Системы дифференциальных уравнений.

Метод исключения. Метод интегрируемых комбинаций.

Пусть дана система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(m_2)}, \dots, y_n, y_n', \dots, y_n^{(m_n)}) &= 0, \\ F_2(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(m_2)}, \dots, y_n, y_n', \dots, y_n^{(m_n)}) &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots \ \dots \\ F_n(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(m_2)}, \dots, y_n, y_n', \dots, y_n^{(m_n)}) &= 0, \end{cases} \qquad (1)$$

где x – независимая переменная,$y_1(x\ ), y_2(x), \dots, y_n(x)$ – искомые функции, $F_1, F_2, \dots, F_n(x)$– известные функции.

Определение. *Совокупность функций* $y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x), \dots,\ y_n = y_n(x)$ *называется* ***решением системы*** (1) *на интервале* $(\alpha; \beta)$, *если она обращает на* $(\alpha; \beta)$ *каждое уравнение этой системы в тождество.*

Замечание. Всегда будем предполагать, что число уравнений системы равно числу неизвестных функций. На практике встречаются системы, в которых число уравнений меньше числа неизвестных. Такие системы дифференциальных уравнений называются уравнениями Монжа. Мы их рассматривать не будем.

Система, которая может быть разрешена относительно старших производных всех входящих в нее функций, называется канонической:

$$\begin{cases} y_1^{(m_1)} &= f_1(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1-1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(m_2-1)}, \dots, y_n, y_n', \dots, y_n^{(m_n-1)}), \\ y_2^{(m_2)} &= f_2(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1-1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(m_2-1)}, \dots, y_n, y_n', \dots, y_n^{(m_n-1)}), \\ \dots & \dots \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n^{(m_n)} &= f_n(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1-1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(m_2-1)}, \dots, y_n, y_n', \dots, y_n^{(m_n-1)}), \end{cases} \qquad (2)$$

где x – независимая переменная, $y_i(x)$– искомые функции, $f_i(x)$ – заданные в некоторой области функции.

Класс систем дифференциальных уравнений, решение которых можно найти аналитическим путем, достаточно узок. Поэтому мы будем изучать главным образом системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка, для которых существует законченная теория построения общего решения, и несложные системы нелинейных уравнений, для которых, как правило, можно подобрать интегрируемые комбинации. Для всех остальных случаев на практике используют численные методы, которые выходят за рамки нашего курса.

Частный случай канонической системы – *система уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной всех искомых функций, т. е. система вида:*

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases}$$	(3)

Система (3) *называется* ***нормальной.*** Если известные функции системы (3) не зависят от свободной переменной $f_i(x)$ то она называется ***автономной*** (стационарной).

Число уравнений системы (3) называется ее ***порядком***. В дальнейшем будем рассматривать только нормальные системы, т. к. каноническую систему (2) всегда можно заменить эквивалентной ей нормальной системой $k = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ уравнений. Для этого достаточно ввести k новых функций

$$y_{i0},\ y_{i1},\ y_{i2},\ \ldots,\ y_{i\,m_i-1} \quad (i = 1,2,\ldots,n),$$

полагая, что

$$y_{i0} = y_i,\ y_{i1} = y_i',\ y_{i2} = y_i'',\ \ldots,\ y_{i\,m_i-1} = y_i^{(m_i-1)} \quad (i = 1,2,\ldots,n).$$

ПРИМЕР. Рассмотрим систему трех уравнений второго порядка

$$\begin{cases} y_1'' = f_1(x, y_1, y_2, y_3, y_1', y_2', y_3'), \\ y_2'' = f_2(x, y_1, y_2, y_3, y_1', y_2', y_3'), \\ y_3'' = f_3(x, y_1, y_2, y_3, y_1', y_2', y_3'). \end{cases}$$

Введем новые функции

$$y_{10} = y_1,\ y_{20} = y_2, y_{30} = y_3,\ y_{11} = y_1',\ \ y_{21} = y_2',\ y_{31} = y_3'.$$

Тогда исходная система будет эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} y_{11}' = f_1(x, y_{10}, y_{20}, y_{30}, y_{11}, y_{21}, y_{31}), \\ y_{21}' = f_2(x, y_{10}, y_{20}, y_{30}, y_{11}, y_{21}, y_{31}), \\ y_{31}' = f_3(x, y_{10}, y_{20}, y_{30}, y_{11}, y_{21}, y_{31}), \\ y_{10}' = y_{11}, \\ y_{20}' = y_{21}, \\ y_{30}' = y_{31}. \end{cases} \quad \diamond$$

Задача Коши для систем дифференциальных уравнений ставится также, как для одного уравнения: найти решение системы, удовлетворяющее начальным условиям

$$y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20},\ \ldots,\ y_n(x_0) = y_{n0}. \quad (4)$$

Справедлива следующая теорема

ТЕОРЕМА1 (о существовании и единственности решения задачи Коши).
Пусть в системе (3) *функции* $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ *удовлетворяют двум условиям*:
1) функции$f_i(x, y_1, \ldots, y_n$ *непрерывны как функции* $(n+1)-$*ой переменной в некоторой области* D *-мерного пространства;*

2) их частные производные по переменным $y_1, y_2, \dots, y_n$ *в области D ограничены (т. е.* $\exists\ M > 0$ *такое, что* $\left|\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right| \le M$).

Тогда для любой фиксированной точки $M_0(x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})$ *области D существует, и притом единственное, решение*

$$y_1 = \varphi_1(x),\ y_2 = \varphi_2(x),\ \dots,\ y_n = \varphi_n(x)$$

системы (3), *определенное в некоторой окрестности точки* x_0 , *и удовлетворяющее начальным условиям* (4).

Из теоремы 1 следует, что, закрепляя значение x_0 и изменяя в некоторых пределах значения $y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}$ (так, чтобы точка принадлежала области D), мы будем для каждой системы чисел получать свое решение. Следовательно, в области D система (3) имеет бесчисленное множество решений и эта совокупность решений зависит от n произвольных постоянных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Совокупность n функций*

$$\begin{gathered} y_1 = \varphi_1(x, C_1, \dots, C_n), \\ y_2 = \varphi_2(x, C_1, \dots, C_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \varphi_n(x, C_1, \dots, C_n), \end{gathered}$$	(5)

зависящих от x и n произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$, *называется общим решение системы* (3), *если:*

1) при любых допустимых значениях постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$ *она обращает все уравнения системы* (3) *в тождество, т. е. определяет решение системы;*

2) для любых допустимых начальных условий найдутся такие значения констант, при которых функции совокупности (5) *удовлетворяют заданным начальным условиям.*

Любое решение, которое получается из общего при конкретных постоянных C_i, будем называть ***частным.***

Для нормальных систем справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Всякое дифференциальное уравнение n-го порядка*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

может быть заменено эквивалентной ему нормальной системой порядка n.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$y = z_1,\ y' = z_2,\ y'' = z_3,\ \dots,\ y^{(n-1)} = z_n.$$

Тогда

$$y' = \frac{dz_1}{dx} = z_2,\ y'' = \frac{dz_2}{dx} = z_3,\ \dots,\ y^{(n-1)} = \frac{dz_{n-1}}{dx} = z_n,\ y^{(n)} = \frac{dz_n}{dx} = f(x, z_1, \dots z_n),$$

т. е. получили нормальную систему

$$\begin{cases} z_1' = z_2, \\ z_2' = z_3, \\ \dots\dots\dots\dots \\ z_{n-1}' = z_n, \\ z_n' = f(x, z_1, z_2, \dots, z_n), \end{cases}$$

эквивалентную заданному уравнению.

Справедливо также и обратное утверждение.

ТЕОРЕМА 3. *Всякая нормальная система n-го порядка может быть заменена эквивалентным ей дифференциальным уравнением порядка n.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дана нормальная система

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, \dots, y_n), \\ \dots \ \dots \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \dots, y_n). \end{cases} \tag{6}$$

Дифференцируем по *x* обе части первого уравнения системы:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot \frac{dy_n}{dx}.$$

Заменим $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \dots, \frac{dy_n}{dx}$ их выражениями через $x, y_1, y_2, \dots, y_n$ из системы (6) и получим

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot f_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot f_n$$

или, переобозначая правую часть, имеем:

$$y_1'' = F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Дифференцируя полученное уравнение по *x* и, заменяя производные их выражениями из системы (6), будем иметь

$$y_1''' = F_3(x, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Продолжая этот процесс, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_1'' = F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots \ \dots \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_1^{(n)} = F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \tag{7}$$

Из первых $(n-1)$ уравнений системы (7) находим $y_1, y_2, \dots, y_n$, которые будут выражаться через $x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}$

$$\begin{cases} y_2 &= \psi_2(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}), \\ y_3 &= \psi_3(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}), \\ \dots \ \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n &= \psi_n(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}). \end{cases} \tag{8}$$

Подставляя эти выражения в последнее уравнение системы (7), приходим к дифференциальному уравнению n-го порядка относительно переменной y_1 :

$y_1^{(n)} = F(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)})$.	(9)

Теорема 3 позволяет найти решения систем дифференциальных уравнений, сведя ее, по сути, к решению одного дифференциального уравнения порядка n. Действительно, решив уравнение (9) мы получим

$$y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Дифференцируя найденную функцию y_1 (n–1) раз и, подставляя $y_1^{(i)}$ ($i = \overline{1, n}$ в (8), находим искомое решение нормальной системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ y_2 &= \varphi_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n &= \varphi_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n). \end{aligned}$$

Интегрирование системы дифференциальных уравнений путем сведения ее к одному уравнению порядка , называется ***методом исключения****.*

ПРИМЕР 1. Найти методом исключения общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 - 5y_2 + 4x - 1, \\ y_2' = y_1 - 2y_2 + x. \end{cases}$$

Указать решение, удовлетворяющее условиям $y_1(0) = 11, y_2(0) = 3$.

РЕШЕНИЕ. Продифференцируем второе уравнение системы:

$$y_2'' = y_1' - 2y_2' + 1.$$

Заменим y_1' ее выражением из первого уравнения системы:

$$y_2'' = 4y_1 - 5y_2 + 4x - 1 - 2y_2' + 1. \tag{10}$$

Из второго уравнения системы находим:

$$y_1 = y_2' + 2y_2 - x.$$

Подставляя выражение для y_1 в (10) получим уравнение:

$$y_2'' - 2y_2' - 3y_2 = 0.$$

Его общее решение:

$$y_2 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}.$$

Дифференцируя y_2 и подставляя и y_2 и y_2' в выражение для y_1 находим:

$$y_1 = 5C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - x.$$

Таким образом, общее решение системы имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = 5C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - x, \\ y_2 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}. \end{cases}$$

Найдем значение постоянных C_1 и C_2, при которых частное решение будет удовлетворять начальным условиям $y_1(0) = 11, y_2(0) = 3.$

Подставив в общее решение $x_0 = 0, y_1 = 11, y_2 = 3$ будем иметь

$$\begin{cases} 11 = 5C_1 + C_2, \\ 3 = C_1 + C_2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2, \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Следовательно, решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = 10e^{3x} + e^{-x} - x, \\ y_2 = 2e^{3x} + e^{-x}. \end{cases} \diamond$$

Метод интегрируемых комбинаций

Пусть решение системы дифференциальных уравнений

$$y_i' = f_i(x, y_1, \dots, y_n) \quad (i = \overline{1,n}) \tag{11}$$

имеет вид:

$$y_i = \varphi_i(x, C_1, \dots, C_n) \quad (i = \overline{1,n}). \tag{12}$$

Можно доказать, что в области $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, в которой выполняются условия теоремы существования и единственности решения, система (12) может быть однозначно разрешена относительно $C_1, C_2, \dots, C_n$. Т. е. в области D справедливы равенства

$$\begin{cases} \psi_1(x, y_1, \ldots, y_n) = C_1, \\ \psi_2(x, y_1, \ldots, y_n) = C_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_n(x, y_1, \ldots, y_n) = C_n. \end{cases} \qquad (13)$$

Совокупность равенств (13) называют ***общим интегралом системы*** (11), а каждое из равенств системы (13) называют ***первым интегралом системы*** (11).

Иногда при интегрировании системы дифференциальных уравнений легче найти именно общий интеграл системы. Так, например, если с помощью элементарных преобразований система (11) приводится к виду

$d\Phi_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n) = 0 \quad (i = \overline{1,n})$,	(14)

то $\quad \Phi_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n) = C_i \quad (i = \overline{1,n})$

будут первыми интегралами системы, а их совокупность – общий интеграл. Такой способ интегрирования систем называют ***методом интегрируемых комбинаций***.

ПРИМЕР. Найти первые интегралы системы

$$\begin{cases} y_1 y_1' + y_2 y_2' + 1 = 0, \\ \dfrac{y_1'}{y_1} + \dfrac{y_2'}{y_2} + y_1 y_2' + y_2 y_1' = 0. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Заметим, что систему можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} y_1 dy_1 + y_2 dy_2 + dx = 0, \\ \dfrac{dy_1}{y_1} + \dfrac{dy_2}{y_2} + y_1 dy_2 + y_2 dy_1 = 0; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} d(y_1^2) + \dfrac{1}{2} d(y_2^2) + dx = 0, \\ d(\ln|y_1|) + d(\ln|y_2|) + d(y_1 y_2) = 0; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d(y_1^2 + y_2^2 + 2x) = 0, \\ d(\ln|y_1| + \ln|y_2| + y_2 y_1) = 0. \end{cases}$$

Значит, общий интеграл системы:

$$\begin{cases} y_1^2 + y_2^2 + 2x = C_1, \\ \ln\|y_1| + \ln|y_2| + y_2 y_1 = C_2. \end{cases}$$