[F[f]]$$

и первая формула обращения доказана. Справедливость второй легко следует из того, что равенство (9.4.12) не изменится, если показатель для числа e, т.е. величина $i\lambda(x-t)$ сменит знак на противоположный $i\lambda(t-x)$. Тогда формула (9.4.12) запишется в виде

$$f(x) = \text{v.p.}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\lambda t}\,dt\right]e^{-i\lambda x}\,d\lambda$$

или

$$f = F[F^{-1}[f]],$$

что и требовалось доказать. $\square$

Сформулируем без доказательства еще две леммы.

Лемма 9.4.2. *Преобразование Фурье F и обратное преобразование Фурье F^{-1} обладает свойством линейности, т.е.*

$$F[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2] = \lambda_1 F[f_1] + \lambda_2 F[f_2],$$
$$F^{-1}[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2] = \lambda_1 F^{-1}[f_1] + \lambda_2 F^{-1}[f_2],$$

где λ_1 и λ_2 — произвольные числа. Предполагается, что $F[f_i]$ и $F^{-1}[f_i]$, $\quad i = 1,2$ существуют.

Лемма 9.4.3. *Преобразование Фурье F, а также обратное преобразование Фурье F^{-1}, взаимно однозначно отображают все множество непрерывных абсолютно интегрируемых на всей вещественной оси функций, имеющих в каждой точке односторонние производные, во множество функций, для которых интегралы (9.4.15) и (9.4.16) существуют в смысле главного значения.*

Пример 9.4.1. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-a|x|}$, $a > 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

Решение.

$$\begin{aligned}
F[f] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} e^{-i\lambda t}\, dt = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{at} \cdot e^{-i\lambda t}\, dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-at} \cdot e^{-i\lambda t}\, dt = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-(a-i\lambda)t}\, dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-(a+i\lambda)t}\, dt = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a-i\lambda} + \frac{1}{a+i\lambda} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{a}{a^2+\lambda^2}.
\end{aligned}$$

Ответ: $\widehat{f}(\lambda) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \cdot \dfrac{a}{a^2+\lambda^2}, \quad \lambda \in (-\infty, +\infty)$.

9.4.4. Свойства преобразования Фурье абсолютно интегрируемых функций. В этом пункте будут сформулированы некоторые свойства преобразования Фурье *абсолютно интегрируемой на всей вещественной оси функции* $f(x)$, которая принимает, вообще говоря, комплексные значения, а ее аргумент действителен.

Лемма 9.4.4. *Преобразование Фурье $F[f]$ ограничено на всей вещественной оси, причем*

$$\left|\widehat{f}(\lambda)\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|f(t)\right| dt.$$

Следствие 9.4.2. *Если последовательность функций $\{f_n(x)\}$ и функция $f(x)$ таковы, что*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|f_n(t) - f(t)\right| dt = 0,$$

то последовательность $\{\widehat{f}_n(\lambda)\}$ *равномерно на всей вещественной оси сходится к функции* $\widehat{f}(\lambda)$.

Лемма 9.4.5. *Преобразование Фурье* $\widehat{f}(\lambda)$ *есть непрерывная функция на всей числовой оси и*

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty}\widehat{f}(\lambda)=0.$$

Заметим только, что преобразование Фурье "улучшает" (если можно так выразиться) свойства преобразуемой функции $f(x)$. Этот факт и позволяет добиться результата с помощью преобразования Фурье при решении некоторых задач, например, уравнений математической физики.

9.4.5. Преобразование Фурье производных и производные преобразования Фурье.

Лемма 9.4.6. *Пусть абсолютно интегрируемая на всей числовой оси функция* f *имеет* n *абсолютно интегрируемых и непрерывных на всей оси производных. Тогда*

$$F[f^{(k)}]=(i\lambda)^kF[f],\quad k=0,1,2,\ldots,n,$$

и существует постоянная $M>0$ *такая, что*

$$\bigl|F[f]\bigr|\leqslant\frac{M}{\bigl|\lambda^n\bigr|}.$$

Лемма 9.4.7. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна, а функции* $f(x), xf(x),\ldots,x^nf(x)$ *абсолютно интегрируемы на всей числовой оси, то преобразование Фурье функции* f *является* n *раз дифференцируемой на всей числовой прямой функцией и*

$$F^{(k)}[f]=\frac{1}{i^k}F[x^kf].$$

Пример 9.4.2. Рассмотрим бесконечный стержень, точки которого задаются координатой $x\in(-\infty,+\infty)$. Пусть температура стержня в каждой такой точке x и в момент времени t, $(t\geqslant 0)$ определяется функцией $U(x,t)$. Рассмотрим далее задачу о распространении тепла в этом стержне, если задана начальная температура, т.е.

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

где $\varphi(x)$—известная функция.

Найти функцию $U(x,t)$, которая удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$U_t=\alpha^2u_{xx},\quad -\infty<x<+\infty \tag{9.4.18}$$

при условии

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad -\infty<x<+\infty, \tag{9.4.19}$$

где α^2 — постоянная, определяющая свойства теплопроводности материала стержня.

(Здесь сформулирована задача Коши для уравнения теплопроводности.)

Проиллюстрируем только технику решения поставленной задачи с использованием преобразования Фурье.

Решение. Обозначим образ функции $U(x,t)$ при осуществлении преобразования Фурье по переменной x через $U(\lambda,t)$, т.е.

$$F[u(x,t)]=U(\lambda,t).$$

Аналогично,

$$F[u'_t(x,t)]=U'_t(\lambda,t),$$

$$F[u(x,0)] = F[\varphi(x)] = \Phi(\lambda).$$

Преобразуем равенства (9.4.18) и (9.4.19)

$$U'_t(\lambda,t) = -\alpha^2\lambda^2 U(\lambda,t), \tag{9.4.20}$$

$$U(\lambda,0) = \Phi(\lambda). \tag{9.4.21}$$

Использована линейность преобразования Фурье и лемма 9.4.6. Уравнение (9.4.20) при условии (9.4.21) легко решается

$$U(\lambda,t) = \Phi(\lambda)e^{-\alpha^2\lambda^2 t}.$$

Теперь используя обратное преобразование Фурье по переменной λ, находим искомую функцию $U(x,t)$

$$U(x,t) = F^{-1}\big[\Phi(\lambda)\cdot e^{-\alpha^2\lambda^2 t}\big].$$

Применяя технику работы с преобразованием Фурье и обратным преобразованием Фурье окончательно получим:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)e^{-(x-y)^2/4\alpha^2 t}\,dy.$$

9.5. Гамма- и бета-функции Эйлера

Из школьного раздела математики хорошо известны элементарные функции: степенные, показательные, тригонометрические и т.д. По мере освоения курса математического анализа круг хорошо изученных функций расширяется. К элементарным добавляются функции, задаваемые с помощью интегрирования, суммирования рядов и т.п. Изучим теперь две важные неэлементарные функции, которые определяются с помощью интеграла, зависящего от параметра, и называются интегралами Эйлера. Они часто используются при решении различных задач математического анализа и его приложений. Значения этих функций табулированы.

9.5.1. Определение интегралов Эйлера. Область их существования.

Определение 9.5.1. *Эйлеровым интегралом первого рода или "бета-функцией" называется интеграл*

$$B(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx. \tag{9.5.1}$$

Определение 9.5.2. *Эйлеровым интегралом второго рода рода или "гамма-функцией" называется интеграл*

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}\,dx. \tag{9.5.2}$$

Изучение свойств функций $B(p,q)$ и $\Gamma(p)$, как всегда, начнем с отыскания области определения. Докажем, что функция $B(p,q)$ определена для всех положительных значений параметров p и q, а функция $\Gamma(p)$ для всех положительных значений p.

Рассмотрим сначала интеграл (9.5.1). При $p \geqslant 1$ и $q \geqslant 1$ его подынтегральная функция $x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ непрерывна и интеграл (9.5.1) существует как собственный.

Поэтому функция $B(p,q)$ определена для всех отмеченных значений p и q. Пусть теперь выполняются одно или оба из следующих неравенств:

$$0 < p < 1, \quad 0 < q < 1.$$

В этом случае одна или обе из точек $x = 0$ и $x = 1$ являются особыми точками подынтегральной функции. Чтоб разделить эти особенности представим $B(p,q)$ в следующей форме:

$$B(p,q) = \int\limits_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx + \int\limits_{1/2}^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = B_1(p,q) + B_2(p,q).$$

Для интеграла $B_1(p,q) = \int\limits_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ особой точкой будет точка $x = 0$ (функция $x^{p-1} = \dfrac{1}{x^{1-p}}$ не ограничена в окрестности этой точки при $p \in (0,1)$)). Функция же $(1-x)^{q-1}$ ограничена на отрезке $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ некоторой постоянной C при любом q (эта функция непрерывна на указанном отрезке). Следовательно, справедливы неравенства

$$0 < x^{p-1}(1-x)^{q-1} \leqslant Cx^{p-1}, \quad x \in \left(0; \frac{1}{2}\right].$$

Интеграл же $\int\limits_0^{1/2} Cx^{p-1}\,dx$ сходится при $p > 0$ и любом q (это интеграл вида $\int\limits_0^{1/2} \dfrac{dx}{x^\alpha}$, который сходится при $\alpha < 1$). Теперь сходимость интеграла $B_1(p,q)$ по признаку сравнения становится очевидной (при $0 < p < 1$ и любом q).

Рассуждая совершенно аналогично, легко получить, что интеграл $B_2(p,q)$ сходится при $0 < q < 1$ и любом p.

Окончательно получим, что интеграл (9.5.1) сходится при $p > 0$ и $q > 0$, т.е. функция $B(p,q)$ определена для всех положительных значений p и q.

Найдем далее область определения функции $\Gamma(p)$, т.е. область сходимости интеграла (9.5.2). Представим этот интеграл в виде

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^1 e^{-x}x^{p-1}\,dx + \int\limits_1^\infty e^{-x}x^{p-1}\,dx = \Gamma_1(p) + \Gamma_2(p), \tag{9.5.3}$$

чтобы разделить его две особенности (точку $x = 0$ и интегрирование по полупрямой). Интеграл $\Gamma_1(p)$ сходится при $p > 0$, что сразу следует из признака сравнения (мажорирующая функция x^{p-1} для функции $e^x x^{p-1}$ на отрезке $[0,1]$).

Сходимость интеграла $\Gamma_2(p)$ для любого p устанавливается на основании признака сравнения в предельной форме. Достаточно рассмотреть, например, функцию $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ и зная, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2}$ сходится, убедиться, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}x^{p-1}}{g(x)} = 0$ для любого значения p.

Итак, доказано, что областью определения функции $\Gamma(p)$ является полупрямая $p > 0$.

Заметим, что интегралы (9.5.1) и (9.5.2) расходятся при $p \leqslant 0$ и $q \leqslant 0$, что немедленно следует из признака сравнения сходимости несобственных интегралов.

9.5.2. Непрерывность интегралов Эйлера. Докажем, что функция $B(p,q)$ непрерывна в своей области определения, т.е. в квадранте $\Pi = \{(p,q): \ p > 0, \ q > 0\}$, а функция $\Gamma(p)$ — в своей, т.е. при $p > 0$. Начнем исследование с функции $B(p,q)$. Зафиксируем сначала два произвольных значения $p_0 > 0$ и $q_0 > 0$ и докажем непрерывность функции $B(p,q)$ на множестве $\Pi_0 = \{(p,q): \ p \geqslant p_0, q \geqslant q_0\}$. Воспользуемся для этого аналогом теоремы 9.2.5, т.е. проверим непрерывность подынтегральной функции $f(x,p,q) = x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ на множестве $\Pi_0 \times (0,1)$ и равномерную сходимость интеграла (9.5.1) относительно параметров p и q на множестве Π_0. Непрерывность функции $f(x,p,q)$ на множестве $\Pi_0 \times (0,1)$ фактически очевидна, равномерная же сходимость вытекает из признака Вейерштрасса (теорема 9.2.2). Действительно, при $x \in (0,1)$ и $(p,q) \in \Pi_0$ справедливо неравенство

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1} \leqslant x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}.$$

Сходимость же интеграла

$$B(p_0,q_0) = \int\limits_0^1 x^{p_0-1}(1-x)^{1-q_0}\,dx \quad (p_0 > 0, q_0 > 0)$$

показана выше в п. 9.5.1.

Итак, непрерывность функции $B(p,q)$ на множестве Π_0 доказана. В силу произвольности значений p_0 и q_0 свойство непрерывности выполняется и на множестве Π.

Для доказательства непрерывности функции $\Gamma(p)$ на полупрямой $p > 0$ зафиксируем два произвольных значения p_0 и p_1 $\quad (0 < p_0 \leqslant p_1)$ и докажем равномерную сходимость интеграла $\Gamma(p)$ на отрезке $[p_0,p_1]$. Для этого достаточно записать функцию $\Gamma(p)$ в виде суммы (9.5.3) и проверить, что интеграл $\Gamma_1(p)$ сходится равномерно для $p \geqslant p_0$, а интеграл $\Gamma_2(p)$ — для $p \leqslant p_1$.

Последние два результата легко вытекают из признака Вейерштрасса, а вместе они дают, что сумма $\Gamma(p) = \Gamma_1(p) + \Gamma_2(p)$ равномерно сходится для $p \in [p_0,p_1]$. Непрерывность подынтегральной функции $f(x,p) = e^{-x}x^{p-1}$ на множестве $(0,+\infty)\times(p_0,p_1)$ очевидна.

Итак, из теоремы 9.2.5 следует непрерывность функции $\Gamma(p)$ на отрезке $[p_0,p_1]$. В силу произвольности значений p_0 и p_1 $(0 < p_0 \ \leqslant \ p_1 \ < +\infty)$ свойство непрерывности распространяется на полупрямую $p > 0$.

9.5.3. Дифференцируемость функции $\Gamma(p)$. Формула приведения. График функции $\Gamma(p)$. Покажем сначала, что функция $\Gamma(p)$ имеет производную в своей области определения, и эта производная записывается по формуле

$$\Gamma'(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\ln x\,dx, \quad p > 0. \tag{9.5.4}$$

Для этого достаточно проверить условия теоремы 9.2.6. Эта проверка проводится почти дословно также как проверка условий теоремы 9.2.5 в предыдущем пункте 9.5.2 для функции $\Gamma(p)$. Рекомендуется выполнить это самостоятельно.

Применяя снова теорему 9.2.6, легко убедиться, что функция $\Gamma(p)$ имеет производную любого порядка и справедлива формула

$$\Gamma^{(n)}(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}\ln^n x\,dx. \tag{9.5.5}$$

Получим теперь формулу приведения для функции $\Gamma(p)$:

$$\Gamma(p+1) = p(p-1)\dots(p-n+1)\Gamma(p-n+1), \tag{9.5.6}$$

$$p > n-1, \quad n \text{ — натуральное.}$$

Вычислим для этого значение $\Gamma(p+1)$ по формуле интегрирования по частям:

$$\Gamma(p+1) = \int\limits_0^{+\infty} x^p e^{-x}\,dx = (-x^p e^{-x})\Big|_0^{+\infty} + p\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx = p\Gamma(p).$$

Последовательно применяя полученную формулу $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ для любого $p > n-1$ (n — натуральное число) найдем, что формула приведения (9.5.6) верна. Если подставить в нее $p = n$ и заметить, что $\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1$, то это приведет к следующему результату

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\dots 2\cdot 1 = n!. \tag{9.5.7}$$

Очевидно также, что $\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1$.

Полученные сведения о функции $\Gamma(p)$ позволяют дать качественную характеристику графика этой функции, изобразить его основные детали. Будем придерживаться стандартной методики построения графика функции.

1. Область определения функции $\Gamma(p)$: полупрямая $p > 0$.

2. Исследование непрерывности функции $\Gamma(p)$: непрерывна всюду в области определения.

3. Исследование первой и второй производной функции $\Gamma(p)$.

Первая производная вычисляется по формуле (9.5.4), а вторая — по формуле (9.5.5) при $n = 2$:

$$\Gamma''(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}\ln^2 x\,dx.$$

Так как $\Gamma''(p) > 0$ для любого значения $p > 0$, то первая производная $\Gamma'(p)$ всюду возрастает и, следовательно, может иметь только один корень. Поскольку $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ (см. вычисление этих величин выше), то по теореме Ролля корень p^* первой производной существует и расположен на интервале $(1,2)$.

Используя приближенные численные методы, можно получить, что $p^* \approx 1,46$ и $\Gamma(p^*) \approx 0,88$. Ясно, что p^* есть точка минимума функции $\Gamma(p)$ $\quad(\Gamma''(p^*) > 0)$ и ее график обращен выпуклостью вниз.

4. Асимптоты графика функции $\Gamma(p)$.

a) Существует вертикальная асимптота $p = 0$, т.к.

$$\lim_{p\to+0}\Gamma(p) = \lim_{p\to+0}\frac{\Gamma(p+1)}{p} = +\infty$$

($\Gamma(p)$ — непрерывная функция и $\Gamma(p+1)\underset{p\to+0}{\longrightarrow}\Gamma(1)$).

b) Не существует наклонных асимптот (можно доказать).

Однако, очевидно, что $\lim\limits_{p\to+\infty}\Gamma(p) = +\infty$.

На рис. 9.5.1 представлен график функции $\Gamma(p)$.

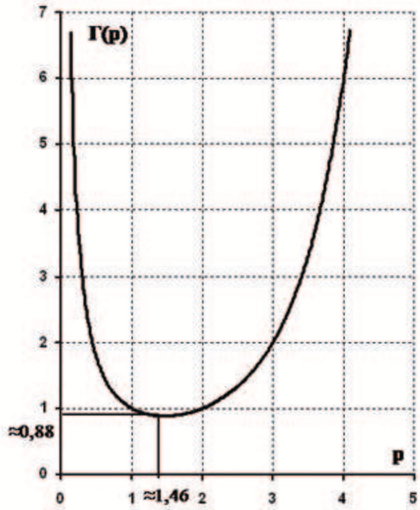

Рис 9.5.1. График функции $\Gamma(p)$

Замечание 9.5.1. *Для функции* $\Gamma(p)$ *можно доказать формулу дополнения*

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi},\quad 0<p<1. \tag{9.5.8}$$

9.5.4. Некоторые свойства функции $B(p,q)$. Докажем, что функция $B(p,q)$ обладает свойством симметрии

$$B(p,q)=B(q,p). \tag{9.5.9}$$

Сделаем для этого в интеграле (9.5.1) замену переменной, полагая $x=1-t$.

$$\begin{aligned} B(p,q) &= \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx=-\int\limits_1^0(1-t)^{p-1}t^{q-1}\,dt= \\ &= \int\limits_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}\,dt=B(q,p). \end{aligned}$$

Установим теперь формулы приведения для функции $B(p,q)$:

$$B(p,q+1)=\frac{q}{p+q}B(p,q),\quad p>0, q>0, \tag{9.5.10}$$

$$B(p+1,q)=\frac{p}{p+q}B(p,q),\quad p>0, q>0. \tag{9.5.11}$$

Рассмотрим функцию $B(p,q+1)=\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^q\,dx$, применим к последнему интегралу формулу интегрирования по частям и равенство $x^p=x^{p-1}-x^{p-1}(1-x)$.

Тогда для $p > 0, q > 0$ получим

$$\begin{aligned} B(p,q+1) &= \int_0^1 (1-x)^q d\left(\frac{x^p}{p}\right) = \frac{x^p}{p}(1-x)^q\Big|_0^1 + \frac{q}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}\,dx = \\ &= \frac{q}{p}\int_0^1 \left[x^{p-1}(1-x)^{q-1} - x^{p-1}(1-x)^q\right]dx = \\ &= \frac{q}{p}B(p,q) - \frac{q}{p}B(p,q+1) \end{aligned}$$

или

$$B(p,q+1) = \frac{q}{p}B(p,q) - \frac{q}{p}B(p,q+1).$$

Это равенство и дает формулу (9.5.10).

Совершенно аналогично выводится и формула (9.5.11). Бета-функция Эйлера $B(p,q)$ выражается через гамма-функцию $\Gamma(p)$ с помощью формулы

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p > 0, q > 0. \tag{9.5.12}$$

Ее доказательство можно найти в [**11**].

С помощью замены переменной $x = \dfrac{1}{1+t}$ можно получить другую формулу для функции $B(p,q)$:

$$B(p,q) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt. \tag{9.5.13}$$

9.5.5. Вычисление определенных интегралов с помощью Эйлеровых интегралов. Как уже указывалось выше, Эйлеровы интегралы представляют собой хорошо изученные неэлементарные функции, значения которых табулированы и соответствующие таблицы помещены в справочники по математике. Задача считается решенной, если она приводится к значению гамма или бета-функции.

Рассмотрим примеры вычисления интегралов (обычных определенных и несобственных).

Пример 9.5.1. Вычислить интеграл

$$J_1 = \int_0^{+\infty} x^{\frac{1}{4}}(1+x)^{-2}\,dx.$$

Решение. Запишем интеграл J_1 в виде:

$$J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{5}{4}-1}}{(1+x)^{\frac{5}{4}+\frac{3}{4}}}\,dx$$

и воспользуемся формулами (9.5.13), (9.5.12),(9.5.6) и (9.5.8). Тогда получим, что

$$\begin{aligned} J_1 &= B(\tfrac{5}{4},\tfrac{3}{4}) = \frac{\Gamma(\frac{5}{4})\cdot\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(2)} = \frac{\Gamma(\frac{1}{4}+1)\cdot\Gamma(\frac{3}{4})}{1} = \\ &= \tfrac{1}{4}\Gamma(\tfrac{1}{4})\cdot\Gamma(\tfrac{3}{4}) = \tfrac{1}{4}\Gamma(\tfrac{1}{4})\cdot\Gamma(1-\tfrac{1}{4}) = \tfrac{1}{4}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Пример 9.5.2. Вычислить интеграл

$$J_2 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\, dx.$$

Решение. Запишем интеграл J_2 в виде

$$J_2 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+(1-p)}}\, dx$$

и снова воспользуемся теми же формулами, что и при вычислении интеграла J_1. Тогда

$$J_2 = B(p, 1-p) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p)}{\Gamma(1)} = \Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad 0 < p < 1.$$

Пример 9.5.3. Определить область существования и вычислить интеграл

$$J_3 = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{p-1}\varphi \cdot \cos^{q-1}\varphi\, d\varphi.$$

Решение. Положим $x = \sin^2\varphi$, $x \geqslant 0$. Тогда $\cos\varphi d\varphi = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$,

$$J_3 = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^{\frac{p}{2}-1}(1-x)^{\frac{q}{2}-1}\, dx.$$

Следовательно, данный интеграл сходится при условии

$$1 - \frac{p}{2} < 1, \quad 1 - \frac{q}{2} < 1$$

или $p > 0, q > 0$ и его значение равно

$$J_3 = \frac{1}{2}B\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{p}{2})\cdot\Gamma(\frac{q}{2})}{\Gamma(\frac{p+q}{2})}.$$

Пример 9.5.4. Вычислить интеграл

$$J_4 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^4}\, dx.$$

Решение. Полагая $x^4 = t$, получаем, что

$$J_4 = \frac{1}{64}\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{3}{4}}\ln^2 t}{1+t}\, dt.$$

Полученный интеграл равен интегралу

$$J_4 = \frac{1}{64}\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{1}{4}-1}\ln^2 t}{(1+t)^{\frac{1}{4}+(1-\frac{1}{4})}}\, dt$$

и является второй производной функции $\frac{1}{64}B(p, 1-p)$, вычисленной в точке $p = \frac{1}{4}$. Поэтому

$$\begin{aligned} J_4 &= \frac{1}{64} \cdot \frac{d^2}{dp^2} \left(B(p, 1-p) \right) \Big|_{p=\frac{1}{4}} = \frac{1}{64} \cdot \left(\frac{d^2}{dp^2} \left(\frac{\pi}{\sin p\pi} \right) \right) \Big|_{p=\frac{1}{4}} = \\ &= -\frac{\pi^2}{64} \left(\frac{-\pi \sin p\pi - 2\pi \sin p\pi \cos^2 p\pi}{\sin^4 p\pi} \right) \Big|_{p=\frac{1}{4}} = \frac{3\pi^3\sqrt{2}}{64}. \end{aligned}$$

Глава 10

Криволинейные и поверхностные интегралы. Теория поля

В результате изучения данной главы читатель должен уметь вычислять криволинейные и поверхностные интегралы первого и второго рода, использовать интегральные формулы Грина, Остроградского, Стокса. Находить дивергенцию, циркуляцию и градиент. Знать основные определения, формулы, интегральные преобразования и теоремы в теории криволинейных и поверхностных интегралов, векторном анализе. Владеть методами исследования криволинейных и поверхностных интегралов.

10.1. Криволинейные интегралы первого и второго рода

10.1.1. Определение, физический и геометрический смысл криволинейного интеграла первого рода. Рассмотрим на плоскости Oxy некоторую спрямляемую кривую γ. Будем считать ее простой (не имеющей точек самопересечения, не замкнутой).

Допустим, что кривая определяется параметрическими уравнениями

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \varphi(t), \\ y & = & \psi(t), \quad t \in [a,b] \end{array} \right. \tag{10.1.1}$$

и ограничена точками $A(\varphi(a),\psi(a))$ и $B(\varphi(b),\psi(b))$. Расположим точки M кривой по возрастанию параметра t, т.е. выберем направление от точки A к точке B. Выбор направления на кривой (ориентация кривой) не зависит от конкретного способа задания кривой.

Предположим далее, что в точках кривой $\gamma = AB$ определена непрерывная функция $f(x,y)$. Непрерывность функции $f(x,y)$ вдоль кривой γ определяется естественным образом и означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| < \varepsilon$ для любых двух точек (x_1,y_1) и (x_2,y_2) кривой γ, удовлетворяющих условию $\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} < \delta$. Фактически здесь определена не непрерывность, а равномерная непрерывность функции $f(x,y)$ вдоль кривой γ, но так как множество всех точек кривой γ ограничено и замкнуто, то эти понятия совпадают.

Перейдем теперь к построению интегральной суммы криволинейного интеграла первого рода функции $f(x,y)$ по кривой γ.

Возьмем разбиение отрезка $[a,b]$, т.е. набор точек $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$ таких, что

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b.$$

Так как каждому значению t_k, $k = 0,1,2,\ldots,n$, соответствует на кривой γ определенная точка $M_k(x_k,y_k)$ с координатами $x_k = \varphi(t_k)$, $y_k = \psi(t_k)$, то при указанном разбиении отрезка $[a,b]$ возникает разбиение T кривой γ на n частичных дуг (см. рис. 10.1.1)

$$M_0M_1, M_1M_2, \ldots, M_{n-1}M_n.$$

Выберем на каждой частичной дуге $M_{k-1}M_k$ произвольную точку $N_k(\xi_k,\eta_k)$, получим разбиение T с отмеченными точками N, которое будем обозначать символом

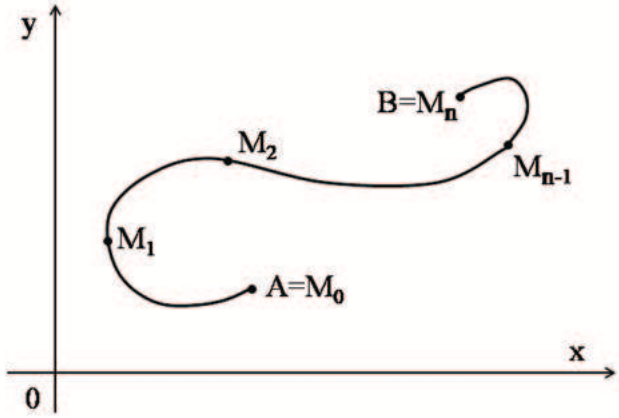

Рис 10.1.1. Разбиение кривой γ

(T, N). Координаты ξ_k, η_k точки N_k отвечают некоторому значению τ_k параметра t, так что $\xi_k = \varphi(\tau_k)$, $\eta_k = \psi(\tau_k)$, причем $t_{k-1} \leqslant \tau_k \leqslant t_k$. Будем обозначать символом Δl_k длину k-й частичной дуги $M_{k-1}M_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Составим теперь интегральную сумму $\sigma_1(f, (T, N))$ криволинейного интеграла первого рода функции $f(x, y)$ вдоль кривой γ, отвечающую разбиению (T, N)

$$\sigma_1(f, (T, N)) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta l_k. \tag{10.1.2}$$

Аналогичный процесс может быть использован и в случае *замкнутой* кривой, если за точку M_0 (или совпадающую с ней точку M_n) выбрать любую ее точку, а остальные точки M_k, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, расположить в соответствии с тем или другим направлением на кривой.

Введем еще величину $\lambda(T)$, так называемый диаметр разбиения T кривой γ

$$\lambda(T) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta l_k.$$

Определение 10.1.1. *Выражение J_1 называется пределом интегральной суммы $\sigma_1(f, (T, N))$ при условии, что диаметр разбиения $\lambda(T)$ стремится к 0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $|\sigma_1(f, (T, N)) - J_1| < \varepsilon$, как только $\lambda(T) < \delta$.*

В этом случае пишут

$$J_1 = \lim_{\lambda(T) \to +0} \sigma_1(f, (T, N)). \tag{10.1.3}$$

Определение 10.1.2. *Если существует предел суммы $\sigma_1(f, (T, N))$ при условии, что $\lambda(T) \to +0$, то этот предел называется криволинейным интегралом первого рода от функции $f(x, y)$ по кривой γ и обозначается символом*

$$\int_{\gamma} f(x, y)\, dl$$

или

$$\int_{AB} f(x, y)\, dl. \tag{10.1.4}$$

Выясним *физический смысл* введенного криволинейного интеграла первого рода.

Пусть вдоль кривой распределена масса с линейной плотностью $\rho(x, y)$. Для вычисления массы m всей кривой естественно разбить эту кривую на малые участки и, считая, что на участке плотность меняется мало, положить массу m_k каждого участка приближенно равной произведению некоторого промежуточного значения плотности на длину этого участка,

$$m_k \approx \rho(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta l_k.$$

В таком случае масса всей кривой будет приближенно равна

$$m \approx \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta l_k \tag{10.1.5}$$

и, таким образом, возникает интегральная сумма (10.1.2) для функции $\rho(x, y)$.

Точное значение массы m естественно определить как предел суммы (10.1.5) при условии, что стремится к нулю длина наибольшего участка, т.е. использовать формулу (10.1.3) и окончательно получить для массы кривой выражение

$$m = \int\limits_{AB} \rho(x, y)\, dl.$$

Геометрический смысл интеграла (10.1.4) также легко выяснить. Пусть подынтегральная функция $f(x, y) \geqslant 0$ и $z = f(x, y)$.

Изобразим график этой функции в трехмерном пространстве $Oxyz$ кривой CD (рис. 10.1.2).

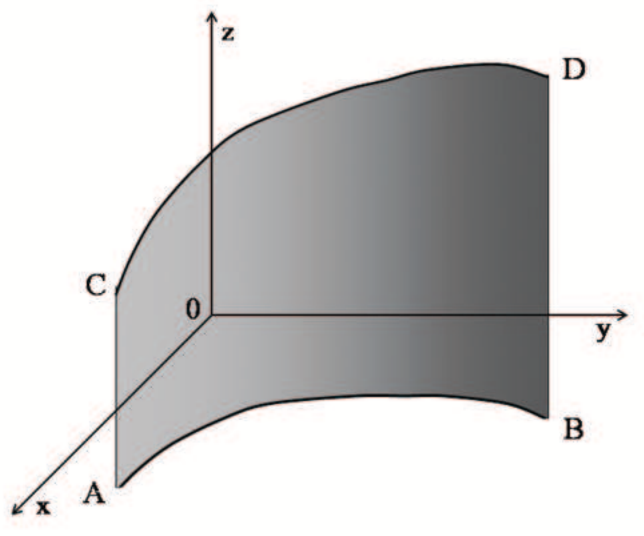

Рис 10.1.2. Геометрический смысл криволинейного интеграла I рода

Область определения функции — кривая AB (в плоскости Oxy). Тогда формула (10.1.2) для интегральной суммы дает приближенное значение площади поверхности $ABCD$ (на рисунке затемнена), а криволинейный интеграл (10.1.4) — точное значение этой площади.

10.1.2. Свойства криволинейного интеграла первого рода. Эти свойства аналогичны свойствам определенного интеграла Римана.

1. $\int\limits_{AB} dl = L$, где L — длина кривой γ.

Это очевидным образом следует из формул (10.1.2) и (10.1.3), если $f(x,y) = 1$. Рис. 10.1.2 подсказывает тот же вывод.

2. Криволинейный интеграл первого рода не зависит от ориентации кривой AB:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_{BA} f(x,y)\,dl. \tag{10.1.6}$$

Интегральная сумма $\sigma_1(f,(T,N))$, вычисленная по формуле (10.1.2) для интеграла

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl$$

не изменится, если в этой сумме произвести сложение в обратном порядке (от n до 1) и получить интегральную сумму для интеграла

$$\int\limits_{BA} f(x,y)\,dl.$$

Это связано с тем, что длина Δl_k дуги кривой $M_{k-1}M_k$ считается положительной независимо от конца, от которого считается. Равенство интегральных сумм влечет и равенство интегралов в формуле (10.1.6).

10.1.3. Существование криволинейного интеграла первого рода и его вычисление. Напомним, что кривая γ называется *гладкой* (без особых точек), если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ из определяющих ее параметрических уравнений (10.1.1) обладают на отрезке $[a,b]$ непрерывными производными $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$, причем $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t) > 0$.

Кривая γ называется *кусочно-гладкой*, если она непрерывна и распадается на конечное число не имеющих общих внутренних точек кусков, каждый из которых представляет собой гладкую кривую.

Лемма 10.1.1. *Если кривая $\gamma = AB$ является гладкой, то из условия $\lambda(T) \to 0$ следует, что $\max\limits_k(t_k - t_{k-1}) \to 0$.*

Доказательство. Отсутствие особых точек на кривой γ влечет за собой существование числа $m > 0$ такого, что

$$\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) \geqslant m > 0$$

для любого $t \in [a,b]$. Если допустить, что нижняя граница функции $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)$ на отрезке $[a,b]$ равна нулю, то в силу непрерывности указанной функции нашлась бы точка $t^* \in [a,b]$ такая, что

$$\varphi'^2(t^*) + \psi'^2(t^*) = 0,$$

но такое равенство невозможно. Теперь

$$\Delta l_k = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt \geqslant \sqrt{m}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} dt = \sqrt{m}(t_k - t_{k-1})$$

или

$$t_k - t_{k-1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{m}}\cdot\Delta l_k \leqslant \frac{1}{\sqrt{m}}\cdot\lambda(T),$$

$$\max_k(t_k - t_{k-1}) \leqslant \frac{1}{\sqrt{m}}\cdot\lambda(T).$$

Последнее неравенство и доказывает лемму. □

Теорема 10.1.1. *Если кривая $\gamma = AB$ является гладкой и если функция $f(x, y)$ непрерывна вдоль этой кривой, то интеграл (10.1.4) существует и справедлива формула*

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\, dl = \int\limits_a^b f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt, \qquad (10.1.7)$$

сводящая интеграл (10.1.4) к обычному определенному интегралу Римана.

Доказательство. Прежде всего заметим, что определенный интеграл, стоящий в правой части формулы (10.1.7) существует (подынтегральная функция непрерывна на отрезке $[a, b]$). Докажем равенство (10.1.7).

Составим интегральную сумму (10.1.2), проведя для этого все необходимые построения. Учтем теперь, что

$$\Delta l_k = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt$$

и перепишем выражение для интегральной суммы (10.1.2)

$$\sigma_1(f, (T, N)) = \sum_{k=1}^{n} \left[f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \cdot \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt \right]. \qquad (10.1.8)$$

Здесь существенно, что $t_{k-1} < t_k$.

Обозначим определенный интеграл в правой части формулы (10.1.7) через K_1 и запишем его в виде

$$K_1 = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt,$$

где точки t_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, соответствуют выбранному разбиению T и совпадают с точками t_k в формуле (10.1.8).

Теперь рассмотрим и оценим разность

$$\begin{aligned} \sigma_1(f, (T, N)) - K_1 \;&=\; \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} [f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) - f(\varphi(t), \psi(t))] \times \\ &\times\; \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt. \end{aligned} \qquad (10.1.9)$$

Так как функция $f(\varphi(t), \psi(t))$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ как суперпозиция непрерывных функций и, так как $\max\limits_k (t_k - t_{k-1}) \to 0$ при $\lambda(T) \to 0$ (см.выше лемму 10.1.1), то для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что при условии $\lambda(T) < \delta$ каждая из квадратных скобок в формуле (10.1.9) меньше ε. Тогда справедлива при $\lambda(T) < \delta$ следующая оценка величины $|\sigma_1 - K_1|$:

$$\begin{aligned} |\sigma_1 - K_1| \;&\leqslant\; \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt = \\ &=\; \varepsilon \int\limits_a^b \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt = \varepsilon \cdot L, \end{aligned}$$

где L — длина кривой AB.

В силу произвольности ε можно утверждать, что сумма $\sigma_1(f,(T,N))$ имеет предел K_1 (при $\lambda(T)\to 0$). Тем самым одновременно доказано существование интеграла (10.1.4) и равенство (10.1.7). □

Замечание 10.1.1. *В формуле (10.1.7) всегда $a \leqslant b$ независимо от выбора направления на кривой от A к B или от B к A.*

Замечание 10.1.2. *В случае кусочно-гладкой кривой γ криволинейный интеграл по этой кривой естественно определить как сумму криволинейных интегралов по всем гладким кускам, составляющим кривую γ. Таким образом, равенство (10.1.7) оказывается справедливым и для кусочно-гладкой кривой γ. Это равенство справедливо и в случае, когда функция $f(x,y)$ кусочно-непрерывна вдоль кривой γ.*

Замечание 10.1.3. *Совершенно аналогично результаты и формулы справедливы и для криволинейного интеграла, взятого по пространственной кривой $\gamma = AB$, определяемой параметрическими уравнениями*

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \chi(t), \quad a \leqslant t \leqslant b. \end{cases}$$

Замечание 10.1.4. *Легко показать, что криволинейный интеграл первого рода обладает теми же свойствами, что и обычные определенные интегралы. Перечислим эти свойства, ограничившись лишь написанием формул.*

a) Свойство линейности

$$\int\limits_{AB} (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))\,dl = \alpha \int\limits_{AB} f(x,y)\,dl + \beta \int\limits_{AB} g(x,y)\,dl.$$

b) Свойство аддитивности

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_{AC} f(x,y)\,dl + \int\limits_{CB} f(x,y)\,dl,$$

где C — точка на кривой AB.

c) Оценка модуля интеграла

$$\left|\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl\right| \leqslant \int\limits_{AB} |f(x,y)|\,dl,$$

d) Теорема о среднем. Если функция $f(x,y)$ непрерывна вдоль кривой AB, то на этой кривой найдется точка M^* такая, что

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = L \cdot f(M^*).$$

Пример 10.1.1. Вычислить массу эллипса γ, определяемого уравнениями

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \end{cases}$$

при условии, что $a > b > 0$ и что линейная плотность распределения массы равна $\rho(x,y) = |y|$.

Решение. Необходимо вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_{L} |y|\,dl$.

Используем для этого формулу (10.1.7).

$$
\begin{aligned}
\int\limits_L &= b\int\limits_0^{2\pi}|\sin t|\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt = \\
&= b\int\limits_0^{\pi}\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt - b\int\limits_{\pi}^{2\pi}\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt = \\
&= -b\int\limits_0^{\pi}\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\cos^2 t}\,d(\cos t) + b\int\limits_{\pi}^{2\pi}\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\cos^2 t}\,d(\cos t) = \\
&= -b\sqrt{a^2-b^2}\int\limits_0^{\pi}\sqrt{\frac{a^2}{a^2-b^2}-\cos^2 t}\,d(\cos t) + \\
&+ b\sqrt{a^2-b^2}\int\limits_{\pi}^{2\pi}\sqrt{\frac{a^2}{a^2-b^2}-\cos^2 t}\,d(\cos t) = 2b\left(b+\frac{\arcsin e}{e}\right),
\end{aligned}
$$

где $e=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.

Для отыскания неопределенного интеграла использовалась формула

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C,\quad a>0.$$

10.1.4. Определение и физический смысл криволинейного интеграла второго рода. Пусть на плоскости Oxy задана простая спрямляемая кривая γ и пусть вдоль нее снова задана непрерывная функция $f(x,y)$, т.е. дословно повторим условия п. 10.1.1. Далее также построим разбиение кривой γ с отмеченными точками (T,N), а вот на следующем шаге введем новые величины

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1},\quad k=1,2,\ldots,n, \tag{10.1.10}$$

где $x_k=\varphi(t_k)$. Таким образом величина Δx_k совпадает с проекцией дуги $M_{k-1}M_k$ на ось Ox и может принимать отрицательные, положительные и нулевые значения в зависимости от положения дуги $M_{k-1}M_k$ на плоскости.

Составим теперь интегральную сумму $\sigma_x(f,(T,N))$ *криволинейного интеграла второго рода* от $f(x,y)dx$ *по кривой* γ.

$$\sigma_x(f,(T,N))=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k \tag{10.1.11}$$

Определение 10.1.3. *Выражение J_x называется пределом интегральной суммы $\sigma_x(f,(T,N))$ при условии, что диаметр разбиения $\lambda(T)=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\Delta l_k$ стремится к 0, если для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что $|\sigma_x(f,(T,N))-J_x|<\varepsilon$, как только $\lambda(T)<\delta$.*

В этом случае пишут

$$J_x=\lim_{\lambda(T)\to+0}\sigma_x(f,(T,N)). \tag{10.1.12}$$

Определение 10.1.4. *Если существует предел суммы $\sigma_x(f,(T,N))$ при условии, что $\lambda(P)\to+0$, то этот предел называется криволинейным интегралом второго* *рода от $f(x,y)dx$ по кривой γ и обозначается символом*

$$\int\limits_L f(x,y)\,dx$$

или

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dx. \qquad (10.1.13)$$

Совершенно аналогично вводится криволинейный интеграл второго рода от $f(x,y)dy$ по кривой γ . Для этого достаточно вычислить величины

$$\Delta y_k = y_k - y_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где $y_k = \psi(t_k)$, записать интегральную сумму

$$\sigma_y(f, (T, N)) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k \qquad (10.1.14)$$

и через предельный переход типа (10.1.12) получить интеграл

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dy \qquad (10.1.15)$$

Большое число математических и прикладных задач приводят, к так называемому, *общему криволинейному интегралу второго рода.*

Пусть вдоль кривой AB определены две функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ и существуют интегралы

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx, \quad \int\limits_{AB} Q(x,y)\,dy.$$

Их сумму $\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + \int\limits_{AB} Q(x,y)\,dy$ и называют общим криволинейным интегралом второго рода и обозначают

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy. \qquad (10.1.16)$$

Сопоставим теперь определение криволинейного интеграла второго рода (10.1.13) или (10.1.15) с определением криволинейного интеграла первого рода. При очевидном сходстве оба определения имеют существенное различие: в случае интеграла первого рода при составлении интегральной суммы (10.1.2) значение функции $f(\xi_k, \eta_k)$ умножается на длину Δl_k участка кривой $M_{k-1}M_k$, а в случае интеграла второго рода это значение $f(\xi_k, \eta_k)$ умножается на проекцию Δx_k (или Δy_k) того же участка $M_{k-1}M_k$ на ось Ox (или на Oy).

Поясним *физический смысл* криволинейного интеграла второго рода (10.1.16). Пусть материальная точка движется из точки A в точку B вдоль кривой γ под действием силы $\overrightarrow{F}(x,y)$, имеющей компоненты $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, т.е.

$$\overrightarrow{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)).$$

Для вычисления работы по такому перемещению естественно воспользоваться формулой для случая, когда сила $\overrightarrow{F}(x,y) = (P_0, Q_0)$ постоянна, а путь — направленный отрезок AB, т.е. вектор $\overrightarrow{AB} = (a, b)$. Тогда, как известно, работа вычисляется по формуле

$$(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{AB}) = P_0 a + Q_0 b. \tag{10.1.17}$$

Пусть теперь вектор силы $\overrightarrow{F}$ — переменный, а движение материальной точки осуществляется вдоль кривой $\gamma = AB$. Разобьем кривую γ на малые участки и, считая, что на каждом участке сила меняется мало, а движение практически прямолинейное, положим работу на каждом участке k, $k = 1, 2, \ldots, n$, приближенно равной величине

$$P(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta y_k$$

(тем самым воспользуемся формулой (10.1.17)).

Полная работа по перемещению вдоль всей кривой γ будет приближенно равна сумме

$$\sum_{k=1}^{n} \left[P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k \right], \tag{10.1.18}$$

т.е. сумме величины σ_x (формула (10.1.11) для функции $P(x, y)$) и величины σ_y (формула (10.1.14) для функции $Q(x, y)$). Точное значение этой работы естественно определить как предел выражения (10.1.18) при стремлении к нулю длины наибольшего участка Δl_k.

Таким образом, общий криволинейный интеграл второго рода (10.1.16) дает работу по премещению материальной точки из A в B вдоль кривой γ под действием силы, имеющей компоненты $P(x, y)$ и $Q(x, y)$.

10.1.5. Специфическое свойство криволинейного интеграла второго рода. При изменении направления интегрирования криволинейный интеграл второго рода изменяет свой знак на противоположный, т.е., например, для общего криволинейного интеграла второго рода справедливо равенство

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = -\int\limits_{BA} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy.$$

Действительно, при составлении интегральных сумм (10.1.11) и (10.1.14) проекция дуги $M_{k-1}M_k$ на ту или другую из осей существенно зависит от направления дуги и меняет знак с изменением этого направления на обратное. Изменение же знака интегральной суммы влечет за собой изменение знака интеграла. Физический смысл общего криволиненйного интеграла второго рода хорошо иллюстрирует это положение.

10.1.6. Существование криволинейного интеграла второго рода и его вычисление.

Теорема 10.1.2. *Если кривая $\gamma = AB$ является гладкой и если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вдоль этой кривой, то криволинейные интегралы второго рода*

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{AB} Q(x, y)\,dy$$

существуют и выполняются равенства

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx = \int\limits_{a}^{b} P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)\,dt, \tag{10.1.19}$$

$$\int\limits_{AB} Q(x,y)\,dy = \int\limits_a^b Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\,dt \qquad (10.1.20)$$

Доказательство теоремы 10.1.2 проводится почти дословно так же, как доказательство теоремы 10.1.1. Для вычисления величин Δx_k и Δy_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, используются формулы

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t)\,dt,$$

$$\Delta y_k = y_k - y_{k-1} = \psi(t_k) - \psi(t_{k-1}) = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \psi'(t)\,dt.$$

Рекомендуется продолжить доказательство этой теоремы самостоятельно. □

Замечание 10.1.5. *В формулах (10.1.19) и (10.1.20) значение параметра $t = a$ соответствует начальной точке кривой AB, т.е. точке A (направление от A к B). При смене направления (от точки B к точке A) пределы интегрирования a и b поменяются местами.*

Сопоставляя сформулированное замечание с замечанием 10.1.1, находим, что они есть следствие принципиальных различий в определении криволинейных интегралов двух типов.

Замечания 10.1.2, 10.1.3, 10.1.4 можно повторить здесь практически дословно. Сделать это можно самостоятельно.

Замечание 10.1.6. *Для замкнутой кривой γ (т.е. в случае, когда точка B совпадает с точкой A) из двух возможных направлений обхода назовем положительным то направление обхода, при котором область, лежащая внутри контура γ, остается по левую сторону по отношению к точке, совершающей обход. Такое направление движения условно можно назвать "движением против часовой стрелки".*

На рис. 10.1.3 положительное направление обхода изображено стрелками.

Будем считать, что в интеграле (10.1.16) по замкнутому контуру γ этот контур всегда обходится в положительном направлении. Противоположное направление обхода будет специально оговариваться.

Знак интегрирования $\displaystyle\int$ часто в случае замкнутого контура заменяют на знак $\displaystyle\oint$.

Приведем без доказательства формулу, связывающую криволинейные интегралы двух родов.

Теорема 10.1.3. *Пусть AB есть гладкая кривая, а $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ — непрерывные функции, заданные вдоль кривой AB. Тогда*

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{AB} \left(P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\sin\alpha\right)\,dl,$$

где α — угол, составленный с осью Ox касательной к кривой AB, направленной в сторону возрастанию дуг.

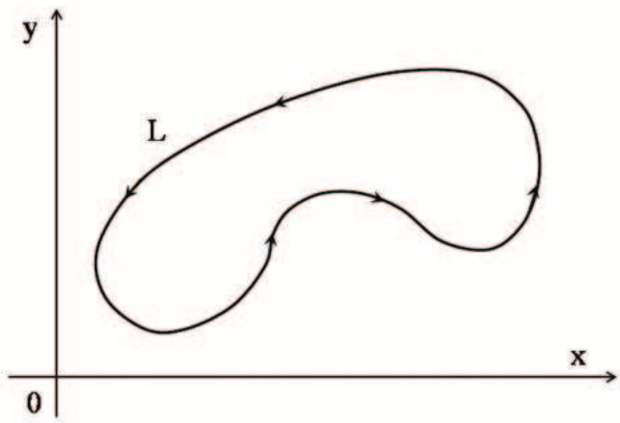

Рис 10.1.3. Положительное направление обхода замкнутого контура γ

Пример 10.1.2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$J = \int\limits_{L} (x^2 - 2xy)\,dx + (y^2 - 2xy)\,dy,$$

где γ — парабола $y = x^2$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Решение. Указанную параболу запишем в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \quad -1 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Далее с помощью формул (10.1.19) и (10.1.20) получим, что

$$\begin{aligned} J &= \int\limits_{-1}^{1} (t^2 - 2t^3)\,dt + \int\limits_{-1}^{1} (t^4 - 2t^3)2t\,dt = \\ &= \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{3} - \frac{4t^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = -\frac{14}{15}. \end{aligned}$$

Заметим, что переход к параметрической форме кривой γ вовсе не обязателен. При явном задании кривой γ (как в рассматриваемом примере) роль параметра может играть x.

10.2. Формула Грина

Получим важную формулу, играющую большую роль в различных приложениях, например, теории поля. Эта формула представляет собой обобщение, в определенном смысле, на двумерный случай формулы Ньютона-Лейбница для одномерных интегралов. Она связывает двойной и криволинейный интегралы и имеет следующий вид

$$\iint\limits_{G} \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_{\partial G} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy, \qquad (10.2.1)$$

где G —область из $\mathbb{R}^2$, а ∂G — ее граница (замкнутый контур, пробегаемый в положительном направлении, рис. 10.2.1).

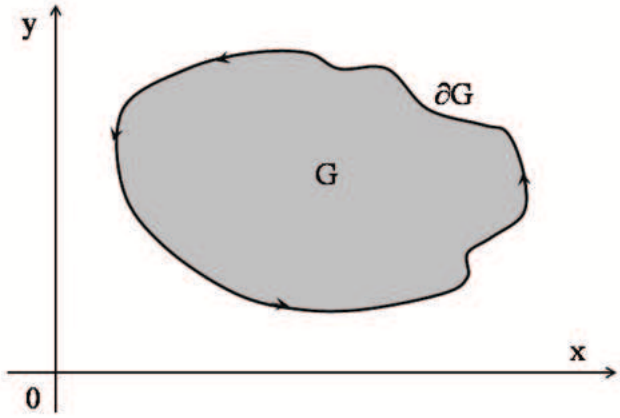

Рис 10.2.1. Область G и ее положительно ориентированная граница

Для доказательства формулы (10.2.1) нужно сформулировать определенные условия для функций $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$, для вида области G и вида ее границы ∂G.

Запишем необходимые определения.

10.2.1. Элементарные области. Непрерывность частных производных.

Определение 10.2.1. *Ограниченная область G на плоскости (x,y) называется элементарной относительно оси Oy, если существуют две такие непрерывные на некотором отрезке $[a,b]$ функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, что*

$$G = \{(x,y):\ a < x < b,\ \varphi(x) < y < \psi(x)\}$$

(рис. 10.2.2, область G затемнена).

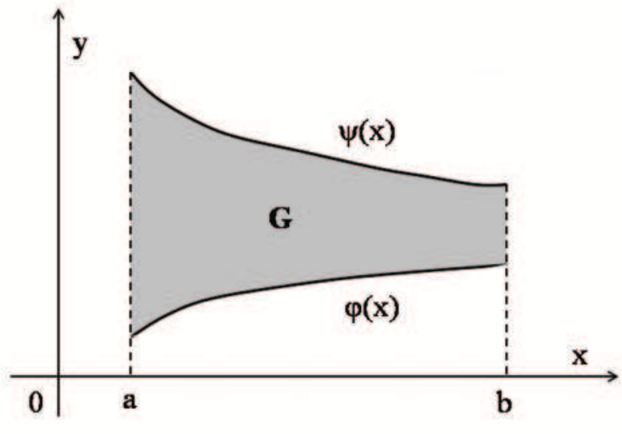

Рис 10.2.2. Элементарная относительно оси Oy область G

Аналогично определяется плоская область G, элементарная относительно оси Ox (рис. 10.2.3).

Определение 10.2.2. *Область, элементарная относительно обеих координатных осей, называется элементарной (рис. 10.2.4).*

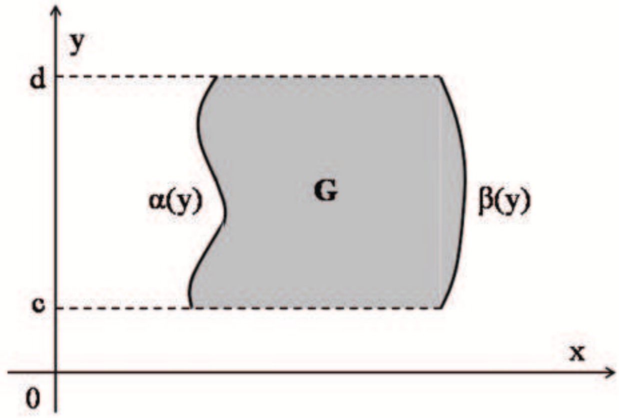

Рис 10.2.3. Элементарная относительно оси Ox область G

Очевидно, что граница элементарной области G является простым замкнутым контуром — ∂G. Очевидна также квадрируемость области G.

При доказательстве формулы Грина используется непрерывность частных производных $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ в замыкании $\overline{G}$ области G. Но при введении этого понятия возникают определенные трудности. Дело в том, что частные производные в некоторых граничных точках области G могут не определяться в принципе, т.е. в этих точках не имеет смысла говорить о той или иной частной производной. Рассмотрим пример.

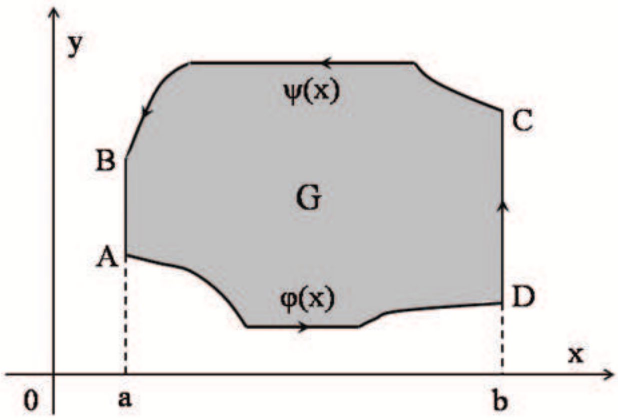

Рис 10.2.4. Элементарная область G

Пусть область G — это круг радиуса 1, $G = \{(x, y): \ x^2 + y^2 < 1\}$ и функция $Q(x, y)$ задана в замкнутом круге. Ясно, что в точке $(0, 1) \in G$ невозможно вычислить частную производную $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, т.к. в этой точке не определено приращение функции $Q(x, y)$ по переменной x (значение $Q(0 + \Delta x, 1)$ не существует как бы ни была мала величина Δx, см. рис. 10.2.5).

Введем понятие непрерывности частных производных вплоть до границы области следующим образом.

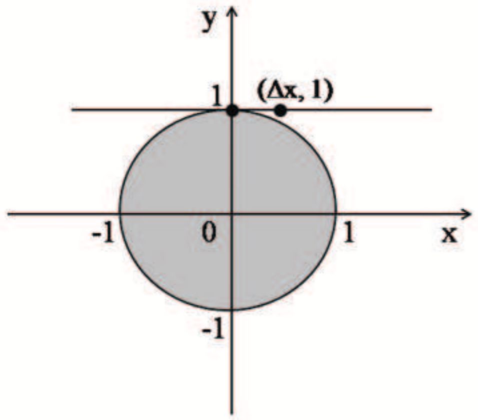

Рис 10.2.5. Функция $Q(x, y)$ не определена в точке $(\Delta x, 1)$

Определение 10.2.3. *Будем говорить, что частная производная* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$*, определенная внутри области* G*, непрерывна на замыкании* G*, если функция* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *непрерывно продолжаема с области* G *на ее границу, т.е. существует непрерывная на* $\overline{G}$ *функция, совпадающая на области* G *с частной производной* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$*.*

Приступим теперь к формулировке и доказательству основного результата для простейшего типа областей.

10.2.2. Формула Грина для элементарной области G.

Теорема 10.2.1. *Если область* G *— элементарная, а функции* $P(x, y)$ *и* $Q(x, y)$ *непрерывны вместе со своими частными производными* $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ *и* $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ *на замыкании* $\overline{G}$ *области* G*, то справедлива формула Грина (10.2.1).*

Доказательство. Достаточно убедиться в справедливости равенств

$$\iint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \oint\limits_{\partial G} Q(x, y)\,dy, \quad -\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \oint\limits_{\partial G} P(x, y)\,dx. \tag{10.2.2}$$

Так как указанные равенства доказываются однотипно, то проведем доказательство второго из них.

Рассмотрим двойной интеграл

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy. \tag{10.2.3}$$

Он существует и для него выполняются все условия, при которых действует формула повторного интегрирования (теорема Фубини). По этой формуле (см. рис. 10.2.4) имеем

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = \int\limits_a^b [P(x,\psi(x)) - P(x,\varphi(x))]\,dx =$$

$$= \int\limits_a^b P(x,\psi(x))\,dx - \int\limits_a^b P(x,\varphi(x))\,dx.$$

Первый из этих двух интегралов представляет собой при указанном на рис. 10.2.4 направлении обхода границы криволинейный интеграл

$$-\int\limits_{CB} P(x,y)\,dx,$$

а второй интеграл — криволинейный интеграл

$$\int\limits_{AD} P(x,y)\,dx.$$

Отсюда

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int\limits_{CB} P(x,y)\,dx - \int\limits_{AD} P(x,y)\,dx.$$

Вычтем из правой части полученного равенства интегралы

$$\int\limits_{BA} P(x,y)\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{DC} P(x,y)\,dx,$$

очевидно равные нулю, т.к. отрезки BA и DC перпендикулярны к оси Ox (см. п. 10.1.1). Тогда окончательно получим

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int\limits_{CB} P(x,y)\,dx - \int\limits_{AD} P(x,y)\,dx -$$

$$- \int\limits_{BA} P(x,y)\,dx - \int\limits_{DC} P(x,y)\,dx = -\oint\limits_{\partial G} P(x,y)\,dx$$

и формула Грина (10.2.1) для элементарной области G доказана. □

10.2.3. Формула Грина для областей общего вида.

Теорема 10.2.2. *Пусть область G — ограниченная плоская область, которую можно разбить на конечное множество элементарных областей G_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, а функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ непрерывны вместе с частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ на замыкании $\overline{G}$ области G. Тогда имеет место формула Грина (10.2.1).*

Доказательство. Формула Грина справедлива для каждой области G_i $i = 1, 2, \ldots, m$,

$$\iint\limits_{G_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = \oint\limits_{\partial G_i} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Просуммируем записанные равенства

$$\sum_{i=1}^{m} \iint\limits_{G_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \sum_{i=1}^{m} \oint\limits_{\partial G_i} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Слева, используя свойство аддитивности двойного интеграла, получим интеграл по области G

$$\iint\limits_{G} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial e}\right) dx\,dy.$$

При сложении же правых частей останется только криволинейный интеграл по границе ∂G

$$\oint_{\partial G} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy,$$

т.к. все другие части границ ∂G_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, встретятся в сумме дважды и с противоположными ориентациями, в силу чего сумма интегралов по ним равна нулю (рис. 10.2.6, $\int\limits_{AB} + \int\limits_{BA} = 0$).

Таким образом формула Грина (10.2.1) доказана. □

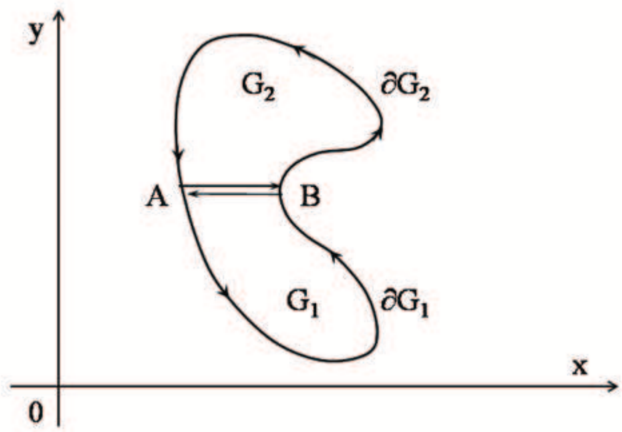

Рис 10.2.6. Противоположные ориентации на отрезке AB границ ∂G_1 и ∂G_2

Пусть теперь G — *ограниченная область* в плоскости и пусть ее граница ∂G состоит из конечного числа простых контуров (Γ — внешний контур, γ_i, $i = 1, 2, \ldots, p$, — внутренние контуры). На рис. 10.2.7 изображена (затемнена) область указанного вида при $p = 2$. Такие области называются многосвязными или более конкретно двухсвязными, трехсвязными и т.д. в зависимости от количества контуров, составляющих границу . Положительная ориентация границы ∂G задается таким направлением обхода каждого контура, при котором область G остается слева (см. рис. 10.2.7).

Теорема 10.2.3. *В условиях теоремы 10.2.2 для области G, граница которой состоит из конечного числа простых замкнутых контуров справедлива формула Грина*

$$\iint\limits_{G} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_{\partial G} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy,$$

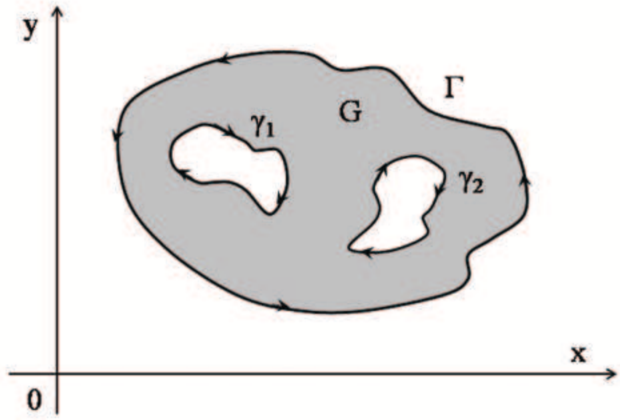

Рис 10.2.7. Трехсвязная область G с положительно ориентированной границей

где на границе ∂G *принята положительная ориентация.*

Доказательство сформулированной теоремы можно провести по аналогии с доказательством теоремы 10.2.2. На рисунке 10.2.8 (для двухсвязной области G) изображен разрез AB, который превращает область G в односвязную. □

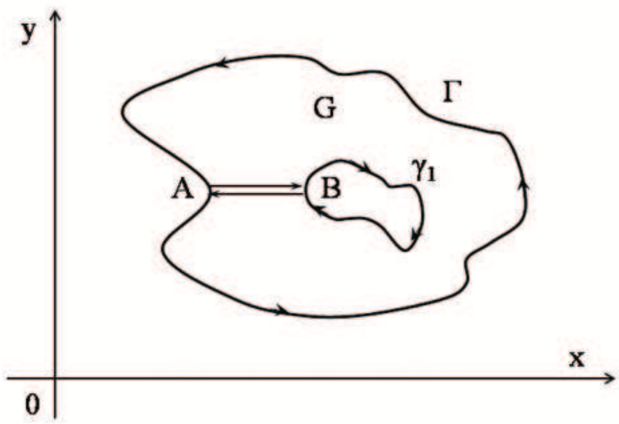

Рис 10.2.8. Область G с разрезом AB

Результат, сформулированный в теореме 10.2.3 имеет уже вполне достаточную общность. Однако проверка в конкретных случаях возможности разложить предложенную область G на части специальных типов представляется иногда трудоемкой, поэтому укажем без доказательства и другое — тоже весьма общее, но легко проверяемое условие для ∂G.

Теорема 10.2.4. *Пусть граница плоской ограниченной области* G *состоит из конечного числа кусочно-гладких кривых. Тогда, если функции* $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ *непрерывны на* $\overline{G}$, *то*

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_{\partial G} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Рассмотрим теперь простейшее приложение формулы Грина.

10.2.4. Вычисление площади плоской области с помощью криволинейного интеграла. Пусть G — ограниченная плоская связная область с кусочно-гладкой границей. Запишем формулу Грина для этой области

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int\limits_{\partial G} P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy.$$

и положим, что

$$P(x,y) = -y,$$

$$Q(x,y) = x.$$

Справедливость формулы Грина для таких функций не вызывает сомнений. Тогда $\iint\limits_G 2\, dx\, dy = \int\limits_{\partial G} x\, dy - y\, dx$ и воспользовавшись очевидным равенством $\iint\limits_G dx\, dy = S(G)$, где $S(G)$ — площадь области G, найдем, что

$$S(G) = \frac{1}{2} \int\limits_{\partial G} x\, dy - y\, dx. \tag{10.2.4}$$

Выбирая функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ соответствующим образом, можно получить и другие формулы для вычисления площади области G с помощью криволинейного интеграла. Например, если $P(x,y) = 0$, а $Q(x,y) = x$, то

$$S(G) = \int\limits_{\partial G} x\, dy.$$

Пример 10.2.1. Вычислить с помощью формулы (10.2.4) площадь астроиды (рис. 4.8.3)

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \quad t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{aligned} S(G) &= \frac{1}{2} \int\limits_G x\, dy - y\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} (a^2 \cos^3 t \cdot (3 \cdot \sin^2 t) \cos t + \\ &+ a^2 \sin^3 t \cdot (3 \cdot \cos^2 t) \sin t)\, dt = \frac{3a^2}{2} \int\limits_0^{2\pi} (\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t)\, dt = \\ &= \frac{3a^2}{2} \int\limits_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t\, dt = \frac{3}{8} a^2 \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 2t\, dt = \frac{3}{8} a^2 \int\limits_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4t}{2}\, dt = \frac{3}{8} a^2 \pi. \end{aligned}$$

Пример 10.2.2. Применяя формулу Грина, вычислить интеграл

$$J = \oint\limits_L (x+y)\, dx - (x-y)\, dy,$$

где γ — эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

Решение. Здесь $P(x,y) = x + y$, $Q(x,y) = -(x-y)$, поэтому $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -1$ и $J = -2\iint\limits_G dx\,dy = -2\cdot\pi ab$ (G — область, ограниченная эллипсом, πab — площадь этой области).

Пример 10.2.3. Проверить возможность использования формулы Грина для вычисления криволинейного интеграла

$$\oint\limits_\gamma \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy,$$

где γ — окружность $x^2+y^2=1$.

Решение. Функции $P(x,y) = -\dfrac{x}{x^2+y^2}$ и $Q(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ терпят разрыв внутри круга в точке $(0,0)$, поэтому теоремы, которые обеспечивают возможность применения формулы Грина, не могут быть использованы. Но в теоремах сформулированы достаточные условия и поэтому не выполнение этих условий еще не означает, что формула Грина к данному интегралу не применима. Проверим справедливость формулы непосредственным вычислением криволинейного и двойного интегралов. Пусть γ задается уравнениями

$$\begin{cases} x = \cos t, & \\ y = \sin t, & t\in[0,2\pi]. \end{cases}$$

Тогда

$$\oint\limits_\gamma \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy, = \int\limits_0^{2\pi}(\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = 2\pi.$$

Но

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \\ &= \frac{y^2-x^2-y^2+x^2}{(x^2+y^2)^2} \equiv 0\end{aligned}$$

и

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dx\,dy = 0$$

Вывод: формула Грина не может быть использована для вычисления данного криволинейного интеграла.

Указания. Рассмотреть ту же задачу для криволинейного интеграла

$$\int\limits_L \frac{x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{y}{x^2+y^2}\,dy$$

и убедиться в справедливости формулы Грина в этом случае.

Пример 10.2.4. Вычислить криволинейный интеграл

$$J = \int\limits_{AO}(e^x\sin y - my)\,dx + (e^x\cos y - m)\,dy,$$

где AO — верхняя полуокружность $x^2+y^2=ax$, $a>0$, пробегаемая от точки $A(a,0)$ до точки $O(0,0)$.

Решение. Непосредственно использовать формулу Грина для вычисления интеграла J нельзя, т.к. кривая AO не замкнута. Прибавим к данному интегралу J такой же интеграл J_1 вдоль отрезка на оси Ox от точки $O(0,0)$ до точки $A(a,0)$. Легко проверить, что $J_1 = 0$. Но сумма двух интегралов $J+J_1$ есть уже интеграл по замкнутому контуру γ и для его вычисления можно очевидным образом использовать формулу Грина. Тогда

$$\begin{aligned} J &= J + J_1 = \iint\limits_G \left(\frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y - m) - \frac{\partial}{\partial y}(e^x \sin y - my) \right) dx\, dy = \\ &= m \iint\limits_G dx\, dy = m\frac{\pi a^2}{8}, \end{aligned}$$

где G — верхняя половина круга $x^2 + y^2 \leqslant x$ и $\dfrac{\pi a^2}{8}$ — его площадь.

10.3. Теорема о независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования

Пусть в некоторой плоской связной области G заданы две непрерывные функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$. Рассмотрим криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy, \tag{10.3.1}$$

где A и B — две какие-нибудь точки из области G, а AB —произвольная соединяющая их кусочно-гладкая кривая, которая целиком лежит в этой области.

Здесь записаны условия, которые заведомо обеспечивают существование интеграла (10.3.1).

Выясним, что нужно потребовать для того, чтобы величина этого интеграла оказалась не зависящей от формы пути AB, т.е. однозначно определялась начальной и конечной точками A и B, где бы эти точки ни лежали.

Поведение интеграла (10.3.1) определяется свойствами дифференциального выражения (дифференциальной формы)

$$P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy, \tag{10.3.2}$$

стоящего под знаком интеграла. Подобное выражение уже возникало при вычислении полного дифференциала функции двух переменных $u(x,y)$:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\, dx + \frac{\partial u}{\partial y}\, dy, \tag{10.3.3}$$

т.е. дифференциальная форма (10.3.2) превращается в полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$, если

$$P(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ и } Q(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{10.3.4}$$

Оказывается, что и интеграл (10.3.1) не зависит от пути интегрирования именно в тех случаях, когда его подынтегральное выражение есть точный дифференциал (выполняются условия (10.3.4)). Сформулируем этот результат строго.

Теорема 10.3.1. *Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны в области G. Тогда следующие три условия эквивалентны.*

1. Для любой замкнутой (возможно самопересекющейся) кусочно-гладкой кривой γ, расположенной в области G выполняется равенство

$$\oint_{\gamma} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0.$$

2. Для любых двух точек A и B области G значение интеграла

$$\int_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

не зависит от кусочно-гладкой кривой AB, соединяющей точки A и B и расположенной в области G.

3. Дифференциальная форма

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy,$$

представляет собой полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$, которая определена в области G и непрерывно дифференцируема, т.е.

$$du = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy, \quad (x,y) \in G. \tag{10.3.5}$$

В этом случае для любых точек A и B из области G и для произвольной кусочно-гладкой кривой AB, соединяющей эти точки и расположенной в области G справедливо равенство

$$\int_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = u(B) - u(A). \tag{10.3.6}$$

Доказательство. Проведем доказательство по схеме

$$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1,$$

т.е. докажем, что из первого условия следует второе, из второго — третье, из третьего — первое. Очевидно, что при этом будет доказана эквивалентность сформулированных условий 1, 2, 3.

Первый шаг: $1 \Rightarrow 2$. Пусть A и B —произвольные фиксированные точки области G, ACB и $AC'B$ — любые две кусочно-гладкие кривые, соединяющие указанные точки и расположенные в G (рис. 10.3.1).

Объединение этих кривых представляет собой кусочно-гладкую (возможно самопересекающуюся) замкнутую кривую $\gamma = ACB + BC'A$, расположенную в G. Так как условие 1 предполагается выполненным, то

$$\oint_{L} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0,$$

$$\int_{ACBC'A} P(x,y)\,dx + Q(x,y) \ = 0,$$

$$\int_{ACB} + \int_{BC'A} = 0,$$

$$\int_{ACB} = -\int_{BC'A}, \quad \int_{ACB} = \int_{AC'B}.$$

Следовательно, условие 2 выполняется.

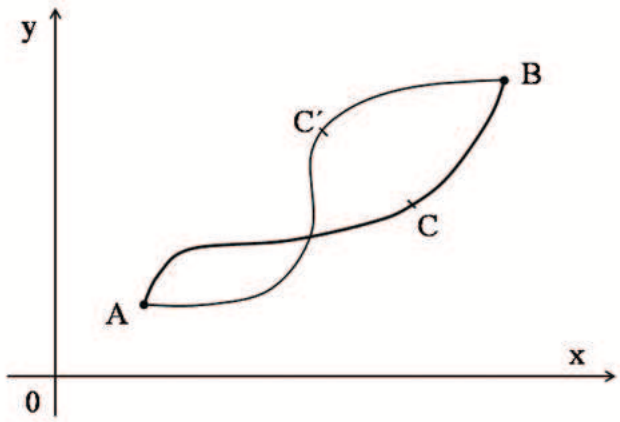

Рис 10.3.1. Замкнутый контур $\gamma = ACBC'A$

Второй шаг: $2 \Rightarrow 3$. Пусть M_0 — фиксированная точка, а $M(x, y)$ — произвольная точка области G, M_0M— любая кусочно-гладкая кривая, соединяющая точки M_0 и M и расположенная в области G.

Интеграл

$$\int\limits_{M_0M} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

не зависит от вида кривой M_0M (см. условие 2) и поэтому представляет собой некоторую функцию $u(M)$. Эта функция определена в области G и ясно, что $u(M_0) = 0$.

Докажем существование частных производных $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ и справедливость равенств (10.3.4) для $(x, y) \in G$. Начнем, например, с доказательства существования $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ и первого из равенств (10.3.4). Зафиксируем точку $M(x, y)$. Придадим аргументу x настолько малое приращение Δx, чтобы отрезок MN, соединяющий точки $M(x, y)$ и $N(x + \Delta x, y)$, располагался в G (это всегда можно сделать, т.к. G — область, т.е. открытое множество, рис. 10.3.2).

Вычислим частное приращение $\Delta_x u$ в точке $M(x, y)$.

$$\begin{aligned}\Delta_x u &= u(x + \Delta x, y) - u(x, y) = \\ &= \int\limits_{M_0MN} P\,dx + Q\,dy - \int\limits_{M_0M} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{MN} P\,dx + Q\,dy.\end{aligned}$$

Так как $\displaystyle\int\limits_{MN} Q(x,y)\,dy = 0,\ y = \text{const}$ на отрезке MN, то

$$\Delta_x u = \int\limits_{MN} P(x,y)\,dx = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(t,y)\,dt.$$

Здесь использовалось параметрическое представление отрезка MN

$$\begin{cases} x = t, \\ y = \text{const},\ x \leqslant t \leqslant x + \Delta x \end{cases}$$

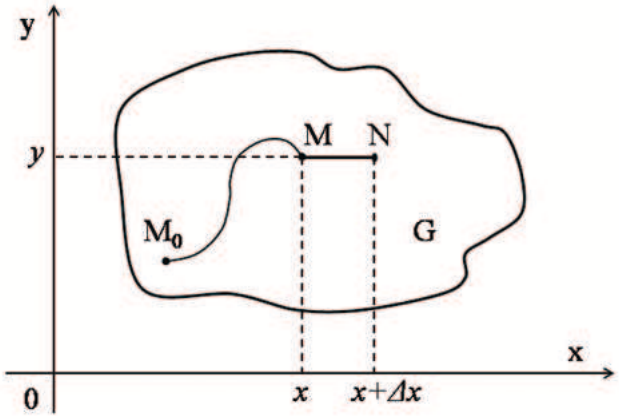

Рис 10.3.2. Кривая M_0MN, $M_0(x_0, y_0)$, $M(x,y)$, $N(x+\Delta x, y)$

и формула (10.1.19).

Применяя к интегралу $\int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(t,y)\,dt$ теорему о среднем, получим

$$\Delta_x u = P(x+\theta\Delta x, y)\Delta x, \text{ где } 0<\theta<1,$$

откуда

$$\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = P(x+\theta\Delta x, y),\ 0<\theta<1.$$

В силу непрерывности функции $P(x,y)$, правая часть последнего равенства имеет предел при $\Delta x \to 0$, равный значению $P(x,y)$. Следовательно, и левая часть имеет тот же предел, равный по определению частной производной $\frac{\partial u}{\partial x}$. Таким образом, существование частной производной и справедливость первого равенства (10.3.4) установлены.

Существование частной производной $\frac{\partial u}{\partial y}$, а также справедливость второго равенства (10.3.4) доказывается аналогично.

Функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны в области G, что дает непрерывность частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $(x,y)\in G$ и, в свою очередь, обеспечивает существование дифференциала (10.3.5), т.е. выполнение условия 3.

Докажем теперь соотношение (10.3.6). Пусть A и B — любые точки из области G, AB — произвольная кусочно-гладкая кривая, соединяющая эти точки и расположенная в G. Пусть эта кривая определяется параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t),\ a\leqslant t\leqslant b \end{cases}$$

Используя правило вычисления криволинейных интегралов (формулу (10.1.19), а также (10.1.20)), получим

$$\begin{aligned}\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy &= \int\limits_a^b \{P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\}\,dt = \\ &= \int\limits_a^b u_t'\,dt = u(\varphi(b),\psi(b)) - u(\varphi(a),\psi(a)) = \\ &= u(B) - u(A).\end{aligned}$$

Таким образом, формула (10.3.6)доказана.

Третий шаг: $3 \to 1$. Это утверждение следует из формулы (10.3.6). В самом деле, для замкнутой кривой γ начальная точка совпадает с конечной, и поэтому по формуле (10.3.6) имеем

$$\oint\limits_\gamma P\,dx + Q\,dy = u(A) - u(A) = 0.$$

Теорема доказана. □

Замечание 10.3.1. *Проверку условий 1 и 3 теоремы 10.3.1, которые представляют собой необходимые и достаточные условия независимости криволинейного интеграла от пути, иногда трудно осуществить. Укажем поэтому более удобное для приложений необходимое и достаточное условие. Его формулировка возможна только для односвязных областей.*

Напомним одно из возможных определений односвязной области G: если любая кусочно-гладкая несамопересекающаяся замкнутая кривая, расположенная в G, ограничивает область, все точки которой принадлежат G, то область G — односвязна.

Теорема 10.3.2. *Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ и их частные производные непрерывны в односвязной области G. Тогда каждое из трех условий 1,2,3 теоремы 10.3.1 эквивалентно условию*

4. $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ *в* G.

Доказательство. Применим схему

$$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1,$$

где условия 1, 2, 3 сформулированы и их эквивалентность уже доказана в предыдущей теореме 10.3.1. Докажем теперь, что $3 \Rightarrow 4$ и $4 \Rightarrow 1$.

Первый шаг: $3 \Rightarrow 4$. Пусть в области G существует функция $u(x,y)$ такая, что $du = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$. Отметим, что из условий теоремы тогда следует, что функция u имеет непрерывные смешанные производные. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Но смешанные производные равны (условием этого является их непрерывность) и таким образом, условие 4 выполнено. Отметим, что для доказательства шага $3 \Rightarrow 4$ условие односвязности области G не требуется.

Второй шаг: $4 \Rightarrow 1$. Пусть выполнено условие 4. Тогда в каждой точке области G справедливо равенство

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \qquad (10.3.7)$$

из которого по формуле Грина (10.2.1) следует условие 1.

Действительно, если γ — расположенная в G замкнутая кусочно-гладкая кривая *без самопересечений*, ограничивающая область G^* (область G — односвязна, и поэтому каждая точка области G^* принадлежит G), то к области G^* можно применить формулу Грина.

Доказательство можно провести и для случая, когда γ — произвольная замкнутая кусочно-гладкая кривая, возможно, с самопересечениями. □

Пример 10.3.1. Пусть функции $P(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$ и $Q(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ заданы в единичном круге G_1 с центром в точке $(0,1)$ и пусть точки A и B лежат внутри G_1. Зависит ли интеграл $I = \displaystyle\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy$ от вида кривой AB, соединяющей в круге G_1 точки A и B?

Решение. Область G_1 — односвязна. Условие $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ из теоремы 10.3.2 выполняется для любой точки $(x,y) \in G_1$. Непрерывность функций P и Q внутри области G_1 очевидна. Следовательно, интеграл I не зависит от вида кривой AB, соединяющей в круге G_1 точки A и B.

Найдем функцию $u(x,y)$ такую, что

$$du = P\,dx + Q\,dy.$$

В соответствии с доказательством теоремы 10.3.1 (шаг 2) зафиксируем, например, точку $M_0(0,1)$, а точку $M(x,y)$ выберем произвольно. Тогда

$$u(x,y) = \int\limits_{M_0(0,1)}^{M(x,y)} P\,dx + Q\,dy$$

или

$$u(x,y) = \int\limits_{(0,1)}^{(0,y)} P\,dx + Q\,dy + \int\limits_{(0,y)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy.$$

Вычислим интегралы из последней суммы вдоль отрезков прямых, соединяющих:

точку $(0,1)$ с точкой $(0,y)$ (параметрическое задание этого отрезка: $x = 0, y = t, 1 \leqslant t \leqslant y$);

точку $(0,y)$ с точкой (x,y) (параметрическое задание этого отрезка: $(x = t,\ y = y = \mathrm{const},\ 0 \leqslant t \leqslant x)$). Тогда

$$-\int\limits_{(0,1)}^{(0,y)} \frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = -\int\limits_{1}^{y} \frac{t}{0+t^2} \cdot 0 + \int\limits_{1}^{y} \frac{0}{0+t^2}\,dt = 0,$$

$$\int\limits_{(0,y)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy = -\int\limits_0^x \frac{y}{y^2+t^2}\,dt + \int\limits_0^x \frac{t}{t^2+y^2}\cdot 0 = -\operatorname{arctg}\frac{t}{y}\Big|_0^x = -\operatorname{arctg}\frac{x}{y}.$$

Пример 10.3.2. Решить задачу предыдущего примера в единичном круге G_0 с центром в начале координат.

Решение. Функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ терпят разрыв внутри G_0 в точке $(0,0)$. Теоремы 10.3.1 и 10.3.2 не могут быть использованы. Проверка показывает, что интеграл по замкнутому контуру, окружающему начало координат, не равен нулю (см. пример 10.3.1).

Вывод: интеграл I зависит от вида кривой AB, соединяющей в круге G_0 точки A и B.

10.4. Кусочно-гладкие поверхности

10.4.1. Определение поверхности. Пусть x, y, z — декартовы координаты точек в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3_{x,y,z}$, а u, v декартовы координаты точек плоскости $\mathbb{R}^2_{u,v}$.

Обозначим D — область в плоскости $\mathbb{R}^2_{u,v}$ а $\overline{D}$ — замыкание этой области: $\overline{D} = D \cup \partial D$, где ∂D — граница области D.

Определение 10.4.1. *Непрерывной поверхностью S будем называть непрерывный образ замкнутой области $\overline{D} \subset \mathbb{R}^2_{u,v}$.*

$$\vec{r} : \overline{D} \to \mathbb{R}^3.$$

Отображение $\vec{r} = \vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ замкнутого множества $\overline{D}$ на множество S называется параметрическим представлением поверхности S и записывается следующим образом

$$S = \{\vec{r}(u,v) : (u,v) \in \overline{D}\}.$$

Переменные u, v называются координатами или параметрами поверхности S.

Образ границы ∂D области D при отображении $\vec{r}(u,v)$ называется краем поверхности S и обозначается ∂S:

$$\partial S = \{\vec{r}(u,v) : (u,v) \in \partial D\}.$$

Пример 10.4.1. Пусть $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2_{u,v} : u+v \leqslant 1,\ u \geqslant 0,\ v \geqslant 0\}$ и $\vec{r}(u,v) = (u, v, u+v)$. Найти образ замыкания $\overline{D}$ области D при этом отображении.

Решение. Очевидно, что этот образ — треугольник ABC, лежащий в плоскости $z = x + y$.

Представление $\vec{r}(u,v)$ непрерывной поверхности S не является обязательно взаимно–однозначным отображением. Точка поверхности $S = \{\vec{r}(u,v) : (u,v) \in \overline{D}\}$, в которую отображаются по крайней мере две точки замкнутой области $\overline{D}$, называются кратной точкой или точкой самопересечения поверхности. Нас будут интересовать дифференциальные свойства поверхностей "достаточно гладких" , т.е. достаточное число раз (непрерывно) дифференцируемых поверхностей. Определим понятие непрерывно дифференцируемой поверхности.

Определение 10.4.2. *Непрерывно дифференцируемой поверхностью S называется множество точек пространства $\mathbb{R}^3$, заданное как образ непрерывно дифференцируемого отображения $\vec{r}$ замкнутой области $\overline{D}$.*

Аналогичным образом определяются дважды непрерывно дифференцируемые поверхности и вообще n раз непрерывно дифференцируемые поверхности.

Если за параметры поверхности S можно взять какие-либо координаты пространства $\mathbb{R}^3_{x,y,z}$ (например $u = x$, $v = y$ и $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \overline{D}$), то такое представление поверхности называется явным. Очевидно, что если поверхность допускает явное представление, то она не имеет кратных точек.

Пример 10.4.2. Показать, что поверхность S, заданная параметрическим представлением $x = R\cos u \cos v$, $y = R\cos u \sin v$, $z = R\sin u$, где $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant u \leqslant 2\pi;\ -\frac{\pi}{2} \leqslant v \leqslant \frac{\pi}{2}\}$, является сферой с центром в начале координат радиуса R.

Решение. Очевидно. Отметим, что у сферы весь меридиан $u = 0$ состоит из кратных точек.

Отметим еще один подход к понятию поверхности. Если $F(x, y, z)$ определеная в некоторой области D трехмерного пространства функция, то множество точек области таких, что

$$F(x, y, z) = 0,$$

называется поверхностью, заданной неявно. Отметим, что если функция $F(x, y, z)$ удовлетворяет условиям теоремы о неявной функции, то локально (в окрестности некоторой точки) поверхность допускает явное представление.

Простейшим примером поверхности заданной неявно, является сфера с центром в точке (x_0, y_0, z_0) радиуса R

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Явное представление возможно для части сферы, например, "верхняя полусфера" задается как график функции

$$z = z_0 + \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad (x, y) \in D = \{(x - x_0)^2 + (y - y_0^2) \leqslant R^2\},$$

а "нижняя полусфера" — это график функции

$$z = z_0 - \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad (x, y) \in D = \{(x - x_0)^2 + (y - y_0^2) \leqslant R^2\}.$$

Определение 10.4.3. *Отображение Φ замкнутой области $\overline{D}_1 \subset \mathbb{R}^2_{u_1,v_1}$ на замкнутую область $\overline{D} \subset \mathbb{R}^2_{u,v}$*

$$\Phi = \begin{cases} u = \varphi(u_1, v_1), \\ v = \psi(u_1, v_1), \end{cases} \quad (u_1, v_1) \subset \overline{D}_1$$

называется допустимым преобразованием параметров в представлении непрерывной (непрерывно-дифференцируемой, n раз непрерывно-дифференцируемой) поверхности S, если Φ и обратное ему отображение Φ^{-1}

1) непрерывны (непрерывно-дифференцируемы, n раз непрерывно-дифференцируемы);

2) внутренние точки области D_1 при отображении Φ переходят во внутренние точки области D, а граничные в граничные.

10.4.2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Пусть $S = \{\vec{r}(u, v) : (u, v) \in \overline{D}\}$ непрерывно-дифференцируемая поверхность, это означает, что координатные функции $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ это представления поверхности непрерывно-дифференцируемы. Будем считать, что пересечение прямой $u = u_0$ или прямой $v = v_0$ с областью $\overline{D}$ состоит из одного отрезка, тогда

$$\vec{r}(u, v_0),\ (u, v_0) \in \overline{D}$$

(v_0 — фиксировано) является представлением непрерывно-дифференцируемой кривой, которая называется координатной линией (u-линией) поверхности S. Аналогичным образом определяются и координатные v — линии поверхности S :

$$\vec{r}(u_0, v),\ (u, v_0) \in \overline{D}.$$

Векторы $\vec{r}\,'_u = \vec{r}_u = (x_u, y_u, z_u)$ и $\vec{r}\,'_v = \vec{r}_v = (x_v, y_v, z_v)$ являются касательными векторами координатных u-линий и v-линий соответственно. (Мы не будем ставить знак $'$ для обозначения производной, если это не вызовет недоразумений).

Определение 10.4.4. *Точка $\vec{r}(u,v)$ поверхности S называется неособой, если касательные векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ линейно независимы (не колинеарны). В противном случае она называется особой точкой поверхности S (при данном ее представлении).*

Очевидно, что точка $\vec{r}(u,v)$ поверхности является неособой тогда и только тогда, когда $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0$. Если точка $\vec{r}(u_0,v_0)$ поверхности S неособая, то в ней существует и единственная касательная плоскость, проходящая через точку $\vec{r}(u_0,v_0)$ параллельно касательным векторам $\vec{r}_u(u_0,v_0)$, $\vec{r}_v(u_0,v_0)$. Ее уравнение имеет вид

$$(\vec{r} - \vec{r}_0)\vec{r}_u\vec{r}_v = 0.$$

(В левой части стоит смешанное произведение векторов.)

Если $\vec{r} = (x,y,z)$, $\vec{r}_0 = (x_0,y_0,z_0)$, $\vec{r}_u = (x_u,y_u,z_u)$, $\vec{r}_v = (x_v,y_v,z_v)$ то уравнение касательной плоскости можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0.$$

В случае явного задания поверхности $z = f(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}$, имеем $u = x$, $v = y$, поэтому уравнение примет вид

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0).$$

Для неявно заданной поверхности

$$F(x,y,z) = 0.$$

в точке (x_0,y_0,z_0), для которой $F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 > 0$ уравнение касательной плоскости имеет вид

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x - x_0) + F_y(x_0,y_0,z_0)(y - y_0) + F_z(x_0,y_0,z_0)(z - z_0) = 0.$$

Уравнения нормали к поверхности S в точке (x_0,y_0,z_0), заданной параметрически, явно и неявно имееют соответственно вид:

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}},$$

$$\frac{x - x_0}{f_x} = \frac{y - y_0}{f_y} = -(z - z_0),$$

$$\frac{x - x_0}{F_x} = \frac{y - y_0}{F_y} = \frac{z - z_0}{F_z}.$$

Можно показать, что неособая (особая) точка остается неособой (особой) при допустимой замене параметров, а плоскость, касательная к поверхности в неособой точке при данном представлении поверхности, будет касательной и при другом ее представлении.

Определение 10.4.5. *Гладкой поверхностью называется непрерывно дифференцируемая поверхность без особых точек.*

Отметим, что для гладкой поверхности $S = \{\vec{r}(u,v), (u,v) \in \overline{D}\}$ всюду в замыкании области $\overline{D}$ выподняется неравенство

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} \neq 0 \text{ всюду в } \overline{D}.$$

10.5. Площадь поверхности. Поверхностный интеграл первого рода

10.5.1. Первая квадратичная форма поверхности. Пусть $S = \{\vec{r}(u,v) : (u,v) \in \overline{D}\}$ — гладкая поверхность. Любой вектор $d\vec{r}$ касательной плоскости выражается через базасные касательные вектора $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$:

$$d\vec{r} = \vec{r}_u \cdot du + \vec{r}_v \cdot dv,$$

где du, dv — координаты вектора $d\vec{r}$ в этом базисе.

Выразим квадрат длины касательного вектора $d\vec{r}$ через его координаты du, dv

$$|d\vec{r}|^2 = (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)^2 = \vec{r}_u^2 du^2 + 2\vec{r}_u \vec{r}_v du dv + \vec{r}_v^2 dv^2,$$

и обозначим

$$E = \vec{r}_u^2, \; F = \vec{r}_u \vec{r}_v, \; G = \vec{r}_v^2,$$

тогда

$$|d\vec{r}|^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

Определение 10.5.1. *Первой квадратичной формой поверхности называется квадратичная форма*

$$E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

При допустимой замене параметров

$$\Phi : \begin{cases} u = \phi(u_1, v_1), \\ v = \psi(u_1, v_1), \end{cases} \qquad (u_1, v_1) \in \overline{D}_1$$

базисы du, dv и du_1, dv_1 связаны соотношением

$$du = \varphi_{u_1} du_1 + \varphi_{v_1} dv_1$$
$$dv = \psi_{u_1} du_1 + \psi_{v_1} dv_1.$$

Обозначим

$$J = \begin{vmatrix} \varphi_{u_1} & \varphi_{v_1} \\ \psi_{u_1} & \psi_{v_1} \end{vmatrix}$$

— матрица Якоби допустимого преобразования параметров. Тогда матрицы квадратичных форм A и A_1 :

$$A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \qquad E = r_u^2, \quad F = r_u r_v, \quad G = r_u^2$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{pmatrix}, \qquad E_1 = r_{u_1}^2, \quad F = r_{u_1} r_{v_1}, \quad G = r_{u_1}^2$$

связаны соотношением

$$A = J^T A_1 J.$$

Отсюда для соответствующих определителей

$$\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_{u_1} & \varphi_{v_1} \\ \psi_{u_1} & \psi_{v_1} \end{vmatrix}^2,$$

или

$$EG - F^2 = (E_1 G_1 - F_1^2) \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(u_1,v_1)} \right|^2.$$

Зная первую квадратичную форму поверхности можно найти длину γ кривой Γ, лежащей на поверхности

$$\Gamma : r(u(t), v(t)), \qquad (u(t), v(t)) \in \overline{D}, \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{E^2 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F \frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G^2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt.$$

10.5.2. Площадь поверхности. Рассмотрим случай, когда поверхность S задана явным образом: $S = \{(x,y,z) : z = f(x,y),\, (x,y) \in \overline{D}\}$, где D — измеримая по Жордану (квадрируемая) плоская область. Будем предполагать, что поверхность непрерывно дифференцируемая, т.е. частные производные f_x, f_y непрерывны в замкнутой области $\overline{D}$. Обозначим $T = \{D_j\}_{i=1}^N$— разбиение области D, где D_j — измеримы и пересекаются попарно разве что по своим границам.

Пусть (x_j, y_j) произвольная точка D_j, ей соответствует точка $P_j \in S$ с координатами $(x_j, y_j, f(x_j, y_j))$. В точке P_j проведем касательную плоскость к поверхности S и обозначим E_j часть этой плоскости, которая проектируется на область D_j.

Определение 10.5.2. *Площадью поверхности S называется предел*

$$\Sigma(S) = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{j=1}^N S(E_j),$$

где $\lambda(T)$ — диаметр разбиения T, а $S(E_j)$ — площадь E_j.

Косинус угла между вектором нормали к поверхности S в точке P_j и осью z равен $\dfrac{1}{\sqrt{1 + f_x^2(x_j,y_j) + f_y^2(x_j,y_j)}}$, поэтому

$$S(E_j) = \sqrt{1 + f_x^2(x_j,y_j) + f_y^2(x_j,y_j)} \cdot S(D_j).$$

Переходя к пределу при $\lambda \to 0$ получим формулу для площади поверхности S в случае ее явного задания:

$$\Sigma(S) = \iint\limits_D \sqrt{1 + f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y)}\, dxdy.$$

Отметим, что полученную формулу после обозначений

$$x = u, \; y = v, \; z = f(u,v), \quad (u,v) \in D$$

можно записать в виде

$$\Sigma(S) = \iint\limits_D |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dudv. \tag{10.5.1}$$

Определение 10.5.3. *В случае параметрически заданной непрерывно дифференцируемой поверхности $S = \{\vec{r}(u,v), (u,v) \in D\}$ площадью поверхности называется величина, заданная формулой (10.5.1).*

Заметим, что если

$$\begin{cases} u = \varphi(u_1, v_1), \\ v = \psi(u_1, v_1) \end{cases} \qquad (u_1, v_1) \in \overline{D}_1$$

— допустимое преобразование параметров, то величина площади поверхности не меняется. Действительно

$$\iint\limits_D |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|\, dudv = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\, dudv = \iint\limits_{D_1} \sqrt{E_1 G_1 - F_1} \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u_1, v_1)} \right| dudv =$$

$$= \iint\limits_{D_1} \sqrt{E_1 G_1 - F_1} du_1 dv_1 = \iint\limits_{D_1} |\vec{r}_{u_1} \times \vec{r}_{v_1}|\, du_1 dv_1.$$

Здесь мы воспользовались соотношением

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|^2 = EG - F^2$$

и правилом замены переменных в двойном интеграле.

Определение 10.5.4. *Величина $d\sigma = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|\, dudv = \sqrt{EG - F^2}\, dudv$ называется элементом площади.*

10.5.3. Поверхностный интеграл первого рода. Пусть $S = \{\vec{r}(u,v),\ (u,v) \in \overline{D}$ — поверхность, $\overline{D}$ — измеримая по Жордану (квадрируемая) область и $T = \{D_j\}_{j=1}^N$ разбиение этой области. Произвольным образом выберем точку $(u_j, v_i) \in D_i$, тогда точка $\vec{r}(u_i, v_j) = A_j$ принадлежит части S_j поверхности S, соответствующей области D_j.

Определение 10.5.5. *Если функция $\Phi(x,y,z)$ определена на поверхности S или в ее окрестности, то выражение*

$$\sum_{j=1}^N \Phi(A_j)\Sigma(S_j)$$

называется интегральной суммой функции Φ на S.

Определение 10.5.6. *Интегралом по поверхности (первого рода) называется предел*

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{j=1}^N \Phi(A_j)\Sigma(S_j) = \iint\limits_S \Phi(x,y,z)\, d\sigma.$$

Теорема 10.5.1. *Если поверхность S — гладкая и функция Φ непрерывна на поверхности S, то поверхностный интеграл первого рода существует и равен*

$$\iint\limits_S \Phi(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_D \Phi(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,dudv =$$

$$= \iint\limits_D \Phi(x(u,v),y(u,v),z(u,v))|r_u \times r_v|\,dudv.$$

В случае явного задания поверхности $S = \{(x,y,z):\ z = f(x,y),\ (x,y) \in D\}$ формула для вычисления поверхностного интеграла первого рода примет вид

$$\iint\limits_S \Phi(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_D \Phi(x,y,z)\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy.$$

Физический смысл поверхностного интеграла первого рода следующий: если на поверхности S распределена масса с плотностью $\Phi(x,y,z)$, то общая масса поверхности равна поверхностному интегралу первого рода.

Пример 10.5.1. Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$\iint\limits_S (x^2+y^2)\,d\sigma, \quad S = \{(x,y,z):\, x^2+y^2+z^2 = R^2,\, z \geqslant 0\}.$$

Решение. Первый способ. Параметризуем поверхность (верхнюю полусферу):

$$\begin{cases} x = R\cos u\cos v, \\ y = R\sin u\cos v, \\ z = R\sin v. \end{cases} \quad (u,v) \in \overline{D} = \{(u,v):\, 0 \leqslant u \leqslant 2\pi,\, 0 \leqslant v \leqslant \pi/2\}.$$

Коэффициенты первой квадратичной формы этой поверхности равны

$$E = R^2\cos^2 v, \quad F = 0, \quad G = R^2,$$

тогда поверхностный интеграл равен

$$\iint\limits_D R^2\cos^2 v\sqrt{R^4\cos^2 v}dudv = \iint\limits_D R^3\cos^2 v\cos v dudv =$$

$$= R^3\int\limits_0^{2\pi} du \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 v d\sin v = 2\pi R^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 v)d\sin v =$$

$$= 2\pi R^3 \sin v\Big|_0^{\pi/2} - \frac{2\pi R^3}{3}\sin^3 v\Big|_0^{\pi/2} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Второй способ. Найдем явное представление верхней полусферы

$$z = \sqrt{R^2-x^2-y^2},\ (x,y) \in D = \{x^2+y^2 \leqslant R^2\}$$

и частные призводные

$$z_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\ z_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

Тогда

$$\iint\limits_S (x^2+y^2)\,d\sigma = \iint\limits_D (x^2+y^2)\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{R^2-x^2-y^2}}\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_D \frac{(x^2+y^2)}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,dxdy = \left[\begin{array}{ll} x = r\cos\varphi; & \\ y = r\sin\varphi; & J = rdrd\varphi \end{array}\right] =$$

$$= R\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \frac{r^3dr}{\sqrt{R^2-r^2}} = 2\pi R\int\limits_0^R \frac{r^3dr}{\sqrt{R^2-r^2}} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

10.6. Ориентация поверхности. Поверхностные интегралы второго рода

10.6.1. Ориентация гладкой поверхности. Будем предполагать, что в пространстве $\mathbb{R}^3$ выбрана правая система координат. Это означает следующее. Если $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные векторы правой системы координатных осей, то при взгляде из конца вектора $\vec{k}$ на плоскость XOY вектор $\vec{i}$ нужно повернуть против часовой стрелки, чтобы совместить его с вектором $\vec{j}$.

В этом случае говорят, что тройка векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ согласована "по правилу буравчика". Аналитически это означает, что в пространстве R^3_{xyz} рассматриваются только такие упорядоченные базисы $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$, которые получаются из упорядоченного базиса $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$ с помощью матриц, имеющих определитель, равный $+1$.

Пусть $S = (\vec{r}(u,v),\ (u,v) \in \overline{D}$, — гладкая поверхность, в каждой точке поверхности определен единичный нормальный вектор

$$\vec{\nu} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|},$$

являющийся непрерывной вектор-функцией на $\overline{D}$.

Определение 10.6.1. *Ориентацией гладкой поверхности $S = (\vec{r}(u,v),\ (u,v) \in \overline{D})$ называется непрерывная единичная нормаль $\vec{\nu} = \vec{\nu}(u,v)$. Очевидно, что если $\vec{\nu}$ ориентация поверхности S, то $-\vec{\nu}$ — так же ориентация. Одно из этих ориентаций называется положительной, другая — отрицательной.*

При допустимом преобразовании параметров

$$\left\{\begin{array}{l} u = \varphi(u_1,v_1), \\ v = \psi(u_1,v_1) \end{array}\right. \qquad (u_1,v_1) \in \overline{D}_1$$

векторы нормалей $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ и $\vec{\rho}_{u_1} \times \vec{\rho}_{v_1}$ двух различных представлений поверхности S связаны соотношением

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u_1,v_1)}\vec{\rho}_{u_1} \times \vec{\rho}_{v_1}$$

и, следовательно, они направлены в одну сторону в случае, если якобиан преобразования положителен, и противоположно направлены, если якобиан отрицателен.

Таким образом, для поверхностей, у которых выбрана ориентация, допустимыми преобразованиями параметров будем считать такие, у которых якобиан положителен.

Определение 10.6.2. *Поверхность, у которой выбрана одна из двух ориентаций, называется ориентированной.*

Поверхность с положительной ориентацией будем обозначать S^+, а с отрицательной — S^-.

Отметим, что всякая гладкая поверхность всегда ориентируема.

Простым примером негладкой поверхности S, на которой существует целая линия, вдоль которой нормали при любом их выборе терпят разрыв, является часть двугранного угла.

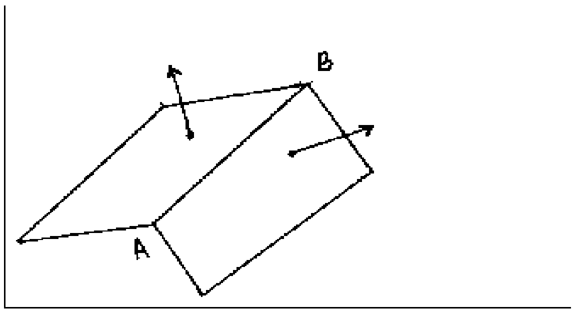

Рис 10.6.1. Ориентация кусочно-гладкой поверхности

Другой подход к ориентации гладкой поверхности S с краем ∂S состоит в следующем.

Пусть $S = (\vec{r}(u,v),\ (u,v) \in \overline{D})$ — гладкая поверхность, краем которой является кривая ∂S. Положительная ориентация кривой $\partial D = \{(u(t), v(t)),\ a \leqslant t \leqslant b\}$ (т.е. ориентация против часовой стрелки) порождает вполне определенную ориентацию края ∂S поверхности S.

Определение 10.6.3. *Эта ориентация называется согласованной с ориентацией S^+ поверхности S вектором нормали* $\vec{\nu} = \dfrac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$.

Поэтому ориентированный край ∂S гладкой поверхности S будем так же как и непрерывную единичную нормаль $\vec{\nu}$ называть *ориентацией гладкой поверхности S*.

Отметим еще следующий факт. Пусть ориентированная поверхность S с краем ∂S разбита гладкой кривой Γ на две части, тогда направление обхода краев ∂S_1 и ∂S_2 поверхностей S_1 и S_2 вдоль дуги Γ противоположны.

Будем называть поверхность S *кусочно-гладкой*, если ее можно разбить на конечное число гладких частей S_i так, чтобы каждая из этих частей имела ориентированный край ∂S_i и возникающие при этом направления обхода краев ∂S_i были согласованы в этом смысле, что вдоль каждой дуги, где два таких края совпадают, направления их обхода были противоположны.

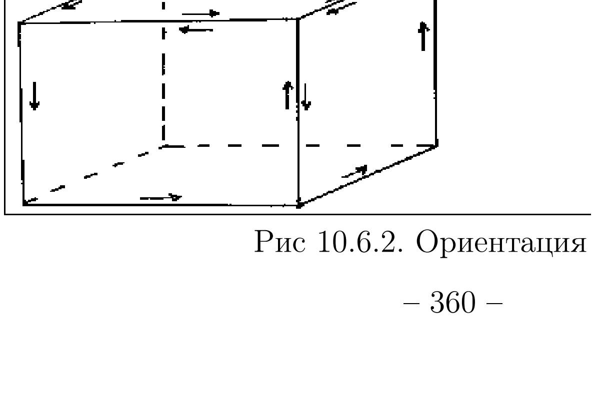

Рис 10.6.2. Ориентация куба

На рис. 10.6.2 изображен куб, поверхность которого ориентирована внешней нормалью.

Можно показать, что всякая кусочно-гладкая поверхность, являющаяся границей некоторой трехмерной области, ориентируема. При этом одна из ориентаций состоит из единичных нормалей, направленных от поверхности в область (*внутренние нормали*), а другая состоит из единичных нормалей, направленных от поверхности наружу области (*внешние нормали*).

Иногда ориентируемые кусочно-гладкие поверхности называют *двусторонними поверхностями*: они имеют две "стороны" , соответствующие двум выборам единичных нормалей, задающих две ее ориентации.

Примером неориентируемой (односторонней) поверхности является лист Мебиуса. Его можно получить, взяв прямоугольную полоску бумаги $ABCD$, один раз перекрутив ее вокруг оси симметрии MN и склеив сторону AB со стороной CD.

На листе Мебиуса нельзя выбрать единичную нормаль, которая являлясь бы непрерывной функцией точки пространства.

10.6.2. Поверхностные интегралы второго рода. Пусть

$$S^+ = (\vec{r}(u,v),\ (u,v) \in \overline{D})$$

— гладкая ориентируемая поверхность, D — квадрируемая область. Будем рассматривать область, для которых существует сколь угодно мелкие разбиения $T = \{D_\alpha\}$, элементы которых D_α — квадрируемые области. Обозначим через S_α^+ гладкую поверхность, соответствующую области D_α: $S_\alpha^+ = \{\vec{r}(u,v),\ (u,v) \in \overline{D}_\alpha\}$. Система поверхностей $T_s = \{s_\alpha\}$ называется *разбиением поверхности* S^+.

Пусть функции P, Q, R определены на поверхности S^+, $x_\alpha = x(u_\alpha, v_\alpha)$, $y_\alpha = y(u_\alpha, v_\alpha)$, $z_\alpha = z(u_\alpha, v_\alpha), (u_\alpha, v_\alpha) \in \overline{D}_\alpha$,

$$(P_\alpha, Q_\alpha, R_\alpha) = (P(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha), Q(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha), R(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)).$$

Обозначим через $\cos_\alpha(\vec{\nu}, \vec{i}), \cos_\alpha(\vec{\nu}, \vec{j}), \cos_\alpha(\vec{\nu}, \vec{k})$ косинусы углов между нормалью $\vec{\nu}$ в точке $(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$ и ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Выражение

$$\sum_\alpha P_\alpha \cos_\alpha(\vec{\nu}, \vec{i})\Sigma(S_\alpha) + Q_\alpha \cos_\alpha(\vec{\nu}, \vec{j})\Sigma(S_\alpha) + R_\alpha \cos_\alpha(\vec{\nu}, \vec{k})\Sigma(S_\alpha)$$

называется *интегральной суммой* вектор-функции (P, Q, R) по поверхности S^+.

Определение 10.6.4. *Предел этой интегральной суммы, когда диаметр разбиения $\lambda(T) \to 0$ называется поверхностным интегралом второго рода и обозначается*

$$\iint\limits_{S^+} P dydz + Q dzdx + R dxdy \equiv \iint\limits_{S^+} \omega.$$

В определении интеграла по противоположно ориентированной поверхности S^- в интегральной сумме вместо косинусов углов между вектором единичной нормали $\vec{\nu}$ и координатными ортами нужно взять косинусы $\cos(-\vec{\nu}, \vec{i}), \cos(\vec{\nu}, \vec{j}), \cos(\vec{\nu}, \vec{k})$. Тогда поверхностные интегралы по противоположно ориентированным поверхностям S^+ и S^- будут различаться знаком.

Теорема 10.6.1. *Если S гладкая поверхность, а вектор-функция (P, Q, R) непрерывна на этой поверхности, то справедлива формула*

$$\iint\limits_{S^+} P dydz + Q dzdx + R dxdy \equiv \iint\limits_{S} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) d\sigma,$$

связывающая поверхностные интегралы второго и первого рода.

Здесь $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ — направляющие косинусы вектора единичной нормали $\vec{\nu}$, а $d\sigma$ — элемент поверхности.

В случае параметрически заданной гладкой поверхности $S = \{r(u,v),\ (u,v) \in \overline{D}\}$ имеем

$$\cos\alpha = \vec{\nu}\cdot\vec{i} = \frac{\vec{n}\cdot\vec{i}}{|\vec{n}|} = \frac{(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)\vec{i}}{|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|} = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \,/\, \sqrt{EG-F^2},$$

$$\cos\beta = \vec{\nu}\cdot\vec{j} = \frac{\vec{n}\cdot\vec{j}}{|n|} = \frac{(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)\vec{j}}{|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|} = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \,/\, \sqrt{EG-F^2},$$

$$\cos\gamma = \vec{\nu}\cdot\vec{k} = \frac{\vec{n}\cdot\vec{k}}{|\vec{n}|} = \frac{(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)\vec{k}}{|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \,/\, \sqrt{EG-F^2},$$

тогда поверхностный интеграл второго рода выражается через двойной интеграл следующим образом

$$\iint\limits_{S^+} \omega = \iint\limits_{D} \left[P\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right] dudv$$

Для явно заданной поверхности $S:\ u=x,\ v=y,\ z=f(x,y),\ (x,y)\in\overline{D}$ имеем

$$\frac{\partial(y,f)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ f_x & f_y \end{vmatrix} = -f_x;$$

$$\frac{\partial(f,x)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -f_y;$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)} = 1,$$

тогда

$$\iint\limits_{S^+} \omega = \iint\limits_{D} [R(x,y,f(x,y)) -$$
$$-R(x,y,f(x,y))f_x(x,y) - Q(x,y,f(x,y))f_y(x,y)]\,dxdy.$$

Для кусочно-гладкой поверхности $S = \{S_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ интегралы первого и второго рода определяются по аддитивности:

$$\iint\limits_{S} \Phi d\sigma = \sum_{\alpha=1} N \iint\limits_{S_\alpha} \Phi d\sigma,$$

$$\iint\limits_{S^+} \omega = \sum_{\alpha=1} N \iint\limits_{S_\alpha^+} \omega.$$

В случае поверхностного интеграла второго рода предполагается, что поверхность S ориентирована.

10.7. Формула Остроградского-Гаусса

Сформулируем и докажем теорему Остроградского-Гаусса для "элементарной области".

Определение 10.7.1. *Назовем область $G \subset \mathbb{R}^3_{xyz}$ элементарной относительно оси Oz, если ее можно записать в виде*

$$G = \{(x, y, z) : \varphi(x, y) < z < \psi(x, y, z),\ (x, y) \in D\},$$

где D — измеримая по Жордану область в плоскости $\mathbb{R}^2_{xy}$ и функции $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ непрерывны в замыкании $\overline{D}$ области D.

Будем предполагать, что поверхности $S_2 = \{(x, y, z) :\ z = \psi(x, y), (x, y) \in \overline{D}\}$ и $S_1 = \{(x, y, z) :\ z = \varphi(x, y), (x, y) \in \overline{D}\}$ — кусочно–гладкие, также кусочно-гладкой будем считать цилиндрическую поверхность $S_0 = \{(x, y, z) :\ (x, y) \in \partial D, \varphi(x, y) \leqslant z \leqslant \psi(x, y)\}$. Таким образом граница $\partial G = S$ области G является кусочно–гладкой и притом ориентируемой, как всякая кусочно-гладкая поверхность, являющаяся границей области. Внешние нормали ν поверхности S на ее гладких частях являются их ориентациями. В силу этих ориентаций гладкие части поверхности S ориентированы согласованно и, следовательно, порождают ориентацию всей поверхности S. Эта ориентация получается, если для каждой гладкой части поверхности выбрать ориентацию ее края, согласованную с внешней нормалью ν на этой части по принципу штопора. Обозначим поверхности с выбранными таким образом ориентациями соответственно S^+, S_0^+, S_1^+, S_2^+. Отметим, что здесь для поверхности S_1 ориентацией является ее "нижняя сторона" , а для поверхности S_2 — ее "верхняя сторона".

Будем предполагать, что область G обладает свойствами, перечисленными выше, относительно всех осей координат. Такие области будем называть *элементарными.*

Через $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ обозначим направляющие косинусы единичной внешней нормали $\vec{\nu}$ поверхности S:

$$\vec{\nu} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

Теорема 10.7.1 (Остроградский–Гаусс)**.** *Пусть в замыкании $\overline{G}$ области G указанного выше вида заданы функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывные вместе с частными производными $\dfrac{\partial P}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$, $\dfrac{\partial R}{\partial z}$, тогда*

$$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz =$$

$$= \iint\limits_{S^+} (Pdydz + Qdzdx + Rdxdy) =$$

$$= \iint\limits_{S} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma.$$

Доказательство. Рассмотрим, например, интеграл

$$\iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz.$$

С учетом обозначений, введенных в начале параграфа, преобразуем этот интеграл следующим образом

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{D} \left[\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right] dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D} \left[R(x,y,\psi(x,y)) - R(x,y,\varphi(x,y)) \right] dxdy =$$

$$= \iint\limits_{S_2^+} Rdxdy + \iint\limits_{S_1^+} Rdxdy.$$

Учитывая, что на поверхности S_0 имеем $\cos\gamma = 0$, получаем

$$0 = \iint\limits_{S_0} R\cos\gamma dS = \iint\limits_{S_0^+} R(x,y,z)dxdy.$$

Поэтому выражение $\iiint\limits_{G} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz$ можно записать в виде

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{S_2^+} Rdxdy + \iint\limits_{S_1^+} Rdxdy + \iint\limits_{S_0^+} Rdxdy = \iint\limits_{S^+} Rdxdy.$$

Совершенно аналогично доказываются формулы

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \iint\limits_{S^+} Pdydz \qquad \text{и} \qquad \iiint\limits_{G} \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \iint\limits_{S^+} Qdzdx.$$

Формула Остроградского-Гаусса может быть доказана и в случае областей G более общего вида, чем было доказано выше. А именно для областей G для которых существует разбиение $G = \bigcup\limits_{i=1}^{L_0} G_i$ на конечное число элементарных областей G_i. Для этого достаточно записать формулу Остроградского– Гаусса для каждой элементарной области G_i и полученные результаты сложить. В результате получается искомая формула для области G. Действительно, в левой части формулы в силу аддитивности получается искомый тройной интеграл по области G. В правой же части останутся поверхностные интегралы по частям границ областей G_i, которые в совокупности составляют границу ∂G области G. Остальные интегралы в совокупности дадут ноль, так как внешние нормали в точках границ двух областей G_i направлены в разные стороны, следовательно, соответствующие поверхностные интегралы отличаются только знаком. $\square$

Можно доказать, что формула Остроградского-Гаусса справедлива для любой ограниченной области G, граница которой состоит из конечного числа кусочно–гладких поверхностей.

Теорема 10.7.2 (Остроградский-Гаусс, общий случай). *Пусть граница ∂G ограниченной области S состоит из конечного числа кусочно-гладких поверхностей, ориентированных вектором внешней нормали. Вектор функция (P, Q, R) и частные производные $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны в замыкании $\overline{G}$ области G, тогда справедлива* *формула*

$$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint\limits_{\partial G} (Pdydz + Qdzdx + Rdxdy).$$

Формула Остроградского-Гаусса позволяет найти выражение для объема области через соответствующий поверхностный интеграл. Действительно, положим $P(x,y,z) = x$, $Q(x,y,z) = y$, $R(x,y,z) = z$ и учитывая $\iiint\limits_G dxdydz = V_G$ — объем области G, получим

$$V_G = \frac{1}{3}\iint\limits_{\partial G} xdydz + ydzdx + zdxdy.$$

Пример 10.7.1. Вычислить поверхностный интеграл

$$I = \iint\limits_{S^+} (1+2x)dydz + ydzdx + zdxdy.$$

где $S = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 = z^2, 0 \leqslant z \leqslant 4\}$ ориентированна вектором внешней нормали.

Решение. Согласно формуле Остроградского-Гаусса имеем

$$V_G = \iint\limits_G (2+1+1)dxdydz = 4V,$$

где V объем конуса с высотой $H = 4$ и радиусом основания $r = 4$. Таким образом $V = \frac{1}{2}\pi r^2 H = \frac{1}{2}\pi \cdot 16 \cdot 4 = 32\pi$, тогда $I = 128\pi$.

10.8. Формула Стокса

Пусть $S = \{\vec{r}(u,v),\ (u,v) \in \overline{D} \subset \mathbb{R}^2_{u,v}\}$ — дважды непрерывно-дифференцируемая поверхность без особых точек в пространсве $\mathbb{R}^3_{xyz}$, D — ограниченная плоская область, для которой справедлива формула Грина. Предположим, что граница ∂D области D состоит из одного простого кусочно–гладкого контура Γ_0, ориентированного положительно. $\Gamma_0 : u = u(t)$, $v = v(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Пусть $\vec{\nu} = \dfrac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$ — ориентация поверхности S, $\vec{\nu} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. При сделанных выше предположениях нормаль $\vec{\nu}$ непрерывна на $\overline{D}$.

Обозначим через S^+ поверхность S с выбранной на ней нормалью $\vec{\nu}$. Пусть Γ контур такой, что $\Gamma = \{\vec{r}(u(t), v(t)),\ a \leqslant t \leqslant b\}$. Будем говорить, что контур Γ ограничивает поверхность S, или что поверхность S натянута на контур Γ.

Пусть G — область в $\mathbb{R}^3_{xyz}$ такая, что $S \subset G$. При выполнении приведенных выше условий справедлива

Теорема 10.8.1 (Стокс). *Если функции P, Q, R непрерывны вместе со своими частными производными в области G, тогда*

$$\int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz =$$
$$= \iint\limits_{S^+} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy =$$
$$= \iint\limits_{S} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] d\sigma =$$
$$= \iint\limits_{S} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS.$$

Доказательство. Рассмотрим, например, $I_1 = \int\limits_{\Gamma} Pdx$. Воспользовавшись параметрическим представлением контура Γ, получим

$$I_1 = \int\limits_a^b P(x(u(t),v(t)), y(u(t),v(t)), z(u(t),v(t)))x'_t(u(t),v(t))dt.$$

Далее воспользуемся формулой

$$x'_t(u(t),v(t)) = \frac{\partial x(u(t),v(t))}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial x(u(t),v(t))}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$

и получим

$$I_1 = \int\limits_{\Gamma_0} P(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \left[\frac{\partial x(u,v)}{\partial u}du + \frac{\partial y(u,v)}{\partial v}dv\right].$$

В правой части последней формулы стоит криволинейный интеграл по границе Γ_0 области $D \subset \mathbb{R}^2_{uv}$. Применяя к этому интегралу формулу Грина будем иметь:

$$I_1 = \iint\limits_{D} \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right] dudv =$$
$$= \iint\limits_{D} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v} + P\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} -\right.$$
$$\left. - \left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u} - P\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u}\right] dudv =$$
$$= \iint\limits_{D} \left[\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} - \frac{\partial P}{\partial u}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right] dudv =$$
$$= \iint\limits_{S^+} \frac{\partial P}{\partial z}dzdx - \iint\limits_{S^+} \frac{\partial P}{\partial y}dxdy.$$

Аналогичным образом доказывается, что

$$I_2 = \int\limits_{\Gamma} Q dy = \iint\limits_{S^+} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy - \frac{\partial Q}{\partial z} dydz,$$

$$I_3 = \int\limits_{\Gamma} R dz = \iint\limits_{S^+} \frac{\partial R}{\partial y} dydz - \frac{\partial R}{\partial x} dzdx.$$

Складывая выражения для интегралов I_1, I_2, I_3, получим формулу Стокса. $\square$

Чтобы нагляднее представить себе связь выбора нормали ν на поверхности S с ориентацией ограничивающего ее контура Γ, рассмотрим поверхность S, имеющую явное представление

$$S = \{(x, y, z) : z = f(x, y),\ (x, y) \in \overline{D}\}.$$

Пусть $\Gamma_0 = \{(x, y) :\ x = x(t), y = y(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$ — положительно ориентированный контур, являющийся границей области D.

Ориентация кривой Γ определяется ориентацией кривой Γ_0, а именно выбором параметрического представления

$$\Gamma = \{(x, y, z) : x = x(t),\ y = y(t),\ z = f(x(t), y(t)),\ a \leqslant t \leqslant b\}.$$

В рассматриваемом случае кривая Γ_0 является проекцией кривой Γ на плоскость XOY. Вектор нормали $\vec{\nu}$ имеет вид

$$\vec{\nu} = \left(-\frac{f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, -\frac{f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right),$$

поэтому $\cos(\vec{\nu}, \vec{k}) = \cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} > 0$. Это означает, что нормаль $\vec{\nu}$ образует острый угол с осью OZ. Таким образом, если смотреть на поверхность S с положительного направления оси OZ, то контур Γ будет ориентирован против часовой стрелки, т.е. ориентация кривой Γ с нормалью $\vec{\nu}$ "по правилу буравчика".

Замечание 10.8.1. *Формула Стокса остается справедливой, если взять в ней противоположные ориентации контура и нормали; в этом случае обе части формулы Стокса изменят знак на противоположный (при этом ориентации контура и поверхности остаются согласованными по правилу штопора).*

Замечание 10.8.2. *Формула Стокса может быть доказана и для кусочно–гладких ориентируемых поверхностей $S = \{S_i\}_{i=1}^{i_0}$, а именно для таких, для которых поверхности S_i, $i = 1, \ldots, i_0$, удовлетворяют условиям теоремы Стокса. При этом край поверхности ∂S должен состоять из конечного числа контуров Γ_i. Для доказательства достаточно написать формулы Стокса для каждой поверхности S_i, $i = 1, \ldots, i_0$ и сложить их.*

Замечание 10.8.3. *В теореме Стокса условие дважды непрерывной дифференцируемости поверхности S наложено для простоты доказательства и от него можно отказаться. Формула Стокса остается справедливой и при более общих предположениях относительно поверхности S.*

Теорема 10.8.2 (Стокс, общий случай)**.** *Пусть вектор-функция (P, Q, R) непрерывно дифференцируема в области G и пусть $S = \{S_i\}_{i=1}^{i_0}$ — ориентированная* *кусочно-гладкая поверхность и ∂S — ее край с ориентацией, порожденной заданной ориентацией поверхности S. Тогда справедлива формула*

$$\int\limits_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint\limits_{S^+} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Наглядно согласование ориентации контуров γ_i, из которых состоит край ∂S поверхности S, с ориентацией этой поверхности и, следовательно, с ориентацией γ поверхности S_i, означает, что наблюдательдвигающийся по контуру γ_i, $i = 1, 2, \ldots, j_0$, и смотрящий на поверхность S из конца нормали $\vec{\nu}$, видит поверхность S слева.

Пример 10.8.1. Вычислить поверхностный интеграл

$$I = \int\limits_{\Gamma} ydx + xdy + zdz,$$

где $\Gamma = \{(x, y, z) : \, x^2 + y^2 + z^2 = 4, \, x^2 + y^2 = z^2, \, z \geqslant 0\}$ — окружность.

Решение. Пусть S — часть верхней полусферы, отсекаемая от нее конусом. Тогда Γ — край этой поверхности. По формуле Стокса получим

$$\iint\limits_{S^+} \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial y}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y}\right) dxdy =$$

$$= \iint\limits_{S^+} 0\, dydz + 0\, dzdx + 0\, dxdy = 0$$

10.9. Скалярные и векторные поля

Термин *скалярное поле, векторное поле* равнозначны терминам "числовая функция точки", "вектор-функция точки". Эта терминология подчеркивает, что значения рассматриваемых объектов зависят именно от точек пространства, в которых эти функции определены, а не от их координат при выборе той или иной системы координат. Используя эту терминологию можно сказать, что всякое скалярное поле $u(M)$ определенное и дифференцируемое в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^3$, порождает векторное поле ее градиента:

$$\vec{a}(M) = \operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Определение 10.9.1. *Пусть в области G задано векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(M)$ и существует определенная в области G функция $u(M)$ такая, что $\vec{a} = \operatorname{grad} u(M)$. Тогда функция $u(M)$ называется потенциальной функцией или потенциалом векторного поля.*

Вводя символ *набла*: $\nabla = \vec{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$ можно написать:

$$\operatorname{grad} u = \nabla u,$$

где справа стоит "произведение" символа ∇ на функцию u :

$$\nabla u = \vec{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Пусть $\vec{E}(M)$ — напряженность электрического поля, созданного единичным отрицательным зарадом, помещенным в начале координат. Тогда в точке $M(x,y,z)$ вектор $\vec{E}(M)$ имеет, как известно из физики вид $\vec{E}(M) = \left(-\frac{x}{r^3}, -\frac{y}{r^3}, -\frac{z}{r^3}\right)$. Электрический потенциал рассматриваемого поля, т.е. функция $u(M) = \frac{1}{r}$ является потенциалом в смысле приведенного выше определения: $\text{grad }u(M) = \vec{E}(M)$.

Пусть $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in G$ и задан единичный вектор $\vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Проведем через точку M_0 прямую в направлении вектора $\vec{e}$:

$$x = x_0 + t\cos\alpha,\ y = y_0 + t\cos\beta,\ z = z_0 + t\cos\gamma, \qquad -\infty < t < \infty.$$

Производная вектор-функции $\vec{a}(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta, z_0+t\cos\gamma)$ по t при $t=0$ (если она существует) называется производной вектор-функции $\vec{a}$ по направлению вектора $\vec{e}$ в точке M_0 и обозначается

$$\frac{\partial\vec{a}}{\partial\vec{e}}(M_0) = \frac{d}{dt}\vec{a}\left(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma\right)|_{t=0}.$$

По правилу дифференцирования сложной функции получаем

$$\frac{\partial\vec{a}}{\partial\vec{e}} = \frac{\partial\vec{a}}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\vec{a}}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial\vec{a}}{\partial z}\cos\gamma.$$

Учитывая, что "скалярное произведение" вектора $\vec{e}$ и символического вектора ∇ можно записать в виде

$$\vec{e}\,\nabla = \cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}.$$

окончательно имеем

$$\frac{\partial\vec{a}}{\partial\vec{e}} = (\vec{e}\,\nabla)\,\vec{a}.$$

В случае произвольного вектора $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ (не обязательно единичного) *градиентом вектора $\vec{a}$ по вектору $\vec{b}$* назовем вектор

$$\left(\vec{b}\,\nabla\right)\vec{a} = b_x\frac{\partial\vec{a}}{\partial x} + b_y\frac{\partial\vec{a}}{\partial y} + b_z\frac{\partial\vec{a}}{\partial z}.$$

Если $\vec{b} = b\vec{b_0}$, где $|\vec{b_0}| = 1$, то "формальными преобразованиями" получим

$$\left(\vec{b}\,\nabla\right)\vec{a} = \left(b\vec{b_0}\,\nabla\right)\vec{a} = b\left(\vec{b_0}\,\nabla\right)\vec{a} = b\frac{\partial\vec{a}}{\partial\vec{b_0}}.$$

Эту формулу можно получить и другим способом, переходя к координатной записи. Таким образом видно, что с символическим вектором ∇ можно иногда обращаться как с настоящим вектором (не забывая однако, что ∇ обозначает и некую операцию дифференцирования.)

Пусть векторное поле $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ дифференцируемо в точке.

Определение 10.9.2. *Дивергенцией векторного поля в этой точке называется число*

$$\text{div }\vec{a} = \frac{\partial\vec{a}}{\partial x} + \frac{\partial\vec{a}}{\partial y} + \frac{\partial\vec{a}}{\partial z}.$$

Символически дивергенция может быть записана с использованием символа ∇

$$\text{div }\vec{a} = \nabla\vec{a}.$$

Определение 10.9.3. *Ротором (вихрем) векторного поля $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ назовем вектор*

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_y}{\partial y} \right).$$

С помощью вектора ∇ ротор можно записать в виде векторного произведения

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Введем еще некоторые определения, связанные с векторным полем $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, определенным в области $G \subset \mathbb{R}^3$.

Определение 10.9.4. *Пусть Γ — замкнутая кусочно-гладкая кривая в области G. Интеграл*

$$\int\limits_{\Gamma} a_x dx + a_y dy + a_z dz$$

называется циркуляцией векторного поля $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ по кривой G и обозначается

$$\int\limits_{\Gamma} \vec{a} d\vec{r}, \quad \text{где} \quad d\vec{r} = (dx, dy, dz).$$

Определение 10.9.5. *Поле, циркуляция которого по любой замкнутой кусочно-гладкой кривой, лежащей в области G, равна нулю, называется потециальным.*

Напомним, что в §10.3 было доказано, что условие равенства нулю криволинейного интеграла $\int\limits_{\Gamma} P dx + Q dy$ по любому замкнутому контуру Γ равносильно тому, что интеграл $\int\limits_{AB} P dx + Q dy$ не зависит от пути интегрирования между точками A и B.

При доказательстве нигде не использовалось, что кривая Γ плоская: $\Gamma \subset G \subset \mathbb{R}^2$. Оно справедливо и для криволинейных интегралов по пространственным кривым.

Теорема 10.9.1. *Циркуляция $\int\limits_{\Gamma} \vec{a} d\vec{r} = \int\limits_{\Gamma} a_x dx + a_y dy + a_z dz$ равна нулю по любой кусочно-гладкой замкнутой кривой, лежащей в области G тогда и только тогда, когда интеграл $\int\limits_{AB} a_x dx + a_y dy + a_z dz$ не зависит от пути интегрирования.*

Рассмотрим в качестве примера плоское векторное поле, т.е. поле $\vec{a} = (P, Q)$ заданное в плоской области $G \subset \mathbb{R}^2$, $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$. Вихрь этого поля имеет вид

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial Y} \right).$$

Теорема из §10.3 может быть переформулирована следующим образом

Для односвязной плоской области G следующие условия эквивалентны:

(i) векторное поле $\vec{a} = (P, Q)$ потенциально,

(ii) существует потенциальная функция u,
(iii) вихрь $\operatorname{rot}\vec{a}$ векторного поля во всех точках равен нулю.

Определение 10.9.6. *Пусть S некоторая ориентированная поверхность, лежащая в области G, $\vec{\nu}$ — единичный вектор нормали к поверхности, задающий ее ориентацию. Потоком векторного поля $\vec{a}=(P,Q,R)$ через поверхность S назовем интеграл*

$$\iint\limits_{S^+} Pdxdy+Qdzdx+Rdxdy$$

или

$$\iint\limits_{S} \vec{a}\,\vec{\nu}d\sigma \equiv \iint\limits_{S} (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,d\sigma.$$

Пример 10.9.1. Доказать, что $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u=0$.
$\operatorname{grad} u=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)$.
Решение. Воспользуемся символической записью вихря:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z}\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\right)\vec{k}=0.$$

Пример 10.9.2. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}=-y\vec{i}+x\vec{j}+c\vec{k}$ (c — константа) по окружности $(x-2)^2=1$, $z=0$.
Решение. Параметризуем окружность

$$\Gamma:\ x=2+\cos t,\ y=\sin t,\ z=0,\qquad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

$$\int\limits_{\Gamma}\vec{a}d\vec{r}=\int\limits_0^{2\pi}\left[-\sin t(2+\cos t)'+(2+\cos t)(\sin t)'+c\cdot 0\right]dt=$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\left[\sin^2 t+2\cos t+\cos^2 t\right]dt=\int\limits_0^{2\pi}dt+2\int\limits_0^{2\pi}\cos tdt=2\pi+2\sin t\Big|_0^{2\pi}=2\pi.$$

Пример 10.9.3. Найти поток векторного поля $\vec{a}=y^2\vec{i}+z\vec{k}$ через поверхность $S=\{(x,y,z,):\ z=x^2+y^2,\ 0\leqslant z\leqslant 2\}$.

Решение. В качестве параметров выберем $x = u$, $y = v$ $(u,v) \in D$, где $D = \{(u,v): \ u^2+v^2 \leqslant 2\}$. Тогда

$$\iint\limits_{S^+} y^2dydz + zdxdy = \iint\limits_{D} \left[v\frac{\partial(v,u^2+v^2)}{\partial(u,v)} + (u^2+v^2)\frac{\partial(v,u)}{\partial(u,v)}\right] dudv =$$

$$= \iint\limits_{D} \left[-2uv + u^2 + v^2\right] dudv = \left[\begin{array}{ll} u = r\cos\varphi & 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{2}, \\ v = r\sin\varphi, & 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \end{array} \quad J = r\right] =$$

$$= \iint\limits_{D^*} \left[-2r^2\sin\varphi\cos\varphi + r^2\right] drd\varphi = \int\limits_0^{\sqrt{2}} r^3dr \int\limits_0^{2\pi} [1-\sin 2\varphi]\, d\varphi =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{r^4}{4}\bigg|_0^{\sqrt{2}} = 2\pi.$$

10.10. Соленоидальные и потенциальные векторные поля

Используя обозначения теории векторных полей, теорему Остроградского-Гаусса можно сформулировать следующим образом

Теорема 10.10.1 (Остроградский-Гаусс)**.** *Пусть граница ∂G ограниченной области G состоит из конечного числа кусочно-гладких поверхностей, а векторное поле $\vec{a} = (P,Q,R)$ и частные производные $\dfrac{\partial P}{\partial x}, \dfrac{\partial Q}{\partial y}, \dfrac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны в замыкании области $\overline{G}$, тогда*

$$\iiint\limits_{G} \operatorname{div} \vec{a}\, dxdydz = \iint\limits_{\partial G} \vec{a}\,\vec{\nu} d\sigma.$$

Эта формула дает возможность установить геометрический подход к понятию дивергенции.

Теорема 10.10.2. *Пусть в трехмерной области G определено непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{a}(M)$. Пусть $M_0 \in G$ и D — область с кусочно-гладкой границей такая, что $\overline{D} \subset G$, $M_0 \in D$ и для области D справедлива формула Остроградского-Гаусса. Если $d(D)$ — диаметр области и $\vec{\nu}$ — единичный вектор нормали к ∂D, то*

$$\operatorname{div}\vec{a}(M_0) = \lim_{d(D)\to 0} \frac{\iint\limits_{\partial D} \vec{a}\,\vec{\nu} dS}{V(D)},$$

где $V(D)$ — объем области D.

Доказательство. По теореме Остроградского-Гаусса имеем

$$\iiint\limits_{D} \operatorname{div}\vec{a} dxdydz = \int\limits_{\partial D} \vec{a}\,\vec{\nu}\, d\sigma.$$

По интегральной теореме о среднем

$$\iiint\limits_{D} \operatorname{div}\vec{a}\, dxdydz = \operatorname{div}\, \vec{a}(M^*) \cdot V(D), \qquad M^* \in D.$$

Отсюда имеем

$$\operatorname{div} \vec{a}(M^*) = \frac{\iint\limits_{\partial D} \vec{a}\,\vec{\nu}\,d\sigma}{V(D)}.$$

Переходя к пределу $d(D) \to 0$ в силу непрерывности дивергенции получим утверждение теоремы. $\square$

Замечание 10.10.1. *Правую часть доказанной в теореме формулы можно принять за определение дивергенции:*

$$\operatorname{div} \vec{a}(M_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{d(D)\to 0} \frac{\iint\limits_{\partial D} \vec{a}\,\vec{\nu}\,d\sigma}{V(D)}.$$

Замечание 10.10.2. *Точки векторного поля $\vec{a}(M)$ в которых дивергенция не равна нулю $\operatorname{div}\vec{a} \neq 0$ называют "источниками" векторного поля. Это объясняется тем обстоятельством,что для всех достаточно малых по диаметру областей D, содержащих точку M_0 имеем $\iint\limits_{\partial D} \vec{a}\,\vec{\nu}\,d\sigma \neq 0$, т.е. поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через границу ∂D области D, содержащей "источник" M_0, не равен нулю.*

Ограниченную область D и, соответственно, ее границу ∂D будем называть *допустимыми*, если для них справедлива теорема Остроградского-Гаусса.

Определение 10.10.1. *Непрерывно дифференцируемое в области G векторное поле $\vec{a}(x, y, z)$ называется соленоидальным в этой области, если его поток через ориентированную границу ∂G любой допустимой области D, такой что ее замыкание $\overline{D}$ лежит в G: $\overline{D} \subset G$, равен нулю*

$$\iint\limits_{\partial D} \vec{a}\,\vec{\nu}\,d\sigma = 0.$$

Теорема 10.10.3. *Для того, чтобы непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{a}(M)$ было соленоидальным в области G, необходимо и достаточно, чтобы его дивергенция равнялась нулю во всех точках области G:*

$$\operatorname{div}\vec{a}(M) = 0, \qquad M \in G.$$

Доказательство необходимости. Пусть $\vec{a}(M)$ соленоидально в области G и $M_0 \in G$. Тогда существует $r_0 > 0$ такое, что для $r < r_0$ всех шар $U(M_0, r)$ с центром в точке M_0 радиуса r лежит в G.

Отметим, что $U(a, r)$ — допустимая область, поэтому

$$\operatorname{div}\vec{a}(M_0) = \lim_{r\to 0} \frac{\iint\limits_{\partial U(M_0,r)} \vec{a}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma}{V(U(M_0, r))}.$$

Из соленоидальности векторного поля имеем $\iint\limits_{\partial U(M_0,r)} \vec{a}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma = 0$ для всех $r < r_0$, поэтому $\operatorname{div}\,\vec{a}(M_0) = 0$.

Доказательство достаточности. Пусть $\vec{a}(M)$ непрерывно дифференцируемое в области G векторное поле с дивергенцией, равной нулю во всех точках области G :

$\operatorname{div}\vec{a}(M) = 0$, $M \in G$. Если D — допустимая область такая, что $D \subset \overline{D} \subset G$, тогда по теореме Остроградского-Гаусса

$$\iint\limits_{\partial D} \vec{a} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma = \iint\limits_{D} div\vec{a}\, dxdydz = 0,$$

т.е. поле $\vec{a}(M)$ соленоидально. $\square$

Пример 10.10.1. Доказать, что если $\vec{a}(M) = (P, Q, R)$ дважды непрерывно дифференцируемое векторное поле в области G, то векторное поле $\operatorname{rot}\vec{a}(M)$ соленоидально.

Решение. По определению вихря $\operatorname{rot}\vec{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$, тогда

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) =$$
$$= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} = 0$$

Замечание 10.10.3. *Доказанное равенство можно записать с помощью символического вектора набла следующим образом: $\nabla(\nabla \times \vec{a}) = 0$. Т.е. вектор набла обладает свойством обычных векторов: если в смешанном произведении два сомножителя совпадают, то оно равно нулю.*

Далее поверхность S для которой справедлива теорема Стокса, будем называть *допустимой*.

Определение 10.10.2. *Область $G \subset \mathbb{R}^3$ будем называть линейно односвязной, если для любой ломаной Γ, лежащей в G, существует допустимая поверхность $S \subset G$ "натянутая" на Γ (т.е. Γ ограничивает поверхность S).*

Если рассматриваемая область G *выпуклая*, то существует простой способ натягивания поверхности на контур. В этом случае в качестве поверхности можно взять конус с вершиной в произвольной точке $M_0 \in G$, направляющей которого служит заданная кривая Γ.

Конус в общем случае будет иметь кратные точки и не будет кусочно гладкой поверхностью даже в случае, когда Γ — достаточно гладкая кривая, т.е. если Γ — достаточное число раз непрерывно дифференцируемая кривая без особых точек. При этом на конусе будут иметься, вообще говоря, особые точки, отличные от вершины. Чтобы избежать эти затруднения мы и ограничимся при определении линейно односвязной области лишь контурами, являющимися замкнутыми ломаными. В этом случае для выпуклой области G вершину конуса M_0 всегда можно взять таким образом, что указанный конус (если сгладить его у вершины) будет кусочно-гладкой поверхностью. Таким образом выпуклая область всегда линейно односвязна.

Примером неодносвязной области может служить тор, т.е. область, полученная вращением круга вокруг непересекающей его оси.

Теорема 10.10.4. *Пусть в линейно односвязной области G задано непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{a}(M) = (P, Q, R)$. Тогда эквивалентны следующие три свойства:*

1. Векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(M)$ является в области G потенциальным.

2. Существует потенциальная в G функция $u = u(M)$, т.е. такая функция $u(M)$, что $\vec{a} = \operatorname{grad} u$ (или, что то же, $du = Pdx + Qdy + Rdz$). В этом случае для *любых двух точек $A \in G$ и $B \in G$ и любой кусочно-гладкой кривой AB, соединяющей в G эти точки,*

$$\int\limits_{AB} \vec{a} d\vec{r} = u(B) - u(A).$$

3. Векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(M)$ является безвихревым: $\text{rot}\, \vec{a} = 0$ *в области G, т.е.*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Замечание 10.10.4. *Из теоремы вытекает в частности, что непрерывно дифференцируемое в односвязной области векторное поле $\vec{a}$ потенциально тогда и только тогда, когда оно является полем градиента некоторой скалярной функции u:*

$$\vec{a} = \nabla u.$$

Доказательство. Применим схему $1 \to 2 \to 3 \to 1$.

Первый шаг: $1 \to 2$. Доказательство совершенно аналогично случаю плоской области (см. теорему из § 10.3).

Второй шаг: $2 \to 3$. Это утверждение доказывается также аналогично плоскому случаю: оно просто означает равенство соответствующих вторых смешанных производных потенциальной функции.

Отметим, что утверждение $1 \to 2$ и $2 \to 3$ справедливы и без предположения о линейной односвязности области G.

Третий шаг: $3 \to 1$. Пусть $rot\, \vec{a} = 0$ в G. Пусть Γ — кусочно дважды непрерывно дифференцируемая замкнутая кривая, лежащая в G. Если существует допустимая поверхность $S \subset G$ и ограниченная контуром Γ, то из теоремы Стокса сразу получаем

$$\int\limits_{\Gamma} \vec{a} d\vec{r} = \iint\limits_{S} \text{rot}\ \vec{a}\, \vec{\nu} dS = 0.$$

В силу линейной односвязности области G это верно и для любой конечно-звенной ломаной. Поэтому, если γ — любая кусочно-гладкая замкнутая кривая, лежащая в G, то выбирая последовательность ломаных Γ_h, вписанных в Γ со звеньями, стремящимися к нулю при $n \to \infty$,получим

$$\int\limits_{\Gamma} \vec{a} d\vec{r} = \lim_{n \to \infty} \int\limits_{\Gamma} \vec{a} d\vec{r} = 0.$$

$\square$

Теорема 10.10.5 (Гельмгольц)**.** *При достаточно общих предположениях на гладкость поля любое векторное поле представляет из себя сумму потенциального и соленоидального векторных полей, а именно существуют скалярное поле и и векторное поле $\vec{b}$ такие, что*

$$\vec{a} = \nabla u + \text{rot}\ \vec{b}.$$

Так как $\text{rot}\ \nabla u = 0$ *и* $\text{div rot}\ \vec{b} = 0$, *то первое слагаемое ∇u является потенциальным, а второе слагаемое* $\text{rot}\ \vec{b}$ *— соленоидальным векторным полем.*

10.11. Внешние дифференциальные формы в теории поля

Дифференциальные внешние формы возникают при обобщении на многомерный случай таких понятий, как работа поля вдоль кривой и поток жидкости через поверхность. Нужные нам сведения о дифференциальных формах — это внешнее умножение, внешнее дифференцирование, интегрирование и общая формула Стокса.

10.11.1. Внешние формы. Определим внешние (алгебраические) формы и действия над ними.

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное вещественное пространство. Векторы этого пространства будем обозначать через $\xi, \eta, \ldots$.

Определение 10.11.1. *Формой степени 1 (1-формой) называется линейная функция* $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Линейность означает, что

$$w\left(\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2\right) = \lambda_1 w(\xi_1) + \lambda_2 w(\xi_2) \quad \text{для всех} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \xi_1, \quad \xi_2 \in \mathbb{R}^n.$$

Множество всех 1-форм само превращается в линейное пространство, если определить сумму формулой

$$(w_1 + w_2)(\xi) = w_1(\xi) + w_2(\xi),$$

а умножение на число — формулой

$$(\lambda w)(\xi) = \lambda w(\xi).$$

Пространство 1-форм само является n-мерным линейным пространством, которое называется сопряженным к $\mathbb{R}^n$ и обозначается $(\mathbb{R}^n)^*$.

Пусть в $\mathbb{R}^n$ выбрана линейная система координат $x_1, \ldots, x_n$. Каждая координата x_i сама является 1-формой, действие которой на произвольный вектор ξ из $\mathbb{R}^n$ состоит в том, что этому вектору сопоставляется его i-я координата $x_i(\xi)$. Эти n 1-форм линейно независимы, поэтому всякую 1-форму w можно записать в виде $w = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$, $a_i \in \mathbb{R}^n$.

Определение 10.11.2. *Внешней формой степени 2 (2-формой) называется билинейная и кососиметрическая функция от пары векторов,* $w^2 :\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$w^2\left(\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2, \xi_3\right) = \lambda_1 w^2(\xi_1, \xi_3) + \lambda_2 w^2(\xi_2, \xi_3),$$
$$w^2(\xi_1, \xi_2) = -w^2(\xi_2, \xi_1) \quad \textit{для всех} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть $S(\xi_1, \xi_2)$ ориентированная площадь параллелограмма, построенного на векторах $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^2$, где e_1, e_2 — ориентированный базас в $\mathbb{R}^2$. Если $\xi_1 = \xi_{11}e_1 + \xi_{12}e_2, \quad \xi_2 = \xi_{21}e_1 + \xi_{22}e_2$ то 2-форма $S(\xi_1, \xi_2)$, задается формулой

$$S(\xi_1, \xi_2) = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{vmatrix}.$$

Ориентированная площадь проекции на плоскость x_1, x_2 параллелограмма, построенного на векторах $\xi_1 = \xi_{11}e_1 + \xi_{12}e_2 + \xi_{13}e_3, \quad \xi_2 = \xi_{21}e_1 + \xi_{22}e_2 + \xi_{23}e_3$ есть 2-форма:

$$S(\xi_1, \xi_2) = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{vmatrix}.$$

Заметим, что для всякой 2-формы в $\mathbb{R}^n$ имеем $w(\xi, \xi) = 0$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$. Это сразу следует из свойства кососимметричности.

Множество 2-форм в $\mathbb{R}^n$ образует вещественное линейное пространство, если определить сложение 2-форм формулой

$$(w_1 + w_2)(\xi_1, \xi_2) = w_1(\xi_1, \xi_2) + w_2(\xi_1, \xi_2),$$

а умножение 2-формы на число формулой

$$(\lambda w)(\xi_1, \xi_2) = \lambda w(\xi_1, \xi_2).$$

Можно показать, что это пространство конечномерно и его размерность равна $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Определение 10.11.3. *Внешней формой степени k (k-формой) называется k-линейная и кососиметрическая функция от векторов $\xi_1, \ldots, \xi_k$, $w^k = w : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{k раз} \to R :$*

$$w\left(\lambda_1\xi_1' + \lambda_2\xi_1'', \xi_2, \ldots, \xi_k\right) = \lambda_1 w(\xi_1', \xi_2, \ldots, \xi_k) + \lambda_2 w(\xi_1'', \xi_2, \ldots, \xi_k);$$
$$w(\xi_{i1}, \ldots, \xi_{ik}) = (-1)^\nu w(\xi_1, \ldots, \xi_k),$$
$$\text{где} \quad \nu = \begin{cases} 0, & \text{если перестановка} \quad (i_1, \ldots, i_k) \quad \text{четная,} \\ 1, & \text{если перестановка} \quad (i_1, \ldots, i_k) \quad \text{нечетная.} \end{cases}$$

Ориентированный объем V параллепипеда, натянутого на векторы $\xi_1, \ldots, \xi_n$ мерного ориентированного пространства $\mathbb{R}^n$ есть n-форма

$$S(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \ldots & \xi_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{n1} & \ldots & \xi_{nn} \end{vmatrix},$$

где $\xi_i = \xi_{i1}e_1 + \ldots + \xi_{in}e_n$ и $e_1, \ldots, e_n$ базис в $\mathbb{R}^n$.

Если $\mathbb{R}^k$ есть k-мерная ориентированная плоскость в $\mathbb{R}^n$, то k-мерный ориентированный объем проекции на $\mathbb{R}^k$ параллепипеда с ребрами $\xi_1, \ldots, \xi_k \in \mathbb{R}^n$ есть k-форма на $\mathbb{R}^n$.

Операция сложения двух k-форм при этом образует линейное пространство размерности C_n^k.

Определение 10.11.4. *Пусть w_1, w_2 — две 1-формы. Внешним произведением $w_1 \wedge w_2$ называется 2-форма $w_1 \wedge w_2$:*

$$(w_1 \wedge w_2)(\xi_1, \xi_2) = \begin{vmatrix} w_1(\xi_1) & w_2(\xi_1) \\ w_1(\xi_2) & w_2(\xi_2) \end{vmatrix}.$$

Если теперь $x_1, \ldots, x_n$ это система n линейно независимых базасных 1-форм в $\mathbb{R}^n$, то их внешние произведения

$$(x_i \wedge x_j)(\xi_1, \xi_2) = \begin{vmatrix} \xi_{i1} & \xi_{j1} \\ \xi_{i2} & \xi_{j2} \end{vmatrix} \qquad \text{являются 2-формами.}$$

Ввиду кососимметричности $x_j \wedge x_j = 0$ и $x_i \wedge x_j = -x_j \wedge x_k$.

Геометрический смысл произведения $x_i \wedge x_j$: ее значение на паре векторов $\xi_1, \xi_2 \in$ равно ориентированной площади проекции параллелограмма, порожденного векторами ξ_1, ξ_2, на координатную плоскость x_i, x_j параллельно остальным координатным направлениям.

Можно доказать, что 2-формы $x_i \wedge x_j$, $i < j$, линейно независимы и образуют базис линейного пространства 2-форм, т.е. всякую 2-форму w^2 можно представить в виде

$$w^2 = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij} x_i \wedge x_j, \quad \text{где} \quad a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

В общем случае k-форм ситуация аналогичная: k-формы $x_{i_j} \wedge \ldots \wedge x_{i_k}$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$, образуют базис в линейном пространстве k-форм (их число равно C_n^k), т.е. всякую k-форму можно единственным образом представить в виде

$$w^k = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} a_{i_1 \ldots i_k} x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_k}. \tag{10.11.1}$$

Отметим, что

1) всякая n-форма в $\mathbb{R}^n$ есть либо ориентированный объем параллелепипеда при некотором выборе единицы объема либо нуль:

$$w^n = a x_1 \wedge \ldots \wedge x^n;$$

2) всякая k-форма при $k > n$ равна нулю.

Используя представление (10.11.1) внешних форм через базисные естественным образом определяется операция $\wedge$ внешнего произведения k-формы w^k на l-форму w^l:

$$\left(\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} a_{i_1 \ldots i_k} x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_k} \right) \wedge \left(\sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant n} b_{j_1 \ldots j_l} x_{j_1} \wedge \ldots \wedge x_{j_l} \right) =$$
$$= \sum_{\substack{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n \\ 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant n}} a_{i_1 \ldots i_k} b_{j_1 \ldots j_l} x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_k} \wedge x_{j_1} \wedge \ldots \wedge x_{j_l}.$$

Таким образом внешнее произведение $w^k \wedge w^l$ есть внешняя форма степени $k + l$. Можно показать, что внешнее произведение внешних форм обладает следующими свойствами:

1) кососимметричности (антикоммутативности): $w^k \wedge w^l = (-1)^{kl} w^l \wedge w^k$,

2) дистрибутивности: $\left(\lambda_1 w_1^k + \lambda_2 w_2^k\right) \wedge w^l = \lambda_1 w_1^k \wedge w^l + \lambda_2 w_2^k \wedge w^l$,

3) ассоциативности: $\left(w^k \wedge w^l\right) \wedge w^m = w^k \wedge \left(w^l \wedge w^m\right)$.

Отметим еще поведение внешних форм при отображениях.

Пусть $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — линейное отображение, а w^k — внешняя k-форма на $\mathbb{R}^n$. Тогда на $\mathbb{R}^m$ возникает внешняя k-форма $f^* w^k$, значение которой на k векторах $\xi_1, \ldots, \xi_k \in \mathbb{R}^m$ равно значению k формы w^k на их образах $f(\xi_1), \ldots, f(\xi_k)$:

$$\left(f^* w^k\right)(\xi_1, \ldots, \xi_k) = w^k \left(f(\xi_1), \ldots, f(\xi_k)\right).$$

Упражнение 10.11.1. Проверить

1) что $f^* w^k$ — внешняя k-форма;

2)$f^* \left(w^k \wedge w^l\right) = f^* \left(w^k\right) \wedge f^* \left(w^l\right)$

10.11.2. Внешние дифференциальные формы. Определим теперь понятие внешней дифференциальной формы в $\mathbb{R}^n$.

Определение 10.11.5. *Фиксируем точку $x \in \mathbb{R}^n$. Внешней дифференциальной формой степени 1 назовем 1-форму $w^1(x)$ линейную относительно переменных $dx_1, \ldots, dx_n$, образующих базис в сопряженном пространстве 1-форм:*

$$w^1(x) = a_1(x) dx_1 + \ldots + a_n(x) dx_n,$$

где $a_i(x)$ — функции переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$, будем считать их достаточное число раз дифференцируемыми (гладкими).

Определение 10.11.6. *В общем случае k-формы $dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$, $\quad 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$, образуют базис в пространстве внешних k-форм и внешней дифференциальной k-формой назовем выражение вида*

$$w^k(x) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} a_{i_1 \ldots i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}, \tag{10.11.2}$$

где $a_{i_1 \ldots i_k}(x)$ — гладкие функции переменных $x \in \mathbb{R}^n$.

Сложение, умножение на число, внешнее умножение внешних дифференциальных форм определяется поточечно: в каждой точке $x \in \mathbb{R}^n$ нужно сложить, умножить на число, внешне перемножить соответствующую алгебраическую внешнюю форму. Отметим, что дифференциальные формы можно умножать не только на числа, но и на функции.

Определение 10.11.7. *Для всякой внешней дифференциальной формы $w^k(x)$ определена операция внешнего дифференцирования:*

$$dw^k(x) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} da_{i_1 \ldots i_k}(x) \wedge dx_{i_1} \ldots \wedge dx_{i_k},$$

где $da_{i_1 \ldots i_k}(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial a_{i_1 \ldots i_k}}{\partial x_j} dx_j$ — дифференциал функции $a_{i_1 \ldots i_k}(x)$.

Скалярное поле $u = u(x, y, z)$ будем рассматривать как дифференциальную форму степени 0: $w^0_u(x, y, z) = u(x, y, z)$, а всякому векторному полю $\vec{a} = (P, Q, R)$ в $\mathbb{R}^3$ можно поставить в соответствие внешние дифференциальные формы

$$w^1_{\vec{a}}(x) = Pdx + Qdy + Rdz \qquad \text{и} \qquad w^2_{\vec{a}}(x) = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy.$$

Всякому скалярному полю $u(x, y, z)$ можно также сопоставить дифференциальную 3-форму : $w^3 = u(x, y, z)\, dx \wedge dy \wedge dz$.

Нетрудно убедиться в справедливости следующих равенств:
(i) $dw^0_u = w^1_{\operatorname{grad} u}$;
(ii) $dw^1_{\vec{a}} = w^2_{\operatorname{rot} \vec{a}}$;
(iii) $dw^2_{\vec{a}} = \operatorname{div} \vec{a} \cdot dx \wedge dy \wedge dz = w^3_{\operatorname{div} \vec{a}}$.

Условие существования *потенциальной функции* $u = u(x, y, z)$ такой, что ее градиент $\operatorname{grad} u$ совпадает с заданным векторным полем $\vec{a} = (P, Q, R)$ в терминах дифференциальных форм выглядит следующим образом:

для заданной дифференциальной 1-формы $w^1_{\vec{a}} = Pdx + Qdy + Rdz$ существует дифференциальная 0-форма $w^0_u = u(x, y, z)$ такая, что $w^1_{\vec{a}} = dw^0_u$.

Условие $\operatorname{rot} \vec{a} = 0$ (т.е. векторное поле $\vec{a}$ безвихревое) означает, что внешний дифференциал 1-формы $w^2_{\vec{a}}$ равен нулю:

$$dw^1_{\vec{a}} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz +$$
$$+ \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) dx \wedge dy = dw^2_0 = 0.$$

Условие соленоидальности векторного поля $\vec{a}$ ($\operatorname{div} \vec{a} = 0$) означает, что внешний дифференциал 2-формы $w^2_{\vec{a}}$ равен нулю:

$$dw^2_{\vec{a}} = w^3_{\operatorname{div} \vec{a}} = w^3_0 = 0.$$

Определение 10.11.8. *Дифференциальная внешняя k-форма называется замкнутой, если ее внешний дифференциал равен нулю: $dw^k = 0$.*

Определение 10.11.9. *Дифференциальная внешняя k-форма w^k называется точной, если существует дифференциальная $(k-1)$-форма φ^{k-1} такая, что $w^k = d\varphi^{k-1}$.*

Таким образом потенциальность векторного поля $\vec{a} = (P, Q, R)$ означает, что соответствующая внешняя дифференциальная форма $w^1_{\vec{a}}$ является точной: $w^1_{\vec{a}} = dw^0_u$. Условия соленоидальности и того, что поле $\vec{a}$ является безвихревым означают замкнутость внешних дифференциальных форм: $dw^2_{\vec{a}} = 0, \quad dw^1_{\vec{a}} = 0$.

10.12. Основные теоремы теории поля и интегралы от внешних дифференциальных форм

Ограничимся рассмотрением дифференциальных форм и интегралов от них в трехмерном пространстве.

Определение 10.12.1. *Дифференциальные формы степени 0 — это функции в $\mathbb{R}^3$, а нульмерная цепь в $\mathbb{R}^3$ — это совокупность конечного числа точек. Интеграл дифференциальной формы w^0_u по нульмерной цепи $\gamma_0 = \sum m_i A_i$, $m_i \in \mathbb{Z}$, $A_i \in \mathbb{R}^3$ определяется как сумма значений функции $u(A_i)$ с весом m_i:*

$$\int\limits_{\gamma_0} w^0_u = \sum_i m_i u(A_i).$$

Дифференциальные формы степени 1 в $\mathbb{R}^3$ имееют вид: $w^1 = Pdx + Qdy + Rdz$ где P, Q, R — функции переменных x, y, z.

Определение 10.12.2. *Одномерная цепь γ_1 в $\mathbb{R}^3$ — это линейная комбинация с целыми коэффициентами вида: $\gamma_1 = \sum\limits_i m_i \Gamma_i$ где Γ_i — гладкие ориентированные кривые.*

Определение 10.12.3. *Интеграл по 1-цепи от дифференциальной 1-формы определим следующим образом:*

$$\int\limits_{\gamma_1} w^1 = \sum_i m_i \int\limits_{\Gamma_i} w^1.$$

Отметим, что интегралы от внешней дифференциальной формы $w^1_{\vec{a}}$ по цепи γ_1, представляющей ориентированную кривую являются циркуляцией векторного поля $\vec{a} = (P, Q, R)$ вдоль этой кривой.

Определение 10.12.4. *Для гладкой ориентированной кривой γ_1 границу $\partial\gamma_1$ естественно определить как 0-цепь вида: $\partial\gamma_1 = B - A$, где A — начало, B — конец кривой.*

Тогда формулу Ньютона-Лейбница можно записать в виде

$$\int\limits_{\partial\gamma_1} w^0 = \int\limits_{\gamma_1} dw^0. \tag{10.12.1}$$

Всякую дифференциальную внешнюю 2-форму можно записать в виде $w^2_{\vec{a}} = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$. Интеграл этой 2-формы по гладкой поверхности

S — это поверхностный интеграл второго рода (см. § 10.5):

$$\iint\limits_S w_{\vec{a}}^2 = \iint\limits_S P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy.$$

Определение 10.12.5. *Двумерную цепь (2-цепь) определим как конечную линейную комбинацию гладких ориентированных поверхностей S_i с целыми коэффициентами m_i:*

$$S = \sum_i m_i S_i.$$

Определение 10.12.6. *Интеграл по 2-цепи S определяется естественным образом:*

$$\iint\limits_S w_{\vec{a}}^2 = \sum_i m_i \iint S_i w_{\vec{a}}^2.$$

Определение 10.12.7. *Границу 2-цепи определим как $\partial S = \sum\limits_i m_i \partial S_i$, где ∂S_i — край гладкой поверхности.*

Отметим, что интеграл формы $w_{\vec{a}}^2$ по цепи S, представляющей кусочно-гладкую ориентированную поверхность S называется потоком вектора $\vec{a}$ через поверхность S.

Формулу Стокса (см. § 10.10), связывающая циркуляцию вектора $\vec{a} = (P, Q, R)$ по границе ∂S поверхности S с потоком ротора $\operatorname{rot} \vec{a}$ через поверхность S можно записать следующим образом:

$$\int\limits_{\partial S} w_{\vec{a}}^1 = \iint\limits_S d w_{\vec{a}}^1 = \iint\limits_S d w_{\operatorname{rot} \vec{a}}^2. \tag{10.12.2}$$

Определение 10.12.8. *Дифференциальная внешняя форма в $\mathbb{R}^3$ имеет вид $w^3 = u(x, y, z) dx \wedge dy \wedge dz$. Интеграл этой формы по ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^3$ (по 3-цепи) определяется следующим образом*

$$\iiint\limits_D w^3 = \iiint\limits_D u(x, y, z)\, dx dy dz,$$

где в правой части тройной интеграл от функции u по области D.

Формула Остроградского-Гаусса для потока вектора $\vec{a} = (P, Q, R)$ через границу 3-цепи может быть записана в виде

$$\iiint\limits_{\partial D} w_{\vec{a}}^2 = \iiint\limits_D d w_{\vec{a}}^2 = \iiint\limits_D \operatorname{div} \vec{a}\, dx \wedge dy \wedge dz. \tag{10.12.3}$$

Дадим определение и сформулируем критерий соленоидальности и потенциальности поля $\vec{a} = (P, Q, R)$, используя понятие внешней дифференциальной формы и интеграла от нее.

Определение 10.12.9. *Непрерывно дифференцируемое векторное поле*

$$\vec{a} = (P, Q, R)$$

называется соленоидальным в области $G \subset \mathbb{R}^3$, если интегралы от внешней дифференциальной 2-формы $w_{\vec{a}}^2 = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$ по границе любой 3-цепи

D (такой, что $\overline{D} \subset G$) равен нулю:

$$\iint\limits_{\partial D} w^2_{\vec{a}} = 0.$$

Теорема 10.12.1. *Для того чтобы непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{a} = (P, Q, R)$ было соленоидальным в области $G \subset \mathbb{R}^3$ необходимо и достаточно, чтобы внешняя дифференциальная форма $w^2_{\vec{a}}$ была замкнута в G:*

$$dw^2_{\vec{a}} = 0.$$

Определение 10.12.10. *Векторное поле $\vec{a} = (P, Q, R)$ заданное в области $G \subset \mathbb{R}^3$ называется потенциальным, если интегралы от 1-формы $w^1_{\vec{a}} = Pdx + Qdy + Rdz$ по любой 1-цепи γ из области G, такой, что $\partial\gamma = 0$, равен нулю:*

$$\int\limits_{\gamma} w^1_{\vec{a}} = 0.$$

Теорема 10.12.2. *Пусть*

1) в области $G \subset \mathbb{R}^3$ любая 1-цепь γ с условием $\partial\gamma = 0$ является границей 2-цепи $S \subset G: \gamma = \partial S$,

2) векторное поле $\vec{a} = (P, Q, R)$ непрерывно дифференцируемо в области G. Тогда эквивалентны следующие три свойства:

I) Интеграл от внешней диференциальной 1-формы $w^1_{\vec{a}}$ по любой 1-цепи γ, граница которой $\partial\gamma = 0$ равен нулю

$$\int\limits_{\gamma} w^1_{\vec{a}} = 0.$$

II) Внешняя дифференциальная 1-форма $w^1_{\vec{a}} = Pdx + Qdy + Rdz$ является точной в области G: $w^1_{\vec{a}} = du^0$.

III) Внешняя дифференциальная форма $w^1_{\vec{a}}$ является замкнутой: $dw^1_{\vec{a}} = 0$.

Глава 11

Некоторые сведения из других разделов математики

В данной главе приводятся сведения из других разделов математики, используемые в математическом анализе: аналитической геометрии, алгебры, дифференциальных уравнений, функционального и комплексного анализа, механики. Ее можно рассматривать как справочное пособие, позволяющее не обращаться к соответствующим учебникам.

11.1. Комплексные числа

11.1.1. Определение и арифметические операции. Комплексные числа вводятся в связи с тем, что не всякое алгебраическое уравнение с действительными коэффициентами имеет действительные корни. Простейшим примером такого уравнения является

$$x^2 + 1 = 0. \tag{11.1.1}$$

Задача ставится так: расширить систему действительных чисел до такой системы чисел, в которой уравнение (11.1.1) уже обладает корнем.

Для этого вводится формальное обозначение: будем считать, что символ i (читается *мнимая единица*) служит корнем уравнения (11.1.1), т.е. удовлетворяет соотношению

$$i^2 = -1. \tag{11.1.2}$$

Определение 11.1.1. *Комплексным числом называется выражение вида*

$$z = a + bi, \tag{11.1.3}$$

где a и b — действительные числа.

Множество всех комплексных чисел (т.е. чисел вида (11.1.3)) обозначается через $\mathbb{C}$.

Определение 11.1.2. *Число a называется действительной частью комплексного числа z и обозначается* $\operatorname{Re} z$, *а число b называется мнимой частью z и обозначается* $\operatorname{Im} z$.

Комплексные числа вида $a + 0i$ отождествляются с действительными числами, а комплексные числа вида $0 + bi = bi$ называются *(чисто) мнимыми* числами.

Сложение: если $z = a + bi$, а $w = c + di$, то

$$z + w = (a + c) + (b + d)i.$$

Вычитание: если $z = a + bi,\ w = c + di$, то

$$z - w = (a - c) + (b - d)i.$$

Умножение: для $z = a + bi,\ w = c + di$

$$zw = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Определение 11.1.3. *Для введения операции деления вводится понятие сопряженного комплексного числа: если $z = a+bi$, то сопряженное число $\overline{z}$ определяется так:*

$$\overline{z} = a - bi.$$

Легко проверить, что $z\overline{z} = a^2+b^2 \geqslant 0$, *модулем* $|z|$ комплексного числа называется выражение $\sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$.

Деление: если $z = a + bi$, а $w = c + di$ и $|w| \neq 0$, то

$$\frac{z}{w} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\, i.$$

Легко проверить, что эти операции обладают всеми обычными свойствами арифметических операций.

Таким образом, арифметические операции над комплексными числами производятся так же, как над действительными числами, нужно только учитывать соотношение (11.1.2).

11.1.2. Тригонометрическая форма комплексного числа. Удобной интерпретацией комплексного числа является представление его в виде точки плоскости $\mathbb{R}^2$. Если XOY есть декартова система координат на плоскости, то каждое комплексное число $z = (a+bi)$ можно отождествить с точкой плоскости (a, b) или с радиусом-вектором этой точки $\{a, b\}$.

Определение 11.1.4. *Аргументом комплексного числа $z = a + bi$ называется угол φ между осью OX и радиусом-вектором этого числа.*

Аргумент z обозначается $\arg z$, он определяется с точностью до полного оборота, т.е. до 2π. Аргумент не определен лишь для числа 0.

Если через r обозначить модуль комплексного числа, то можно получить другую форму представления числа z, а именно *тригонометрическую форму* :

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Используя эти обозначения и определения, легко дать геометрическую интерпретацию арифметических операций. Сложению комплексных чисел соответствует сложение их радиусов-векторов. Модуль произведения комплексных чисел равен произведению их модулей, а аргумент произведения равен сумме аргументов сомножителей.

С помощью тригонометрической формы комплексного числа легко выполняются операции возведения в степень и извлечения корня.

Теорема 11.1.1 (Муавр). *Если число z имеет вид: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то*

$$z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{N}$$

(формула Муавра).

Обратно, если нам нужно извлечь корень n-ой степени из числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то мы должны получить число $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, удовлетворяющее (согласно формуле Муавра) соотношениям

$$\rho^n = r, \text{ т.е. } \rho = \sqrt[n]{r},$$

и

$$n\theta = \varphi + 2\pi k, \text{ т.е. } \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$$

(напоминаем, что аргумент комплексного числа определяется с точностью до числа, кратного 2π, следовательно, если комплексные числа равны, то их аргументы могут отличаться на число, кратное 2π).

Таким образом, придавая k значения $0, 1, \ldots, n-1$, мы получим n значений корня n-ой степени из комплексного числа.

Геометрически данное правило означает, что все значения корня n-ой степени расположены на окружности радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в нуле и делят эту окружность на n равных частей.

В качестве примера рассмотрим корни из единицы. Представим единицу в виде $1 = \cos 0 + i \sin 0$, тогда

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Пример 11.1.1. $\sqrt{1} = \pm 1$, а $\sqrt[3]{1} = 1,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \pm \dfrac{1}{2} i$.

11.2. Корни многочленов. Рациональные дроби

11.2.1. Многочлены и их корни.

Определение 11.2.1. *Пусть $P(x)$ — некоторый многочлен, число c (вообще говоря, комплексное) называется корнем многочлена P, если $P(c) = 0$.*

Из общей теории делимости многочленов следует такое утверждение.

Теорема 11.2.1. *Остаток от деления многочлена $P(x)$ на линейный многочлен $x - c$ равен $f(c)$.*

Как следствие из данного утверждения мы получаем так называемую теорему Безу.

Теорема 11.2.2 (Безу)**.** *Число c тогда и только тогда является корнем многочлена P, когда многочлен $P(x)$ делится на $x - c$.*

Таким образом, разыскание корней многочлена эквивалентно нахождению его линейных множителей.

Определение 11.2.2. *Корень c многочлена P называется простым, если данный многочлен делится на $x - c$, но не делится на более высокую степень $x - c$.*

Определение 11.2.3. *Корень c многочлена P называется корнем кратности l, если данный многочлен делится на $(x - c)^l$, но не делится на $(x - c)^{l+1}$.*

Теорема 11.2.3. *Если число c служит l–кратным корнем многочлена P и $l > 1$, то число c служит $(l-1)$–кратным корнем производной многочлена P. Если c — простой корень многочлена P, то число c не является корнем производной P'.*

Известно, что над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ не всякий многочлен имеет корни. Оказывается, поле комплексных чисел обладает следующим замечательным свойством.

Теорема 11.2.4 (основная теорема алгебры многочленов)**.** *Всякий многочлен $P(x)$, степень которого не меньше 1, имеет хотя бы один корень, в общем случае комплексный.*

Эта теорема является одним из крупнейших достижений алгебры девятнадцатого века и имеет многочисленные приложения в самых различных областях математики.

Применяя эту теорему последовательно, легко получить такое утверждение.

Теорема 11.2.5. *Каждый многочлен степени n имеет ровно n корней, считая каждый корень столько раз, какова его кратность, следовательно, каждый многочлен степени n разлагается на n линейных множителей. Это разложение единственно с точностью до порядка сомножителей.*

Рассмотрим теперь многочлены P с действительными коэффициентами. Очевидным образом получаем следующее утверждение.

Теорема 11.2.6. *Если число c является корнем многочлена P с действительными коэффициентами, то сопряженное число $\overline{c}$ также является его корнем, причем той же кратности. Таким образом, всякий многочлен P с действительными коэффициентами представим, причем единственным образом (с точностью до порядка сомножителей), в виде произведения своего старшего коэффициента и нескольких многочленов с действительными коэффициентами, линейных вида $x - c$, соответствующих его действительным корням, и квадратных, соответствующих парам его сопряженных комплексных корней.*

11.2.2. Разложение рациональных функций на дроби. Применим предыдущее исследование к *рациональным функциям (рациональным дробям)*. Так называют выражения вида

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где P и Q — многочлены, причем многочлен $Q(x)$ не равен тождественно нулю.

Множество рациональных дробей образует поле с обычным образом определяемыми арифметическими операциями.

Определение 11.2.4. *Рациональная дробь называется несократимой, если ее числитель взаимно прост со знаменателем.*

Тогда получаем, что всякая рациональная дробь равна некоторой несократимой дроби, и обычно мы будем рассматривать только несократимые дроби.

Определение 11.2.5. *Рациональная дробь называется правильной, если степень числителя строго меньше степени знаменателя, в противном случае дробь называется неправильной.*

Теорема 11.2.7. *Всякая рациональная дробь представима, притом единственным образом, в виде суммы многочлена и правильной дроби.*

Доказательство этой теоремы является следствием теоремы о делении многочленов.

Определение 11.2.6. *Многочлен называется приводимым (над данным числовым полем), если его можно представить в виде произведения двух многочленов положительной степени, и неприводимым в противном случае.*

В виде следствия из основной теоремы алгебры мы получаем, что над полем комплексных чисел неприводимыми являются только константы и линейные многочлены.

Как следствие из теоремы 11.2.6 мы получаем, что над полем действительных чисел неприводимыми являются только константы, линейные многочлены и квадратные многочлены, не имеющие действительных корней.

Определение 11.2.7. *Правильная рациональная дробь называется простейшей, если ее знаменатель является некоторой степенью неприводимого многочлена.*

Теорема 11.2.8. *Всякая правильная рациональная дробь разлагается в сумму простейших дробей.*

В качестве следствия мы получаем следующее разложение для правильной рациональной несократимой дроби $R(x)$ с действительными коэффициентами:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \cdots + \frac{A_l}{(x-a)^l} + \cdots +$$

$$+\frac{B_1}{x-b} + \cdots + \frac{B_m}{(x-b)^m} + \frac{M_1 x + N_1}{x^2+px+q} + \cdots + + \frac{M_s x + N_s}{(x^2+px+q)^s} + \cdots ,$$

где многочлен Q имеет разложение

$$Q(x) = c(x-a)^l \cdots (x-b)^m (x^2+px+q)^s \cdots ,$$

квадратные многочлены $x^2+px+q, \ldots$ не имеют действительных корней.

Коэффициенты числителей в этом разложении могут быть найдены методом неопределенных коэффициентов.

11.3. Простейшие дифференциальные уравнения

Определение 11.3.1. *Дифференциальное уравнение — это такое уравнение, из которого требуется определить неизвестную функцию и которое содержит не только эту функцию, но и ее производные (или дифференциалы).*

Простейшей задачей такого рода является задача нахождения неопределенного интеграла, т.е. решения дифференциального уравнения

$$y' = f(x). \tag{11.3.1}$$

Определение 11.3.2. *Дифференциальные уравнения для определения неизвестных функций от одной независимой переменной называются обыкновенными.*

Мы рассмотрим примеры обыкновенных дифференциальных уравнений.

Определение 11.3.3. *Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок содержащихся в нем производных.*

Определение 11.3.4. *Решением дифференциального уравнения называется всякая функция, которая, будучи подставлена в дифференциальное уравнение, удовлетворяет ему при всех рассматриваемых значениях независимой переменной. Вместо термина "решение" часто употребляют термин "интеграл", а сам процесс решения называют интегрированием дифференциального уравнения.*

На примере уравнения (11.3.1) мы видели, что дифференциальное уравнение имеет не одно решение и даже не конечное число решений, а бесконечное число решений, зависящих от некоторого произвольного параметра, который называется *постоянной интегрирования.* Так что *общее решение* дифференциального уравнения зависит от одной или нескольких постоянных интегрирования, и его *частное решение* получается из общего подстановкой конкретных значений этих постоянных.

Определение 11.3.5. *Решить уравнение — это означает найти все его решения.*

11.3.1. Уравнение с разделяющимися переменными.

Определение 11.3.6. *Уравнение первого порядка называется уравнением с разделяющимися переменными, если оно имеет следующий вид:*

$$A(x)B(y)dx + C(x)D(y)dy = 0. \tag{11.3.2}$$

В нем y — неизвестная функция. Деля в (11.3.2) все члены уравнения на $B(y)C(x)$, получим уравнение *с разделенными переменными*:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0. \tag{11.3.3}$$

Если $y = y(x)$ — решение уравнения (11.3.3), то при подстановке его в (11.3.3) получим тождество, которое можно интегрировать. Тогда

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = c. \tag{11.3.4}$$

Из (11.3.4), выражая y через x, получаем общее решение уравнения (11.3.2), а значит, и (11.3.1). Нужно только иметь в виду, что при делении мы могли потерять какие–то решения.

Пример 11.3.1. Решить уравнение $y' = \dfrac{y}{x}$.

Решение. Имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x},$$
$$y\,dx = x\,dy,$$
$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Отсюда получаем решение:

$$\ln\left|\frac{y}{x}\right| = c,$$

т.е.

$$y = cx.$$

В этом ответе c может принимать произвольные значения, в том числе и $c = 0$.

11.3.2. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка.

Определение 11.3.7. *Линейным (неоднородным) дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида*

$$y' + a(x)y = b(x). \tag{11.3.5}$$

Сначала рассмотрим частный случай уравнения (11.3.5), когда $b(x) \equiv 0$. Такое линейное уравнение называется *однородным*:

$$y' + a(x)y = 0. \tag{11.3.6}$$

Разделяя переменные в уравнении (11.3.6), получим:

$$\frac{dy}{y} = -a(x)dx,$$

$$\ln|y| = -\int a(x)\,dx.$$

Постоянную интегрирования целесообразно записать в виде $\ln|c|$, тогда потенцирование дает

$$y = ce^{-\int a(x)\,dx} = ce^{-a_1(x)},$$

где $a_1(x)$ — одна из первообразных интеграла

$$\int a(x)\,dx.$$

Таким образом, мы получили общее решение однородного уравнения.

Ищем решение неоднородного уравнения (11.3.5) *методом вариации произвольной постоянной*, а именно — полагаем

$$y = c(x)e^{-a_1(x)}, \tag{11.3.7}$$

где $c = c(x)$ — некоторая неизвестная функция, которую мы должны найти.

Из (11.3.7) получим

$$y' = c'(x)e^{-a_1(x)} - c(x)e^{-a_1(x)}\, a_1'(x) =$$
$$= c'(x)e^{-a_1(x)} - a(x)c(x)e^{-a_1(x)},$$

так как $a_1'(x) = a(x)$.

Подставляя данное выражение в (11.3.5), имеем:

$$c'(x)e^{-a_1(x)} = b(x),$$
$$dc = b(x)e^{a_1(x)}dx,$$
$$c(x) = \int b(x)e^{a_1(x)}dx + C.$$

Для первоначальной неизвестной функции y получаем следующее выражение:

$$y = e^{-a_1(x)}\left[\int b(x)e^{a_1(x)}dx + C\right].$$

Это и есть общее решение уравнения (11.3.5). Обычно данный ответ не запоминают, а повторяют процесс решения уравнения в каждом конкретном случае.

Пример 11.3.2. Решить уравнение

$$y' + xy = -x.$$

Решение. Сначала решаем однородное уравнение:

$$y' + xy = 0,$$
$$\frac{dy}{y} = -x\,dx,$$
$$\ln|y| = -\frac{x^2}{2} + \ln c,$$
$$y = ce^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Применяем метод вариации произвольной постоянной, т.е. полагаем

$$y = c(x)e^{-\frac{x^2}{2}},$$

подставляем эту функцию в первоначальное уравнение. Получим общее решение:

$$y = Ce^{-\frac{x^2}{2}} - 1.$$

11.3.3. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Рассмотрим сначала *однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами*, т.е. уравнение вида

$$my'' + ry' + ky = 0, \tag{11.3.8}$$

где $m,\ r,\ k$ — некоторые константы.

Частные решения этого уравнения легко получить, подставляя в (11.3.8) функцию $y = e^{\lambda x}$. Тогда из (11.3.8) получим *характеристическое уравнение*

$$m\lambda^2 + r\lambda + k = 0. \tag{11.3.9}$$

Уравнение (11.3.9) является квадратным уравнением с дискриминантом

$$D = r^2 - 4mk.$$

В зависимости от знака дискриминанта D возможны три случая.

1. $D > 0$. В этом случае корни уравнения (11.3.9) действительны и различны:

$$\lambda_1 = \frac{-r + \sqrt{D}}{2m}, \quad \lambda_2 = \frac{-r - \sqrt{D}}{2m}.$$

Тогда мы имеем, что функции $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ и $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ являются решениями уравнения (11.3.8). Ясно, что функция

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \tag{11.3.10}$$

также есть решение (11.3.8). Оказывается, этим исчерпываются все решения уравнения (11.3.8). Итак, имеем следующее утверждение.

Теорема 11.3.1. *Общее решение уравнения (11.3.8) в случае, когда $D > 0$, имеет вид (11.3.10).*

2. $D = 0$. Квадратное уравнение (11.3.9) имеет один корень кратности два, а именно, $\lambda = -\dfrac{r}{2m}$. Тогда уравнение (11.3.8) имеет решение

$$y_1 = e^{\lambda x} = e^{-\dfrac{r}{2m}}.$$

Чтобы получить еще одно решение, проведем следующее рассуждение. Пусть квадратное уравнение (11.3.9) имеет два различных действительных корня λ_1 и λ, тогда выражение

$$\frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda x}}{\lambda_1 - \lambda}$$

тоже будет решением дифференциального уравнения (11.3.8). Заставим теперь корень λ_1 стремиться к λ. Тогда

$$\lim_{\lambda_1 \to \lambda} \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda x}}{\lambda_1 - \lambda} = \frac{d}{d\lambda} e^{\lambda x} = x e^{\lambda x}.$$

Можно ожидать, что полученная функция будет решением уравнения (11.3.8). Легко проверить, что это действительно так.

Теорема 11.3.2. *Если $D = 0$, то общим решением уравнения (11.3.8) служит функция*

$$y = y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x},$$

где λ — кратный корень уравнения (11.3.9).

3. $D < 0$. В этом случае корни уравнения (11.3.9) являются сопряженными комплексными числами, и мы положим $D = -4m^2\nu^2$, тогда

$$y_1 = e^{-\frac{r}{2m}x+i\nu x}, \quad y_2 = e^{-\frac{r}{2m}x-i\nu x}.$$

С помощью формул Эйлера $e^{\pm i\nu x} = \cos\nu x \pm i\sin\nu x$ эти комплексные решения можно записать так:

$$y_1 = e^{-\frac{r}{2m}x}(\cos\nu x + i\sin\nu x),$$
$$y_2 = e^{-\frac{r}{2m}x}(\cos\nu x - i\sin\nu x).$$

Тогда действительная и мнимая части этих функций также являются решениями уравнения (11.3.8). Отсюда имеем следующее утверждение.

Теорема 11.3.3. *Если дискриминант (11.3.9) отрицателен, то общим решением уравнения (11.3.8) служит функция*

$$y = e^{-\frac{r}{2m}x}(c_1\cos\nu x + c_2\sin\nu x),$$

где $r^2 - 4mk = -4m^2\nu^2$.

Рассмотрим теперь *неоднородное уравнение*, т.е. уравнение вида

$$my'' + ry' + ky = f(x).$$

Если мы знаем общее решение однородного уравнения (11.3.8), то общее решение неоднородного уравнения можно найти методом вариации произвольных постоянных. Но в некоторых случаях это решение можно найти из вида правой части. Рассмотрим следующий пример:

$$my'' + ry' + ky = ce^{i\omega x}. \tag{11.3.11}$$

Решение уравнения (11.3.11) будем искать в виде

$$y(x) = \sigma e^{i\omega x},$$

в котором требуется определить неизвестный множитель σ.

Подставляя в дифференциальное уравнение (11.3.11) функцию $y(x)$ и ее производные $y' = i\omega\sigma e^{i\omega x}$, $y'' = -\omega^2\sigma e^{i\omega x}$, сокращая на общий множитель, мы получим

$$-m\omega^2\sigma + ir\omega\sigma + k\sigma = c,$$

откуда

$$\sigma = \frac{c}{-m\omega^2 + ir\omega + k}.$$

Таким образом, комплексное решение уравнения (11.3.11) найдено. Его теперь можно записать немного в другом виде. Коэффициент

$$\sigma = c\frac{k - m\omega^2 - iu\omega}{(k - m\omega^2)^2 + r^2\omega^2} = c\alpha e^{-i\omega\delta},$$

причем положительный *коэффициент искажения* α и *сдвиг фазы* $\omega\delta$ выражаются через известные величины m, r, k так:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + r^2\omega^2}},$$

$$\operatorname{tg}\omega\delta = \frac{r\omega}{k - m\omega^2},$$

$$\cos\omega\delta = (k - m\omega^2)\alpha, \quad \sin\omega\delta = r\omega\alpha.$$

С помощью этих новых обозначений запишем найденное решение:

$$y = c\alpha e^{i\omega(x-\delta)}.$$

Резюмируем полученный результат.

Теорема 11.3.4. *Общее решение дифференциального уравнения (11.3.11) есть*

$$y = c\alpha e^{i\omega(x-\delta)} + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

где $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ *есть общее решение однородного уравнения (11.3.8), а величины* α *и* δ *определяются по формулам*

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + r^2\omega^2}},$$

$$\cos\omega\delta = (k - m\omega^2)\alpha, \quad \sin\omega\delta = r\omega\alpha.$$

11.4. Приложения к физике

11.4.1. Охлаждение или нагревание тела. Рассмотрим явление охлаждения или нагревания тела, например металлической пластинки, погруженной в очень большую ванну определенной температуры. Мы предполагаем, что ванна настолько велика, что на ее собственную температуру процесс не влияет. Предполагаем также, что погруженное тело в каждый момент имеет повсюду одну и ту же температуру и что быстрота изменения температуры пропорциональна разности температур тела и окружающей среды (ньютоновский закон охлаждения).

Если обозначить время через t, а разность температур тела и среды через $y(t)$, то закон охлаждения выразится уравнением

$$y' = -ky, \tag{11.4.1}$$

где k — положительная постоянная, зависящая от материала.

Уравнение (11.4.1) есть уравнение с разделяющимися переменными. Решая его, получим следующий интегральный закон охлаждения:

$$y = ce^{-kt}.$$

Получаем, что температура понижается по экспоненциальному закону и стремится сравняться с окружающей средой. Скорость, с которой это происходит, характеризуется постоянной k. Значение постоянной c здесь находим, используя *начальные условия*: при $t = 0$ функция $y(0) = y_0$. Тогда $c = y_0$, и, таким образом, закон охлаждения окончательно запишется в виде

$$y = y_0 e^{-kt}.$$

11.4.2. Замыкание и размыкание электрического тока. Рассмотрим явление, которое происходит при замыкании (или размыкании) постоянного электрического тока. Если R — сопротивление цепи, E — внешняя электродвижущая сила, то сила тока J постепенно возрастает от начального значения 0 до конечного стационарного значения $\dfrac{E}{R}$. Мы, следовательно, должны рассматривать силу тока J как функцию времени t. Ход изменения тока зависит от самоиндукции цепи. Цепь характеризуется определенным постоянным числом L, коэффициентом самоиндукции, роль которого такова, что при всяком изменении силы тока в цепи появляется электродвижущая сила, равная $L\dfrac{dJ}{dt}$ и направленная противоположно внешней электродвижущей силе. На основании закона Ома, по которому в каждый момент произведение силы тока на сопротивление равно фактически действующей силе, получаем следующее уравнение:

$$J \cdot R = E - L\frac{dJ}{dt},$$

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{E}{L} - \frac{R}{L}\,J.$$

Положим $f(t) = J(t) - \dfrac{E}{R}$, после чего уравнение примет вид

$$f'(t) = -\frac{R}{L}\,f(t).$$

Это также уравнение с разделяющимися переменными. Решая его и подставляя начальные условия $J(0) = 0,\ f(0) = -\dfrac{E}{R}$, мы получим

$$f(t) = f(0)e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Поэтому

$$J(t) = \frac{E}{R}\left[1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right].$$

Из него мы видим, как сила тока при замыкании асимптотически приближается к своему стационарному конечному значению $\dfrac{E}{R}$.

11.4.3. Свободное падение. Сопротивление воздуха. При свободном падении материальной точки по вертикали, которую мы примем за ось OX, закон Ньютона дает нам дифференциальное уравнение

$$x''(t) = g,$$

где g — ускорение свободного падения, $x = x(t)$ — уравнение движения точки. Решая его интегрированием, получим

$$x' = gt + v_0,$$

где v_0 — постоянная интегрирования, значение которой мы получаем, полагая $t = 0$. Тогда $x'(0) = v_0$, т.е. v_0 — скорость материальной точки в начальный момент отсчета времени, *начальная скорость*.

Вторичным интегрированием получаем

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0,$$

где x_0 есть также постоянная интегрирования, значение которой опять получаем, полагая $t = 0$. Следовательно, x_0 есть *начальная координата* точки в начальный момент времени.

Если мы хотим учесть влияние сопротивления воздуха, действующего на падающую материальную точку, то должны его рассматривать как силу, которая действует в направлении, противоположном направлению движения, и относительно этой силы надо ввести известные физические допущения.

Разберем два различных физических допущения.

А. Сопротивление пропорционально скорости. Оно выражается формулой вида $-rx'$, где r есть положительная константа.

В. Сопротивление пропорционально квадрату скорости и имеет вид $-r(x')^2$.

Согласно основному закону Ньютона мы получим следующие дифференциальные уравнения:

$$a) \quad mx'' = mg - rx',$$
$$b) \quad mx'' = mg - r(x')^2,$$

где m — масса точки.

Рассмотрим уравнение а), обозначим $x' = u$, тогда имеем

$$mu' = mg - ru.$$

Запишем его в форме

$$\frac{dt}{du} = \frac{1}{g - \dfrac{r}{m}u}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, если считать t функцией от u. Решая его, получим

$$t(u) = -\frac{m}{r} \cdot \ln\left(1 - \frac{r}{mg}u\right) + t_0,$$

где t_0 — постоянная интегрирования. Решая это уравнение относительно u, имеем

$$u(t) = x'(t) = -\frac{mg}{r}\left(e^{-\dfrac{r}{m}(t-t_0)} - 1\right).$$

Это уравнение обнаруживает важное свойство движения: с возрастанием t скорость не растет неограниченно, но стремится к некоторому определенному пределу, зависящему от массы. В самом деле,

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = \frac{mg}{r}.$$

Вторичное интегрирование полученного выражения дает результат

$$x(t) = \frac{m^2}{r^2}ge^{-\dfrac{r}{m}(t-t_0)} + \frac{mg}{r}t + c.$$

Обе постоянные интегрирования легко определить, если знать начальное положение точки, т.е. $x'(0)$ и $x(0)$.

В качестве упражнения рассмотрите уравнение b) и найдите его решение.

11.4.4. Простейшее упругое колебание. Рассмотрим движение материальной точки, движущейся по оси OX и связанной с началом координат упругой силой. Мы предполагаем, что эта упругая сила постоянно направлена в сторону начала и что величина ее пропорциональна расстоянию от начала. Другими словами, мы полагаем силу равной $-kx$, где коэффициент $k > 0$ служит мерой жесткости упругой связи. Так как k предполагается положительным, то сила имеет отрицательное значение при положительных значениях x и положительное значение, когда x отрицательно. Уравнение Ньютона в этом случае гласит:

$$mx'' = -kx.$$

Нельзя ожидать, что это уравнение однозначно определяет процесс движения. Наоборот, естественно предполагать, что в определенный момент времени, например при $t = 0$ мы можем произвольно задать начальную координату $x(0) = x_0$ и начальную скорость $x'(0) = v_0$, т.е., выражаясь физически, материальная точка может быть приведена в движение из любого начального положения с любой начальной скоростью, и только тогда процесс движения однозначно определяется уравнением движения. Математически это выражается в том, что самое общее решение нашего уравнения содержит две, сначала неопределенные, постоянные интегрирования, которые должны быть определены из обоих начальных условий.

Положим $\omega = \sqrt{k/m}$. Из метода решения линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами, рассмотренного в предыдущем параграфе, мы получаем, что общим решением нашего уравнения служит функция

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t.$$

Произвольные постоянные определяются из начальных условий. Данное решение можно также записать в виде

$$x(t) = a \sin \omega (t - \delta),$$

если положить

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_1^2}, \quad \delta = -\frac{1}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{c_1}{c_2}.$$

Движения такого типа называются *синусоидальными*, или *простыми, гармоническими колебаниями*. Они представляют собой периодические движения. Период колебаний $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

11.5. Определители и их вычисление

11.5.1. Перестановки и подстановки. Рассмотрим какие-нибудь n элементов, $n \in \mathbb{N}$. Мы будем считать, что это числа $1, 2, \ldots, n$. Кроме данного порядка, мы можем расположить их в другом порядке.

Определение 11.5.1. *Всякое расположение чисел $1, 2, \ldots, n$ в некотором определенном порядке называется перестановкой из n чисел (или из n элементов).*

Нетрудно проверить, что число всех различных перестановок из n элементов равно $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$.

Если в некоторой перестановке мы поменяем местами какие–либо два числа (не обязательно стоящие рядом), а все остальные числа оставим на месте, то получим новую перестановку.

Определение 11.5.2. *Это преобразование перестановок называется транспозицией.*

Теорема 11.5.1. *Все $n!$ перестановок из n элементов можно расположить в таком порядке, что каждая следующая будет получаться из предыдущей одной транспозицией, причем можно начинать с любой перестановки.*

Определение 11.5.3. *Говорят, что в данной перестановке числа i и j составляют инверсию, если $i < j$, а число i стоит в этой перестановке раньше j.*

Определение 11.5.4. *Перестановка называется четной, если она содержит четное число инверсий, и нечетной, если она содержит нечетное число инверсий.*

Теорема 11.5.2. *Всякая транспозиция меняет четность перестановки.*

Таким образом, число четных перестановок равно числу нечетных перестановок (если $n > 1$) и равно $\frac{1}{2}n!$.

Определим теперь понятие *подстановки степени n*. Запишем одну под другой две перестановки из n чисел, беря полученное выражение в скобки

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}. \tag{11.5.1}$$

Определение 11.5.5. *Две перестановки, записанные в таком виде, определяют взаимно–однозначное отображение множества из первых n натуральных чисел на себя. Это отображение называется подстановкой.*

Подстановки будем обозначать большими латинскими буквами $A, B, \dots$. Подстановки имеют многие различные записи вида (11.5.1). От одной записи к другой можно перейти несколькими транспозициями столбцов. При этом можно получить такую запись вида (11.5.1), в верхней (или нижней) строке которой стоит любая наперед заданная перестановка, например $1, 2, \dots, n$. При такой записи различные подстановки отличаются друг от друга перестановками, стоящими в нижней строке, и поэтому число подстановок степени n равно числу перестановок из n элементов, т.е. $n!$.

Примером подстановки степени n служит *тождественная подстановка*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Легко обнаружить, что при всех записях подстановки четности верхней и нижней строк либо совпадают, либо противоположны. В первом случае подстановка называется *четной*, а во втором случае — *нечетной*.

Следовательно, подстановка будет четной, если общее число инверсий в двух строках четно, и нечетной — в противоположном случае.

Определим *умножение* подстановок следующим образом. Пусть даны две подстановки A и B (т.е. два взаимно–однозначных отображения множества первых n чисел на себя).

Определение 11.5.6. *Результат выполнения этих двух отображений (сначала A, затем B) является также взаимно–однозначным отображением и называется произведением подстановок A и B (обозначается AB).*

Вообще говоря, произведение подстановок *некоммутативно*, но тем не менее обладает рядом важных свойств.

1. Умножение подстановок *ассоциативно*, т.е. $(AB)C = A(BC)$.

2. *Нейтральным*, или *единичным*, элементом является тождественная подстановка E, т.е. $AE = EA = A$ для любой подстановки A.

3. Для каждой подстановки A существует *обратная* подстановка A^{-1}, для которой $AA^{-1} = A^{-1}A = E$. Эта обратная подстановка определяется как отображение, обратное к A, т.е. если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix},$$

то

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Множество элементов, в котором введена операция (умножения), обладающая свойствами 1), 2), 3), называется *группой*. Если операция умножения *коммутативна*, то группа называется *коммутативной*, или *абелевой*.

Рассмотрим подстановки специального вида, которые получаются из тождественной подстановки E при помощи одной транспозиции, производимой в ее нижней строке. Такие подстановки нечетны, они называются *транспозициями* и имеют вид

$$\begin{pmatrix} \dots & i & \dots & j & \dots \\ \dots & j & \dots & i & \dots \end{pmatrix}.$$

Обычно такую перестановку обозначают символом (i, j).

Теорема 11.5.3. *Всякая подстановка представима в виде произведения некоторого числа транспозиций.*

Подстановку можно разными способами представить в виде произведения транспозиций, четность или нечетность числа этих транспозиций одна и та же.

Теорема 11.5.4. *При всех разложениях подстановки в произведение транспозиций четность числа этих транспозиций будет одна и та же, причем она совпадает с четностью самой подстановки.*

11.5.2. Определители. Рассмотрим квадратную таблицу из n^2 элементов, которая называется *квадратной матрицей порядка* n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{11.5.2}$$

Эта матрица состоит из n *столбцов* и n *строк*. Первый индекс в числе a_{ij} означает номер строки, а второй индекс — номер столбца.

Рассмотрим всевозможные произведения по n элементов этой матрицы, расположенных в разных строках и разных столбцах, т.е. произведения вида

$$a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}, \tag{11.5.3}$$

где индексы $i_1, i_2, \dots, i_n$ составляют некоторую перестановку чисел $1, 2, \dots, n$. Число таких произведений равно числу всех перестановок из n символов, т.е. $n!$. Все эти произведения войдут в *определитель* n-го порядка с определенным знаком. А именно произведению вида (11.5.3) мы приписываем знак "+"или "−"в зависимости от четности или нечетности подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}, \tag{11.5.4}$$

если подстановка (11.5.4) четная, то знак "+" , а если нечетная, то знак "−".

Таким образом, приходим к следующему определению.

Определение 11.5.7. *Определителем матрицы A вида (11.5.2) называется алгебраическая сумма $n!$ членов вида (11.5.3), составленная следующим образом: членами служат всевозможные произведения n элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, причем член берется со знаком "+", если его индексы составляют четную подстановку, и со знаком "−", если его индексы составляют нечетную подстановку.*

Для записи определителя матрицы A мы будем использовать обозначение $\det A$ либо

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{11.5.5}$$

Определитель второго порядка вычисляется следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Приведем ряд важных свойств определителей.

Определение 11.5.8. *Назовем транспонированием матрицы A вида (11.5.2) такое преобразование, при котором ее строки становятся столбцами с тем же самым номером. Результат транспонирования матрицы A обозначим A'. Можно сказать, что транспонирование есть поворот матрицы (11.5.2) около главной диагонали.*

Свойство 11.5.1. *Определитель не меняется при транспонировании.*

Из свойства 11.5.1 вытекает, что всякое утверждение, справедливое для строк определителя, справедливо также и для столбцов.

Свойство 11.5.2. *Если одна из строк определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю.*

Свойство 11.5.3. *Если один определитель получен из другого перестановкой двух строк, то данные определители отличаются друг от друга только знаком.*

Свойство 11.5.4. *Определитель, содержащий две одинаковые строки, равен нулю.*

Свойство 11.5.5. *Если все члены некоторой строки определителя умножить на некоторое число k, то сам определитель умножится на k.*

Свойство 11.5.6. *Определитель, содержащий две пропорциональные строки, равен нулю.*

Свойство 11.5.7. *Если все элементы i-й строки определителя n-го порядка вида (11.5.5) представлены в виде суммы двух слагаемых:*

$$a_{ij} = b_j + c_j, \qquad j = 1, \dots, n,$$

то определитель (11.5.5) равен сумме двух определителей, у которых все строки, кроме i-й, — такие же, как в заданном определителе, а i-я строка в одном из слагаемых состоит из элементов b_j, а в другом — из элементов c_j.

Свойство 11.5.8. *Если одна из строк определителя является линейной комбинацией его других строк, то определитель равен нулю.*

Свойство 11.5.9. *Определитель не меняется, если к элементам одной из его строк прибавляются соответственные элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.*

11.5.3. Вычисление определителей. Затруднительно вычислять определители, используя только определение. Рассмотрим определитель для матрицы A порядка n вида (11.5.2). Для натурального числа k, удовлетворяющего условию $1 \leqslant k \leqslant n-1$, выбираем в определителе (11.5.5) произвольные k строк и k столбцов. Элементы, стоящие на пересечении этих строк и столбцов, составляют, очевидно, матрицу порядка k. Определитель этой матрицы называется *минором порядка* k нашего определителя.

Определение 11.5.9. *Рассмотрим в определителе некоторый минор M порядка k. Если мы вычеркнем те строки и столбцы, на пересечении которых стоит этот минор, то останется минор M' порядка $n-k$, который называется дополнительным минором для минора M.*

Определение 11.5.10. *Если минор M расположен в строках с номерами i_1, i_2, $\ldots, i_k$ и в столбцах с номерами j_1, j_2, $\ldots, j_k$, то назовем алгебраическим дополнением минора M его дополнительный минор M', взятый со знаком "$+$" или "$-$" в зависимости от того, четна или нечетна сумма номеров всех строк и столбцов, в которых расположен минор M, т.е. сумма*

$$s_M = i_1 + i_2 + \cdots + i_k + j_1 + j_2 + \cdots + j_k.$$

Иными словами, алгебраическим дополнением для минора M будет число $(-1)^{s_M} M'$.

Теорема 11.5.5. *Произведение любого минора M k-го порядка на его алгебраическое дополнение в определителе для матрицы A является алгебраической суммой, слагаемые которой, получающиеся от умножения членов минора M на взятые со знаком $(-1)^{s_M}$ члены дополнительного минора M', будут некоторыми членами определителя, причем их знаки в этой сумме совпадают с теми знаками, с которыми они входят в определитель.*

Этот результат позволяет привести новое правило для вычисления определителя. Если a_{ij} — элемент определителя, то через M_{ij} обозначим дополнительный минор этого элемента. Через A_{ij} обозначим алгебраическое дополнение элемента a_{ij}, т.е.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Теорема 11.5.6. *Определитель для матрицы A равен d, где*

$$d = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

Таким образом, определитель равен сумме произведений всех элементов произвольной его строки на их алгебраические дополнения. Аналогичное разложение справедливо и для столбцов определителя.

Обобщая полученные разложения определителя по строке или столбцу, можно доказать теорему, говорящую о разложении определителя по нескольким строкам или столбцам.

Теорема 11.5.7 (правило Лапласа)**.** *Пусть в определителе порядка n произвольно выбраны k строк (или k столбцов), $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Тогда сумма произведений всех миноров k-го порядка, содержащихся в выбранных строках, на их алгебраические дополнения равна определителю d.*

11.6. Системы линейных уравнений

Пусть задана система из s линейных уравнений с n неизвестными. Неизвестные мы будем обозначать символами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, уравнения будем считать перенумерованными — первое, второе, ..., s-е, коэффициент из i-го уравнения при неизвестном x_j обозначим через a_{ij}, наконец, свободный член i-го уравнения обозначим через b_i.

Тогда наша система запишется в следующем виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases} \tag{11.6.1}$$

Определение 11.6.1. *Коэффициенты при неизвестных составляют прямоугольную таблицу, которая называется (прямоугольной) матрицей порядка $s \times n$, состоящей из s строк и n столбцов*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{sn} \end{pmatrix}. \tag{11.6.2}$$

Если $s = n$, то матрица квадратная. Квадратная матрица называется *единичной*, если элементы, стоящие на главной диагонали, равны 1, а остальные элементы матрицы равны 0.

Определение 11.6.2. *Решением системы (11.6.1) называется такой набор чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$, что каждое из уравнений системы (11.6.1) обращается в тождество после замены в нем неизвестных x_i, соответственно, числами c_i, $i = 1, \ldots, n$.*

Определение 11.6.3. *Система (11.6.1) называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение. Система называется несовместной, если она не имеет решений.*

Определение 11.6.4. *Совместная система называется определенной, если она обладает единственным решением, и неопределенной, если решений больше, чем одно.*

11.6.1. Метод Гаусса. Сначала рассмотрим *метод исключения неизвестных*, или *метод Гаусса*, решения системы (11.6.1).

Мы будем делать следующие преобразования над системой. Обе части одного уравнения, умноженные на одно и то же число c, мы будем вычитать из соответствующих частей другого уравнения. При этом получим новую систему. Тогда данные системы *эквивалентны*, т.е. они обе совместны или несовместны и обладают одними и теми же решениями.

Может случиться так, что при проведении последовательно нескольких таких преобразований появится уравнение, все коэффициенты левой части которого равны нулю. Если при этом свободный член данного уравнения не равен 0, то полученная система (а значит, и первоначальная система) несовместна, если же свободный член равен нулю, то мы можем данное уравнение отбросить.

Метод Гаусса заключается в следующем. Рассмотрим первое уравнение в системе (11.6.1). Если все коэффициенты и свободный член равны нулю, то мы его отбрасываем. Тогда можно считать, что хотя бы один из коэффициентов уравнения не равен 0. Изменяя порядок переменных (если нужно), можно считать, что $a_{11} \neq 0$. Преобразуем систему (11.6.1), исключая неизвестное x_1 из всех уравнений, кроме первого. Для этого обе части первого уравнения умножаем на число $\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$ и вычитаем из соответствующих частей второго уравнения. Затем обе части первого уравнения умножаем на $\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$ и вычитаем из соответствующих частей третьего уравнения, и т.д.

Получим новую систему уравнений, эквивалентную первой, в которой все уравнения, начиная со второго, не содержат неизвестного x_1. С этими уравнениями мы поступаем точно так же, исключая x_2, и т.д.

В конце концов придем к системе треугольного вида, в которой содержится уравнение, имеющее ненулевой свободный член, а все коэффициенты которого равны 0. Тогда первоначальная система несовместна. В противном случае первоначальная система совместна.

Решая последнее уравнение в полученной системе, мы можем найти значение x_n (либо, если последнее уравнение состоит из более чем одного слагаемого, мы переменному x_n придаем произвольное значение), затем переходим к предыдущему уравнению и т.д. В конце концов, мы найдем все решения системы (11.6.1).

11.6.2. Правило Крамера. Для квадратных систем можно рассмотреть другой метод решения, так называемое *правило Крамера*.

Пусть в системе (11.6.1) число уравнений совпадает с числом неизвестных, т.е. $n = s$. Рассмотрим матрицу A для этого случая и обозначим через d определитель этой матрицы.

Теорема 11.6.1 (правило Крамера). *Если $d \neq 0$, то система (11.6.1) имеет единственное решение $c_1, c_2, \ldots, c_n$, определяемое по формулам*

$$c_j = \frac{d_j}{d}, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

где d_j — определитель матрицы, получающейся из матрицы A заменой j-го столбца столбцом из свободных членов $b_1, \ldots, b_n$.

Если $d = 0$, а хотя бы один из определителей d_j не равен нулю, то система (11.6.1) несовместна.

11.7. Операции над матрицами

Напомним, что *матрицей A порядка $m \times n$* называется прямоугольная таблица чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы a_{ik} являются вещественными или комплексными числами. Матрицу A мы будем обозначать также $\|a_{ik}\|$, где i указывает номер столбца, а k — номер строки.

Если $m = n$, т.е. матрица A квадратная, то определитель матрицы A мы будем обозначать $|A|$ или $\det A$.

Определение 11.7.1. *Квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные вне главной диагонали, равны 0, называется диагональной.*

11.7.1. Сумма матриц. Определим основные операции над матрицами: сложение матриц, умножение матрицы на число и умножение матриц.

Пусть величины $y_1, y_2, \dots, y_m$ выражаются через величины $x_1, x_2, \dots, x_n$ при помощи преобразования

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k, \quad i = 1, 2, \dots, m, \tag{11.7.1}$$

а величины $z_1, z_2, \dots, z_m$ выражаются через $x_1, x_2, \dots, x_n$ с помощью преобразования

$$z_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} x_k, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Тогда очевидно, что

$$y_i + z_i = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} + b_{ik}) x_k, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

В соответствии с этим вводится

Определение 11.7.2. *Суммой двух прямоугольных матриц* $A = \|a_{ik}\|$ *и* $B = \|b_{ik}\|$ *одинаковых размеров* $m \times n$ *называется матрица* $C = \|c_{ik}\|$*, элементы которой равны*

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, m; \ k = 1, 2, \dots, n,$$

и обозначается так:

$$C = A + B.$$

Из свойств чисел получаем, что сложение матриц обладает следующими свойствами:

1) $A + B = B + A$ — *коммутативность*;

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ — *ассоциативность*;

3) нулевым элементом является матрица O, целиком составленная из нулей, $A + O = O + A = A$;

4) противоположной матрицей $-A$ для матрицы A является матрица $\| - a_{ik}\|$, тогда $A + (-A) = O$.

Так что обычным образом можно определить *вычитание* матриц $A - B = A + (-B)$.

11.7.2. Умножение матрицы на число. Умножим в преобразовании (11.7.1) все величины $y_1, y_2, \dots, y_m$ на некоторое число α, тогда

$$\alpha y_i = \sum_{k=1}^{n} (\alpha a_{ik}) x_k, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

В соответствии с этим имеем

Определение 11.7.3. *Произведением матрицы* $A = \|a_{ik}\|$ *на число* α *называется матрица* $C = \|c_{ik}\|$*, элементы которой имеют вид*

$$c_{ik} = \alpha a_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \ k = 1, 2, \dots, n.$$

Обозначается это так: $C = \alpha A$.

Из свойств произведения чисел получаем следующие свойства произведения матрицы на число:
1) $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$;
2) $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$;
3) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;
4) $\alpha O = O$.

11.7.3. Произведение матриц. Пусть теперь величины $z_1, z_2, \ldots, z_q$ выражаются через величины $y_1, y_2, \ldots, y_m$ с помощью преобразования

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} b_{ji} y_i, \quad j = 1, 2, \ldots, q,$$

а величины $y_1, y_2, \ldots, y_m$ выражаются через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ преобразованием (11.7.1). Тогда

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} b_{ji} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} b_{ji} a_{ik} \right) x_k, \quad j = 1, 2, \ldots, q.$$

В соответствии с этим имеет место

Определение 11.7.4. *Произведением двух матриц*

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ b_{q1} & b_{q2} & \ldots & b_{qm} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется матрица

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ c_{q1} & c_{q2} & \ldots & c_{qn} \end{pmatrix},$$

элементы которой равны

$$c_{jk} = \sum_{i=1}^{m} b_{ji} a_{ik}, \quad j = 1, 2, \ldots, q, \ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Обозначается это произведение как

$$C = BA.$$

Таким образом, произведение матриц определено, если число столбцов первого множителя равно числу строк второго множителя. В частности, если матрицы квадратные, то их размеры должны совпадать.

Нетрудно проверить справедливость следующих свойств произведения матриц:
1) $(AB)C = A(BC)$ — *ассоциативность умножения*;
2) $A(B+C) = AB+BC$, $(A+B)C = AC+BC$ — *дистрибутивность умножения*.
В общем, операция умножения некоммутативна даже для квадратных матриц.

Пример 11.7.1. Найти произведение матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение. Имеем

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8 & -2\\ 18 & -4\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Если же выполняется равенство $AB = BA$, то матрицы A и B называются *перестановочными* или *коммутирующими.*

11.7.4. Обратная матрица. Рассмотрим теперь класс квадратных матриц порядка $n \times n$ и определим понятия *единичной* матрицы и *обратной* матрицы.

Определение 11.7.5. *Единичной матрицей E называется диагональная матрица, у которой все элементы, стоящие на главной диагонали, равны 1, т.е.*

$$E = \begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}.$$

Очевидно, что для любой квадратной матрицы A выполнено равенство $AE = EA = A$.

Определение 11.7.6. *Квадратная матрица A называется особенной или вырожденной, если $|A| = 0$. Если же определитель $|A| \neq 0$, то матрица A называется неособенной или невырожденной.*

Пусть матрица $A = \|a_{ik}\|$, $i, k = 1, 2, \dots, n$, является невырожденной. Введем преобразование

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{11.7.2}$$

Рассматривая равенства (11.7.2) как уравнения относительно $x_1, x_2, \dots, x_n$ и замечая, что по условию определитель этой системы отличен от нуля, мы (по правилу Крамера) можем однозначно выразить величины x_i через величины y_k, а именно:

$$x_i = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix}a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & y_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & \dots & a_{2,i-1} & y_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & y_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(-1)} y_k, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Таким образом, мы получили "обратное" преобразование для преобразования (11.7.2).

Определение 11.7.7. *Матрица из коэффициентов этого преобразования*

$$A^{-1} = \|a_{ik}^{(-1)}\|$$

называется обратной матрицей для матрицы A.

Коэффициенты обратной матрицы легко выписываются:

$$a_{ik}^{(-1)} = \frac{A_{ki}}{|A|}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n,$$

где A_{ki} — алгебраические дополнения элементов a_{ki} в матрице A.

Пользуясь свойствами определителя, получим, что

$$A^{-1}A = A\,A^{-1} = E.$$

Теорема 11.7.1. *Если A и B — квадратные матрицы одного порядка, то*

$$|AB| = |A|\,|B|.$$

В частности, определители взаимно обратных матриц есть взаимно обратные числа.

11.8. Прямые на плоскости и в пространстве

11.8.1. Векторная алгебра в $\mathbb{R}^3$. Напомним некоторые понятия векторной алгебры в $\mathbb{R}^3$. Во множестве векторов введены операции суммы векторов и умножения на (вещественное) число.

Определение 11.8.1. *Линейной комбинацией векторов $a_1, \ldots, a_n$ называется выражение вида*

$$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n, \tag{11.8.1}$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — произвольные вещественные числа.

Определение 11.8.2. *Векторы $a_1, \ldots, a_n$ называются линейно зависимыми, если найдутся вещественные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что линейная комбинация этих векторов (вида (11.8.1)) является нулевым вектором.*

Векторы, не являющиеся линейно зависимыми, называются *линейно независимыми.*

Если в набор векторов входит нулевой вектор 0, то такой набор является линейно зависимым.

Необходимым и достаточным условием линейной зависимости двух векторов служит их *колинеарность.*

Необходимое и достаточное условие линейной зависимости трех векторов — их *компланарность.*

Напомним, что *скалярным произведением* двух векторов a, b считается число, равное произведению их длин и косинуса угла φ между ними:

$$a \cdot b = ab = |a| \cdot |b| \cdot \cos\varphi.$$

Можно дать другое, эквивалентное данному, определение скалярного произведения.

Определение 11.8.3. *Скалярное произведение двух векторов — это число, равное произведению длины одного из этих векторов на проекцию другого на ось, определяемую первым вектором.*

Если векторы a, b заданы своими координатами

$$a = \{x_1, y_1, z_1\}, \quad b = \{x_2, y_2, z_2\},$$

то скалярное произведение этих векторов примет вид

$$ab = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Важным свойством скалярного произведения является следующее тождество: $aa = |a|^2$, показывающее, что скалярный квадрат есть квадрат длины вектора. Поэтому скалярный квадрат положителен, если вектор a ненулевой.

Необходимым и достаточным условием *ортогональности* двух векторов служит условие равенства нулю их скалярного произведения.

Рассмотрим теперь *векторное произведение* двух векторов.

Определение 11.8.4. *Тройка трех некомпланарных векторов a, b, c называется правой, если выполнено одно из трех следующих условий:*

1) будучи приведены к общему началу, эти векторы располагаются так, как могут быть расположены, соответственно, большой, несогнутый указательный и средний пальцы правой руки;

2) если, находясь внутри телесного угла, образованного приведенными к общему началу векторами a, b, c, поворот от a к b и от него к c совершается против часовой стрелки;

3) если после приведения к общему началу вектор c располагается по ту сторону от плоскости, определяемой векторами a и b, откуда кратчайший поворот от a к b кажется совершающимся против часовой стрелки.

Аналогично дается определение *левой* тройки векторов.

Наша система координат *правая*, т.е. базисные векторы i, j, k образуют правую тройку.

Определение 11.8.5. *Векторным произведением вектора a на вектор b называется вектор c, обозначаемый $a \times b$ или $[a, b]$ и удовлетворяющий следующим требованиям:*

1) длина вектора c равна произведению длин векторов a и b и синуса угла φ между ними, т.е.

$$|c| = |a| \cdot |b| \cdot \sin\varphi;$$

2) вектор c ортогонален к каждому из векторов a и b;

3) вектор c направлен так, что тройка векторов a, b, c — правая.

Если векторы a, b колинеарны, то вектор $c = a \times b$ равен нулю.

Из определения 11.8.5 следует, что длина векторного произведения равна площади параллелограмма, построенного на векторах a и b, если они приведены к общему началу.

Отметим также, что при перестановке сомножителей в векторном произведении знак этого произведения меняется на противоположный.

Определение 11.8.6. *Смешанным произведением трех векторов a, b, c называется число $(a \times b)c$, другими словами, это число, равное скалярному произведению вектора $a \times b$ на вектор c.*

Основным свойством смешанного произведения является то, что оно есть объем параллелепипеда, который построен на векторах a, b, c, приведенных к общему началу. Этот объем берется со знаком "$+$", если векторы a, b, c образуют правую тройку, и со знаком "$-$", если векторы a, b, c образуют левую тройку. Если векторы a, b, c компланарны, то их смешанное произведение равно нулю.

Полезны формулы, выражающие векторное и смешанное произведения в декартовых координатах.

Пусть
$$a = \{x_1, y_1, z_1\}, \quad b = \{x_2, y_2, z_2\}, \quad c = \{x_3, y_3, z_3\},$$
тогда
$$a \times b = \{y_1 z_2 - y_2 z_1, z_1 x_2 - z_2 x_1, x_1 y_2 - x_2 y_1\} =$$
$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix},$$
а
$$(a \times b)c = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Как следствия из этих формул получаем, что векторы a и b колинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны, т.е.
$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

В свою очередь три вектора — $a,\ b,\ c$ — компланарны тогда и только тогда, когда определитель
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

11.8.2. Прямые на плоскости. Рассмотрим теперь различные способы задания прямой на плоскости.

Общее уравнение прямой имеет вид
$$ax + by + c = 0.$$
Здесь вектор $\{a, b\}$ является вектором, ортогональным к этой прямой.

Как частные случаи получаем при $c = 0$ уравнение прямой, проходящей через начало координат,
$$ax + by = 0,$$
при $a = 0$ — уравнение прямой, параллельной оси OX,
$$by + c = 0,$$
при $b = 0$ — уравнение прямой, параллельной оси OY,
$$ax + c = 0.$$

Уравнение прямой *в отрезках*
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$
Здесь a и b равны величине отрезков, отсекаемых данной прямой на осях координат.

Если известны точка (x_0, y_0), через которую проходит прямая, и вектор $\{a, b\}$, ортогональный прямой, то уравнение прямой примет вид
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

Если известны точка (x_0, y_0), через которую проходит прямая, и вектор $\{l, m\}$, параллельный прямой, то уравнение прямой примет вид

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}. \tag{11.8.2}$$

Уравнение (11.8.2) называется *каноническим* уравнением прямой.

Из канонического уравнения легко получается *параметрическое* уравнение прямой:

$$x = x_0 + lt,$$

$$y = y_0 + mt,$$

$$t \in (-\infty, +\infty).$$

Рассмотрим прямую, не параллельную оси OX, тогда ее уравнение можно записать как

$$y = kx + b,$$

где k — *угловой коэффициент*, численно равный тангенсу угла наклона этой прямой к оси OX.

И наконец, уравнение прямой, проходящей через данную точку (x_0, y_0) с данным угловым коэффициентом k, имеет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Различные способы задания прямых используются при решении различных задач на прямую линию. Рассмотрим некоторые из них.

Нахождение угла между прямыми. Если две прямые L_1 и L_2 заданы общими уравнениями

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

соответственно, то из свойств скалярного произведения следует, что косинус угла φ между прямыми равен

$$\cos\varphi = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

В частности, условие параллельности этих прямых примет вид

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2},$$

а условие перпендикулярности —

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 0.$$

Расстояние d от точки (x_1, y_1) до прямой

$$ax + by + c = 0$$

вычисляется по формуле

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

11.8.3. Плоскости и прямые в пространстве. По аналогии с уравнением прямой на плоскости мы можем классифицировать уравнения плоскости в пространстве следующим образом.

Общее уравнение плоскости имеет вид

$$ax + by + cz + d = 0,$$

где вектор $\{a, b, c\}$ ортогонален этой плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку (x_0, y_0, z_0) и перпендикулярной заданному вектору $\{a, b, c\}$, примет вид

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Уравнение плоскости *в отрезках* дается формулой

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

здесь $a,\ b,\ c$ — величины отрезков, отсекаемых этой плоскостью на осях координат.

Прямая линия в пространстве задается двумя линейными уравнениями

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0,$$

причем векторы $\{a_1, b_1, c_1\}$ и $\{a_2, b_2, c_2\}$ должны быть линейно независимыми для того, чтобы плоскости, определяемые данными уравнениями, пересекались.

Отсюда нетрудно получить *канонические уравнения* прямой

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

где (x_0, y_0, z_0) — точка, через которую данная прямая проходит, а вектор $\{l, m, n\}$ — вектор, параллельный прямой.

Параметрические уравнения прямой (при тех же обозначениях) имеют вид

$$x = x_0 + lt,$$

$$y = y_0 + mt,$$

$$z = z_0 + nt,$$

$$t \in (-\infty, +\infty).$$

Важными уравнениями являются уравнения прямой, проходящей через две заданных точки (x_0, y_0, z_0) и (x_1, y_1, z_1) :

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.$$

С помощью различных типов уравнений можно решать различные задачи на прямые и плоскости в пространстве. Рассмотрим некоторые из них.

Расстояние p от точки (x_0, y_0, z_0) до плоскости

$$ax + by + cz + d = 0$$

определяется формулой

$$p = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Угол φ между прямыми, заданными каноническими уравнениями

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1},$$

$$\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2},$$

находят по формуле

$$\cos\varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

Как следствие, получаем, что условие параллельности прямых примет вид

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2},$$

а условие перпендикулярности —

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

11.9. Ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли

11.9.1. Векторное пространство $\mathbb{R}^n$. В школьном курсе математики обычно имеют дело с векторами, заданными или на плоскости, или в пространстве. Рассмотрим векторы, заданные в $\mathbb{R}^n$.

По определению, это пространство состоит из упорядоченных наборов n вещественных чисел

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \quad a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}. \tag{11.9.1}$$

Выражение (11.9.1) называется *n-мерным вектором.* Определим операции над векторами. Если a — вектор вида (11.9.1), а

$$b = (b_1, b_2, \ldots, b_n),$$

то *суммой* векторов a и b называется вектор c вида

$$c = a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n).$$

Произведение вектора a на число $\lambda \in \mathbb{R}$ определяется так:

$$\lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n).$$

Из свойств вещественных чисел нетрудно получить следующие свойства операций над векторами:

1) $a + b = b + a$ — *коммутативность сложения*;

2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ — *ассоциативность сложения*;

3) вектор $0 = (0, 0, \ldots, 0)$ является нулевым вектором, т.е. $a + 0 = 0 + a = a$;

4) для данного вектора a вида (11.9.1) вектор $-a = (-1)a$ является противоположным вектором, т.е. $a + (-a) = (-a) + a = 0$;

5) $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$;

6) $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$;

7) $1 \cdot a = a$;

8) $\lambda \cdot 0 = 0$.

Совокупность n-мерных векторов с введенными операциями сложения и умножения на число образует *n–мерное векторное пространство* $\mathbb{R}^n$.

В дальнейшем мы рассмотрим более общие линейные (векторные) пространства, чем $\mathbb{R}^n$.

Введем важные понятия линейной зависимости и линейной независимости векторов из $\mathbb{R}^n$.

Определение 11.9.1. *Система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_m$ называется линейно зависимой, если существуют такие вещественные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, не равные одновременно нулю, что*

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m = 0. \tag{11.9.2}$$

Выражение, стоящее в левой части формулы (11.9.2), называется линейной комбинацией векторов.

Определение 11.9.2. *Система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_m$ называется линейно независимой, если из того, что линейная комбинация этих векторов обращается в нуль*

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m = 0,$$

следует, что все числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ обращаются в 0.

Другое, эквивалентное данному, определение линейной зависимости векторов можно дать так. Система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_m$ линейно зависима, если хотя бы один вектор из этой системы является линейной комбинацией остальных векторов.

Если в систему векторов входит нулевой вектор, то такая система векторов всегда линейно зависима.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ существует система из n линейно независимых векторов. Например,

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0), \\ e_3 &= (0, 0, 1, \ldots, 0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1). \end{aligned}$$

Теорема 11.9.1. *В пространстве $\mathbb{R}^n$ всякая система из m векторов при $m > n$ линейно зависима. Любая линейно независимая система содержит не более чем n векторов.*

Определение 11.9.3. *Система линейно независимых векторов называется максимальной, если добавление к ней любого другого вектора делает систему линейно зависимой.*

Система векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ является максимальной линейно независимой системой.

Всякая линейно независимая система векторов в $\mathbb{R}^n$ может быть дополнена до максимальной линейно независимой системы. Более того, справедливо следующее утверждение.

Теорема 11.9.2. *Если в $\mathbb{R}^n$ даны две системы векторов*

$$a_1, a_2, \ldots, a_m \tag{11.9.3}$$

и

$$b_1, b_2, \ldots, b_s, \tag{11.9.4}$$

причем система (11.9.3) линейно независима, а каждый вектор из (11.9.4) является линейной комбинацией векторов системы (11.9.3), то выполнено неравенство $m \leqslant s$.

Следствие 11.9.1. *Максимальные линейно независимые системы векторов в $\mathbb{R}^n$ имеют одинаковое число векторов n, и любой другой вектор является линейной комбинацией векторов максимальной системы.*

Определение 11.9.4. *Максимальная линейно независимая система векторов называется базисом пространства* $\mathbb{R}^n$.

Определение 11.9.5. *Пусть дана некоторая система векторов вида (11.9.3). Рангом системы (11.9.3) называется число векторов, образующих максимальную линейно независимую подсистему системы (11.9.3).*

Из теоремы 11.9.2 следует, что ранг системы векторов определяется однозначно, так как все максимальные линейно независимые подсистемы данной системы имеют одинаковую размерность.

11.9.2. Ранг матрицы. Дадим определение ранга произвольной прямоугольной матрицы A вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{11.9.5}$$

Столбцы этой матрицы могут рассматриваться как m-мерные векторы в $\mathbb{R}^m$.

Определение 11.9.6. *Ранг системы векторов, состоящей из столбцов матрицы A, называется рангом матрицы A.*

Конечно, такую же процедуру нахождения ранга системы можно проделать и со строчками матрицы A. Справедливы утверждения.

Теорема 11.9.3. *Ранг матрицы A вида (11.9.5) равен рангу системы векторов, составленной из строчек A.*

Теорема 11.9.4 (о ранге матрицы)**.** *Ранг матрицы A равен порядку наибольшего по размерности минора A, отличного от нуля.*

Как следствие, для квадратной матрицы получаем, что если определитель этой матрицы равен нулю, то между столбцами (и между строками) существует линейная зависимость.

11.9.3. Теорема Кронекера-Капелли. Теорема о ранге позволяет полностью исследовать вопрос о решении системы линейных уравнений. Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases} \tag{11.9.6}$$

Здесь $x_1, x_2, \dots, x_n$ — неизвестные, все остальные числа даны. Рассмотрим матрицу A, составленную их коэффициентов системы (11.9.6), т.е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

и *расширенную матрицу* системы (11.9.6)

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Размерность матрицы A равна $m \times n$, а размерность матрицы $\overline{A}$ равна $m \times (n+1)$.

Теорема 11.9.5 (Кронекер-Капелли)**.** *Система уравнений вида (11.9.6) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы A равен рангу расширенной матрицы $\overline{A}$.*

Как следствие, получаем утверждение.

Следствие 11.9.2. *Совместная система уравнений вида (11.9.6) тогда и только тогда имеет единственное решение, когда ранг матрицы A равен числу неизвестных.*

Пример 11.9.1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Ранг матрицы из коэффициентов равен 2: минор второго порядка, стоящий в левом верхнем углу этой матрицы, отличен от нуля, а все миноры третьего порядка равны нулю (если мы из первой строки данной матрицы вычтем вторую, умноженную на 2, то получим третью строку).

Ранг расширенной матрицы равен 3, так как минор вида

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -35 \neq 0.$$

Следовательно, система несовместна.

Применим теорему Кронекера–Капелли для исследования *однородной* системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{11.9.7}$$

Пусть матрица A из коэффициентов системы (11.9.7) имеет ранг r. Если $r = n$, то система (11.9.7) имеет единственное нулевое решение. Если $r < n$, то система имеет решения, отличные от нулевого.

Обозначим множество решений однородной системы через N. Это множество обладает следующими свойствами:

1) если вектора x и y принадлежат N, то и вектор $x + y$ принадлежит N;

2) если вектор x принадлежит N, то для любого числа λ вектор λx тоже принадлежит N.

Таким образом, N является *подпространством* пространства $\mathbb{R}^n$.

Определение 11.9.7. *Максимальная линейно независимая система векторов из N называется фундаментальной системой решений системы (11.9.7).*

Ее размерность (т.е. размерность подпространства N) равна $n-r$.

Наконец, чтобы найти все решения неоднородной системы (11.9.6), нужно проделать следующее: найти фундаментальную систему векторов подпространства N решений однородной системы (11.9.7) и хотя бы одно решение x неоднородной системы. Тогда любое другое решение неоднородной системы (11.9.6) является суммой вектора x и линейной комбинации векторов из фундаментальной системы решений однородного уравнения (11.9.7).

11.10. Кривые второго порядка

11.10.1. Эллипс. Рассмотрим классические кривые второго порядка.

Определение 11.10.1. *Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная.*

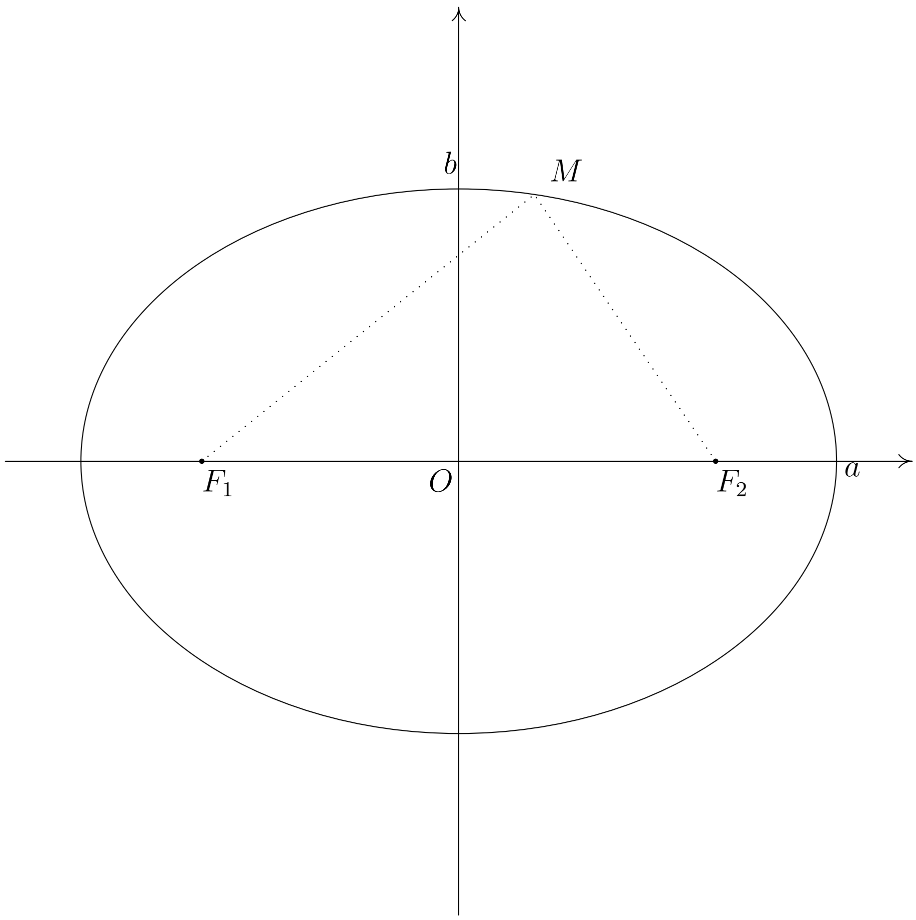

Рис 11.10.1. Эллипс

Очевидно, что если фокусы совпадают, то эллипс представляет собой окружность.

Для вывода *канонического уравнения* эллипса выберем начало координат в середине отрезка F_1F_2, ось OX направим по отрезку F_1F_2. Пусть координаты точек F_1, F_2 будут, соответственно, $(-c, 0)$ и $(c, 0)$, $c \geqslant 0$. Обозначим через $2a$ расстояние, о котором говорится в определении, тогда $a > c$. Пусть точка $M(x, y)$ — текущая точка эллипса, тогда по условию

$$F_1M + F_2M = 2a.$$

Отсюда получаем
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

Возводя данное равенство в квадрат и преобразуя его, получим *каноническое уравнение* эллипса
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{11.10.1}$$
где $b^2=a^2-c^2$.

Нетрудно также показать, что любая точка $M(x,y)$, координаты которой удовлетворяют уравнению (11.10.1), лежит на эллипсе (рис. 11.10.1).

Отметим некоторые свойства эллипса. Эллипс имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии (называемые *главными осями* эллипса) и центр симметрии. В случае канонического задания главными осями служат оси координат, а центром эллипса — начало координат.

Весь эллипс содержится внутри прямоугольника $|x|\leqslant a,\ |y|\leqslant b$.

Эллипс может быть получен путем равномерного сжатия окружности.

Определение 11.10.2. *Эксцентриситетом эллипса называется величина e, равная $\dfrac{c}{a}$.*

Для эллипса его эксцентриситет меньше 1 (для окружности он равен нулю).

Определение 11.10.3. *Директрисой D_i эллипса, отвечающей фокусу F_i, $i=1,2$, называется прямая, проведенная перпендикулярно большей оси на расстоянии $\dfrac{a}{e}$ от его центра.*

11.10.2. Гипербола. Аналогичным образом определяется гипербола.

Определение 11.10.4. *Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для которых абсолютная величина разности расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная.*

Введем такую же систему координат, как в случае эллипса, для вывода *канонического уравнения* гиперболы. Обозначим через $2a$ постоянную, о которой говорится в определении гиперболы, тогда $a<c$. Пусть $M(x,y)$ — текущая точка гиперболы. Имеем
$$|F_1M-F_2M|=2a.$$
Отсюда
$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a.$$

Преобразуя данное уравнение, получаем *каноническое уравнение* гиперболы
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$
где $b^2=c^2-a^2$ (рис. 11.10.2).

Свойства гиперболы таковы. Гипербола имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии (называемые *главными осями* гиперболы) и центр симметрии. При этом одна из этих осей пересекается с гиперболой в двух точках, называемых *вершинами* гиперболы. Эта ось называется *действительной осью* гиперболы. Другая ось не имеет общих точек с гиперболой и поэтому называется *мнимой осью.*

Таким образом, мнимая ось делит плоскость на две части, в которых располагаются симметрично этой оси *правая* и *левая ветви* гиперболы.

Если гипербола задана своим каноническим уравнением, то действительная ось — это ось OX, а мнимая — OY.

Фокусы гиперболы располагаются на ее действительной оси.

Гипербола имеет две наклонные асимптоты. В случае канонического задания это прямые

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

Определение 11.10.5. *Эксцентриситетом гиперболы называется величина* e, *равная* $\frac{c}{a}$.

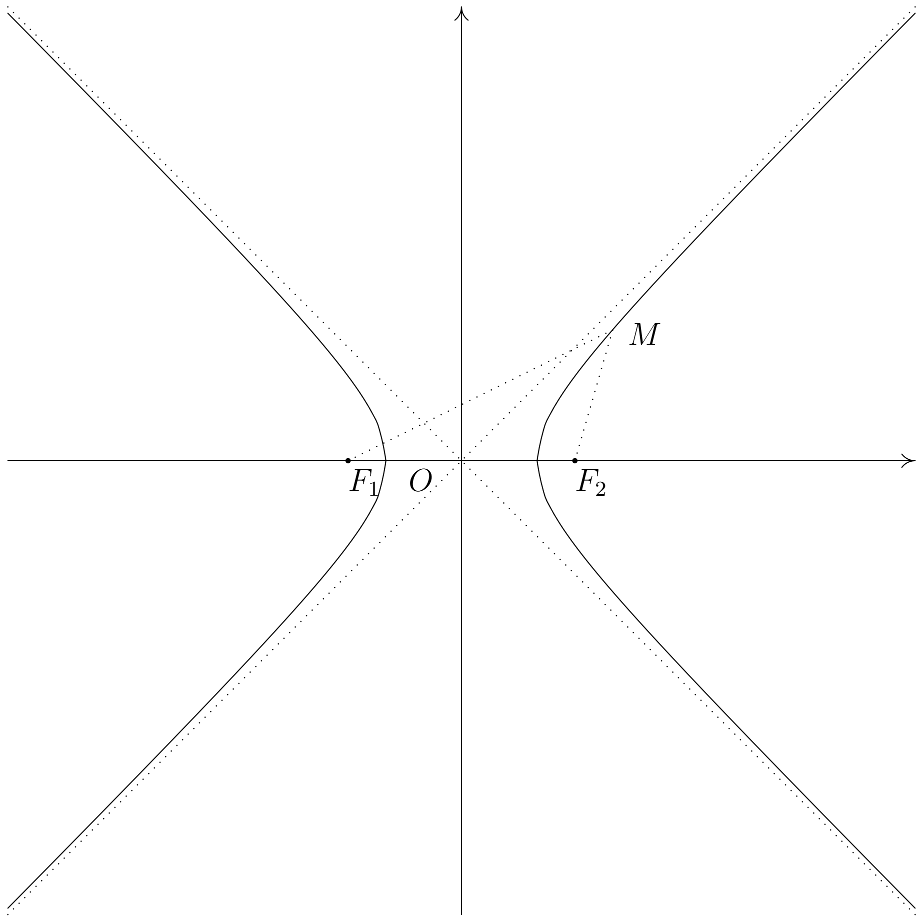

Рис 11.10.2. Гипербола

Для гиперболы эксцентриситет больше 1.

Определение 11.10.6. *Директрисой* D_i *гиперболы, отвечающей фокусу* F_i, $i = 1, 2$, *называется прямая, проведенная перпендикулярно большей оси на расстоянии* $\frac{a}{e}$ *от его центра.*

11.10.3. Парабола. Тетья классическая кривая — это парабола.

Определение 11.10.7. *Параболой называется геометрическое место точек плоскости, для которых расстояние до некоторой фиксированной точки* F *этой плоскости равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, также расположенной в рассматриваемой плоскости.*

Указанная в определении точка F называется *фокусом* параболы, а фиксированная прямая — *директрисой* параболы.

Для вывода *канонического уравнения* параболы выберем начало координат в середине перпендикуляра FD, опущенного из фокуса на директрису, ось OX проведем по отрезку FD. Координаты точки F обозначим через $(p/2, 0)$, а координаты точки D — через $(-p/2, 0)$, $p > 0$.

Если $M(x, y)$ — текущая точка параболы, то из определения имеем

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \frac{p}{2} + x.$$

Преобразуя данное уравнение, получаем *каноническое уравнение* параболы

$$y^2 = 2px$$

(рис. 11.10.3).

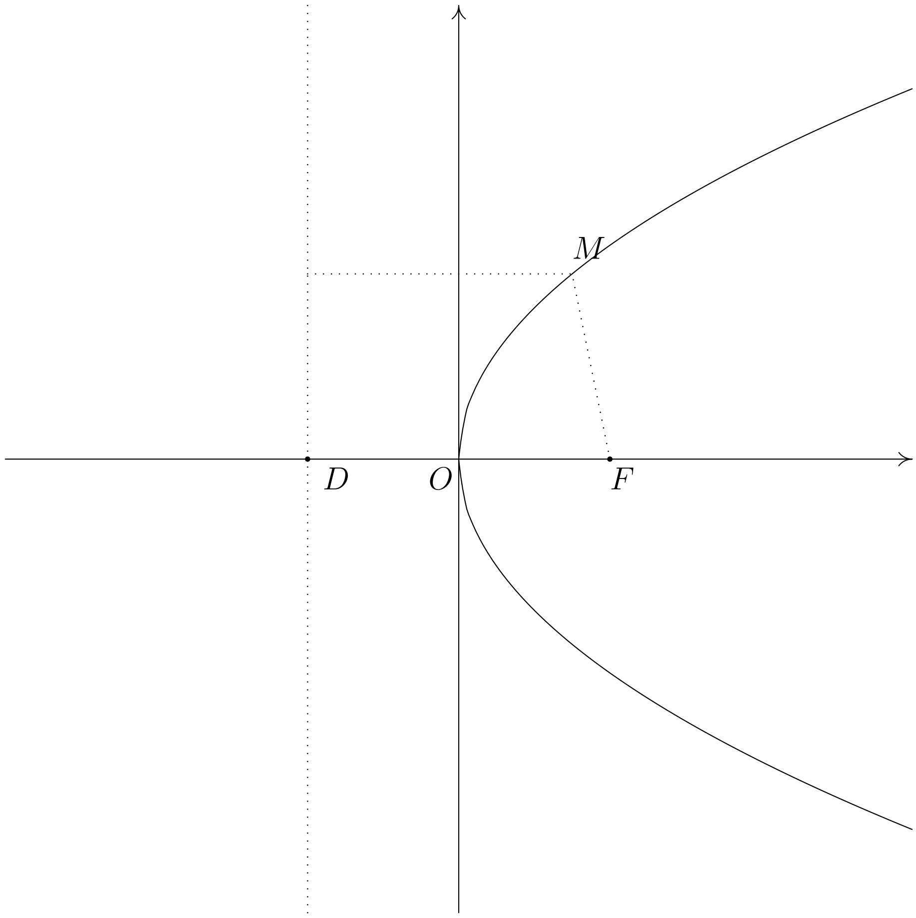

Рис 11.10.3. Парабола

Парабола имеет ось симметрии, называемую *осью параболы.* Точка пересечения параболы с осью называется *вершиной* параболы.

В случае канонического задания осью параболы служит ось OX, а вершиной — начало координат.

Вся парабола расположена в правой полуплоскости, директриса имеет уравнение

$$y = -\frac{p}{2}.$$

11.10.4. Классификация кривых второго порядка. Рассмотрим теперь произвольное уравнение второго порядка на плоскости

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \qquad (11.10.2)$$

Прежде всего, параллельным переносом можно добиться того, что коэффициенты при x и y обратятся в нуль. При этом коэффициенты при старших степенях не изменятся. Изменится только свободный член. Итак, имеем уравнение

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0. \tag{11.10.3}$$

Инвариантом уравнения (11.10.2) называется такая функция от коэффициентов уравнения, которая не меняется при переходе к другой декартовой системе координат.

Теорема 11.10.1. *Величины*

$$I_1 = a_{11} + a_{22}, \quad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

являются инвариантами уравнения (11.10.2) относительно преобразования декартовой системы координат.

В зависимости от знака инварианта I_2 кривые второго порядка делятся на следующие типы:

1) *эллиптический*, если $I_2 > 0$;

2) *гиперболический*, если $I_2 < 0$;

3) *параболический*, если $I_2 = 0$.

Для кривой (11.10.3) начало координат служит центром симметрии. Таким образом, кривая второго порядка всегда центрально симметрична. Этот центр симметрии называется *центром* кривой.

Он может быть один, тогда кривая называется *центральной.*

Можно показать, что кривые эллиптического и гиперболического типов и только они являются центральными.

В дальнейшем будем считать, что инвариант $I_1 \geqslant 0$. Этого всегда можно добиться умножением уравнения (11.10.2) на -1.

Теорема 11.10.2. *Пусть уравнение (11.10.2) есть уравнение эллиптического типа и $I_1 \geqslant 0$. Тогда если $I_3 < 0$, то уравнение (11.10.2) представляет собой эллипс, если $I_3 = 0$, то уравнению (11.10.2) удовлетворяют координаты только одной точки (вырожденный эллипс), если $I_3 > 0$, то уравнение (11.10.2) не имеет решений (мнимый эллипс).*

Теорема 11.10.3. *Если уравнение (11.10.2) есть уравнение гиперболического типа, то при $I_3 \neq 0$ оно представляет собой гиперболу, а при $I_3 = 0$ — пару пересекающихся прямых (вырожденный случай).*

Теорема 11.10.4. *Уравнение (11.10.2) параболического типа при $I_3 \neq 0$ представляет собой параболу, а при $I_3 = 0$ — либо пару действительных параллельных прямых, либо пару мнимых параллельных прямых.*

11.11. Элементы дифференциальной геометрии

Рассмотрим некоторые вопросы, связанные с кривой. Докажем предварительно две полезные леммы.

Лемма 11.11.1. *Пусть векторная функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$ имеет производную в точке t_0. Если длина вектора $\vec{r}(t)$ постоянна в некоторой окрестности точки t_0, то вектор $\vec{r}'(t_0)$ ортогонален вектору $\vec{r}(t_0)$, т.е.*

$$\vec{r}'(t_0) \cdot \vec{r}(t_0) = 0. \tag{11.11.1}$$

Доказательство леммы следует из соотношения $\vec{r}^2(t) \equiv c$ и правила дифференцирования скалярного квадрата. □

Физическая интерпретация этой леммы состоит в том, что у материальной точки, движущейся так, что она все время остается на поверхности сферы, ее скорость направлена по касательной к сфере и, следовательно, перпендикулярна радиусу–вектору.

Пусть теперь вектор–функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности точки t_0, причем $\vec{r}(t) \neq 0$ в этой окрестности. Пусть точка $t = t_0 + \Delta t$ также принадлежит этой окрестности для всех достаточно малых Δt. Угол $\varphi = \varphi(t)$ есть угол между векторами $\vec{r}(t_0)$ и $\vec{r}(t)$, $|\varphi| \leqslant \pi$. Будем считать, что $\varphi(t) \geqslant 0$ для $\Delta t \geqslant 0$ и $\varphi(t) \leqslant 0$ при $\Delta t < 0$. В точке t_0 для приращения $\Delta\varphi$ функции φ имеем

$$\Delta\varphi = \varphi(t) - \varphi(t_0) = \varphi(t),$$

поэтому всегда

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \geqslant 0.$$

Определение 11.11.1. *Производная* $\dfrac{d\varphi(t_0)}{dt}$ *называется угловой скоростью вращения векторной функции $\vec{r}(t)$ в точке t_0 и обозначается $\omega = \omega(t_0) = \omega(t_0, \vec{r}(t))$.*

Заметим, что если выбрать противоположный отсчет углов, т.е. определить угол φ между векторами $\vec{r}(t)$ и $\vec{r}(t_0)$ как угол $\psi = -\varphi$, то очевидно, что

$$\frac{d\psi}{dt} \leqslant 0, \quad \omega(t_0) = \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d\psi}{dt} = \left|\frac{d\psi}{dt}\right|.$$

Таким образом, всегда

$$\omega(t_0) = \left|\frac{d\varphi}{dt}\right|.$$

Лемма 11.11.2. *Пусть векторная функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности точки t_0 и $r(t_0) \neq 0$. Тогда, если в точке t_0 существует производная $\vec{r}'(t_0)$, в этой точке существует угловая скорость вращения $\omega = \omega(t_0)$, и она равна*

$$\omega = \frac{1}{\vec{r}^2(t_0)} \left|\vec{r}(t_0) \times \vec{r}'(t_0)\right|. \tag{11.11.2}$$

Следствие 11.11.1. *Если в дополнение к условиям леммы длина вектора $\vec{r}(t)$ постоянна в некоторой окрестности точки t_0, то*

$$\omega = \frac{|\vec{r}'(t)|}{|\vec{r}(t)|}.$$

Доказательство. Так как длина вектора $\vec{r}(t)$ постоянна и $\vec{r}(t) \neq 0$, то по формуле (11.11.1) угол ψ между векторами $\vec{r}(t)$ и $\vec{r}'(t)$ равен $\pm\dfrac{\pi}{2}$. Поэтому $|\sin\psi| = 1$. Следовательно,

$$|\vec{r}(t) \times \vec{r}'(t)| = |\vec{r}(t)| \cdot |r'(t)|.$$

Отсюда и из формулы (11.11.2) получаем требуемое. □

Рассмотрим дважды дифференцируемую кривую γ без особых точек. Такая кривая спрямляема, и у нее существует параметризация $\vec{r} = \vec{r}(s)$, в которой за параметр принята переменная длина дуги s. Пусть $s_0 \in [0, S]$, $\Delta s = s - s_0$, S — длина кривой, а $\alpha = \alpha(s)$ — угол между касательными к кривой γ в точках $\vec{r}(s_0)$ и $\vec{r}(s_0 + \Delta s)$. Причем будем считать, что $\alpha(s) \geqslant 0$ для $\Delta s \geqslant 0$ и $\alpha(s) \leqslant 0$ для $\Delta s < 0$, $|\alpha| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

Пусть теперь $\vec{t}(s) = \dfrac{d\vec{r}(s)}{ds}$. Как было показано в § 4.8 (следствие 4.8.1), $t(s)$ служит единичным вектором, параллельным касательной к кривой в соответствующей точке. Поэтому угол $\Delta\alpha = \alpha(s) - \alpha(s_0) = \alpha(s)$ является и углом между векторами $\vec{t}(s_0)$ и $\vec{t}(s_0 + \Delta s)$.

Определение 11.11.2. *Угловая скорость вращения касательного единичного вектора* $\vec{t} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}$ *в данной точке кривой называется кривизной* $k(s_0)$ *кривой в этой точке:*

$$k(s_0) = \omega(s_0, \vec{t}(s)) = \frac{d\alpha(s_0)}{ds}.$$

Кривая дважды дифференцируема, поэтому существует производная

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2},$$

а так как вектор $\vec{t}$ — единичный, то из следствия 11.11.1 имеем

$$k = \left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right| = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|. \tag{11.11.3}$$

Определение 11.11.3. *Величина, обратная кривизне, называется радиусом кривизны в данной точке и обозначается* R, *т.е.* $R = 1/k$.

Пример 11.11.1. Пусть γ — окружность радиуса R. Найти ее кривизну.

Решение. В этом случае угол $\Delta\alpha$ между касательными равен углу, образованному радиусами, проведенными в точку касания, а для длины дуги Δs между этими точками справедлива формула

$$\Delta s = R\Delta\alpha.$$

Поэтому $\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \dfrac{1}{R}$. Тогда и

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \frac{1}{R}.$$

Таким образом, в случае окружности ее кривизна k постоянна и равна величине, обратной радиусу. Отсюда и произошел термин "радиус кривизны".

Обозначим через $\vec{n}$ единичный вектор в направлении вектора $\dfrac{d\vec{t}}{ds}$. Из формулы (11.11.3) следует, что вектор $\vec{n}$ однозначно определен лишь в тех точках кривой, в которых кривизна не равна нулю. И в этих точках

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = k\,\vec{n}. \tag{11.11.4}$$

Вектор $\vec{t}$ — единичный, поэтому его производная, а следовательно, и вектор $\vec{n}$ перпендикулярны ему.

Определение 11.11.4. *Вектор* $\vec{n}$ *называется вектором главной нормали (короче — главной нормалью) к кривой* γ *в данной ее точке.*

Теорема 11.11.1. *Пусть γ — дважды гладкая кривая (т.е. дважды непрерывно дифференцируемая кривая без особых точек) с произвольной параметризацией $\vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in [a, b]$. Тогда в каждой ее точке существует кривизна k и вычисляется по следующей формуле:*

$$k = \frac{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3}. \tag{11.11.5}$$

От формулы (11.11.5) легко перейти к выражению для кривизны в координатной записи:

$$k = \frac{\sqrt{(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2}}{((x')^2 + (y')^2 + (z')^2)^{3/2}}. \tag{11.11.6}$$

Рассмотрим некоторые свойства вектора главной нормали $\vec{n}$.

Определение 11.11.5. *Всякая прямая, проходящая через точку кривой и перпендикулярная касательной в этой точке, называется нормалью к кривой в данной точке. Нормаль к кривой, параллельная вектору $\vec{n}$, называется главной нормалью.*

Определение 11.11.6. *Плоскость, проходящая через касательную и главную нормаль, называется соприкасающейся плоскостью.*

Найдем уравнение этой плоскости для кривой, заданной с помощью произвольной параметризации (как в теореме 11.11.1). Дифференцируя $\vec{r} = \vec{r}(t)$ как сложную функцию $\vec{r} = r(s),\ s = s(t)$, получим из (11.11.4)

$$\vec{r}' = \frac{d\vec{r}}{ds}\, s' = s'\, \vec{t},$$

$$\vec{r}'' = (s')^2 \frac{d\vec{t}}{ds} + s''\vec{t} = (s')^2 k\, \vec{n} + s''\vec{t}. \tag{11.11.7}$$

Отсюда следует, что векторы $\vec{r}'$ и $\vec{r}''$ также параллельны соприкасающейся плоскости и при $k \neq 0$ произведение $\vec{r}' \times \vec{r}'' \neq 0$. Поэтому $\vec{r}'$ и $\vec{r}''$ не колинеарны. Обозначая $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$, $\vec{r}_0' = \vec{r}'(t_0)$, $\vec{r}_0'' = \vec{r}''(t_0)$, а $\vec{r}$ — текущий вектор соприкасающейся плоскости, имеем уравнение

$$((\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{r}_0')\vec{r}_0'' = 0.$$

Расписывая данное смешанное произведение покоординатно, получим

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_0' & y_0' & z_0' \\ x_0'' & y_0'' & z_0'' \end{vmatrix} = 0. \tag{11.11.8}$$

Это и есть уравнение соприкасающейся плоскости.

Определение 11.11.7. *Точка в пространстве, лежащая на главной нормали, проведенной в данной точке к кривой, и находящаяся от этой точки кривой на расстоянии R в направлении вектора главной нормали $\vec{n}$, называется центром кривизны кривой в указанной ее точке.*

Таким образом, если $\vec{\rho}$ — радиус–вектор центра кривизны, а $\vec{r}$, как обычно, радиус–вектор данной точки кривой, то

$$\vec{\rho} = \vec{r} + R\,\vec{n}$$

или

$$\vec{\rho} = \vec{r} + \frac{1}{k^2} \cdot \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}. \tag{11.11.9}$$

Нетрудно также получить выражение для $\vec{\rho}$ через произвольную параметризацию кривой. Эту формулу можно также рассматривать как представление некоторой кривой, точками которой являются центры кривизны данной кривой. Эта кривая называется *эволютой* данной кривой.

Все сказанное, конечно, справедливо и для плоских кривых. Нужно только заметить, что если кривая лежит на плоскости, то касательный вектор $\vec{t}$ и вектор главной нормали лежат в той же плоскости. Запишем некоторые формулы для случая плоской кривой γ с параметризацией $\vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t)),\ t \in [a, b]$.

Из формулы (11.11.6) получаем

$$k = \frac{1}{R} = \frac{|x'y'' - y'x''|}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}.$$

Обозначая через (ξ, η) центр кривизны, из (11.11.9) имеем

$$\xi = x + R^2 \frac{d^2x}{ds^2}, \quad \eta = y + R^2 \frac{d^2y}{ds^2}.$$

Вычисляя производные по s через производные по t, получаем

$$\xi = x - y' \frac{(x')^2 + (y')^2}{x'y'' - y'x''}, \quad \eta = y + x \frac{(x')^2 + (y')^2}{x'y'' - y'x''}. \tag{11.11.10}$$

В случае, когда кривая является графиком функции $y = y(x)$, из формул (11.11.9) и (11.11.10) имеем

$$k = \frac{|y''|}{(1 + (y')^2)^{3/2}}, \tag{11.11.11}$$

$$\xi = x - y' \frac{1 + (y')^2}{y''}, \quad \eta = y + \frac{1 + (y')^2}{y''}. \tag{11.11.12}$$

Пример 11.11.2. Найти кривизну и эволюту параболы $y = ax^2$, $a > 0$ (рис. 11.11.1).

Решение. Из формулы (11.11.11) имеем

$$k = \frac{2a}{(1 + 4a^2x^2)^{3/2}},$$

а формула (11.11.12) дает

$$\xi = -4a^2x^3, \quad \eta = \frac{6a^2x^2 + 1}{2a}.$$

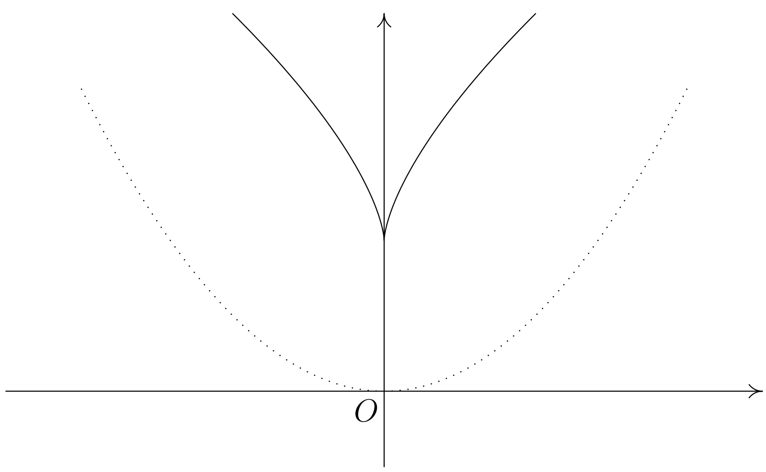

Рис 11.11.1. Эволюта и эвольвента

Эта кривая является полукубической параболой.

Определение 11.11.8. *Если γ — плоская кривая с эволютой γ_1, то сама кривая γ по отношению к своей эволюте называется эвольвентой.*

Отметим следующие свойства эволюты и эвольвенты:

1) нормаль к эвольвенте является касательной к эволюте;

2) приращение длины дуги эволюты равно приращению радиуса кривизны эвольвенты.

Эти свойства имеют изящную механическую интерпретацию. Представим себе, что на кривую γ_1 от точки P_0 до точки P натянута гибкая нерастяжимая нить, закрепленная в точке P_0. Если сматывать ее с кривой γ_1, то ее конец опишет кривую γ.

Таким образом, эвольвента кривой γ_1 получается как бы развертыванием данной кривой, поэтому эвольвенту кривой называют также ее *разверткой.*

11.12. Линейные пространства

Понятие n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$, данное в §11.9, начиналось с n-мерного вектора как упорядоченной системы n вещественных чисел. Примерами векторов служат направленные отрезки на плоскости или в трехмерном пространстве. Однако не обязательно задавать векторы их координатами, так как операции над векторами определяются геометрически. Целесообразно и в общем случае дать "бескоординатное" определение векторов. Сейчас оно будет дано аксиоматически: в нем ничего не будет сказано о свойствах отдельного вектора, но будут перечислены свойства, которыми должны обладать операции над векторами. Также совсем не обязательно рассматривать конечно мерные пространства.

Пусть дано непустое множество V. Его элементы будем обозначать малыми латинскими буквами $a, b, c, \ldots$. Пусть в этом множестве V определены операция *сложения,* ставящая в соответствие каждой паре элементов a, b, однозначно определенный элемент $a + b$, называемый их *суммой,* и операция *умножения на число,* ставящее в соответствие числу α и элементу $a \in V$ элемент $\alpha a \in V$, называемый *произведением элемента a на число α.*

Определение 11.12.1. *Элементы множества V называются векторами, а само множество V — линейным (или векторным, или аффинным) пространством, если указанные операции обладают следующими свойствами:*

1) сложение коммутативно, $a + b = b + a$ для любых векторов $a, b \in V$;

2) сложение ассоциативно, $(a+b)+c = a+(b+c)$ для любых элементов $a, b, c \in V$;

3) в V существует нулевой элемент 0, удовлетворяющий условию $a+0 = 0+a = a$ для любого $a \in V$;

4) для всякого элемента $a \in V$ существует противоположный элемент $-a \in V$, удовлетворяющий условию $a + (-a) = (-a) + a = 0$;

5) для любых векторов $a, b \in V$ и любых чисел α, β имеют место свойства $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$;

6) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$;

7) $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$;

8) $1 \cdot a = a$.

Если в качестве множества чисел берется множество всех вещественных чисел, то V называется вещественным (действительным) линейным пространством.

Если в качестве множества чисел рассматривается множество всех комплексных чисел, то V называется комплексным линейным пространством.

Можно определять линейные пространства над другими числовыми множествами (например, рациональными числами).

Как правило, будем иметь дело с вещественными линейными пространствами, но все дальнейшие рассуждения справедливы и для комплексных линейных пространств.

Примером вещественного линейного пространства является пространство $\mathbb{R}^n$. Его размерность конечна и равна n.

Пример 11.12.1. Рассмотрим бесконечномерное пространство V. В качестве элементов a этого пространства возьмем всевозможные последовательности вещественных чисел

$$a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots).$$

Операции над последовательностями будем производить покомпонентно: если

$$b = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots),$$

то

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n, \ldots),$$

а

$$\gamma a = (\gamma\alpha_1, \gamma\alpha_2, \ldots, \gamma\alpha_n, \ldots).$$

Очевидно, что введенные таким образом операции превращают V в векторное пространство (выполнены все аксиомы 1)–8)).

Это пространство бесконечномерно, так как в нем можно указать бесконечную систему векторов, любая конечная подсистема которой линейно независима. Например,

$$\begin{aligned}
e_1 &= (1, 0, \ldots, 0, \ldots),\\
e_2 &= (0, 1, \ldots, 0, \ldots),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
e_n &= (0, 0, \ldots, 1, \ldots),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Из аксиом 1)–8) нетрудно вывести следующие свойства: единственность нулевого элемента, единственность противоположного элемента, существование и единственность разности двух векторов a и b и т.д.

Определим важное понятие изоморфизма двух линейных пространств V и V'.

Определение 11.12.2. *Два действительных линейных пространства V и V' называются изоморфными, если между ними установлено взаимно однозначное соответствие — всякому вектору $a \in V$ сопоставлен однозначно вектор $a' \in V'$, причем разным векторам из V соответствуют разные векторы из V', и всякий вектор из V' служит образом некоторого вектора из V. И это соответствие обладает следующими свойствами: образом суммы двух векторов служит сумма образов*

$$(a + b)' = a' + b',$$

а образом произведения вектора на число служит произведение образа этого вектора на то же число

$$(\alpha a)' = \alpha a'.$$

Понятия линейной комбинации векторов, линейной зависимости и линейной независимости системы векторов дословно переносятся со случая $\mathbb{R}^n$ (см. §11.9) на общий случай.

Отметим следующее свойство: если линейные пространства V и V' изоморфны, то система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_m$ из V линейно зависима тогда и только тогда, когда линейно зависима система их образов $a_1', a_2', \ldots, a_n'$.

Определение 11.12.3. *Если в линейном пространстве нет максимальной линейно независимой системы векторов, тогда пространство V называется бесконечномерным.*

Определение 11.12.4. *Если в V существует максимальная линейно независимая система векторов, то такое пространство называется конечномерным, размерностью пространства называется число векторов в этой максимально линейно независимой системе, а сама такая система называется базисом (или базой) пространства V.*

В дальнейшем в этом параграфе будем рассматривать конечномерные пространства, для изучения бесконечномерных пространств обычно привлекаются средства анализа (сходимость последовательностей элементов, топология этих пространств) (см. параграф ниже).

Пусть линейное пространство V имеет базу $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Тогда любой вектор $a \in V$ является линейной комбинацией векторов базы, т.е.

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n \tag{11.12.1}$$

для некоторых вещественных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

В силу линейной независимости векторов базы, разложение (11.12.1) — однозначно.

Поставим в соответствие каждому вектору $a \in V$ элемент пространства $\mathbb{R}^n$, определяемый разложением (11.12.1), т.е.

$$a \to (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Нетрудно показать, что это соответствие определяет изоморфизм пространств V и $\mathbb{R}^n$. Тогда свойства пространства $\mathbb{R}^n$ переносятся на V. Сформулируем их.

Теорема 11.12.1. *Все базы конечномерного пространства V состоят из одинакового числа векторов, обозначим его n. Всякая система из $n+1$ вектора в V линейно зависима. Всякая линейно независимая система векторов из V может быть дополнена до некоторой базы этого пространства.*

Посмотрим сейчас, как связаны между собой различные базы пространства V. Пусть заданы две базы в V:

$$e_1, e_2, \ldots, e_n \tag{11.12.2}$$

и

$$e_1', e_2', \ldots, e_n'. \tag{11.12.3}$$

Каждый вектор базы (11.12.3) однозначно разлагается по элементам (11.12.2):

$$e_i' = \sum_{j=1}^{n} \tau_{ij} e_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Квадратная матрица

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix},$$

строками которой служат коэффициенты разложения элементов базы (11.12.3) через базу (11.12.2), называется *матрицей перехода* от базы (11.12.2) к базе (11.12.3).

Связь между базами можно записать в матричной форме

$$e' = Te,$$

где e (соответственно, e') — вектор–столбец, составленный из элементов базы (11.12.2) (соответственно, из элементов базы (11.12.3)).

С другой стороны, можно написать матрицу перехода от базы (11.12.3) к базе (11.12.2):

$$e = T'e'.$$

Тогда получим

$$e = (T'T)e$$

и

$$e' = (TT')e'.$$

Отсюда (в силу линейной независимости элементов базы) имеем

$$TT' = T'T = E,$$

где E, как обычно, единичная матрица.

Таким образом,

$$T' = T^{-1},$$

следовательно, матрица перехода невырождена.

Нетрудно показать и обратное: всякая невырожденная матрица задает матрицу перехода от базиса (11.12.2) к новой системе векторов, которая также является базисом.

Рассмотрим базы (11.12.2) и (11.12.3), тогда произвольный вектор $a \in V$ разлагается по элементам этих баз. Найдем связь между его разложениями в разных базах. Пусть

$$a = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$$

и

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i e'_i.$$

Подставляя вместо e'_i его разложение через базу (11.12.2), получим матричное равенство

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n)T.$$

Таким образом, справедливо свойство: строка координат вектора a в базе (11.12.2) равна строке координат этого вектора в базе (11.12.3), умноженного справа на матрицу перехода T.

11.13. Линейные преобразования

Пусть задано *преобразование* φ линейного пространства V, т.е. отображение, переводящее каждый вектор a из V в некоторый вектор a' этого же пространства:

$$\varphi : V \to V.$$

Образ вектора a при отображении φ будем обозначать не как обычно $\varphi(a)$ или φa, а через $a\varphi$.

Определение 11.13.1. *Преобразование φ называется линейным, если*

$$(a+b)\varphi = a\varphi + b\varphi, \quad a, b \in V$$

и

$$(\alpha a)\varphi = \alpha(a\varphi), \quad \alpha \in \mathbb{R},\ a \in V.$$

Из определения сразу получаем, что линейное преобразование переводит линейную комбинацию векторов в линейную комбинацию их образов с теми же числовыми коэффициентами.

Теорема 11.13.1. *Для любого линейного преобразования φ нулевой вектор остается неподвижным, т.е.*

$$0\varphi = 0,$$

а образом противоположного вектора a служит вектор, противоположный образу, т.е.

$$(-a)\varphi = -(a\varphi).$$

Тождественное преобразование ε определяется так:

$$a\varepsilon = a, \quad a \in V.$$

Нулевое преобразование ω есть следующее:

$$a\omega = 0, \quad a \in V.$$

Посмотрим, как можно представить произвольное линейное преобразование в некотором базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ конечномерного действительного линейного пространства V_n.

Так как всякий вектор a однозначно представим в виде линейной комбинации базисных векторов, то, в силу свойств линейного преобразования, образ вектора a с теми же коэффициентами выражается через образы базисных векторов. Иными словами, всякое линейное преобразование φ однозначно определяется заданием образов $e_1\varphi, e_2\varphi, \ldots, e_n\varphi$ базисных векторов.

Теорема 11.13.2. *Какова бы ни была упорядоченная система векторов*

$$c_1, c_2, \ldots, c_n$$

в пространстве V_n, существует и притом единственное линейное преобразование φ, такое, что

$$e_i\varphi = c_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Доказательство. Это преобразование φ строится очень просто: если вектор

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i,$$

то
$$a\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i.$$

Нетрудно показать единственность этого преобразования и его линейность. □

Всякий вектор c_i обладает определенным разложением по базисным векторам
$$c_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$
Из координат векторов c_i можно составить матрицу
$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}. \tag{11.13.1}$$

Так как система векторов $c_1, c_2, \ldots, c_n$ была произвольной, то и матрица A будет произвольной.

Итак, из теоремы 11.13.2 получаем, что между квадратными матрицами порядка n и линейными преобразованиями пространства V_n существует взаимно однозначное соответствие.

Определение 11.13.2. *Будем говорить, что матрица A вида (11.13.1) является матрицей линейного преобразования φ в базе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.*

Матрица нулевого преобразования ω есть нулевая матрица O в любом базисе. Матрица тождественного преобразования ε есть единичная матрица E в любом базисе.

Если через e обозначить вектор–столбец из базисных векторов, а через $e\varphi$ — вектор–столбец из их образов, то имеем матричное равенство
$$e\varphi = Ae. \tag{11.13.2}$$

Пусть вектор a имеет следующее разложение по базисным векторам:
$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i,$$
тогда его образ примет вид
$$a\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (e_i \varphi).$$
Используя (11.13.2), получим
$$a\varphi = [(\alpha_1, \alpha_2, \ldots . \alpha_n) A]\, e.$$
Таким образом, строка координат вектора $a\varphi$ равна строке координат вектора a, умноженной справа на матрицу A линейного преобразования φ.

Посмотрим, как связаны матрицы линейного преобразования в разных базах. Пусть даны две базы e и e' с матрицей перехода T:
$$e' = Te, \tag{11.13.3}$$
а линейное преобразование φ задается в этих базах матрицами A и A', т.е.
$$e\varphi = Ae, \quad e'\varphi = A'e'.$$

Подставляя (11.13.3) во второе из этих равенств, получим

$$(Te)\varphi = A'(Te).$$

С другой стороны,

$$(Te)\varphi = T(e\varphi),$$

поэтому

$$(Te)\varphi = T(e\varphi) = T(Ae) = (TA)e,$$
$$A'(Te) = (A'T)e.$$

Сравнивая последние равенства и используя свойство единственности разложения по базе, получаем

$$TA = A'T,$$

отсюда

$$A' = TAT^{-1}, \quad A = T^{-1}A'T.$$

Определение 11.13.3. *Квадратные матрицы B и C одного порядка называются подобными, если они связаны равенством*

$$C = Q^{-1}BQ,$$

где Q — некоторая невырожденная матрица.

Нами доказано утверждение.

Теорема 11.13.3. *Матрицы, задающие одно и то же линейное преобразование в разных базах, подобны между собой.*

Зафиксируем в пространстве V_n некоторую базу e. Нами было получено взаимно однозначное соответствие между линейными преобразованиями и квадратными матрицами. Посмотрим, как связаны операции над матрицами и над линейными преобразованиями.

Пусть заданы два линейных преобразования φ и ψ. Назовем *суммой* этих преобразований преобразование $\varphi + \psi$, определяемое следующим образом:

$$a(\varphi + \psi) = a\varphi + a\psi, \quad a \in V_n.$$

Очевидно, что $\varphi + \psi$ — линейное преобразование.

Назовем *произведением линейных преобразований* преобразование $\varphi\psi$:

$$a(\varphi\psi) = (a\varphi)\psi.$$

Таким образом, произведение — это композиция отображений φ и ψ. Оно также является линейным преобразованием.

Наконец, назовем *произведением линейного преобразования φ на число λ* линейное преобразование $\lambda\varphi$ следующего вида:

$$a(\lambda\varphi) = \lambda(a\varphi), \quad a \in V_n.$$

Нетрудно понять, что оно также линейно.

Теорема 11.13.4. *Матрица суммы линейных преобразований равна сумме матриц этих преобразований. Матрица произведения линейных преобразований равна произведению матриц данных преобразований. Матрица произведения линейного преобразования на число равна матрице этого преобразования, умноженной на данное число.*

11.14. Собственные числа и собственные значения

11.14.1. Линейные подпространства. Подмножество L векторов из линейного пространства V называется *линейным подпространством* этого пространства, если оно само является линейным пространством относительно операций, введенных в V.

Для того чтобы L было линейным подпространством V, достаточно выполнения следующих условий:

1) если векторы a и b лежат в L, то их сумма $a+b$ также лежит в L;

2) если вектор a принадлежит L, то для любого числа α вектор αa принадлежит L.

Примерами линейных подпространств служат: само пространство V, *нулевое подпространство,* т.е. подмножество, состоящее из одного нулевого элемента.

Более интересен следующий пример: берем в V произвольную конечную систему векторов

$$a_1, a_2, \ldots, a_k \tag{11.14.1}$$

и обозначаем через L всевозможные линейные комбинации этих векторов. Тогда L — подпространство V. В этом случае говорят, что L *порождено* системой (11.14.1).

Размерность этого подпространства равна числу линейно независимых векторов системы (11.14.1), в частности, оно конечномерно.

В конечномерном пространстве V любое его подпространство конечномерно, т.е. порождено конечной системой векторов вида (11.14.1). Причем для любого числа k, меньшего размерности пространства, найдется подпространство L размерности k. Для этого достаточно рассмотреть подпространство, порожденное k линейно независимыми векторами.

Пусть в V заданы два подпространства L_1 и L_2. Тогда их пересечение $L_1 \cap L_2$ само образует подпространство. Для объединения это, вообще говоря, не так. Вместо объединения обычно рассматривают *сумму* подпространств $L_1 + L_2$.

По определению, *сумма* подпространств $L_1 + L_2$ состоит из всех векторов вида

$$a+b, \quad a \in L_1,\ b \in L_2.$$

Что можно сказать о размерности этих подпространств?

Теорема 11.14.1. *Пусть L_1 и L_2 — конечномерные подпространства V размерности, соответственно, d_1 и d_2. Тогда подпространства $L_1 \cap L_2$ и $L_1 + L_2$ также конечномерны размерностей d' и d'' соответственно, причем выполнено равенство*

$$d' + d'' = d_1 + d_2.$$

Доказательство. Берем произвольную базу пространства $L_1 \cap L_2$:

$$a_1, a_2, \ldots, a_{d'},$$

дополняем ее до баз подпространств L_1

$$a_1, a_2, \ldots, a_{d'}, b_{d'+1}, \ldots, b_{d_1}$$

и L_2

$$a_1, a_2, \ldots, a_{d'}, c_{d'+1}, \ldots, c_{d_2} \tag{11.14.2}$$

соответственно.

Тогда подпространство $L_1 + L_2$ порождается системой векторов

$$a_1, a_2, \ldots, a_{d'}, b_{d'+1}, \ldots, b_{d_1}, c_{d'+1}, \ldots, c_{d_2}. \tag{11.14.3}$$

Число векторов в системе (11.14.3) равно $d_1 + d_2 - d'$, и теорема будет доказана, если показать, что они — линейно независимы. Пусть имеет место равенство

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_1 a_2 + \ldots + \alpha_{d'} a_{d'} + \beta_{d'+1} b_{d'+1} + \ldots +$$

$$+\beta_{d_1} b_{d_1} + \gamma_{d'+1} c_{d'+1} + \ldots + \gamma_{d_2} c_{d_2} = 0.$$

Отсюда

$$d = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_{d'} a_{d'} + \beta_{d'+1} b_{d'+1} + \ldots + \beta_{d_1} b_{d_1} =$$

$$= -\gamma_{d'+1} c_{d'+1} - \ldots - \gamma_{d_2} c_{d_2}. \qquad (11.14.4)$$

Левая часть этого равенства содержится в L_1, правая часть — в L_2. Поэтому вектор d принадлежит $L_1 \cap L_2$ и, следовательно, линейно выражается через базы этого подпространства. Но равенство (11.14.4) показывает, что d есть линейная комбинация векторов $c_{d'+1}, \ldots, c_{d_2}$. Так как система (11.14.2) линейно независима, получаем, что все коэффициенты в равенстве (11.14.4) равны нулю. Тогда и все остальные коэффициенты равны нулю, т.е. система (11.14.3) линейно независима. □

Пусть в n-мерном векторном пространстве V_n задано линейное преобразование φ. Если L — любое подпространство V_n, то множество $L\varphi$ образов всех векторов из L само образует подпространство. В частности, множество $V_n\varphi$ есть подпространство. Оно называется *областью значений* преобразования φ.

Определение 11.14.1. *Размерность области значений преобразования φ называется рангом этого преобразования.*

Можно показать, что ранг линейного преобразования совпадает с рангом матрицы этого преобразования (в любом базисе пространства V_n).

Совокупность $N(\varphi)$ векторов a из V_n, для которых $a\varphi = 0$, называется *ядром* линейного преобразования.

Очевидно, ядро является линейным подпространством.

Определение 11.14.2. *Размерность ядра линейного преобразования φ называется дефектом линейного преобразования.*

Из теоремы 11.14.1 вытекает

Следствие 11.14.1. *Сумма ранга и дефекта любого линейного преобразования равна размерности пространства V_n.*

Линейное преобразование φ называется *невырожденным,* если ранг этого преобразования равен размерности пространства.

В силу следствия 11.14.1 невырожденные преобразования характеризуются тем, что их дефект равен нулю.

Для невырожденных преобразований матрицы этих преобразований в любой базе также невырождены.

Так как невырожденное преобразование есть взаимно однозначное отображение пространства V_n на себя, то можно определить обратное отображение φ^{-1}, которое также является линейным преобразованием.

11.14.2. Характеристические и собственные значения. Рассмотрим понятия характеристических и собственных значений линейного преобразования. Начнем с матриц.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

— квадратная матрица порядка $n \times n$.

Определение 11.14.3. *Матрица вида $A - \lambda E$ называется характеристической матрицей для A. Здесь, как обычно, E — единичная матрица той же размерности, что и A.*

Характеристическую матрицу можно записать более подробно:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Определитель характеристической матрицы будет многочленом от λ степени n и со старшим членом $(-1)^n \lambda^n$. Свободный член в этом многочлене совпадает с определителем матрицы A.

Определение 11.14.4. *Многочлен $|A - \lambda E|$ называется характеристическим многочленом матрицы A, а его корни — характеристическими корнями матрицы.*

Из определения подобных матриц получаем, что подобные матрицы имеют одинаковые характеристические многочлены и, следовательно, одинаковые характеристические корни.

Если теперь φ — некоторое линейное преобразование в V_n, то, как мы знаем, матрицы этого преобразования в разных базах подобны, поэтому можно однозначно определить понятие характеристического многочлена линейного преобразования.

Определение 11.14.5. *Характеристическим многочленом линейного преобразования φ называется характеристический многочлен матрицы этого преобразования в любой базе. Его корни называются характеристическими корнями линейного преобразования.*

Набор всех характеристических корней вместе с их кратностями называют *спектром* линейного преобразования.

Понятие характеристического многочлена играет большую роль при изучении линейных преобразований. Рассмотрим одно из его применений.

Определение 11.14.6. *Пусть ненулевой вектор b обладает свойством*

$$b\varphi = \lambda_0 b$$

для некоторого действительного числа λ_0. Тогда вектор b называется собственным вектором линейного преобразования, а число λ_0 — собственным значением линейного преобразования φ.

Так как, по определению собственного вектора,

$$b\varphi - \lambda_0 b = b(\varphi - \lambda_0 \varepsilon) = 0$$

(здесь, как обычно, ε есть тождественное преобразование), то получаем, что линейное преобразование $\varphi - \lambda_0\varepsilon$ вырождено (ненулевой вектор b переводит в нулевой). Поэтому ранг данного преобразования строго меньше n. Следовательно, определитель матрицы данного преобразования равен нулю. Отсюда имеем утверждение.

Теорема 11.14.2. *Действительные корни характеристического многочлена линейного преобразования φ, и только они, служат собственными значениями линейного преобразования.*

Если бы мы рассматривали комплексное линейное пространство, то *все* корни характеристического многочлена являлись бы собственными значениями. В нашем случае необходимо рассматривать только действительные корни (которых может и не быть).

Пример 11.14.1. Показать, что матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

не имеет действительных характеристических корней.

Решение. Это следствие того, что ее характеристический многочлен равен $\lambda^2 + 1$. Следовательно, она не имеет собственных значений и собственных векторов.

Охарактеризуем линейные преобразования с *простым спектром*, это означает, что все характеристические корни такого преобразования действительны и различны.

Теорема 11.14.3. *Линейное преобразование φ задается в некоторой базе e_1, e_2, $\ldots$, e_n диагональной матрицей, если все векторы в этой базе являются собственными векторами данного преобразования.*

Теорема 11.14.4. *Собственные векторы линейного преобразования, относящиеся к различным собственным числам, образуют линейно независимую систему.*

Таким образом получаем

Следствие 11.14.2. *Для всякого линейного преобразования с простым спектром можно найти базу, в которой матрица этого преобразования будет диагональной.*

11.15. Евклидовы пространства

11.15.1. Скалярное произведение. Понятие линейного пространства далеко не в полной мере обобщает понятия плоскости и трехмерного пространства. Здесь не определены углы между векторами, длина вектора, и поэтому невозможно развитие богатой геометрической теории, которая хорошо знакома школьникам. Но это положение можно исправить следующим путем.

На плоскости и в трехмерном пространстве вводится понятие *скалярного произведения* векторов. С его помощью можно задать длину вектора и угол между векторами. Мы введем скалярное произведение векторов в линейном пространстве V аксиоматически.

Определение 11.15.1. *Говорят, что в действительном линейном пространстве V задано скалярное произведение векторов, если каждой паре векторов $a, b \in V$ поставлено в соответствие некоторое действительное число (a, b) (или $a \cdot b$), называемое скалярным произведением и обладающее следующими свойствами:*

1) $(a, b) = (b, a)$ для всех $a, b \in V$;

2) $(a+b,c)=(a,c)+(b,c)$ *для всех* $a,b,c\in V$*;*
3) $(\alpha a,b)=\alpha(a,b)$ *для всех* $a,b\in V$ *и любого действительного числа* α*;*
4) если $a\neq 0$*, то скалярный квадрат* (a,a) *строго положителен —*

$$(a,a)>0.$$

Из свойства 3) получаем, что скалярный квадрат нулевого вектора равен 0.

Определение 11.15.2. *Линейное пространство, в котором введено скалярное произведение, называется евклидовым пространством.*

В любом n-мерном линейном пространстве V_n можно ввести скалярное произведение. Действительно, пусть $e_1,e_2,\ldots,e_n$ — некоторая база в V_n. а векторы a,b имеют разложения

$$a=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i,\quad b=\sum_{i=1}^{n}\beta_i e_i.$$

Определим скалярное произведение (a,b) следующим образом:

$$(a,b)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i.$$

Легко проверить, что все свойства скалярного произведения здесь выполнены.

Поэтому скалярное произведение можно вводить разными способами, но при изучении его свойств будем исходить не из его конкретной реализации, а из аксиоматического определения.

Будем обозначать евклидово пространство через E, а n-мерное евклидово пространство через E_n.

11.15.2. Ортогональные системы элементов.

Определение 11.15.3. *Векторы* a *и* b *из* E *называются ортогональными, если их скалярное произведение равно 0:*

$$(a,b)=0.$$

Система векторов называется ортогональной, если все векторы из этой системы попарно ортогональны между собой.

Теорема 11.15.1. *Всякая ортогональная система векторов, не содержащая нулевого вектора, линейно независима.*

Доказательство. Пусть дана ортогональная система векторов $a_1,a_2,\ldots,a_k$, не содержащая нулевой вектор. Предположим, что некоторая линейная комбинация этих векторов равна 0:

$$\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\ldots+\alpha_na_n=0.$$

Умножим скалярно обе части данного равенства на вектор a_i и, в силу свойств скалярного произведения, получим

$$0=(0,a_i)=(\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\ldots+\alpha_na_n,a_i)=$$
$$=\alpha_1(a_1,a_i)+\alpha_2(a_2,a_i)+\ldots+\alpha_k(a_k,a_i)=\alpha_i(a_i,a_i).$$

Так как $(a_i,a_i)>0$, то $\alpha_i=0,\ i=1,2,\ldots,k$. □

Опишем процесс *ортогонализации Грама–Шмидта* линейно независимой системы векторов. Он заключается в следующем. Рассмотрим линейно независимую систему векторов $a_1,a_2,\ldots,a_k$. Положим $b_1=a_1$. Положим далее

$$b_2=\alpha_1b_1+a_2.$$

Вектор b_2 отличен от нуля при любом α_1. Подберем это число из условия, что вектор b_2 ортогонален вектору b_1. Имеем

$$0 = (b_1, b_2) = (b_1, \alpha_1 b_1 + a_2) = \alpha_1 (b_1, b_1) + (b_1, a_2).$$

Отсюда

$$\alpha_1 = -\frac{(b_1, a_2)}{(b_1, b_1)}.$$

Предположим, что мы уже построили ортогональную систему ненулевых векторов $b_1, b_2, \ldots, b_l$ так, что каждый вектор b_i является линейной комбинацией векторов $a_1, a_2, \ldots, a_i$. Положим

$$b_{l+1} = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_l b_l + a_{l+1}.$$

Тогда вектор b_{l+1} будет линейной комбинацией векторов $a_1, a_2, \ldots, a_{l+1}$ и $b_{l+1} \neq 0$, в силу линейной независимости первоначальной системы векторов. Нам необходимо добиться, чтобы вектор b_{l+1} был ортогонален векторам b_i, $i = 1, 2, \ldots, l$. Имеем

$$0 = (b_i, b_{l+1}) = \alpha_1 (b_i, b_1) + \ldots + \alpha_l (b_i, b_l) + (b_i, a_{l+1}) = \alpha_i (b_i, b_i) + (b_i, a_{l+1}).$$

Отсюда

$$\alpha_i = -\frac{(b_i, a_{l+1})}{(b_i, b_i)}.$$

Продолжая этот процесс, построим искомую ортогональную систему векторов b_1, b_2, $\ldots$, b_k.

Теорема 11.15.2. *Всякое конечномерное евклидово пространство имеет ортогональную базу. Причем каждый ненулевой вектор входит в какую-нибудь ортогональную базу.*

Определение 11.15.4. *Вектор a называется нормированным, если его скалярный квадрат равен 1*

$$(a, a) = 1.$$

Если вектор $a \neq 0$, то *нормированием* называется переход к вектору

$$b = \frac{1}{\sqrt{(a, a)}} a.$$

Очевидно, что вектор b — нормированный.

Определение 11.15.5. *База векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ называется ортонормированной, если она ортогональна и все вектора e_i нормированы.*

Из теоремы 11.15.2 получаем

Следствие 11.15.1. *Конечномерное евклидово пространство обладает ортонормированными базами.*

Если база $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ортонормирована, то скалярное произведение векторов в этой базе принимает простой вид: пусть

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \quad b = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i,$$

тогда

$$(a, b) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j (e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i.$$

Определение 11.15.6. *Евклидовы пространства E и E' называются изоморфными, если между векторами этих пространств можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором они изоморфны, как линейные пространства, и при этом сохраняется скалярное произведение.*

Теорема 11.15.3. *Любые конечномерные евклидовы пространства E и E', имеющие одинаковую размерность, изоморфны между собой.*

11.15.3. Неравенство Шварца.

Определение 11.15.7. *Длиной вектора a в евклидовом пространстве называется выражение*

$$|a| = \sqrt{(a, a)}.$$

Отметим следующие свойства длины:
1) $|a| \geqslant 0$, причем $|a| = 0$ тогда и только тогда, когда $a = 0$;
2) $|\alpha a| = |\alpha||a|$ для любого вектора a и любого действительного числа α;
3) выполнено *неравенство треугольника*

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|$$

для любых векторов a, b.

Чтобы доказать неравенство треугольника, мы нуждаемся в *неравенстве Шварца (Коши–Буняковского).*

Теорема 11.15.4. *Для любых векторов a, b справедливо неравенство Шварца*

$$(a, b)^2 \leqslant (a, a)\,(b, b),$$

причем это неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда векторы a и b — линейно зависимы.

Доказательство. Рассмотрим скалярный квадрат $(a + \lambda b,\ a + \lambda b)$. Имеем

$$0 \leqslant (a + \lambda b, a + \lambda b) = (a, a) + 2\lambda(a, b) + \lambda^2(b, b).$$

Таким образом, квадратный трехчлен (относительно λ)

$$\lambda^2(b, b) + 2\lambda(a, b) + (a, a)$$

является неотрицательным, поэтому его дискриминант неположителен. Расписывая этот дискриминант, получаем неравенство Шварца. Если данный квадратный трехчлен для некоторого λ_0 равен 0, то получаем

$$(a + \lambda_0 b, a + \lambda b) = 0.$$

По свойствам скалярного произведения имеем, что

$$a + \lambda_0 b = 0,$$

т.е. векторы a и b — линейно зависимы. □

Теперь уже нетрудно получить неравенство треугольника:

$$|a + b|^2 = (a + b, a + b) = (a, a) + 2(a, b) + (b, b) \leqslant\leqslant |a|^2 + 2|a|\,|b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2.$$

Неравенство Шварца позволяет определить угол φ между векторами a и b.

Определение 11.15.8. *Косинус угла φ между векторами a и b равен*

$$\cos\varphi = \frac{(a, b)}{|a|\,|b|}.$$

Скажем несколько слов о введении скалярного произведения в комплексных линейных пространствах. Определение скалярного произведения дается так же, только свойство 1) заменяется на следующее:

$$(a, b) = \overline{(b, a)},$$

где знак черты означает комплексное сопряжение.

Комплексное линейное пространство с таким скалярным произведением называется *унитарным.*

Все остальные свойства и определения, введенные в евклидовых пространствах, остаются верными и для унитарных пространств.

11.16. Ортогональные и симметрические преобразования

11.16.1. Ортогональные преобразования и ортогональные матрицы. Пусть дано следующее линейное преобразование неизвестных

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} q_{ik} y_k, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{11.16.1}$$

Матрицу этого преобразования обозначим через Q.

Определение 11.16.1. *Линейное преобразование неизвестных вида (11.16.1), обладающее свойством*

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2, \tag{11.16.2}$$

называется ортогональным преобразованием, а его матрица Q — ортогональной матрицей.

Укажем на другие определения, эквивалентные данному. Подставляя формулы (11.16.1) в тождество (11.16.2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях неизвестных y_k, получим, что

$$Q'Q = E, \tag{11.16.3}$$

где Q', как обычно, есть транспонированная матрица; E — единичная матрица.

Таким образом, для ортогональной матрицы выполнено условие (которое можно принять за определение)

$$Q^{-1} = Q'.$$

Условие (11.16.3) можно сформулировать так: у ортогональной матрицы сумма квадратов элементов любой строки равна 1, а сумма произведений соответственных элементов любых двух различных строк равна 0.

Переходя в равенстве (11.16.3) к определителям, имеем

$$|Q'Q| = |Q'|\,|Q| = |Q|^2 = 1.$$

Следовательно, определитель ортогональной матрицы равен ± 1. В частности, ортогональное преобразование не вырождено.

Матрица, обратная к ортогональной, также ортогональна, поскольку

$$(Q^{-1})' = (Q')' = Q = (Q^{-1})^{-1}.$$

Произведением ортогональных матриц служит ортогональная матрица.

Теорема 11.16.1. *Матрица перехода от ортонормированной базы евклидова пространства E_n к другой ортонормированной базе является ортогональной.*

Доказательство. Пусть в E_n заданы две ортонормированные базы $e_1, e_2, \dots, e_n$ и $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ с матрицей перехода Q:

$$e' = Qe.$$

Так как база e ортонормированная, то скалярное произведение любых двух векторов, в частности любых двух векторов из базы e', равно сумме произведений соответственных координат этих векторов в базе e. Поскольку e' также ортонормированная, то скалярный квадрат каждого вектора из e' равен 1, а скалярное произведение любых двух разных векторов равно 0. Отсюда для строк из координат векторов базы e' в базе e, а значит для строк матрицы Q, справедливы соотношения, характерные для ортогональной матрицы. □

Пусть E_n — n–мерное евклидово пространство.

Определение 11.16.2. *Линейное преобразование φ пространства E_n называется ортогональным, если оно сохраняет скалярный квадрат всякого вектора, т.е.*

$$(a\varphi, a\varphi) = (a, a), \quad a \in E_n. \tag{11.16.4}$$

Теорема 11.16.2. *Линейное преобразование φ ортогонально тогда и только тогда, когда оно сохраняет скалярное произведение любых векторов, т.е.*

$$(a\varphi, b\varphi) = (a, b), \quad a, b \in E_n.$$

Доказательство. Ввиду (11.16.4) имеем

$$((a+b)\varphi, (a+b)\varphi) = (a+b, a+b).$$

Тогда

$$\begin{aligned}((a+b)\varphi, (a+b)\varphi) &= (a\varphi + b\varphi, a\varphi + b\varphi) = \\ &= (a\varphi, a\varphi) + (a\varphi, b\varphi) + (b\varphi, a\varphi) + (b\varphi, b\varphi).\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$(a+b, a+b) = (a, a) + (a, b) + (b, a) + (b, b).$$

Используя (11.16.4) и свойства скалярного произведения, имеем требуемое:

$$(a\varphi, b\varphi) = (a, b).$$

□

Как следствие получаем, что при ортогональном преобразовании образы векторов любой ортонормированной базы сами составляют ортонормированную базу. И обратно, если линейное преобразование переводит одну ортонормированную базу в ортонормированную, то оно ортогональное.

Теорема 11.16.3. *Ортогональное преобразование евклидова пространства в любой ортонормированной базе задается ортогональной матрицей. Обратно, если линейное преобразование хотя бы в одной базе задается ортогональной матрицей, то оно ортогонально.*

Рассмотрим матрицу

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Матрица Q — ортогональна.

В унитарном пространстве, по аналогии с евклидовым, вводятся *унитарные преобразования* — это линейные преобразования, сохраняющие скалярные квадраты любых векторов.

Так же, как в евклидовом пространстве, можно показать, что унитарные преобразования в ортонормированном базисе задаются так называемыми *унитарными матрицами* Q, т.е. матрицами со свойством

$$\overline{Q}' = Q^{-1},$$

где черта означает, что элементами матрицы $\overline{Q}$ являются числа, комплексно сопряженные к элементам матрицы Q.

11.16.2. Симметрические преобразования и симметрические матрицы. Дадим определение симметрического преобразования.

Определение 11.16.3. *Линейное преобразование φ в евклидовом пространстве E называется симметрическим (или самосопряженным), если для любых векторов a и b этого пространства выполняется равенство*

$$(a\varphi, b) = (a, b\varphi). \tag{11.16.5}$$

Примерами симметрических преобразований служат, очевидно, тождественное преобразование ε и нулевое преобразование ω.

Более общим примером симметрического преобразования является преобразование φ, при котором всякий вектор умножается на фиксированное число α, т.е.

$$a\varphi = \alpha a, \quad a \in E.$$

Роль симметрических преобразований велика, и нам их надо изучить достаточно детально.

Определение 11.16.4. *Матрица $Q = (q_{ij})$, $i.j = 1, 2, \dots, n$ называется симметрической, если*

$$q_{ij} = q_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

т.е.

$$Q' = Q.$$

Теорема 11.16.4. *Симметрическое преобразование конечномерного евклидова пространства E_n в любом ортонормированном базисе задается симметрической матрицей. И обратно, если линейное преобразование хотя бы в одном ортонормированном базисе задается симметрической матрицей, то оно является симметрическим.*

Доказательство. Пусть симметрическое преобразование φ задается в ортонормированном базисе e матрицей $A = (\alpha_{ij})$. Тогда имеем:

$$(e_i\varphi, e_j) = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} e_k, e_j\right) = \alpha_{ij},$$

$$(e_i, e_j\varphi) = \left(e_i, \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} e_k\right) = \alpha_{ji}.$$

Ввиду (11.16.5) получаем, что $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для всех $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Обратно, пусть линейное преобразование φ задается в ортонормированном базисе e симметрической матрицей $A = (\alpha_{ij})$. Если

$$b = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i, \quad c = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j e_j,$$

то

$$b\varphi = \sum_{i=1}^{n} \beta_i (e_i \varphi) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_{ij} \right) e_j,$$

$$c\varphi = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j (e_j \varphi) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j \alpha_{ji} \right) e_i.$$

Используя ортонормированность базиса e, получаем:

$$(b\varphi, c) = \sum_{j,i=1}^{n} \beta_i \alpha_{ij} \gamma_j,$$

$$(b, c\varphi) = \sum_{i,j=1}^{n} \beta_i \gamma_j \alpha_{ji}.$$

Симметричность матрицы A дает требуемое

$$(b\varphi, c) = (b, c\varphi).$$

□

Как следствие получаем, что сумма симметрических преобразований, а также их произведение являются симметрическими преобразованиями.

Теорема 11.16.5. *Все характеристические корни симметрического преобразования конечномерного евклидова пространства действительны.*

Доказательство. В силу теоремы 11.16.4 нам достаточно доказать, что все характеристические корни симметрической матрицы $A = (\alpha_{ij})$ действительны.

Пусть λ_0 — корень (возможно комплексный) характеристического уравнения

$$|A - \lambda E| = 0.$$

Тогда система линейных однородных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = \lambda_0 x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

имеет нулевой определитель, т.е. обладает ненулевым решением $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, вообще говоря, комплексным. Таким образом,

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \beta_j = \lambda_0 \beta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Умножая обе части i-го равенства на $\overline{\beta}_i$ и складывая эти равенства, получим

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \beta_j \overline{\beta}_i = \lambda_0 \sum_{i=1}^{n} \beta_i \overline{\beta}_i.$$

Коэффициент при λ_0 в этом равенстве является положительным числом. Покажем, что и в левой части данного равенства стоит действительное число. Имеем

$$\overline{\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \beta_j \overline{\beta}_i} = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{\alpha_{ij} \beta_j \overline{\beta}_i} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \overline{\beta}_j \beta_i = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ji} \overline{\beta}_j \beta_i = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \beta_j \overline{\beta}_i,$$

поэтому λ_0 — действительно. $\square$

Следствие 11.16.1. *Если φ — симметрическое преобразование конечномерного евклидова пространства, то в этом пространстве существует ортонормированная база, состоящая из собственных векторов данного преобразования.*

Таким образом, в этой базе матрица симметрического преобразования диагональна.

11.17. Квадратичные формы

11.17.1. Квадратичные формы и их ранг. Дадим определение квадратичной формы.

Определение 11.17.1. *Квадратичной формой f от n неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется сумма, каждый член которой является или квадратом одного из неизвестных, или произведением двух разных неизвестных, умноженным на некоторый коэффициент.*

Квадратичная форма называется *действительной* или *комплексной* в зависимости от того, являются ли ее коэффициенты действительными или комплексными.

Введем обозначения для коэффициентов формы: коэффициент при x_i^2 обозначим через a_{ii}, а коэффициент при $x_i x_j$ — через $2a_{ij}$, предполагая, что $x_i x_j = x_j x_i$ и $a_{ij} = a_{ji}$. Тогда имеем

$$f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j. \tag{11.17.1}$$

Из коэффициентов квадратичной формы можно составить матрицу $A = (a_{ij})$, которая называется *матрицей квадратичной формы f* и является симметрической.

Определение 11.17.2. *Рангом квадратичной формы называется ранг матрицы квадратичной формы. Если матрица невырожденная, то квадратичная форма f называется невырожденной.*

Квадратичную форму f вида (11.17.1) можно записать по-другому. Обозначим через X вектор-столбец, составленный из неизвестных:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

X является матрицей, имеющей n строк и 1 столбец. Транспонируя ее, получим матрицу

$$X' = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

составленную из одной строки. Тогда квадратичная форма f может быть записана в виде

$$f = X'AX. \tag{11.17.2}$$

Подвергнем неизвестные, входящие в квадратичную форму, линейному преобразованию с матрицей $Q = (q_{ik})$, т.е.

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} q_{ik} y_k, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Данное преобразование можно записать в матричной форме

$$X = QY, \tag{11.17.3}$$

если через Y обозначить вектор-столбец из неизвестных $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Подставляя (11.17.3) в (11.17.2), получим

$$f = Y'(Q'AQ)Y = Y'BY,$$

где

$$B = Q'AQ.$$

Таким образом, доказана теорема.

Теорема 11.17.1. *Квадратичная форма от n неизвестных, имеющая матрицу A, после выполнения линейного преобразования неизвестных с матрицей Q превращается в квадратичную форму от новых неизвестных, причем матрицей этой формы служит произведение $Q'AQ$.*

Если выполняется невырожденное преобразование, то матрица Q — невырождена, поэтому ранг квадратичной формы f после выполнения невырожденного преобразования не меняется.

11.17.2. Приведение к каноническому виду. Займемся задачей о приведении квадратичной формы f линейным преобразованием к сумме квадратов новых неизвестных, т.е. к виду, когда коэффициенты при произведениях различных неизвестных становятся равными 0. Такой вид квадратичной формы называется *каноническим.*

Предположим, что квадратичная форма f уже приведена невырожденным линейным преобразованием к виду

$$f = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \ldots + b_n y_n^2, \tag{11.17.4}$$

где $y_1, y_2, \dots, y_n$ — новые неизвестные. Некоторые из коэффициентов b_i могут равняться нулю. Заметим, что число коэффициентов b_i, отличных от нуля, равно рангу квадратичной формы и, следовательно, не зависит от способа выбора линейного преобразования.

Теорема 11.17.2. *Всякая квадратичная форма f может быть приведена некоторым невырожденным линейным преобразованием к каноническому виду (11.17.4). Если при этом рассматривалась действительная квадратичная форма, то данное линейное преобразование можно выбрать с действительными коэффициентами.*

Доказательство. Эта теорема, очевидно, верна для квадратичных форм от одного неизвестного, так как всякая такая форма имеет вид

$$a_{11} x_1^2,$$

являющийся каноническим. Следовательно, можно вести доказательство индукцией по числу неизвестных. Будем доказывать теорему для квадратичных форм от n неизвестных, предполагая ее уже доказанной для квадратичных форм от меньшего числа неизвестных.

Пусть дана квадратичная форма

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

Найдем невырожденное линейное преобразование, которое выделило бы из f квадрат одного из неизвестных. Этой цели легко достичь, если среди коэффициентов $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ есть отличные от нуля.

Пусть, например, $a_{11} \neq 0$. Тогда, как легко проверить, выражение

$$\frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2$$

будет квадратичной формой, содержащей такие же члены с неизвестным x_1, как и наша форма f. А разность

$$f - \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 = g$$

является квадратичной формой, содержащей лишь неизвестные $x_2, x_3, \ldots, x_n$. Отсюда

$$f = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 + g.$$

Если мы введем обозначения

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \quad y_i = x_i,\ i = 2, 3, \ldots, n,$$

то получим

$$f = \frac{1}{a_{11}}y_1^2 + g,$$

где g — квадратичная форма от неизвестных $y_2, y_3, \ldots, y_n$. Данное выражение является искомым, поскольку оно получено из формы f невырожденным преобразованием неизвестных.

Если же все коэффициенты $a_{ii} = 0$, то предварительно нужно совершить вспомогательное линейное преобразование, приводящее к появлению в нашей форме квадратов переменных. Например, если $a_{12} \neq 0$, то можно совершить невырожденное преобразование

$$x_1 = z_1 - z_2,\ x_2 = z_1 + z_2,\ x_i = z_i,\ i = 3, 4, \ldots, n.$$

Таким образом, шаг индукции сделан, и теорема доказана. □

Метод доказательства данной теоремы носит название *метода Лагранжа выделения полного квадрата.* Этот метод вполне конструктивен.

Пример 11.17.1. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$f = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_3x_1.$$

Решение. Из-за отсутствия квадратов сделаем линейное преобразование

$$x_1 = y_1 - y_2,\ x_2 = y_1 + y_2,\ x_3 = y_3,$$

после чего получим

$$f = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 - 8y_2y_3.$$

Выделяем квадрат от одного неизвестного, полагая

$$z_1 = 2y_1 - 2y_3,\ z_2 = y_2,\ z_3 = y_3.$$

Имеем

$$f = \frac{1}{2}z_1^2 - 2z_2^2 - 2z_3^2 - 8z_3z_3.$$

Применим этот способ еще раз, выполняя преобразование

$$t_1 = z_1,\ t_2 = -2z_2 - 4z_3,\ t_3 = z_3.$$

Получаем

$$f = \frac{1}{2}t_1^2 - \frac{1}{2}t_2^2 + 6t_3^2.$$

Взяв теперь произведение всех этих линейных преобразований, имеем

$$x_1 = \frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2 + 3t_3,\ x_2 = \frac{1}{2}t_1 - \frac{1}{2}t_2 - t_3,\ x_3 = t_3.$$

Канонический вид, к которому приводится квадратичная форма, конечно, не является однозначным. Мы уже отмечали, что число квадратов переменных в каноническом виде (11.17.4), отличных от нуля, равно рангу этой формы и, следовательно, не зависит от способа приведения формы к сумме квадратов.

11.17.3. Приведение к нормальному виду. Для комплексных квадратичных форм ничего больше сказать нельзя, поскольку невырожденным преобразованием можно ее привести к *нормальному виду,* т.е. к виду

$$f = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_r^2, \tag{11.17.5}$$

где r — ранг квадратичной формы.

Положение становится более сложным в действительном случае, если допускать преобразования лишь с действительными коэффициентами. Уже не всякую квадратичную форму можно привести к виду (11.17.5), так как это могло бы потребовать извлечения квадратного корня из отрицательного числа.

Определение 11.17.3. *Назовем нормальным видом действительной квадратичной формы сумму квадратов нескольких неизвестных с коэффициентами* $+1$ *или* -1.

Теорема 11.17.2 показывает, что всякую действительную квадратичную форму невырожденным действительным линейным преобразованием можно привести к нормальному виду.

Теорема 11.17.3 (закон инерции квадратичных форм). *Число положительных и число отрицательных квадратов в нормальном виде действительной квадратичной формы не зависит от способа приведения ее к этому виду.*

Определение 11.17.4. *Число положительных квадратов в нормальном виде действительной квадратичной формы называется положительным индексом инерции этой формы, число отрицательных квадратов — отрицательным индексом инерции, а разность между ними — сигнатурой квадратичной формы.*

Следствие 11.17.1. *Две действительных квадратичных формы от* n *неизвестных тогда и только тогда переводятся друг в друга невырожденным действительным линейным преобразованием, когда эти формы имеют одинаковые ранги и одинаковые сигнатуры.*

11.17.4. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра. Дадим следующее определение.

Определение 11.17.5. *Квадратичная действительная форма* f *от* n *неизвестных называется положительно определенной, если она приводится к нормальному виду, состоящему из* n *положительных квадратов, другими словами, ее ранг и положительный индекс инерции равны числу неизвестных.*

Теорема 11.17.4. *Действительная квадратичная форма f положительно определена тогда и только тогда, когда для любых действительных значений неизвестных, хотя бы одно из которых отлично от 0, ее значение положительно.*

Эта теорема, по сути, не дает критерия того, является ли данная форма положительно определенной. Дадим такой критерий.

Рассмотрим квадратную матрицу A вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение 11.17.6. *Выражения*

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots,$$

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называются главными минорами матрицы A.

Теорема 11.17.5 (критерий Сильвестра)**.** *Квадратичная действительная форма f от n неизвестных положительно определена тогда и только тогда, когда все главные миноры матрицы этой квадратичной формы положительны.*

Доказательство. При $n = 1$ теорема верна, так как форма в этом случае имеет вид ax_1^2 и ее положительная определенность эквивалентна положительности коэффициента a. Далее теорему будем доказывать индукцией по числу переменных. Предположим, что для квадратичных форм от $n-1$ неизвестных теорема доказана. Докажем ее для форм от n неизвестных.

Сделаем следующее замечание.

Если квадратичная форма f с матрицей A подвергается невырожденному линейному преобразованию с действительной матрицей Q, то знак определителя формы (т.е. знак определителя матрицы A) не меняется.

Действительно, после преобразования получаем квадратичную форму с матрицей $Q'AQ$, поэтому

$$|Q'AQ| = |Q'|\,|A|\,|Q| = |Q|^2|A|,$$

т.е. определитель A умножается на положительное число.

Пусть дана квадратичная форма

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j.$$

Ее можно записать в виде

$$f = g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}x_ix_n + a_{nn}x_n^2,$$

где g есть квадратичная форма от $n-1$ неизвестного $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$. Главные миноры формы g, очевидно, совпадают с главными минорами формы f, кроме последнего.

Пусть форма f положительно определена. Форма g также будет положительно определенной, так как она получается из f подстановкой $x_n = 0$. Поэтому по индуктивному предположению все главные миноры формы g положительны, так что и все главные миноры формы f, кроме последнего, также положительны. Положительность последнего минора Δ_n формы f вытекает из следующего соображения: форма f невырожденным преобразованием приводится к нормальному виду, состоящему из n положительных квадратов. Тогда определитель полученной формы положителен. Следовательно, положителен и определитель формы f, т.е. $\Delta_n > 0$.

Пусть теперь строго положительны все главные миноры формы f. Отсюда вытекает, что все главные миноры формы g также положительны, и по индуктивному предположению она положительно определена. Поэтому существует невырожденное преобразование неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, которое приводит форму g к сумме $n-1$ положительного квадрата от новых неизвестных $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$. Дополним это преобразование до преобразования n неизвестных, полагая $x_n = y_n$. Тогда форма f примет вид

$$f = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} b_{in} y_i y_n + b_{nn} y_n^2.$$

Так как

$$y_i^2 + 2b_{in} y_i y_n = (y_i + b_{in} y_n)^2 - b_{in}^2 y_n^2,$$

то невырожденное преобразование

$$z_i = y_i + b_{in} y_n, \ i = 1, 2, \ldots, n-1, \ z_n = y_n,$$

приводит форму f к каноническому виду

$$f = \sum_{i=1}^{n-1} z_i^2 + c z_n^2. \tag{11.17.6}$$

Осталось показать, что $c > 0$. Определитель формы (11.17.6) равен c. Он должен быть положительным, так как правая часть (11.17.6) получается из формы f невырожденным преобразованием, а $\Delta_n = |A| > 0$ по условию. $\square$

Пример 11.17.2. Показать, что квадратичная форма

$$f = 5x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$$

положительно определена.

Решение. Это следует из того, что

$$\Delta_1 = 5 > 0, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

По аналогии с положительно определенными формами можно ввести понятие *отрицательно определенных форм*, т.е. таких действительных невырожденных квадратичных форм, нормальный вид которых состоит только из отрицательных квадратов неизвестных.

Вырожденные квадратичные формы, нормальный вид которых содержит квадраты одного знака, называются *полуопределенными.*

Наконец, действительные квадратичные формы, нормальный вид которых содержит квадраты разных знаков, называются *неопределенными.*

Очевидно, если форма f отрицательно определена, то форма $(-f)$ положительно определена. Поэтому из критерия Сильвестра получаем

Следствие 11.17.2. *Для того чтобы действительная квадратичная форма от n неизвестных была отрицательно определена, необходимо и достаточно, чтобы главные миноры чередовали свой знак, начиная с положительного, т.е.*

$$\Delta_1 > 0,\ -\Delta_2 > 0,\ \Delta_3 > 0,\ \ldots,\ (-1)^n\Delta_n > 0.$$

11.17.5. Приведение к нормальному виду ортогональным преобразованием. Вернемся к вопросу о приведении квадратичной формы к нормальному виду. Сначала приведем один результат для симметрических матриц.

Теорема 11.17.6. *Для всякой симметрической матрицы A можно найти такую ортогональную матрицу Q, которая приводит A к диагональному виду, т.е. матрица $Q^{-1}AQ$, полученная преобразованием матрицы A, будет диагональной.*

Доказательство. Пусть дана симметрическая матрица A порядка n и пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — некоторый ортонормированный базис в евклидовом пространстве E_n. Матрица A задает в этом базисе некоторое симметрическое преобразование φ пространства E_n.

В следствии 11.16.1 мы доказали, что для симметрического преобразования φ существует ортонормированная база $f_1, f_2, \ldots, f_n$, состоящая из собственных векторов данного преобразования. Тогда в этой базе преобразование φ задается диагональной матрицей B, поскольку

$$f_i\varphi = \lambda_i f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда

$$B = Q^{-1}AQ, \tag{11.17.7}$$

где Q — матрица перехода от базы f к базе e:

$$e = Qf.$$

□

Поскольку матрица Q ортогональна (как матрица, осуществляющая переход от одного ортонормированного базиса к другому), то $Q^{-1} = Q'$ и равенство (11.17.7) принимает вид

$$B = Q'AQ.$$

Но именно так преобразуется матрица квадратичной формы (см. § 11.17), подвергнутой линейному преобразованию неизвестных с матрицей Q. Таким образом, получаем следующее уточнение теоремы о приведении квадратичной формы к каноническому виду (теорема 11.17.2 из лекции 11.17).

Теорема 11.17.7. *Всякая действительная квадратичная форма f некоторым ортогональным преобразованием неизвестных может быть приведена к каноническому виду.*

По сути дела, этот канонический вид будет определяться однозначно, так как элементами матрицы этого канонического вида, стоящими на главной диагонали, будут характеристические корни матрицы квадратичной формы f.

Для практического нахождения такой ортогональной матрицы нужно найти собственные числа и собственные векторы матрицы A квадратичной формы f.

Лемма 11.17.1. *Собственные векторы симметрического преобразования φ, отвечающие различным собственным числам, ортогональны.*

Доказательство. Пусть

$$b\varphi = \lambda b, \quad c\varphi = \mu c, \quad \lambda \neq \mu,$$

тогда

$$(b\varphi, c) = (\lambda b, c) = \lambda(b, c),$$

а

$$(b, c\varphi) = (b, \mu c) = \mu(b, c).$$

Но, поскольку

$$(b\varphi, c) = (b, c\varphi),$$

то мы имеем

$$\lambda(b, c) = \mu(b, c),$$

т.е.

$$(b, c) = 0.$$

□

Пример 11.17.3. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4.$$

Решение. Матрица A этой формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ее характеристический многочлен равен

$$|A - \lambda E| = (\lambda - 1)^3(\lambda + 3).$$

Так что мы можем написать канонический вид формы f

$$f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 3y_4^2.$$

Найдем ортогональное преобразование, осуществляющее такое приведение. Сначала ищем собственные векторы. Для $\lambda = 1$ имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 & = & 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 & = & 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 & = & 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 & = & 0. \end{cases}$$

Ранг этой системы равен 1, поэтому она имеет три линейно независимых решения, например, векторы:

$$b_1 = (1, 1, 0, 0),$$
$$b_2 = (1, 0, 1, 0),$$
$$b_3 = (-1, 0, 0, 1).$$

Ортогонализируя эту систему векторов, получим:

$$c_1 = b_1 = (1, 1, 0, 0),$$

$$c_2 = -\frac{1}{2}c_1 + b_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right),$$

$$c_3 = \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{3}c_2 + b_3 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right).$$

Для $\lambda = -3$ имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0. \end{cases}$$

Ранг этой системы равен 3. Ее ненулевым решением служит вектор

$$c_4 = (1, -1, -1, 1).$$

Система векторов c_1, c_2, c_3, c_4 ортогональна. Нормируя ее, придем к ортонормированной системе векторов:

$$d_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right),$$

$$d_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right),$$

$$d_3 = \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$d_4 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Таким образом, форма f приводится к каноническому виду ортогональным преобразованием:

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2,$$

$$y_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}x_2 + \sqrt{\frac{2}{3}}\,x_3,$$

$$y_3 = -\frac{1}{2\sqrt{3}}x_1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}x_2 + \frac{1}{2\sqrt{3}}x_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_4,$$

$$y_4 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4.$$

В заключение рассмотрим один результат о приведении к каноническому виду двух квадратичных форм.

Теорема 11.17.8. *Пусть f и g — пара действительных квадратичных форм от n неизвестных, причем вторая из них положительно определена. Тогда существует невырожденное линейное действительное преобразование неизвестных, одновременно приводящее форму g к нормальному виду, а форму f — к каноническому виду.*

11.18. Элементы функционального анализа

Известно, что в линейном пространстве конечной размерности существует базис (конечный набор элементов этого пространства) и любой другой элемент может быть разложен по этому базису. Существуют и бесконечномерные линейные пространства. Нахождение базиса для таких пространств, разложение произвольного элемента по базису, развитие соответствующих методов можно производить с помощью функционального анализа, рассматривая понятие сходимости в таких пространствах.

11.18.1. Определения нормы и сходимости. Пусть V — (действительное) линейное пространство (см. § 11.12).

Определение 11.18.1. *Линейное пространство V называется нормированным, если выполнены два условия:*

1) каждому элементу $a \in V$ поставлено в соответствие вещественное число, называемое его нормой и обозначаемое $\|a\|$;

2) это число $\|a\|$ удовлетворяет следующим аксиомам:

а) $\|a\| > 0$, если $a \neq 0$; $\|a\| = 0$, если $a = 0$.

б) $\|\lambda a\| = |\lambda|\|a\|$, для любых $a \in V$ и $\lambda \in \mathbb{R}$.

в) $\|a + b\| \leqslant \|a\| + \|b\|$ для любых $a, b \in V$.

Нулевой элемент пространства V и число нуль мы обозначаем одним символом 0. Из контекста всегда будет ясно, о чем идет речь.

Рассмотрим примеры нормированных пространств.

Пример 11.18.1. Пространство функций $\{f\}$, непрерывных на отрезке $[a, b]$. Мы его обозначали $C[a, b]$. Положим $\|f\| = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)| = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)$. Показать, что это пространтсво нормированное.

Решение. По первой и второй теоремам Вейерштрасса (теоремы 1.14.3 и 1.14.4) непрерывная функция f — ограничена на $[a, b]$ и достигает своего максимального и минимального значения. Поэтому понятие нормы корректно определено.

Ясно, что все условия для нормы выполнены. Так что $C[a, b]$ с такой нормой становится нормированным пространством.

Пример 11.18.2. Рассмотрим линейное пространство (см. пример 11.12.1) числовых последовательностей $\{a\}$, $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ с условием, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < \infty,$$

т.е. сходится. Определим норму a так

$$\|a\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|.$$

Показать, что это пространство нармированное.

Решение. Свойства модуля и признак сравнения рядов показывают, что введенное число $\|a\|$ удовлетворяет всем свойствам нормы. Данное пространство с данной нормой обозначается l_1.

С помощью понятия нормы можно ввести определение сходимости по норме в V.

Определение 11.18.2. *Последовательность элементов $\{a_n\}$ из V сходится к элементу $a \in V$, если числовая последовательность $\|a_n - a\|$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Записывают это так*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \textit{или} \quad a_n \to a \quad \textit{при} \quad n \to \infty.$$

Определение 11.18.3. *Элемент a называется пределом последовательности. Если этот предел существует, то последовательность называется сходящейся, в противном случае — расходящейся.*

Свойства предела последовательности во многом аналогичны свойствам предела числовой последовательности и доказываются точно также. Перечислим некоторые из них.

1. Сходящаяся последовательность $\{a_n\}$ *ограничена*, т.е. $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\| < \infty$.

2. Сходящаяся последовательность не может имет двух или более различных пределов.

3. Сумма двух сходящихся последовательностей сходится к сумме пределов этих последовательностей.

4. Если $a_n \to a$ при $n \to \infty$, а числовая последовательность $\lambda_n \to \lambda$ при $n \to \infty$, $\lambda_n a_n \to \lambda a$ при $n \to \infty$.

5. Если последовательность a_n сходится к a, то числовая последовательность $\|a_n\|$ сходится к $\|a\|$ при $n \to \infty$.

В примере 11.18.1 сходимость по норме есть не что иное, как равномерная сходимость функций.

11.18.2. Банаховы пространства. Ранее мы видели какую большую роль играет критерий Коши сходимости. Можно привести примеры пространств, для которых этот критерий не выплняется (самый простой пример — пространство Q рациональных чисел). Поэтому наряду с нормированными пространствами вводится понятие банаховых пространств.

Определение 11.18.4. *Последовательность $\{a_n\}$ из V называется фундаментальной или последовательностью Коши, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N \in \mathbb{N}$, что для всех номеров $n, m > N$ выполняется неравенство*

$$\|a_n - a_m\| < \varepsilon.$$

Из свойств нормы нетрудно получить, что сходящаяся последовательность является фундаментальной.

Определение 11.18.5. *Линейное нормированное пространство V называется полным или банаховым, если всякая фундаментальная последовательность в нем сходится.*

Пример 11.18.3. Показать, что пространство $C[a, b]$ является банаховым пространством.

Решение. Действительно, критерий Коши 6.2.1 равномерной сходимости показывает, что у фундаментальной последовательности функций есть предельная функция. А поскольку предельная функция для равномерно сходящейся последовательности непрерыных функций является функцией непрерывной, то эта предельная функция лежит в $C[a, b]$.

Пример 11.18.4. Показать, что пространство l_1 также банахово.

Решение. Рассмотрим фундаментальную последовательность $\{a_n\}$ из l_1. Пусть $a_n = \{\alpha_1^n, \ldots, \alpha_k^n, \ldots\}$. Условие фундаментальности дает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N \in \mathbb{N}$, что при $n, m > N$ справедливо неравенство $\|a_n - a_m\| < \varepsilon$.

Так как, очевидно, что $\|a_n - a_m\| \geqslant |\alpha_k^n - \alpha_k^m|$ для любого $k \in \mathbb{N}$, то все числовые последовательности $\{\alpha_k^n\}$ — фундаментальны. По критерию Коши для числовых последовательностей они сходятся, т.е. существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_k^n = \alpha_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Обозначим $a = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots\}$. Покажем, что a — предел a_n и $a \in l_1$. Используем еще раз условие фундаментальности, сформулированное выше, тогда получим

$$\|a_n - a_m\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k^n - \alpha_k^m| < \varepsilon.$$

Поэтому все частичные суммы
$$\sum_{k=1}^{s} |\alpha_k^n - \alpha_k^m| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad s \in \mathbb{N}.$$
Переходя в последнем неравенстве к пределу при $m \to \infty$, имеем
$$\sum_{k=1}^{s} |\alpha_k^n - \alpha_k| \leqslant \varepsilon \quad \text{для всех} \quad s \in \mathbb{N}.$$
Это означает, что частичные суммы ряда с неотрицательными членами
$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k^n - \alpha_k|$$
ограничены сверху числом ε, поэтому данный ряд сходится и его сумма меньше либо равна ε. Данный ряд представлет собой норму $\|a_n - a\|$. Так что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Поскольку нормы сходящейся последовательности равномерно ограничены, то отсюда получаем, что $a \in l_1$.

11.18.3. Полные евклидовы пространства. В §11.15 мы определили скалярное произведение в евклидовых пространствах E и изучили некоторые его свойства. Более того мы определили длину вектора в нем. С точки зрения нормированных пространств эта длина не что иное как норма и в дальнейшем мы ее и будем так обозначать
$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}, \quad x \in E.$$

Определение 11.18.6. *Полным евклидовым пространством называется полное нормированное пространство с нормой, определяемой скалярным произведением.*

Полные евклидовы пространства часто называют *гильбертовыми.*

Пример 11.18.5. $C_R[a, b] = \{f(x)\}$, $f(x)$ — непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция. Введем скалярное произведение по формуле
$$(f,\, g) = \int\limits_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx. \tag{11.18.1}$$
Показать, что данное пространство евклидовое.

Решение. Легко видеть, что для этого определения выполнены все аксиомы скалярного произведения (см. § 11.15), поэтому линейное пространство $C_R[a, b]$ — евклидово.

Норма элемента f и аксиома в) для нормы в пространства $C_R[a, b]$ записываются в виде
$$\|f\| = \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)\, dx}, \quad \sqrt{\int\limits_a^b (f+g)^2} \leqslant \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)\, dx} + \sqrt{\int\limits_a^b g^2(x)\, dx}.$$

Мы не можем обозначить это пространство через $C[a, b]$, поскольку в $C[a, b]$ введена *другая* норма. Так что в одном и том же линейном пространстве можно вводить разные нормы.

Отметим также, что пространство $C_R[a, b]$ не является полным по данной норме. Например, всякая кусочно-непрерывная функция является пределом последовательности непрерывных функций.

Пример 11.18.6. Рассмотрим пространство l_2, состоящее из последовательностей $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ с условием $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < \infty$. Определим скалярное произведение по формуле

$$(a,\, b) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \beta_i, \quad b = (\beta_1, \ldots, \beta_n, \ldots).$$

Показать, что пространство l_2 евклидовое.

Решение. Действительно, неравенство Шварца показывает, что

$$\sum_{n=1}^{s} |\alpha_n| \cdot |\beta_n| \leqslant \sum_{n=1}^{s} \alpha_n^2 \cdot \sum_{n=1}^{s} \beta_n^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2,$$

поэтому ряд в определении скалярного произведения сходится абсолютно. Все остальные свойства скалярного произведения выполняются очевидным образом.

Нормой в l_2 служит выражение

$$\|a\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2}.$$

Также как для пространства l_1 доказывается, что l_2 с введенной нормой является полным евклидовым пространством.

Неравенство Шварца (теорема 11.15.4) для евклидовых пространств можно переписать следующим образом

Следствие 11.18.1. *Во всяком евклидовом пространстве для любых двух элементов a и b справедливо неравенство Шварца (Коши–Буняковского)*

$$|(a,\, b)| \leqslant \|a\| \cdot \|b\|. \tag{11.18.2}$$

Следствие 11.18.2. *В евклидовом пространстве $C_R[a, b]$ (пример 11.18.5) неравенство (11.18.2) Коши–Буняковского записывается в виде*

$$\Bigl(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\Bigr)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b g^2(x)\,dx. \tag{11.18.3}$$

11.18.4. Ортонормированные системы. Напомним, что два элемента a и b из евклидового пространства E называются *ортогональными*, если

$$(a,\, b) = 0. \tag{11.18.4}$$

Определение 11.18.7. *Последовательность элементов евклидового пространства E*

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots$$

называется ортонормированной системой, если:

1) элементы ψ_i, $\quad i = 1, 2, \ldots,$ попарно ортогональны;

2) $\|\psi_i\| = 1, \quad i = 1, 2, \ldots$.

Пример 11.18.7. Показать, что функциональная последовательность

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

образует ортонормированную систему в $C_R[-\pi, \pi]$.

Решение. Это следует из леммы 6.9.1.

Пример 11.18.8. Показать, что функциональная последовательность

$$\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \dots, \quad x \in [0, \pi],$$

образует ортогональную систему в $C_R[0, \pi]$ (но не нормированную!). Норма любого элемента этой последовательности равна

$$\|\sin x\| = \sqrt{\int\limits_0^\pi \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Решение. См. предыдущий пример.

Разделив все элементы последовательности на число $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$, получим ортонормированную систему.

Упражнение 11.18.1. Показать, что полиномы Лежандра на промежутке $[-1, 1]$

$$P_0(x) = 1,\ P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n\left[(x^2-1)^n\right]}{dx^n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

образуют ортогональную систему в пространстве $C_R[-1, 1]$. Норма

$$\big|\big|P_n(x)\big|\big| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots\ .$$

11.18.5. Ряд Фурье по произвольной ортонормированной системе.

Определение 11.18.8. *Рядом Фурье элемента $a \in E$ (E — евклидово пространство) по ортонормированной системе*

$$\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots \tag{11.18.5}$$

называется ряд вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n, \tag{11.18.6}$$

где через c_n обозначены постоянные числа (коэффициенты Фурье элемента a) $c_n = (a,\, \psi_n)$.

Ряд Фурье по тригонометрической системе функций на промежутке $[-\pi, \pi]$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

есть частный случай общего ряда (11.18.6).

Числа c_n, $n = 1, 2, \dots$ — это, естественно, с точностью до постоянного множителя коэффициенты Фурье тригонометрического ряда a_k, $k = 0, 1, 2, \dots$, или b_k, $k = 1, 2, \dots$. Например,

$$c_3 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{\pi}} b_1 = \sqrt{\pi} b_1.$$

Будем далее обозначать через S_n, $n = 1, 2, \dots$, частичные суммы общего ряда Фурье (11.18.6)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k,$$

а через T_n, $n = 1, 2, \ldots$ — произвольную линейную комбинацию первых n элементов ортонормированной системы (11.18.5).

Тогда легко сформулировать аналог теоремы 6.16.1 (§ 6.16).

Теорема 11.18.1. *Наименьшее отклонение от элемента a по норме данного евклидового пространства среди всех сумм $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} d_k\psi_k$ имеет частичная сумма ряда Фурье, т.е.*

$$\|a - \sum_{k=1}^{n} c_k\psi_k\| = \inf_{\{(d_1,d_2,\ldots,d_n)\}} \|a - \sum_{k=1}^{n} d_k\psi_k\|.$$

Доказательство этой теоремы практически полностью аналогично доказательству теоремы 6.16.1. □

Как следствие получаем неравенство Бесселя.

Следствие 11.18.3. *Справедливо неравенство Бесселя*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leqslant \|a\|^2. \qquad (11.18.7)$$

В частности, $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = 0$.

Из неравенства Бесселя получаем, что последовательность $(c_1, \ldots, c_k, \ldots) \in l_2$.

11.18.6. Полные и замкнутые системы.

Определение 11.18.9. *Система элементов $\{\psi_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, называется полной по норме пространства E, если для любого элемента $a \in E$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существует конечная линейная комбинация элементов системы такая, что*

$$\|f - \sum_{k=1}^{p} c_k\psi_{n_k}\| < \varepsilon.$$

Вопрос существования полных ортонормированных систем решается в более продвинутых курсах, чем курс математического анализа.

Тем не менее можно сказать, что существование полной системы элементов рассатриваемого типа говорит о *сепарабельности* пространства E, поскольку она счетная. Из этой системы элементов всегда можно удалить линейно зависимые элементы. Далее, процесс ортогонализации Грама-Шмидта показывает, что полную систему элементов можно заменить на полную ортогональную систему, а нормируя ее элементы, на полную ортонормированную систему. Так что справедливо утверждение.

Теорема 11.18.2. *Во всяком сепарабельном евклидовом пространстве существует полная ортогональная (счетная) система элементов.*

Конкретные же примеры полных систем в функциональных пространствах построены в § 6.15 (см., например, теорему 6.15.7, замечание 6.15.1).

Сформулируем сейчас теоремы, отражающие общие фундаментальные свойства полных систем.

Теорема 11.18.3. *Если ортонормированная система $\{\psi_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, является полной по норме пространства E, то для любого элемента $a \in E$ неравенство*

Бесселя (11.18.7) переходит в точное равенство (равенство Парсеваля)

$$\|a\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2. \qquad (11.18.8)$$

Теорема 11.18.4. *Если ортонормированная система $\{\psi_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, является полной по норме пространства E, то для любого элемента $a \in E$ ряд Фурье этого элемента сходится к нему по норме пространства E, т.е.*

$$\lim_{n\to\infty} \|a - \sum_{k=1}^{n} c_k\psi_k\| = 0.$$

Теорему 11.18.3 примем без доказательства. Теорема же 11.18.4 является ее следствием. Действительно, так же, как в теореме 6.16.1, можно показать, что

$$\|a - \sum_{k=1}^{n} c_k\psi_k\|^2 = \|a\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2. \qquad (11.18.9)$$

Из равенства (11.18.9) с учетом формулы (11.18.8) при $n \to \infty$ и получается необходимый результат. □

Определение 11.18.10. *Система элементов $\{\psi_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, называется замкнутой, если кроме нулевого элемента евклидова пространства E не существует никакого другого $a \in E$, такого, что a ортогонален всем элементам системы $\{\psi_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$.*

Теорема 11.18.5. *Всякая полная ортонормированная система является замкнутой.*

Доказательство. Пусть система $\{\psi_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ полная, и пусть элемент $a \in \mathbf{E}$ ортогонален всем элементам $\{\psi_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Отсюда немедленно следует, что $a = 0$. Действительно,

$$c_n = (a,\, \psi_n) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и из равенства Парсеваля (11.18.8) получаем, что

$$\|a\| = 0.$$

Аксиома а) нормы (см. определение 11.18.1) влечет, что

$$a = 0.$$

□

Можно, наконец, отметить, что из замкнутости системы $\{\psi_n\}$ не следует в общем случае ее полнота. Для того, чтобы это было так нужно, чтобы само пространство было полным евклидовым пространством.

Теорема 11.18.6. *Пусть E — полное евклидово пространство, а $\{\psi_1, \ldots, \psi_n, \ldots$ — полная ортонормированная система элементов в нем. Тогда для любой последовательности $(c_1, \ldots, c_n \ldots) \in l_2$ существует элемент $a \in E$ такой, что c_n являются коэффициентами Фурье элемента a по данной ортонормальной системе и ряд Фурье элемента a сходится к a по норме E.*

Так как для, кроме того, для таких систем выполнено равенство Парсеваля, то мы получаем важное следствие.

Следствие 11.18.4. *Полные сепарабельные евклидовы пространства изоморфны между собой и изоморфны l_2.*

11.18.7. Линейные функционалы. Теорема Хана-Банаха. Пусть V — действительное (комплексное) линейное пространство.

Определение 11.18.11. *Если каждому элементу $a \in V$ поставлено в соответствие действительное (комплексное) число $f(a)$, то говорят, что на V определен функционал f.*

Определение 11.18.12. *Функционал f называется линейным, если*

$$f(\alpha a + \beta b) = \alpha \cdot f(a) + \beta \cdot f(b) \quad \text{для всех} \quad a, b \in V \quad \text{и для всех чисел} \quad \alpha,\ \beta.$$

Ясно, что для линейного функционала $f(0) = 0$ и что множество элементов $a \in V$, для которых $f(a) = 0$ образуют линейное подпространство. Это подпространство называется *ядром* функционала f.

Пусть теперь V — линейное нормированное пространство.

Определение 11.18.13. *Функционал f называется непрерывным в точке $a \in V$, если*

$$f(a_n) \to f(a) \quad \text{для всякой последовательности} \quad a_n \to a \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Определение 11.18.14. *Функционал f называется линейным непрерывным, если он является одновременно линейным и непрерывным.*

Очевидно, для линейного функционала из непрерывности его в одной точке (например, в точке 0) следует непрерывность во всех точках V.

Определение 11.18.15. *Линейный функционал f называется ограниченным на V, если существует такое неотрицательное число c, что для всех $a \in V$*

$$|f(a)| \leqslant c\|a\|.$$

Определение 11.18.16. *Наименьшее из чисел c, удовлетворяющих последнему неравенству, называется нормой функционала f и обозначается $\|f\|$. Поэтому справедлива формула*

$$\|f\| = \sup_{a \in V \setminus \{0\}} \frac{|f(a)|}{\|a\|} = \sup_{\|a\|=1} |f(a)|.$$

Теорема 11.18.7. *Линейный функционал f непрерывен на V тогда и только тогда, когда f ограничен на V.*

Если V — конечномерное пространство, то любой линейный функционал на V является непрерывным, так как он определяется по его значениям на конечном множестве элементов какой-либо базы из V.

Пусть L — линейное подпространство V и f — линейный функционал на L.

Определение 11.18.17. *Линейный функционал F на V называется продолжением линейного функционала f, если $F(a) = f(a)$ для всех $a \in L$.*

Фундаментальным для функционального анализа является следующее утверждение.

Теорема 11.18.8 (Хан-Банах)**.** *Если f — линейный непрерывный функцтонал на линейном подпространстве $L \subset V$ с нормой $\|f\|$, то существует непрерывный линейный функционал F на V, являющийся продолжением f на все V и такой, что $\|F\| = \|f\|$.*

Следствие 11.18.5. *Для любого ненулевого элемента* $a_0 \in V$ *пространства* V *существует линейный непрерывный функционал* f *на* V, *для которого* $\|f\| = 1$ *и* $f(a_0) = \|a_0\|$.

Приведем примеры линейных непрерывных функционалов.

Пример 11.18.9. Рассмотрим линейное нормированное пространство l_1 (пример 11.18.2). Показать, что функционал $f(a) = \alpha_k$, если $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$, сопостовляющий элементу a его k-ю координату является линейным непрерывным, а его норма равна 1.

Решение. Очевидно.

Упражнение 11.18.2. Более общим примером является следующий: пусть $d = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \ldots)$ — ограниченная числовая последовательность, тогда функционал

$$f_d(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \alpha_n$$

является линейным непрерывным на l_1. Его норма равна $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |\gamma_n|$.

В функциональном анализе показано, что любой линейный непрерывный функционал на l_1 имеет рассмотренный вид.

Пример 11.18.10. Рассмотрим линейное нормированное пространство $C[a, b]$ (пример 11.18.1). Показать, что линейный функционал $f(\varphi) = \varphi(x_0)$, сопостовляющий каждой функции $\varphi \in C[a, b]$ ее значение в точке $x_0 \in [a, b]$, является линейным непрерывным функционалом с нормой $\|f\| = 1$.

Решение. Очевидно.

Пример 11.18.11. Еще одним примером линейного непрерывного функционала на $C[a, b]$ является следующий: пусть $\psi \in C[a, b]$, определим функционал f_ψ так

$$f_\psi(\varphi) = \int\limits_a^b \psi(t)\varphi(t)\, dt.$$

Показать, что функционал f_ψ является линейным непрерывным на $C[a, b]$ и его норма

$$\|f_\psi\| = \sup_{x \in [a,b]} |\psi(x)|.$$

Решение. Очевидно.

Литература

[1] Грауэрт Г., Либ И., Фишер В. *Дифференциальное и интегральное исчисление.* – М.: Мир, 1971.

[2] Демидович Б.П. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу.* – М.: Наука, 1972.

[3] Заманский М. *Введение в современную алгебру и анализ.* – М.: Наука, 1974.

[4] Зорич В.А. *Математический анализ.* – М.: Наука, 1981. – Т. 1, 2.

[5] Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Аналитическая геометрия.* – М.: Наука, 1968.

[6] Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Линейная алгебра.* – М.: Наука, 1974.

[7] Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Основы математического анализа.* – М.: Наука, 1973. – Т. 1, 2.

[8] Картан А. *Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы.* – М.: Мир, 1971.

[9] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* – М.: Физматлит, 2006.

[10] Кострикин А.И. *Введение в алгебру.* – М.: Физматлит, 2004.

[11] Кудрявцев Л.Д. *Курс математического анализа.* – М.: Высш. шк., 1989. – Т. 1, 2, 3.

[12] Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. *Сборник задач по математическому анализу.* – М.: Физматлит, 2003. – Т. 1, 2, 3.

[13] Курант Р. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* – М.: Наука, 1970. – Т. 1, 2.

[14] Курош А.Г. *Курс высшей алгебры.* – М.: Лань, 2007.

[15] Мальцев А.И. *Основы линейной алгебры.* – М.: Лань, 2009.

[16] Никольский С.М. *Курс математического анализа.* – М.: Физматлит, 2001. – Т. 1, 2.

[17] Рудин У. *Основы математического анализа.* – М.: Мир, 1973.

[18] Фаддеев Д.К., Соминский И.С. *Сборник задач по высшей алгебре.* – М.: Наука, 1963.

[19] Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* – М.: Наука, 1966. – Т. 1, 2, 3.

[20] Шварц Л. *Анализ.* – М.: Мир, 1972. – Т. 1, 2.

[21] Шилов Г.Е. *Математический анализ.* – М.: Наука, 1969. – Т. 1, 2, 3.

Предметный указатель

Асимптота 95
  вертикальная 95
  горизонтальная 95
  наклонная 95
База (базис) 408
Бета-функция 317
Бином 9
  Ньютона 9
Вектор 402
  нормированный 432
  собственный 429
Выпуклость функции 92
  вверх 92
  вниз 92
Гамма-функция 317
Гипербола 412
  главные оси 413
  директриса 413
  каноническое уравнение 413
  фокусы 413
  эксцентриситет 413
Градиент 231
Граница 14
  верхняя 14
    точная 14
  множества 257
  нижняя 14
    точная 14
Дивергенция 366
Дифференциал 58
  второго порядка 71
  первого порядка 58
    инвариантность формы 66
  n-го порядка 71
  полный 227
Дифференцируемость
  несобственного интеграла 300
  собственного интеграла 289
  функции в точке 57
    слева 58
    справа 58
Длина
  кривой 141
  отрезка 15
Дробь
  десятичная 10
    непериодическая 11
    периодическая 10
Зависимость
  функций 250
    достаточное условие 251
    необходимое условие 250
Индукция 7
  полная математическая 8
Интеграл 120
  верхний 122
  Дирихле 304
  двойной 259
  зависящий от параметра 287
    несобственный 295
    собственный 287
  кратный 258
  криволинейный 324
    второго рода 331
    первого рода 324
  "неберущийся" 117
  неопределенный 101
  несобственный 131
    абсолютно сходящийся 135
    главное значение 286
    кратный 283
    по неограниченному промежутку 131
    от неограниченной функции 131
    условно сходящийся 136
  нижний 122
  определенный 120
  от дифференциальной формы 378
  по цепи 377
  поверхностный 354
    второго рода 358
    первого рода 354
  повторный 267
  Римана 120
  с переменным верхним пределом 127
  тройной 259
  Фурье 310
  Эйлера-Пуассона 307
  эллиптический 118
Интегрирование
  дифференциальных биномов 111

дробно-линейных иррациональностей 110
иррациональных функций 110
квадратичных иррациональностей (подстановки Эйлера) 112
по частям 105, 130
простейших рациональных дробей 108-109
рациональных функций 107
с помощью замены переменной 105, 129
в кратном интеграле 273
трансцендентных функций 115
тригонометрических функций (универсальная подстановка) 113
Интегрируемость функции 120
критерий 123
Дарбу 123
Римана 123
на отрезке 120
монотонной 124
необходимое условие 121
непрерывной 123
по измеримому множеству
с конечным числом точек разрыва 124
Интервал 15
Касательная
плоскость 351
прямая 59
угол наклона 60
уравнение 59
Квантор 7
всеобщности 7
существования 7
Класс
элементарных функций 26
Коэффициенты
биномиальные 9
Тейлора 82
Фурье 192
Кривая 138
второго порядка 414
гладкая 140
жорданова 138
замкнутая 138
непрерывно дифференцируемая 141
неспрямляемая 141
параметрически заданная 138
простая 138
замкнутая 139
спрямляемая 141
Кривизна 417
радиус 417
центр 418
Критерий
Коши
сходимости несобственного интеграла 131-132
сходимости ряда 179
сходимости функционального ряда 173
сходимости функциональной последовательности 173
существования предела последовательности 25
существования предела функции 42
Сильвестра 442
Масса
кривой 326
плоской фигуры 282
тела 282
Матрица 398
вырожденная (особая) 401
диагональная 398
единичная 401
квадратная 398
невырожденная (неособая) 401
нулевая 400
обратная 401
ортогональная 434
прямоугольная 398
ранг 409
симметрическая 436
сложение 399
умножение 399
на число 399
характеристическая 428
Якоби 248
Мера Жордана 257
внешняя 257
внутренняя 257
Метод
Гаусса 398
множителей Лагранжа 254
Остроградского 109
рационализации 110
Чезаро 202
Модуль
вектора 217
комплексного числа 381
Момент
статический 151
Многочлен 28
корень 189
Тейлора 80
Множество 5
включение 5
декартово произведение 6
дополнение 6
замкнутое 219
квадрируемое 145
компактное 219
кубируемое 147
образ 18
объединение 5
ограниченное 13
сверху 13
снизу 13

открытое 218
пересечение 5
производное 17
прообраз 18
пустое 5
равенство 5
разность 5
связное 218
универсальное 4
элемент 5
Непрерывность
  несобственного интеграла 299
  собственного интеграла 289
  функции в точке 45
    слева 46
    справа 46
  функции на множестве 46
Неравенство 14
  Бесселя 209
  Йенсена 94
  Коши-Буняковского 433
  треугольника 432
  Шварца 433
Норма
  линейного функционала 454
  элемента 446
Нормаль 351
  главная 417
Область 24
  выпуклая 219
  линейно односвязная 371
  неодносвязная 347
  односвязная 347
  определения 24
  поверхностно односвязная 371
  элементарная 337, 360
Обьем 147
  внешний 147
  внутренний 147
Окрестность 33
  проколотая 34
Оператор
  внешнего дифференцирования 376
  Гамильтона 231
Операция 25
  композиции 25
  суперпозиции 25
Определитель 392
  вычисление 396
Отрезок (сегмент) 15
Парабола 413
  вершина 414
  директриса 414
  каноническое уравнение 413
  ось 414
  фокус 413
Первообразная 99
Перестановка 393
  членов ряда 165
Плоскость 405
  соприкасающаяся 418
Площадь
  плоской фигуры 144
    верхняя 144
  нижняя 144
    поверхности 353
Поверхность
  вращения 149
  гладкая 350
  кусочно гладкая 350
  неориентированная 358
  неявно заданная 350
  ориентированная 356
  параметрически заданная 349
  явно заданная 350
Подпоследовательность 29
Подпространство 426
  линейное 426
Подстановка 393
Покрытие 21
Поле
  векторное 365
    потенциальное 370
    соленоидальное 370
  скалярное 365
Последовательность 21
  вложенных отрезков 15
  возрастающая 27
    строго 27
  монотонная 27
  ограниченная 23
  постоянная 23
  расходящаяся 22
  сходящаяся 21
  убывающая 27
    строго 27
  функциональная 169
  фундаментальная (Коши) 24
Правило 103
  Крамера
  Лейбница 70
  Лопиталя 78-79
Предел 29
  двойной 223
  монотонной последовательности 27
  монотонной функции 44
  повторный 223
  последовательности 21
    верхний 31
    нижний 31
    частичный 31
  произведения 23
  суммы 23
  функции 33

бесконечный 40
второй замечательный 40
первый замечательный 38
по Гейне 35
по Коши 33
слева 40
справа 40
частного 23
Предельный переход
под знаком интеграла 176
под знаком функциональной последовательности 175
Преобразование
Абеля 164
линейное 423
дефект 428
ранг 428
спектр 429
ядро 428
ортогональное 434
симметрическое 435
тождественное 423
Фурье 313
Признак
равномерной сходимости несобственного интеграла
Абеля-Дирихле 297
Вейерштрасса 297
Дини 298
равномерной сходимости ряда 174
Абеля 174
Вейерштрасса 174
Дирихле 175
сходимости интеграла Фурье
Дини 311
сходимости несобственного интеграла 134
абсолютной сходимости 135
Абеля 137
Дирихле 137
сравнения 134
сходимости ряда
Абеля 163
абсолютной сходимости 151
Вейерштрасса 158
Даламбера 159
Дирихле 164
интегральный (Коши-Маклорена) 162
Коши 159
Лейбница 163
необходимый 156
сравнения 157
сходимости ряда Фурье
Дини 201
Липшица 201
Принцип
Архимеда 15
Больцано-Вейерштрасса 17
Бореля-Лебега о покрытии 16
Кантора о вложенных отрезках 15
полной математической индукции 8
Приращение 57
аргумента 57
функции 57
полное 225
Произведение векторов
векторное 403
скалярное 403
смешанное 403
Производная 57
второго порядка 102
левосторонняя 59
обратной функции 66
правосторонняя 59
разности 63
параметрически заданной функции 67
по направлению 230
произведения 64
сложной функции 65
суммы 63
частного 64
элементарной функции 69
частная 225
n-го порядка 69
Пространство
банахово 448
векторное 420
евклидово 430
линейное 420
размерность 422
нормированное 446
полное 448
Прямая 402
в пространстве 405
на плоскости 404
Равенство
Парсеваля 210
Разбиение
отрезка 120
диаметр (мелкость) 120
плоскости 143
пространства 147
Ротор (вихрь) 367
Ряд 154
гармонический 156
Маклорена 184
расходящийся 154
степенной 179
промежуток сходимости 180
радиус сходимости 180
сходящийся 154
абсолютно 156
поточечно 171
равномерно 172
условно 163

сумма ряда 154
Тейлора 184
функциональный 169
Фурье 191
комплексная запись 215
по ортонормированной системе 351
тригонометрический 191
частичная сумма 154
Свойство 16
ассоциативности 16
дистрибутивности 16
коммутативности 16
непрерывности (полноты) 17
операций 12
вычитания 16
деления 16
сложения 16
умножения 16
плотности 16
порядка 16
транзитивности 16
Сечение множеств 13
Система элементов
замкнутая 453
линейно зависимая 407
линейно независимая 407
ортогональная 431
ортонормированная 432
полная 206, 452
тригонометрическая 191
Скорость 59
мгновенная 59
средняя 59
Сходимость равномерная 172
Сумма
Дарбу 122
верхняя 122
нижняя 122
Дирихле 197
интегральная 120
Фейера 198
ряда 154
частичная 154
Таблица
интегралов 104
производных 68-69
Теорема
Абеля
вторая 182
первая 179
алгебры многочленов
основная 382
Больцано-Вейерштрасса для последовательностей 30
Больцано-Коши о промежуточном значении 49
Вейерштрасса 39
о непрерывных функциях на отрезке 49, 50
о пределе монотонной последовательности 27
о пределе монотонной функции 44
о приближении функций алгебраическими многочленами 205
о приближении функций тригонометрическими многочленами 205
Гульдина 152
Дарбу 77
Кантора о равномерной непрерывности 51
Кронекера-Капелли 409
Коши 77
о существовании корня 49
Лагранжа 75
локализации 199
о дифференцируемости элементарных функций 104
о зависимости функций
о зажатой последовательности 24
о зажатой функции 37
о независимости интеграла от пути интегрирования 343
о непрерывности обратной функции 52
о непрерывности элементарных функций 52
о неявной функции 242
о разрывах монотонной функции 69
о системе неявных функций 245
о среднем 125
вторая (Бонне) 131
первая 125
о существовании точной верхней границы 14
об обратной функции 74
об обратном отображении 249
Римана
о перестановке членов ряда 166
об осцилляции 194
Ролля 73
Фейера 203
Ферма 72
Фубини 264-267
Хана-Банаха 454
Точка
(локального) максимума 88
(локального) минимума 88
(локального) экстремума 88
перегиба 95
предельная 16
разрыва 48
бесконечного 48
второго рода 48
первого рода 48
устранимого 48

Уравнение
  дифференциальное 384
    решение 384
    с разделяющимися переменными 385
  линейное 385, 397
  линейное дифференциальное второго порядка с постоянными коэффициентами 387
  линейное дифференциальное первого порядка 385
Условие
  выпуклости функции 93
  монотонности функции 86
Форма
  дифференциальная 375
    замкнутая 377
    точная 377
  внешняя 373
  квадратичная 437
    закон инерции 441
    канонический вид 439
    нормальный вид 441
    отрицательно определенная 443
    поверхности, первая 352
    положительно определенная 441
    ранг 438
Формула 10
  бинома 9
  Валлиса 130
  Грина 331
  конечных приращений 111
  Коши 112
  Коши-Адамара 181
  Маклорена 81
  Муавра 176
  Ньютона-Лейбница 128
  Остроградского-Гаусса 360
  Стокса 363
  Тейлора 80
    единственность разложения 81
    с остаточным членом в форме Лагранжа 83
    с остаточным членом в форме Пеано 81
    элементарных функций 83
  Фруллани 308
  Эйлера 188
Функционал 453
  линейный 453
  ограниченный 454
  непрерывный 454
Функция (отображение) 17
  алгебраическая 20
  аналитическая 191
  аргумент 17
  бесконечно большая 54
    более высокого порядка 54
  бесконечно малая 53
    более высокого порядка 53
  биективная 18
  возрастающая 43
  гиперболическая 28
  график 18
  дифференцируемая 84
  значение 17
  интегрируемая 120
  инъективная 18
  кусочно заданная 26
  монотонная 44
  наибольшее значение 90
  наименьшее значение 90
  непрерывная 45
    в точке 45
    на множестве 46
    слева 46
    справа 46
  неявная
  обратная 18
  ограниченная 36
    сверху 36
    снизу 36
  одного порядка 78
  постоянная 36
  равномерно непрерывная 50
  разрывная 46
  рациональная 28
  сложная 19
  схема исследования 96
  сюръективная 18
  трансцендентная 28
  убывающая 43
  финально постоянная 36
  эквивалентная 54
  Эйлера 317
  элементарная 20
    основная 19
Центр тяжести
  кривой 324
  плоской фигуры 282
  тела 283
Цепь 377
Циркуляция 367
Число
  вещественное (действительное) 11
  e 29
  иррациональное 11
  комплексное 380
    аргумент 381
    действительная часть 380
    мнимая часть 380
    модуль 381
    тригонометрическая форма 381
  мнимое 381
  натуральное 7
  рациональное 10

собственное 429
сопряженное 380
характеристическое
целое 8
Экстремум 73
необходимое условие 73
локальный 87
достаточное условие 88-89
условный 252
Эвольвента 419
Эволюта 419
Элемент 17
множества 4
максимальный (наибольший) 17
минимальный (наименьший) 17
Эллипс 410
главные оси 411
директриса 412
каноническое уравнение 412
фокусы 411
эксцентриситет 412
Ядро
Дирихле 197
Фейера 198
Якобиан 248

Содержание

Введение 3

Глава 1. **Введение в анализ** 5
1.1. Элементы теории множеств 5
1.1.1. Операции над множествами 5
1.1.2. Свойства операций над множествами 6
1.1.3. Прямое (декартово) произведение множеств 6
1.1.4. Логические символы 7
1.2. Натуральные числа. Индукция. Бином Ньютона 8
1.2.1. Индукция 8
1.2.2. Целые числа 8
1.2.3. Бином Ньютона 9
1.3. Вещественные числа 10
1.3.1. Рациональные числа 10
1.3.2. Вещественные числа 11
1.3.3. Определение неравенств (отношений порядка) 12
1.3.4. Определение арифметических операций 12
1.3.5. Основные свойства вещественных чисел 12
1.4. Ограниченные множества. Теорема о верхней грани. Принцип Архимеда 13
1.4.1. Ограниченные множества 13
1.4.2. Принцип Архимеда 15
1.5. Три принципа математического анализа 15
1.5.1. Принцип Кантора 15
1.5.2. Принцип Бореля-Лебега 16
1.5.3. Принцип Больцано-Вейерштрасса 16
1.6. Понятие функции. График функции. Класс элементарных функций 18
1.6.1. Понятие функции или отображения 18
1.6.2. График функции 19
1.6.3. Класс элементарных функций 20
1.7. Предел последовательности и его свойства 21
1.7.1. Предел последовательности 21
1.7.2. Общие свойства пределов 23
1.7.3. Предельный переход и арифметические операции 24
1.7.4. Предельный переход и неравенства 24
1.8. Теоремы о существовании предела последовательности 25
1.8.1. Критерий Коши 25
1.8.2. Теорема Вейерштрасса 27
1.8.3. Число e 29
1.9. Подпоследовательности. Частичный предел последовательности. Верхний и нижний пределы 30

1.9.1. Частичный предел последовательности 30
1.9.2. Верхний и нижний пределы 31
1.10. Предел функции 33
1.10.1. Определения предела функции 33
1.10.2. Общие свойства предела 36
1.10.3. Первый замечательный предел 38
1.10.4. Пределы функции справа и слева, бесконечные пределы и пределы при $x \to \infty$ 40
1.10.5. Второй замечательный предел 41
1.11. Теоремы о пределе функции 42
1.11.1. Критерий Коши существования предела функции 42
1.11.2. Предел монотонной функции 44
1.12. Непрерывность функции. Локальные свойства непрерывных функций 45
1.12.1. Основные определения и примеры 45
1.12.2. Локальные свойства непрерывных функций 47
1.13. Точки разрыва. Разрывы монотонной функции 48
1.13.1. Точки разрыва и их классификация 48
1.13.2. Разрывы монотонной функции 49
1.14. Глобальные свойства непрерывных функций. Равномерная непрерывность 49
1.14.1. Глобальные свойства непрерывных функций 49
1.14.2. Равномерно непрерывные функции 51
1.14.3. Обратная функция 52
1.15. Асимптотическое поведение функций. O-символика 53
1.15.1. Определения и примеры 53
1.15.2. Свойства бесконечно малых и бесконечно больших величин 56

Глава 2. **Дифференциальное исчисление функций одного переменного** 58
2.1. Производная и дифференцируемость функции 58
2.2. Касательная. Геометрический смысл производной 60
2.2.1. Геометрический смысл производной 60
2.2.2. Некоторые применения 62
2.3. Правила дифференцирования 64
2.4. Производные сложной и обратной функций. Инвариантность формы дифференциала первого порядка 67
2.4.1. Правило дифференцирования сложной 67
2.4.2. Инвариантность формы дифференциала первого порядка 67
2.4.3. Правило дифференцирования обратной функции 68
2.4.4. Таблица производных 70
2.5. Производные и дифференциалы высших порядков 71
2.5.1. Производные высших порядков 71
2.5.2. Дифференциалы высших порядков 73
2.6. Теоремы о среднем в дифференциальном исчислении 74
2.6.1. Теорема Ферма 74
2.6.2. Теорема Ролля 74
2.6.3. Теорема Лагранжа 77
2.6.4. Теорема Коши 78
2.7. Правило Лопиталя 79

2.7.1. Неопределенность вида $\mathbf{\frac{0}{0}}$ 79
2.7.2. Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ 80
2.8. Формула Тейлора 81
2.8.1. Многочлен Тейлора 81
2.8.2. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано 82
2.8.3. Единственность разложения по формуле Тейлора 83
2.8.4. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа 84
2.9. Формулы Тейлора для элементарных функций 84
2.9.1. Стандартные разложения 84
2.9.2. Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора 86
2.10. Условия монотонности функций 87
2.11. Нахождение экстремумов функции 89
2.11.1. Определение локальных экстремумов 89
2.11.2. Достаточные условия, использующие первые производные 90
2.11.3. Достаточные условия, использующие старшие производные 90
2.11.4. Наибольшие и наименьшие значения функции на отрезке 92
2.12. Условия выпуклости функции 93
2.12.1. Выпуклость вверх и выпуклость вниз 93
2.12.2. Неравенство Йенсена 95
2.12.3. Точки перегиба 96
2.13. Асимптоты. Исследование функции и построение ее графика 96
2.13.1. Асимптоты 96
2.13.2. Схема исследования функции 97
2.13.3. Пример исследования функции 98

Глава 3. **Неопределенный интеграл** 100
3.1. Неопределенный интеграл и его свойства 100
3.1.1. Первообразная и неопределенный интеграл 100
3.1.2. Основные свойства неопределенного интеграла 103
3.1.3. Табличные интегралы 105
3.2. Основные методы интегрирования 106
3.2.1. Интегрирование с помощью замены переменной 106
3.2.2. Интегрирование по частям 107
3.3. Интегрирование рациональных функций 108
3.3.1. Интегрирование элементарных рациональных дробей четырех типов 109
3.3.2. Метод Остроградского 110
3.4. Интегрирование иррациональных функций 111
3.4.1. Интегрирование выражений вида $\boldsymbol{R\left(x,\ \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)}$ 111
3.4.2. Интегрирование выражений вида $\boldsymbol{x^m(a+bx^n)^p}$ 112
3.4.3. Интегрирование выражений вида $\boldsymbol{R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)}$ 113
3.5. Интегрирование тригонометрических функций 115
3.5.1. Вычисление интегралов вида $\int \boldsymbol{R(\sin x, \cos x)\ dx}$ 115
3.5.2. Вычисление интегралов вида $\int \boldsymbol{\sin^m x \cos^n x\, dx}$ 115
3.5.3. Вычисление интегралов вида $\int \boldsymbol{\sin \alpha x \cos \beta x\, dx}$ 116
3.6. Интегрирование трансцендентных функций 116
3.7. Интегрирование различных классов функций 117

3.7.1. Обзор некоторых интегралов, которые не выражаются через элементарные функции (не интегрируются в конечном виде) 119
3.7.2. Эллиптические интегралы 120

Глава 4. **Определенный интеграл Римана и его приложения** 121
4.1. Определенный интеграл. Необходимый признак интегрируемости 121
4.1.1. Определение интеграла Римана 121
4.1.2. Необходимый признак интегрируемости 122
4.2. Нижние и верхние суммы Дарбу. Критерии интегрируемости 123
4.3. Интегрируемость непрерывных и монотонных функций 124
4.3.1. Интегрируемость непрерывных функций 124
4.3.2. Интегрируемость монотонных функций 125
4.4. Свойства определенного интеграла. Первая теорема о среднем 125
4.5. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница 128
4.6. Основные методы интегрирования 130
4.6.1. Замена переменной 130
4.6.2. Интегрирование по частям 131
4.7. Несобственный интеграл и его свойства. Признаки сходимости 132
4.7.1. Определение несобственного интеграла 132
4.7.2. Признаки сходимости несобственных интегралов от неотрицательных функций 135
4.7.3. Несобственные интегралы от знакопеременных функций 136
4.8. Спрямляемые и гладкие кривые. Длина кривой 139
4.8.1. Определение кривой 139
4.8.2. Длина кривой 142
4.9. Площадь плоской фигуры. Мера Жордана 144
4.9.1. Определение и свойства площади 144
4.9.2. Вычисление площади 146
4.10. Объем тела и его вычисление 148
4.11. Площадь поверхности вращения 150
4.12. Некоторые приложения в механике 152

Глава 5. **Числовые ряды** 155
5.1. Числовые ряды. Сходимость ряда 155
5.1.1. Критерий Коши 156
5.1.2. Необходимый признак сходимости ряда 157
5.2. Абсолютная сходимость ряда 158
5.2.1. Сходимость абсолютно сходящегося ряда 158
5.2.2. Признаки сравнения 158
5.3. Признаки абсолютной сходимости рядов 160
5.3.1. Признак Коши 160
5.3.2. Признак Даламбера 161
5.3.3. Интегральный признак Коши 163
5.4. Условно сходящиеся ряды 164
5.4.1. Признак Лейбница 164
5.4.2. Признаки условной сходимости рядов 164
5.5. Перестановки членов ряда 166
5.5.1. Перестановки членов абсолютно сходящегося ряда 166
5.5.2. Теорема Римана 167

5.5.3. Умножение рядов 168

Глава 6. **Функциональные последовательности и ряды** 170
6.1. Сходимость функциональных последовательностей и рядов 170
6.2. Равномерная сходимость. Признаки равномерной сходимости 173
6.2.1. Определение равномерной сходимости 173
6.2.2. Критерий Коши 174
6.2.3. Признаки равномерной сходимости 175
6.3. Предельный переход под знаком функциональной последовательности и функционального ряда 177
6.4. Почленная интегрируемость и дифференцируемость функциональной последовательности и функционального ряда 178
6.5. Степенные ряды. Радиус и интервал сходимости 180
6.6. Свойства суммы степенного ряда 182
6.6.1. Формула Коши-Адамара 182
6.6.2. Вторая теорема Абеля 183
6.6.3. Интегрируемость и дифференцируемость сумм степенных рядов 183
6.7. Разложение функций в степенные ряды. Ряд Тейлора 185
6.8. Функции комплексного переменного 187
6.8.1. Сходимость на комплексной плоскости и ряды с комплексными членами 187
6.8.2. Степенные ряды с комплексными членами 188
6.8.3. Формула Эйлера 189
6.8.4. Непрерывность и дифференцируемость в комплексной области 190
6.8.5. Аналитические функции 192
6.9. Ряд Фурье по тригонометрической системе функций 192
6.10. Теорема Римана об осцилляции 195
6.11. Ядра Дирихле и Фейера 198
6.11.1. Ядро Дирихле и его свойства 198
6.11.2. Ядро Фейера и его свойства 199
6.12. Принцип локализации 200
6.13. Сходимость ряда Фурье в точке 201
6.13.1. Признак Дини 201
6.13.2. Признак Липшица 202
6.14. Суммирование рядов Фурье методом Чезаро 203
6.14.1. Суммирование рядов методом Чезаро 203
6.14.2. Теорема Фейера 204
6.15. Теоремы Вейерштрасса о приближении 206
6.15.1. Приближение тригонометрическими многочленами 206
6.15.2. Приближение алгебраическими многочленами 206
6.15.3. Полные системы функций 207
6.16. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля 209
6.16.1. Свойство минимальности коэффициентов Фурье 209
6.16.2. Неравенство Бесселя 210
6.16.3. Равенство Парсеваля 211
6.17. Почленное дифференцирование и интегрирование рядов Фурье 212
6.17.1. Дифференцирование рядов Фурье 212
6.17.2. Интегрирование рядов Фурье 214
6.17.3. Ряды Фурье в случае произвольного интервала 215

6.17.4. Комплексная запись ряда Фурье 216

Глава 7. **Дифференциальное исчислении функций многих переменных** 218
7.1. Пространство $\mathbb{R}^n$ 218
7.1.1. Модуль вектора и расстояние между векторами 218
7.1.2. Открытые и замкнутые множества 219
7.1.3. Компактные множества 221
7.2. Предел функции в $\mathbb{R}^n$ 222
7.2.1. Предел последовательности 222
7.2.2. Предел функции 224
7.3. Непрерывность функций в $\mathbb{R}^n$ 224
7.4. Частные производные и дифференциал 226
7.4.1. Частные производные 226
7.4.2. Дифференцируемость функции в точке 227
7.4.3. Дифференцирование сложной функции 229
7.5. Производная по направлению. Градиент 232
7.6. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора 233
7.6.1. Частные производные высших порядков 233
7.6.2. Дифференциалы высших порядков 236
7.6.3. Формула Тейлора 238
7.7. Экстремумы функций многих переменных 239
7.7.1. Необходимое условие экстремума 239
7.7.2. Достаточное условие строго экстремума 240
7.8. Теорема о неявной функции 243
7.9. Теорема о системе неявных функций 246
7.10. Теорема об обратном отображении 249
7.11. Зависимость функций 251
7.11.1. Необходимое условие зависимости функций 251
7.11.2. Достаточные условия зависимости функций 253
7.12. Условный экстремум 253

Глава 8. **Кратный интеграл Римана** 258
8.1. Кратный интеграл 258
8.1.1. Мера Жордана (**n**-мерный случай) 258
8.1.2. Определение кратного интеграла 259
8.2. Критерии интегрируемости 261
8.2.1. Суммы Дарбу 261
8.2.2. Критерии интегрируемости 262
8.3. Классы интегрируемых функций 263
8.4. Свойства кратного интеграла 263
8.5. Теоремы Фубини 265
8.5.1. Сведение двойного интеграла к повторному 265
8.5.2. Сведение тройного интеграла к повторному 271
8.5.3. Общий случай 273
8.6. Замена переменных в кратном интеграле 275
8.6.1. Отображение множеств 275
8.6.2. Криволинейные координаты 275
8.6.3. Площадь в криволинейных координатах 278
8.6.4. Формула замены переменных в кратном интеграле 280

8.7. Приложения кратных интегралов 282
8.7.1. Площадь 282
8.7.2. Объем 283
8.7.3. Приложения в механике 283
8.8. Несобственный кратный интеграл 284
8.8.1. Понятие несобственного кратного интеграла 284
8.8.2. Интеграл от неотрицательной функции 285
8.8.3. Интеграл от знакопеременной функции 286
8.8.4. Замена переменных в несобственном интеграле 286
8.8.5. Главное значение несобственного кратного интеграла 287

Глава 9. **Интегралы, зависящие от параметра** 289
9.1. Собственные интегралы, зависящие от параметра 289
9.1.1. Геометрическая интерпретация значений функции $I(y)$ 290
9.1.2. Свойства непрерывности и дифференцируемости функции $I(y)$ 291
9.1.3. Интегрируемость функции $I(y)$ 293
9.1.4. Интеграл от параметра с переменными пределами интегрирования 294
9.2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра 297
9.2.1. Равномерная сходимость несобственного интеграла, зависящего от параметра 298
9.2.2. Непрерывность несобственного интеграла, зависящего от параметра 301
9.2.3. Дифференцируемость несобственного интеграла, зависящего от параметра 302
9.2.4. Теоремы о собственном и несобственном интегрировании несобственного интеграла, зависящего от параметра 303
9.2.5. Несобственные интегралы от неограниченной функции, зависящие от параметра 305
9.3. Вычисление классических несобственных интегралов 306
9.3.1. Интеграл Дирихле 306
9.3.2. Интеграл Эйлера-Пуассона 309
9.3.3. Формула Фруллани 310
9.3.4. Вычисление интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}\,dx$, $0<a<b$ 311
9.4. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье 312
9.4.1. Определение интеграла Фурье и теорема о его сходимости 312
9.4.2. Комплексная форма интеграла Фурье 314
9.4.3. Преобразование Фурье 315
9.4.4. Свойства преобразования Фурье абсолютно интегрируемых функций 317
9.4.5. Преобразование Фурье производных и производные преобразования Фурье 318
9.5. Гамма- и бета-функции Эйлера 319
9.5.1. Определение интегралов Эйлера. Область их существования 319
9.5.2. Непрерывность интегралов Эйлера 321
9.5.3. Дифференцируемость функции $\Gamma(p)$. Формула приведения. График функции $\Gamma(p)$ 321
9.5.4. Некоторые свойства функции $\boldsymbol{B(p,q)}$ 323
9.5.5. Вычисление определенных интегралов с помощью Эйлеровых интегралов 324

Глава 10. **Криволинейные и поверхностные интегралы. Теория поля** 327
10.1. Криволинейные интегралы первого и второго рода 327
10.1.1. Определение, физический и геометрический смысл криволинейного интеграла первого рода 327
10.1.2. Свойства криволинейного интеграла первого рода 329
10.1.3. Существование криволинейного интеграла первого рода и его вычисление 330
10.1.4. Определение и физический смысл криволинейного интеграла второго рода 333
10.1.5. Специфическое свойство криволинейного интеграла второго рода 335
10.1.6. Существование криволинейного интеграла второго рода и его вычисление 335
10.2. Формула Грина 337
10.2.1. Элементарные области. Непрерывность частных производных 338
10.2.2. Формула Грина для элементарной области G 340
10.2.3. Формула Грина для областей общего вида 341
10.2.4. Вычисление площади плоской области с помощью криволинейного интеграла 344
10.3. Теорема о независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования 346
10.4. Кусочно-гладкие поверхности 352
10.4.1. Определение поверхности 352
10.4.2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности 353
10.5. Площадь поверхности. Поверхностный интеграл первого рода 355
10.5.1. Первая квадратичная форма поверхности 355
10.5.2. Площадь поверхности 356
10.5.3. Поверхностный интеграл первого рода 357
10.6. Ориентация поверхности. Поверхностные интегралы второго рода 359
10.6.1. Ориентация гладкой поверхности 359
10.6.2. Поверхностные интегралы второго рода 361
10.7. Формула Остроградского-Гаусса 363
10.8. Формула Стокса 365
10.9. Скалярные и векторные поля 368
10.10. Соленоидальные и потенциальные векторные поля 372
10.11. Внешние дифференциальные формы в теории поля 376
10.11.1. Внешние формы 376
10.11.2. Внешние дифференциальные формы 378
10.12. Основные теоремы теории поля и интегралы от внешних дифференциальных форм 380

Глава 11. **Некоторые сведения из других разделов математики** 383
11.1. Комплексные числа 383
11.1.1. Определение и арифметические операции 383
11.1.2. Тригонометрическая форма комплексного числа 384
11.2. Корни многочленов. Рациональные дроби 385
11.2.1. Многочлены и их корни 385
11.2.2. Разложение рациональных функций на дроби 386
11.3. Простейшие дифференциальные уравнения 387
11.3.1. Уравнение с разделяющимися переменными 388

11.3.2. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка 388
11.3.3. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами 390
11.4. Приложения к физике 392
11.4.1. Охлаждение или нагревание тела 392
11.4.2. Замыкание и размыкание электрического тока 392
11.4.3. Свободное падение. Сопротивление воздуха 393
11.4.4. Простейшее упругое колебание 394
11.5. Определители и их вычисление 395
11.5.1. Перестановки и подстановки 395
11.5.2. Определители 397
11.5.3. Вычисление определителей 399
11.6. Системы линейных уравнений 400
11.6.1. Метод Гаусса 400
11.6.2. Правило Крамера 401
11.7. Операции над матрицами 401
11.7.1. Сумма матриц 402
11.7.2. Умножение матрицы на число 402
11.7.3. Произведение матриц 403
11.7.4. Обратная матрица 404
11.8. Прямые на плоскости и в пространстве 405
11.8.1. Векторная алгебра в $\mathbb{R}^3$ 405
11.8.2. Прямые на плоскости 407
11.8.3. Плоскости и прямые в пространстве 409
11.9. Ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли 410
11.9.1. Векторное пространство $\mathbb{R}^n$ 410
11.9.2. Ранг матрицы 412
11.9.3. Теорема Кронекера-Капелли 412
11.10. Кривые второго порядка 414
11.10.1. Эллипс 414
11.10.2. Гипербола 415
11.10.3. Парабола 416
11.10.4. Классификация кривых второго порядка 417
11.11. Элементы дифференциальной геометрии 418
11.12. Линейные пространства 423
11.13. Линейные преобразования 427
11.14. Собственные числа и собственные значения 430
11.14.1. Линейные подпространства 430
11.14.2. Характеристические и собственные значения 431
11.15. Евклидовы пространства 433
11.15.1. Скалярное произведение 433
11.15.2. Ортогональные системы элементов 434
11.15.3. Неравенство Шварца 436
11.16. Ортогональные и симметрические преобразования 437
11.16.1. Ортогональные преобразования и ортогональные матрицы 437
11.16.2. Симметрические преобразования и симметрические матрицы 439
11.17. Квадратичные формы 441
11.17.1. Квадратичные формы и их ранг 441
11.17.2. Приведение к каноническому виду 442

11.17.3. Приведение к нормальному виду 444
11.17.4. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра 444
11.17.5. Приведение к нормальному виду ортогональным преобразованием 447
11.18. Элементы функционального анализа 449
11.18.1. Определения нормы и сходимости 450
11.18.2. Банаховы пространства 451
11.18.3. Полные евклидовы пространства 452
11.18.4. Ортонормированные системы 453
11.18.5. Ряд Фурье по произвольной ортонормированной системе 454
11.18.6. Полные и замкнутые системы 455
11.18.7. Линейные функционалы. Теорема Хана-Банаха 457

Литература 459

Предметный указатель 460

Учебное издание

Александр Мечиславович Кытманов
Евгений Константинович Лейнартас
Владимир Николаевич Лукин
Ольга Вениаминовна Ходос
Ольга Николаевна Черепанова
Татьяна Николаевна Шипина

Математический анализ