

Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Пусть линейное однородное уравнение имеет вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad (1)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n$ – некоторые действительные числа. Уравнение (1) называется **линейным однородным уравнением n -го порядка с постоянными коэффициентами**. Класс однородных уравнений с постоянными коэффициентами замечателен тем, что для него нахождение фундаментальной системы решений сводится к решению алгебраического уравнения n -й степени.

Вид уравнения (1) наводит на мысль, что решения этого уравнения следует искать прежде всего среди таких функций, производные которых «похожи» на сами функции. Среди элементарных функций таким свойством обладает показательная функция. Поэтому решения уравнения (1) будем искать в виде

$$y = e^{\lambda x} \quad (2)$$

где λ – неизвестная постоянная, которую нужно выбрать так, чтобы функция (2) обращала уравнение (1) в тождество. Для функции (2) имеем:

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}, \quad y''' = \lambda^3 e^{\lambda x}, \quad \dots, \quad y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}.$$

Подставим $y', y'', y''', \dots, y^n$ в уравнение (1) и получим

$$e^{\lambda x} (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n) = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) называется **характеристическим уравнением** для уравнения (1), многочлен слева – **характеристическим многочленом**, корни характеристического уравнения (3) – **характеристическими корнями** уравнения (1).

Замечание. Формально характеристическое уравнение получается из уравнения (1) заменой производных искомой функции на соответствующие степени λ , а самой функции – на $\lambda^0 = 1$.

Характеристическое уравнение (3) есть алгебраическое уравнение n -й степени. В алгебре доказывается, что такое уравнение имеет n корней, среди которых есть как действительные, так и комплексные числа (каждый корень считается столько раз, какова его кратность). Доказывается также, что комплексные корни такого уравнения попарно сопряжены. Следовательно, функции вида $e^{\lambda x}$ в общем случае не дадут всю фундаментальную систему решений уравнения (1). «Недостающие» решения позволяет найти следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть λ – характеристический корень уравнения (1). Тогда

- 1) если λ – простой действительный корень уравнения (1), то решением уравнения (1) является функция $e^{\lambda x}$;
- 2) если λ – действительный корень кратности k уравнения (3), то решениями уравнения (1) являются функции

$$e^{\lambda x}, \quad x e^{\lambda x}, \quad x^2 e^{\lambda x}, \quad \dots, \quad x^{k-1} e^{\lambda x};$$

3) если $\lambda = \alpha + i\beta$ – простой комплексный корень уравнения (3), то число $\lambda = \alpha - i\beta$ тоже является простым корнем характеристического уравнения, а решениями уравнения (1) будут функции

$$e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x, \quad e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x;$$

4) если $\lambda = \alpha + i\beta$ – комплексный корень кратности k уравнения (3), то число $\lambda = \alpha - i\beta$ тоже является корнем характеристического уравнения кратности k , а решениями уравнения (1) будут функции

$$e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x, \quad x e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x, \quad x^2 e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x, \quad \dots, \quad x^{k-1} e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x, \\ e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x, \quad x e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x, \quad x^2 e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x, \quad \dots, \quad x^{k-1} e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x.$$

Решения, относящиеся к различным характеристическим корням, линейно независимы и найденные таким образом n решений уравнения (1) будут образовывать его фундаментальную систему решений.

Для удобства запоминания этой теоремы и применения ее при интегрировании дифференциальных уравнений, составим таблицу, в которой отражается зависимость частных решений от вида характеристических корней.

Вид корня	Решения из фундаментальной системы
$\lambda \in \mathbb{R}$ кратность 1	$y = e^{\lambda x}$
$\lambda = \alpha \pm \beta i \in \mathbb{C}$ кратность 1	$y_1 = e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$
$\lambda \in \mathbb{R}$ кратность k	$y_1 = e^{\lambda x}, \quad y_2 = x e^{\lambda x}, \quad y_3 = x^2 e^{\lambda x}, \quad \dots, \quad y_k = x^{k-1} e^{\lambda x}$
$\lambda = \alpha \pm \beta i \in \mathbb{C}$ кратность k	$y_1 = e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x,$ $y_3 = x e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x, \quad y_4 = x e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x,$ $\dots, \dots,$ $y_{2k-1} = x^{k-1} e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x, \quad y_{2k} = x^{k-1} e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x.$

Итак, чтобы найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами необходимо:

- 1) записать его характеристическое уравнение;
- 2) найти характеристические корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$;
- 3) с помощью теоремы (таблицы) найти частные линейно независимые решения $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$;
- 4) записать общее решение $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$.

ПРИМЕР 1. Найти общее решение уравнения

$$y''' + 4y'' - 3y' - 18y = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda - 18 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 2, \quad \lambda_{2,3} = -3.$

Им соответствуют решения

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{2x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{-3x}, \quad y_3 = x e^{\lambda_3 x} = x e^{-3x}.$$

Так как это будет фундаментальная система решений, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + C_3 x e^{-3x} . \diamond$$

ПРИМЕР 2. Найти общее решение уравнения

$$y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda - 8 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 2, \quad \lambda_{2,3} = \pm 2i.$

Тогда частными линейно независимыми решениями будут

$$y_1 = e^{2x}, \quad \underbrace{y_2 = \cos 2x, \quad y_3 = \sin 2x}_{\text{так как } \alpha=0, \quad \beta=2}.$$

Следовательно, общее решение уравнения будет иметь вид

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x . \diamond$$

ПРИМЕР 3. Найти общее решение уравнения

$$y^{(5)} + 4y^{(4)} + 8y''' + 8y'' + 4y' = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Характеристическое уравнение

$$\lambda^5 + 4\lambda^4 + 8\lambda^3 + 8\lambda^2 + 4\lambda = 0$$

или $\lambda \cdot (\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2 = 0.$

Его корни $\lambda_{1,2} = \lambda_{3,4} = -1 \pm i, \quad \lambda_5 = 0.$

Тогда фундаментальная система решений состоит из функций

$$y_1 = e^{-x} \cos x, \quad y_2 = x e^{-x} \cos x,$$

$$y_3 = e^{-x} \sin x, \quad y_4 = x e^{-x} \sin x,$$

$$y_5 = e^{0 \cdot x} = 1.$$

Следовательно, общее решение имеет вид

$$y = e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 x \cos x + C_3 \sin x + C_4 x \sin x) + C_5 . \diamond$$