Рассмотрим линейную однородную систему

$$L[\mathbf{Y}] = \mathbf{O}, \qquad (20.7)$$

в которой все коэффициенты $a_{ij}(x)$ непрерывны на $[a,b]$. Тогда в области

$$D = \{(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \,|\, x \in [a;b],\ \forall y_i \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n+1}}$$

для системы (20.7) будут выполняться условия теоремы существования и единственности решения и, следовательно, для любого $x_0 \in [a;b]$ и любого $y_{i0} \in \mathbb{R}$ существует единственное решение системы (20.7), удовлетворяющее условию

$$y_1(x_0) = y_{10}, \quad y_2(x_0) = y_{20}, \quad \ldots, \quad y_n(x_0) = y_{n0}.$$

Так как оператор $L[\mathbf{Y}]$ – линейный, то справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 20.1. *Если* $\mathbf{Y}_1$ *и* $\mathbf{Y}_2$ *– решения линейной однородной системы* (20.7)*, то* $\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2$ *и* $C\mathbf{Y}_1$ $(\forall C \in \mathbb{R})$ *тоже являются решениями линейной однородной системы* (20.7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо убедиться, что $\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2$ и $C\mathbf{Y}_1$ удовлетворяют системе $L[\mathbf{Y}] = \mathbf{O}$. Из условия (20.5) получаем:

$$L[C\,\mathbf{Y}_1] = C \cdot L[\mathbf{Y}_1] = C \cdot \mathbf{O} = \mathbf{O}.$$

Из условия (20.6) получаем:

$$L[\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2] = L[\mathbf{Y}_1] + L[\mathbf{Y}_2] = \mathbf{O} + \mathbf{O} = \mathbf{O}. \quad \blacksquare$$

СЛЕДСТВИЕ 20.2. *Если* $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_k$ *– решения линейной однородной системы* (20.7), *то для любых постоянных* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *линейная комбинация решений*

$$\sum_{i=1}^{k} C_i \mathbf{Y}_i = C_1 \mathbf{Y}_1 + C_2 \mathbf{Y}_2 + \ldots + C_k \mathbf{Y}_k$$

тоже является решением системы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (20.5) и (20.6) следует справедливость равенства

$$L\left[\sum_{i=1}^{k} C_i \mathbf{Y}_i\right] = \sum_{i=1}^{k} C_i L[\mathbf{Y}_i] = \sum_{i=1}^{k} C_i \cdot \mathbf{O} = \mathbf{O},$$

где C_i – произвольные постоянные. Но это и означает, что $\sum_{i=1}^{k} C_i \mathbf{Y}_i$ – решение однородной системы (20.7). ■

Обозначим через $S_n[a,b]$ множество матриц-столбцов порядка n, элементы которых являются решениями системы (20.7). Так как функции любого решения системы (20.7) является непрерывно дифференцируемыми, то

$$S_n[a,b] \subset D_n[a;b],$$

где $D_n[a,b]$ – множество матриц-столбцов длины n, элементами которых являются функции, непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a;b]$. Более того, в силу теоремы 20.1, $S_n[a,b]$ ***является подпространством линейного пространства*** $D_n[a,b]$. Оказалось также, что линейное пространство $S_n[a,b]$ конечномерное. Чтобы доказать это, необходимо нам сначала получить условие линейной независимости векторов пространства $S_n[a,b]$.

Возьмем в пространстве $D_n[a,b]$ n векторов:

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \\ \cdots\cdots \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_2 = \begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \\ \cdots\cdots \\ y_{n2}(x) \end{pmatrix}, \ \ldots, \ \mathbf{Y}_n = \begin{pmatrix} y_{1n}(x) \\ y_{2n}(x) \\ \cdots\cdots \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix}. \qquad (20.8)$$

Если векторы $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ линейно зависимы на $[a,b]$, то существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ такие, что хотя бы одно из них отлично от нуля и

$$\alpha_1 \mathbf{Y}_1 + \alpha_2 \mathbf{Y}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{Y}_n \equiv 0.$$

Это тождество означает, что система

$$\begin{cases} \alpha_1 y_{11} + \alpha_2 y_{12} + \ldots + \alpha_n y_{1n} \equiv 0, \\ \alpha_1 y_{21} + \alpha_2 y_{22} + \ldots + \alpha_n y_{2n} \equiv 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 y_{n1} + \alpha_2 y_{n2} + \ldots + \alpha_n y_{nn} \equiv 0 \end{cases} \tag{20.9}$$

имеет нетривиальные решения. А это возможно только в том случае, когда определитель матрицы системы (20.9) тождественно равен нулю.

Матрица системы (20.9)

$$\boxed{\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}} \tag{20.10}$$

называется ***интегральной матрицей***, а ее определитель называется ***определителем Вронского (вронскианом)*** векторов $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ и обозначается

$$W\,[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n] \quad \text{или} \quad W\,[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n](x)\,.$$

Таким образом, мы показали что справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 20.3 (необходимое условие линейной зависимости n векторов пространства $D_n[a,b]$). *Если векторы $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ линейно зависимы на $[a;b]$, то их определитель Вронского на $[a;b]$ тождественно равен нулю.*

Теорема 20.3 дает необходимое условие линейной зависимости векторов $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$. Достаточным это условие для произвольных n элементов пространства $D_n[a,b]$ не будет, т. е. если $W\,[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n] \equiv 0$, то векторы $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ могут оказаться как линейно зависимыми, так и линейно независимыми.

ПРИМЕР 20.1. Для векторов $\mathbf{Y}_1 = \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{Y}_2 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ имеем:

$$W\,[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2] = \begin{vmatrix} x^2 & x \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0\,.$$

Однако эти векторы линейно независимы, так как из $\alpha_1 \mathbf{Y}_1 + \alpha_2 \mathbf{Y}_2 \equiv 0$ следует

$$\begin{cases} \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x \equiv 0\,, \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 \equiv 0\,; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x \equiv 0 \quad \text{или} \quad \alpha_1 x + \alpha_2 \equiv 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0\,.$$

Но ситуация меняется, если $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ – решения линейной однородной системы (20.7). Здесь справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 20.4 (условие линейной независимости решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений)**.** *Если n решений $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ линейной однородной системы* (20.7) *линейно независимы на* $[a;b]$*, то их определитель Вронского* $W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n]$ *не может обратиться в нуль ни в одной точке этого промежутка.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ линейно независимы на $[a;b]$ и существует $x_0 \in [a;b]$ такое, что

$$W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n](x_0) = \begin{vmatrix} y_{11}(x_0) & y_{12}(x_0) & \ldots & y_{1n}(x_0) \\ y_{21}(x_0) & y_{22}(x_0) & \ldots & y_{2n}(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n1}(x_0) & y_{n2}(x_0) & \ldots & y_{nn}(x_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Рассмотрим систему n линейных однородных уравнений, матрицу которой составляют числа $y_{ij}(x_0)$:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_{11}(x_0) + \alpha_2 y_{12}(x_0) + \ldots + \alpha_n y_{1n}(x_0) = 0, \\ \alpha_1 y_{21}(x_0) + \alpha_2 y_{22}(x_0) + \ldots + \alpha_n y_{2n}(x_0) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 y_{n1}(x_0) + \alpha_2 y_{n2}(x_0) + \ldots + \alpha_n y_{nn}(x_0) = 0. \end{cases} \qquad (20.11)$$

Определитель матрицы системы (20.11)

$$\det \mathbf{M} = W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n](x_0) = 0.$$

Следовательно, система (20.11) имеет нетривиальные решения.

Пусть $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_n$ – одно из нетривиальных решений системы (20.11). Рассмотрим матрицу-столбец

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \tilde{\alpha}_1 \mathbf{Y}_1 + \tilde{\alpha}_2 \mathbf{Y}_2 + \ldots + \tilde{\alpha}_n \mathbf{Y}_n.$$

Так как $\mathbf{Y}_i$ – решения линейной однородной системы $L[\mathbf{Y}] = \mathbf{O}$, то $\tilde{\mathbf{Y}}$ – решение той же системы, удовлетворяющее в силу (20.11), начальным условиям $\mathbf{Y}(x_0) = \mathbf{O}$.

С другой стороны, однородная система $L[\mathbf{Y}] = \mathbf{O}$ всегда имеет нулевое решение $\mathbf{Y}(x) \equiv \mathbf{O}$, которое тоже удовлетворяет начальному условию $\mathbf{Y}(x_0) = \mathbf{O}$.

Поскольку, по теореме существования и единственности решения, начальные условия определяют единственное решение, получаем:

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \tilde{\alpha}_1 \mathbf{Y}_1 + \tilde{\alpha}_2 \mathbf{Y}_2 + \ldots + \tilde{\alpha}_n \mathbf{Y}_n = \mathbf{O},$$

причем среди коэффициентов $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_n$ есть ненулевые. Но это означает, что $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ линейно зависимы на $[a;b]$, что противоречит условию теоремы.

Следовательно, предположение было неверным и

$$W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n](x) \neq 0, \quad \forall x \in [a;b]. \ \blacksquare$$

СЛЕДСТВИЕ 20.5 (теоремы 20.3 и 20.4). Пусть $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ – *решения системы* (20.7). *Тогда их определитель Вронского* $W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n]$ *либо тождественно равен нулю, и это означает, что решения* $\mathbf{Y}_i$ *линейно зависимы*; *либо не обращается в нуль ни в одной точке* $x \in [a,b]$, *и это означает, что решения* $\mathbf{Y}_i$ *линейно независимы.*

Следствие 20.5 позволяет доказать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 20.6. *Пространство решений* $S_n[a,b]$ *линейной однородной системы* (20.7) *конечномерно и его размерность совпадает с порядком системы, т. е.* $\dim S_n[a;b] = n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1) Покажем, что для системы (20.7) можно найти n линейно независимых решений.

Возьмем любое $x_0 \in [a;b]$ и любой определитель Δ_n порядка n, отличный от нуля. Например, пусть

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}.$$

По теореме существования и единственности решения получаем, что существуют n решений системы (20.7)

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \\ \ldots\ldots \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_2 = \begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \\ \ldots\ldots \\ y_{n2}(x) \end{pmatrix}, \ \ldots, \ \mathbf{Y}_n = \begin{pmatrix} y_{1n}(x) \\ y_{2n}(x) \\ \ldots\ldots \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix},$$

определенных в окрестности точки x_0 и удовлетворяющих условиям:

1) $y_{11}(x_0) = 1, \ y_{21}(x_0) = 0, \ \ldots\ldots\ldots, \ y_{n1}(x_0) = 0$
(где $1, 0, \ldots, 0$ – числа из первого столбца определителя Δ_n);

2) $y_{12}(x_0) = 0, \ y_{22}(x_0) = 1, \ \ldots\ldots\ldots, \ y_{n2}(x_0) = 0$
(где $0, 1, \ldots, 0$ – числа из второго столбца определителя Δ_n);

…………………………………………………………………

n) $y_{1n}(x_0) = 0, \ y_{2n}(x_0) = 0, \ \ldots\ldots\ldots, \ y_{nn}(x_0) = 1$
(где $0, 0, \ldots, 1$ – числа из n-го столбца определителя Δ_n).

Для найденных таким образом решений $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ имеем:

$$W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n](x_0) = \Delta_n \neq 0,$$

и, следовательно, по следствию 20.5, $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ – линейно независимы.

2) Покажем, что любое решение однородной системы (20.7) может быть представлено как линейная комбинация ее n линейно независимых решений.

Пусть $\mathbf{Y}_1 = (y_{i1}), \mathbf{Y}_2 = (y_{i2}), \ldots, \mathbf{Y}_n = (y_{in})$ – некоторые линейно независимые решения системы (20.7), $\hat{\mathbf{Y}} = (\hat{y}_i)$ – решение системы (20.7), удовлетворяющее условию $\hat{\mathbf{Y}}(x_0) = \mathbf{Y_0}$, т. е.

$$\hat{y}_1(x_0) = y_{10},\ \hat{y}_2(x_0) = y_{20},\ \ldots,\ \hat{y}_n(x_0) = y_{n0}.$$

Рассмотрим систему n линейных уравнений вида:

$$\begin{cases} y_{10} = C_1 y_{11}(x_0) + C_2 y_{12}(x_0) + \ldots + C_n y_{1n}(x_0), \\ y_{20} = C_1 y_{21}(x_0) + C_2 y_{22}(x_0) + \ldots + C_n y_{2n}(x_0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n0} = C_1 y_{n1}(x_0) + C_2 y_{n2}(x_0) + \ldots + C_n y_{nn}(x_0). \end{cases} \tag{20.12}$$

Так как $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ – линейно независимые решения системы (20.7), то для матрицы системы $\mathbf{M}$ имеем:

$$\det \mathbf{M} = W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n](x_0) \neq 0.$$

Следовательно, система (20.12) имеет единственное решение $\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2, \ldots, \widetilde{C}_n$.

Рассмотрим матрицу-столбец $\widetilde{\mathbf{Y}} = \widetilde{C}_1 \mathbf{Y}_1 + \widetilde{C}_2 \mathbf{Y}_2 + \ldots + \widetilde{C}_n \mathbf{Y}_n = (\widetilde{y}_i)$. В силу следствия (18.5) она будет являться решением системы (20.7), причем

$\widetilde{y}_1(x_0) = y_{10}$ (из 1-го уравнения системы (20.12)),

$\widetilde{y}_2(x_0) = y_{20}$ (из 2-го уравнения системы (20.12)),

…………………………………………………

$\widetilde{y}_n(x_0) = y_{n0}$ (из n-го уравнения системы (20.12)).

Но начальным условиям

$$y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20},\ \ldots,\ y_n(x_0) = y_{n0}$$

удовлетворяет и решение $\hat{\mathbf{Y}}$.

Поскольку, по теореме существования и единственности решения, начальные условия определяют единственное решение, получаем:

$$\hat{\mathbf{Y}} = \widetilde{C}_1 \mathbf{Y}_1 + \widetilde{C}_2 \mathbf{Y}_2 + \ldots + \widetilde{C}_n \mathbf{Y}_n = \widetilde{\mathbf{Y}}.\ \blacksquare$$

Система n линейно независимых решений линейной однородной системы порядка n (базис пространства $S_n[a;b]$) называется его ***фундаментальной системой решений***.

Если матрицы-столбцы

$$\mathbf{Y}_1=\begin{pmatrix} y_{11}(x)\\ y_{21}(x)\\ \dots\dots\\ y_{n1}(x)\end{pmatrix},\quad \mathbf{Y}_2=\begin{pmatrix} y_{12}(x)\\ y_{22}(x)\\ \dots\dots\\ y_{n2}(x)\end{pmatrix},\ \dots,\ \mathbf{Y}_n=\begin{pmatrix} y_{1n}(x)\\ y_{2n}(x)\\ \dots\dots\\ y_{nn}(x)\end{pmatrix}$$

образуют фундаментальную систему решений линейной однородной системы $L[\mathbf{Y}]=\mathbf{O}$, то общее решение этой системы имеет вид

$$\boxed{\mathbf{Y}=\sum_{i=1}^{n} C_i\mathbf{Y}_i}$$

или, подробнее

$$\begin{cases} y_1(x)=C_1y_{11}(x)+C_2y_{12}(x)+\ldots+C_ny_{1n}(x),\\ y_2(x)=C_1y_{21}(x)+C_2y_{22}(x)+\ldots+C_ny_{2n}(x),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ y_n(x)=C_1y_{n1}(x)+C_2y_{n2}(x)+\ldots+C_ny_{nn}(x).\end{cases}$$

Итак, задача интегрирования линейной однородной системы свелась к отысканию фундаментальной системы ее решений. Но сделать это для произвольной системы очень сложно. Позже мы рассмотрим один класс однородных систем, для которых практически всегда удается найти фундаментальную систему решений – линейные однородные системы с постоянными коэффициентами.

ПРИМЕР 20.2. Доказать, что $\mathbf{Y_1}=\begin{pmatrix}\cos x\\ -\sin x\end{pmatrix}$ и $\mathbf{Y_2}=\begin{pmatrix}\sin x\\ \cos x\end{pmatrix}$ образуют фундаментальную систему решений системы

$$\begin{cases} y_1'=y_2,\\ y_2'=-y_1.\end{cases}$$

Записать общее решение этой системы.

РЕШЕНИЕ. Имеем:

$$W[\mathbf{Y}_1,\mathbf{Y}_2]=\begin{vmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{vmatrix}=1\neq 0\,.$$

Следовательно, $\mathbf{Y}_1,\mathbf{Y}_2$ – линейно независимы (по следствию (20.7)) и образуют фундаментальную систему решений (по теореме 20.6). Поэтому общее решение можно записать в виде

$$\mathbf{Y}=C_1\mathbf{Y}_1+C_2\mathbf{Y}_2=\begin{pmatrix} C_1\cos x+C_2\sin x\\ -C_1\sin x+C_2\cos x\end{pmatrix}.\ \diamond$$

20.2. Линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений

Рассмотрим линейную неоднородную систему

$$\mathbf{Y}' - \mathbf{AY} = \mathbf{B}. \tag{20.13}$$

Если известно общее решение соответствующей однородной системы

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{AY}, \tag{20.14}$$

то можно найти общее решение неоднородной системы (20.13) изложенным ниже методом, который называют ***методом вариации постоянных***.

Пусть $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ – фундаментальная система решений линейной однородной системы (20.14). Тогда его общее решение будет иметь вид

$$\mathbf{Y} = C_1\mathbf{Y}_1 + C_2\mathbf{Y}_2 + \ldots + C_n\mathbf{Y}_n, \tag{20.15}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

Полагаем, что решение линейной неоднородной системы по структуре совпадает с решением соответствующей однородной системы, т. е. имеет вид

$$\mathbf{Y} = C_1(x)\mathbf{Y}_1 + C_2(x)\mathbf{Y}_2 + \ldots + C_n(x)\mathbf{Y}_n = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\mathbf{Y}_i, \tag{20.16}$$

где $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ – некоторые пока неизвестные функции. Тогда

$$\mathbf{Y}' = \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\mathbf{Y}_i + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\mathbf{Y}_i'.$$

Подставим $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{Y}'$ в неоднородную систему $\mathbf{Y}' - \mathbf{AY} = \mathbf{B}$:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\mathbf{Y}_i + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\mathbf{Y}_i' - \mathbf{A} \cdot \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\mathbf{Y}_i = \mathbf{B},$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\mathbf{Y}_i + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)(\mathbf{Y}_i' - \mathbf{AY}_i) = \mathbf{B}.$$

Т.к. $\mathbf{Y}_i$ – решения однородной системы, то $\mathbf{Y}_i' - \mathbf{AY}_i = \mathbf{O}$ и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\mathbf{Y}_i = \mathbf{B},$$

или, более подробно,

$$\begin{cases} C_1'(x)y_{11} + C_2'(x)y_{21} + \ldots + C_n'(x)y_{n1} = b_1(x), \\ C_1'(x)y_{12} + C_2'(x)y_{22} + \ldots + C_n'(x)y_{n2} = b_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)y_{1n} + C_2'(x)y_{2n} + \ldots + C_n'(x)y_{nn} = b_n(x). \end{cases} \tag{20.17}$$

Это линейная неоднородная система относительно неизвестных функций $C_i'(x)$. Ее определитель – определитель Вронского для системы линейно независимых решений $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$, и, следовательно, он отличен от нуля. Значит система (20.7) имеет единственное решение

$$C_i'(x) = \varphi_i(x) \quad (i = \overline{1,n}),$$

откуда интегрированием находим

$$C_i(x) = \int \varphi_i(x)dx + C_i \quad (i = \overline{1,n}), \tag{20.18}$$

где C_i – произвольные постоянные.

Подставим найденные функции $C_i(x)$ в (20.16) и получим общее решение неоднородной системы (20.13):

$$\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{n} \left(\int \varphi_i(x)dx + C_i \right) \mathbf{Y}_i .$$

ПРИМЕР 20.3. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -y_1 + \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Запишем соответствующую однородную систему

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1 . \end{cases}$$

Из первого уравнения находим:

$$y_1'' = y_2' \quad \Rightarrow \quad y_1'' = -y_1 .$$

Получили линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Его характеристические корни $\lambda_{1,2} = \pm i$ и, следовательно, общее решение уравнения

$$y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x .$$

Тогда из первого уравнения системы

$$y_2 = y_1' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x .$$

Таким образом, общее решение однородной системы имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \\ y_2 = -C_1 \sin x + C_2 \cos x \end{cases}$$

или, в матричном виде,

$$\mathbf{Y}_{oo} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \cos x + C_2 \sin x \\ -C_1 \sin x + C_2 \cos x \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}.$$

Полагаем, что общее решение неоднородной системы имеет вид

$$\mathbf{Y}_{он}=C_1(x)\begin{pmatrix}\cos x\\ -\sin x\end{pmatrix}+C_2(x)\begin{pmatrix}\sin x\\ \cos x\end{pmatrix}$$

или, подробнее,

$$\begin{cases} y_1 = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x, \\ y_2 = -C_1(x)\sin x + C_2(x)\cos x. \end{cases}$$

Тогда функции $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ должны удовлетворять системе (20.17)

$$\begin{cases} C_1'\cos x + C_2'\sin x = 0, \\ -C_1'\sin x + C_2'\cos x = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Решая систему по формулам Крамера, находим:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}=1,\quad \Delta_1=\begin{vmatrix}0 & \sin x\\ \dfrac{1}{\cos x} & \cos x\end{vmatrix}=-tgx,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}\cos x & 0\\ -\sin x & \dfrac{1}{\cos x}\end{vmatrix}=1,$$

$$\Rightarrow\quad C_1'(x)=-tgx,\qquad C_2'(x)=1.$$

Интегрируя, получаем:

$$C_1(x)=\ln|\cos x|+C_1,\qquad C_2(x)=x+C_2.$$

Следовательно, общее решение неоднородной системы будет иметь вид

$$\mathbf{Y}_{он}=(\ln|\cos x|+C_1)\cdot\begin{pmatrix}\cos x\\ -\sin x\end{pmatrix}+(x+C_2)\cdot\begin{pmatrix}\sin x\\ \cos x\end{pmatrix}=$$

$$=C_1\begin{pmatrix}\cos x\\ -\sin x\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}\sin x\\ \cos x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos x\\ -\sin x\end{pmatrix}\cdot\ln|\cos x|+\begin{pmatrix}\sin x\\ \cos x\end{pmatrix}\cdot x$$

или, подробнее,

$$\begin{cases} y_1 = C_1\cos x + C_2\sin x + \cos x\cdot\ln|\cos x| + x\sin x, \\ y_2 = -C_1\sin x + C_2\cos x - \sin x\cdot\ln|\cos x| + x\cos x. \end{cases}\quad\diamond$$

Замечание. Общее решение (20.18) линейной неоднородной системы (20.13) можно переписать в виде

$$\mathbf{Y}=\sum_{i=1}^{n}C_i\mathbf{Y}_i+\sum_{i=1}^{n}\left(\int\varphi_i(x)dx\right)\mathbf{Y}_i.$$

Здесь слагаемое $\sum_{i=1}^{n}C_i\mathbf{Y}_i$ – общее решение соответствующей однородной системы, а слагаемое $\overline{\mathbf{Y}}=\sum_{i=1}^{n}\left(\int\varphi_i(x)dx\right)\mathbf{Y}_i$ – частное решение системы (20.13) (получается из общего решения при $C_i=0$ $(i=\overline{1,n})$).

В общем случае оказалась справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 20.7 (о структуре общего решения неоднородной системы дифференциальных уравнений). *Общее решение неоднородной системы*

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{AY} + \mathbf{B}$$

с непрерывными на $[a,b]$ *коэффициентами* $a_{ij}(x)$ *и правыми частями* $b_i(x)$, *равно сумме общего решения соответствующей однородной системы* $\mathbf{Y}' = \mathbf{AY}$ *и частного решения* $\overline{\mathbf{Y}}$ *рассматриваемой неоднородной системы, т. е.*

$$\boxed{\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{n} C_i \mathbf{Y_i} + \overline{\mathbf{Y}},} \tag{20.19}$$

где $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ *– фундаментальная система решений однородной системы* $\mathbf{Y}' = \mathbf{AY}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перейдем к операторному представлению систем:

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{AY} + \mathbf{B} \quad \leftrightarrow \quad L[\mathbf{Y}] = \mathbf{B},$$

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{AY} \quad \leftrightarrow \quad L[\mathbf{Y}] = \mathbf{O}.$$

По условию теоремы $\quad L[\overline{\mathbf{Y}}] = \mathbf{B}, \; L[\mathbf{Y_i}] = \mathbf{O}$.

Тогда, в силу линейности оператора L, имеем:

$$L\left(\sum_{i=1}^{n} C_i \mathbf{Y_i} + \overline{\mathbf{Y}}\right) = L\left(\sum_{i=1}^{n} C_i \mathbf{Y_i}\right) + L(\overline{\mathbf{Y}}) = \sum_{i=1}^{n} C_i L(\mathbf{Y_i}) + L(\overline{\mathbf{Y}}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot \mathbf{O} + \mathbf{B} = \mathbf{B}. \ \blacksquare$$

Таким образом, задача нахождения общего решения неоднородной системы может быть сведена к нахождению одного частного решения этой системы и фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы. В этом случае может оказаться полезной и следующая теорема.

ТЕОРЕМА 20.8 (о наложении решений). *Если* $\mathbf{Y_i}$ *– решения неоднородных систем* $\quad \mathbf{Y}' = \mathbf{AY} + \mathbf{B_i} \quad (i = \overline{1,m})$,

то их сумма $\mathbf{Y_1} + \mathbf{Y_2} + \ldots + \mathbf{Y_m}$ *является решением неоднородной системы*

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{AY} + (\mathbf{B_1} + \mathbf{B_2} + \ldots + \mathbf{B_m}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перейдем к операторному представлению систем:

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{AY} + \mathbf{B_i} \quad \leftrightarrow \quad L[\mathbf{Y}] = \mathbf{B_i},$$

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{AY} + \sum_{i=1}^{m} \mathbf{B_i} \quad \leftrightarrow \quad L[\mathbf{Y}] = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{B_i}.$$

По условию теоремы

$$L[\mathbf{Y_i}] = \mathbf{B_i} \quad (i = \overline{1,m}).$$

Тогда, в силу линейности оператора L, имеем:

$$L\left[\sum_{i=1}^{m} \mathbf{Y_i}\right] = \sum_{i=1}^{m} L[\mathbf{Y_i}] = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{B_i}\ . \ \blacksquare$$