## § 15. Линейные неоднородные уравнения *n*-го порядка

### *15.1. Метод вариации произвольных постоянных*

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x). \quad (15.1)$$

Если известно общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \quad (15.2)$$

то можно найти и общее решение неоднородного уравнения (15.1).

Действительно, пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – фундаментальная система решений уравнения (15.2). Тогда его общее решение будет иметь вид

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \quad (15.3)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

Далее полагаем, что решение неоднородного уравнения по структуре совпадает с решением соответствующего линейного однородного уравнения, т. е. имеет вид

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \ldots + C_n(x)y_n = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i, \quad (15.4)$$

где $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ – некоторые пока неизвестные функции.

Для определения *n* неизвестных $C_i(x)$ есть пока только одно обязательное условие – функция (15.4) должна удовлетворять неоднородному уравнению (15.1). Следовательно, $(n-1)$ условие для выбора функций $C_i(x)$ можно задать произвольно, лишь бы полученная система условий оказалась совместной. Например, можно потребовать, чтобы *производные* $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ *функции* (15.4) *структурно совпадали с производными функции* (15.3), *т. е. чтобы они получались из соответствующих производных функции* (15.3) *заменой констант* $C_i$ *функциями* $C_i(x)$. Так как для функции (15.3)

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + \ldots + C_n y_n' = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i',$$

а для функции (15.4)

$$y' = \left[C_1'(x)y_1 + C_1(x)y_1'\right] + \ldots + \left[C_n'(x)y_n + C_n(x)y_n'\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i',$$

то такое требование приведет к первому произвольному условию

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i = C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \ldots + C_n'(x)y_n = 0. \quad (a_1)$$

Далее, для функции (15.3)

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + \ldots + C_n y_n'' = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i'',$$

а для функции (15.4) (при условии а$_1$)

$$y'' = \left[C_1'(x) y_1' + C_1(x) y_1''\right] + \ldots + \left[C_n'(x) y_n' + C_n(x) y_n''\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i' + \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i'',$$

что приводит ко второму произвольному условию

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i' = C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' + \ldots + C_n'(x) y_n' = 0. \qquad (\text{a}_2)$$

Продолжая этот процесс, в качестве $(n-1)$-го произвольного условия получим

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-2)} = C_1'(x) y_1^{(n-2)} + C_2'(x) y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x) y_n^{(n-2)} = 0. \qquad (\text{a}_{\text{n-1}})$$

Так как согласно нашим предположениям производные $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ функции (15.4) имеют вид

$$y^{(k)} = C_1(x) y_1^{(k)} + \ldots + C_n(x) y_n^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i^{(k)} \ \ (k = \overline{1, n-1}),$$

то $$y^{(n)} = \left[C_1'(x) y_1^{(n-1)} + C_1(x) y_1^{(n)}\right] + \ldots + \left[C_n'(x) y_n^{(n-1)} + C_n(x) y_n^{(n)}\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i^{(n)},$$

и из обязательного условия получаем:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i^{(n)}}_{y^{(n)}} + a_1(x) \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i^{(n-1)}}_{y^{(n-1)}} + \ldots + a_n(x) \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i}_{y} = f(x),$$

$$\Rightarrow \ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n} C_i(x) \underbrace{\left[y_i^{(n)} + a_1(x) y_i^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y_i\right]}_{0} = f(x),$$

$$\Rightarrow \ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)} = f(x). \qquad (\text{a}_{\text{n}})$$

Итак, требование, чтобы производные $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ функции (15.4) получались из соответствующих производных функции (15.3) заменой констант $C_i$ функциями $C_i(x)$ дало для функций $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ условия (а$_1$), (а$_2$), …, (а$_n$), т. е. систему

$$\boxed{\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \ldots + C_n'(x)y_n = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \ldots + C_n'(x)y_n' = 0, \\ C_1'(x)y_1'' + C_2'(x)y_2'' + \ldots + C_n'(x)y_n'' = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \ldots \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}} \qquad (15.5)$$

Система (15.5) – система $n$ линейных уравнений с $n$ неизвестными. Ее определитель – определитель Вронского $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$. Так как функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ образуют фундаментальную систему решений однородного уравнения, то по теореме 14.8 их определитель Вронского отличен от нуля при любом $x$. Поэтому система (15.5) совместна и имеет единственное решение. Решая ее, находим

$$C_i'(x) = \psi_i(x), \quad (i = \overline{1,n}).$$

Откуда получаем

$$C_i(x) = \int \psi_i(x)dx = \varphi_i(x) + \widetilde{C}_i,$$

где $\widetilde{C}_i$ – произвольные постоянные. Общее решение неоднородного уравнения тогда имеет вид

$$y = \sum_{i=1}^{n} \left(\varphi_i(x) + \widetilde{C}_i\right) y_i. \qquad (15.6)$$

Изложенный выше метод нахождения решения линейного неоднородного уравнения $n$-го порядка получил название ***метода вариации произвольных постоянных***.

ПРИМЕР 15.1. Найти общее решение уравнения $y'' + y = tg^2 x$.

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим сначала соответствующее однородное уравнение. Его характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm i$. Поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Теперь рассмотрим неоднородное уравнение. Его общее решение может быть записано в виде

$$y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x.$$

Система для нахождения неизвестных функций $C_1(x), C_2(x)$ будет для данного уравнения иметь вид

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ C_1'(x)(-\sin x) + C_2'(x)\cos x = tg^2 x. \end{cases}$$

Из этой системы находим (например, по формулам Крамера)

$$C_1'(x) = -\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}, \qquad C_2'(x) = tg^2 x \cdot \cos x = \frac{\sin^2 x}{\cos x}.$$

Интегрируя, получаем

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx = -\frac{1}{\cos x} - \cos x + C_1,$$

$$C_2(x) = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin x + C_2,$$

где $C_1, C_2$ – произвольные постоянные. Подставим $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в общее решение неоднородного уравнения и получим

$$y = \left(-\frac{1}{\cos x} - \cos x + C_1\right)\cos x + \left(\ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin x + C_2\right)\sin x$$

или

$$y = (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \left(\sin x \cdot \ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - 2\right). \diamond$$

ПРИМЕР 15.2. Найти общее решение уравнения $x^2 y'' - xy' + y = 6x\ln x$.
РЕШЕНИЕ. Рассмотрим сначала соответствующее однородное уравнение

$$x^2 y'' - xy' + y = 0.$$

Это уравнение Эйлера. Введем новую переменную по формуле

$$x = e^t \quad \Rightarrow \quad t = \ln x.$$

В результате получим линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Найдем его характеристическое уравнение. Полагаем

$$y = x^\lambda,$$

$$\Rightarrow \quad y' = \lambda x^{\lambda-1}, \qquad y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}.$$

Подставив $y, y', y''$ в однородное уравнение и сократив на $x^\lambda$, получим:

$$\lambda(\lambda-1) - \lambda + 1 = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Полученное характеристическое уравнение имеет корни $\lambda_{1,2} = 1$. Им соответствуют решения

$$\tilde{y}_1(t) = e^t, \qquad \tilde{y}_2(t) = te^t,$$

$$\Rightarrow \quad y_1(x) = x, \qquad y_2(x) = x\ln x.$$

Тогда общее решение однородного уравнения будет иметь вид

$$y = C_1 x + C_2 x \ln x .$$

Теперь рассмотрим неоднородное уравнение. Прежде всего, запишем его в виде

$$y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{6\ln x}{x}$$

(так как система (15.5) была получена для приведенного уравнения). Общее решение этого уравнения можно представить в виде

$$y = C_1(x)\cdot x + C_2(x)\cdot x\ln x,$$

где $C_1(x), C_2(x)$ – функции, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot x + C_2'(x)\cdot x\ln x = 0, \\ C_1'(x) + C_2'(x)\cdot(\ln x + 1) = \dfrac{6\ln x}{x}. \end{cases}$$

Решая эту систему по формулам Крамера, находим

$$D = \begin{vmatrix} x & x\ln x \\ 1 & (\ln x + 1) \end{vmatrix} = x,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & x\ln x \\ \dfrac{6\ln x}{x} & (\ln x + 1) \end{vmatrix} = -6\ln^2 x, \quad D_2 = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & \dfrac{6\ln x}{x} \end{vmatrix} = 6\ln x,$$

$$\Rightarrow \quad C_1'(x) = \frac{D_1}{D} = -\frac{6\ln^2 x}{x}, \qquad C_2'(x) = \frac{D_2}{D} = \frac{6\ln x}{x}.$$

Интегрируя, получаем

$$C_1(x) = -\int \frac{6\ln^2 x}{x}dx = -2\ln^3 x + C_1,$$

$$C_2(x) = \int \frac{6\ln x}{x}dx = 3\ln^2 x + C_2,$$

где $C_1, C_2$ – произвольные постоянные.

Подставим $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в общее решение неоднородного уравнения и получим

$$y = (-2\ln^3 x + C_1)\cdot x + (3\ln^2 x + C_2)\cdot x\ln x$$

или

$$y = C_1 x + C_2 x\ln x + x\ln^3 x . \diamond$$

### *15.2. Линейные неоднородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида*

Раскроем скобки в (15.6) и сгруппируем слагаемые следующим образом:

$$y=\sum_{i=1}^{n}\left(\varphi_i(x)+\widetilde{C}_i\right)y_i=\sum_{i=1}^{n}\widetilde{C}_i y_i+\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x)y_i\ .$$

Заметим, что первая получившаяся сумма – общее решение соответствующего однородного уравнения, вторая – частное решение неоднородного уравнения (получается из общего решения при $\widetilde{C}_i=0$). Более того, оказалось, что в общем случае справедлива следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 15.1** (О структуре общего решения линейного неоднородного уравнения). *Общее решение линейного неоднородного уравнения n-го порядка равно сумме общего решения* $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\ldots+C_ny_n(x)$ *соответствующего ему однородного уравнения и любого частного решения* $\widetilde{y}$ *неоднородного уравнения, т. е. имеет вид*

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\ldots+C_ny_n(x)+\widetilde{y}(x)\,. \qquad (15.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуется доказать, что

1) функция (15.7) является решением линейного неоднородного уравнения $n$-го порядка при любых значениях констант $C_1,\ldots,C_n$;
2) любое решение $\hat{y}(x)$ линейного неоднородного уравнения $n$-го порядка может быть получено из (15.7) при некоторых значениях констант $C_1,\ldots,C_n$.

Чтобы убедиться в справедливости первого утверждения, достаточно подставить (15.7) в линейное неоднородное уравнение:

$$\left[\sum_{i=1}^{n}C_iy_i(x)+\widetilde{y}(x)\right]^{(n)}+a_1(x)\left[\sum_{i=1}^{n}C_iy_i(x)+\widetilde{y}(x)\right]^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)\left[\sum_{i=1}^{n}C_iy_i(x)+\widetilde{y}(x)\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}C_i\underbrace{\left[y_i^{(n)}(x)+a_1(x)\cdot y_i^{(n-1)}(x)+\ldots+a_n(x)\cdot y_i(x)\right]}_{\substack{0\\ \text{(т.к. } y_i-\text{решение однородного уравнения)}}}+$$

$$+\underbrace{\left[\widetilde{y}^{(n)}(x)+a_1(x)\cdot\widetilde{y}^{(n-1)}(x)+\ldots+a_n(x)\cdot\widetilde{y}(x)\right]}_{\substack{f(x)\\ \text{(т.к. } \widetilde{y}-\text{решение неоднородного уравнения)}}}=$$

$$=0+f(x)=f(x)\,.$$

Докажем второе утверждение. Рассмотрим разность $\hat{y}(x)-\widetilde{y}(x)$. Эта функция будет являться решением однородного уравнения. Действительно,

$$[\hat{y}(x)-\tilde{y}(x)]^{(n)}+a_1(x)[\hat{y}(x)-\tilde{y}(x)]^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)[\hat{y}(x)-\tilde{y}(x)]=$$

$$=\left[\hat{y}^{(n)}(x)+a_1(x)\cdot\hat{y}^{(n-1)}(x)+\ldots+a_n(x)\cdot\hat{y}(x)\right]-$$

$$-\left[\tilde{y}^{(n)}(x)+a_1(x)\cdot\tilde{y}^{(n-1)}(x)+\ldots+a_n(x)\cdot\tilde{y}(x)\right]=$$

$$=f(x)-f(x)=0$$

Но если $\hat{y}(x)-\tilde{y}(x)$ является решением линейного однородного уравнения, то она является линейной комбинацией фундаментальной системы решений этого однородного уравнения. Т. е. существуют такие значения $\hat{C}_1,\ldots,\hat{C}_n$, что

$$\hat{y}(x)-\tilde{y}(x)=\hat{C}_1y_1(x)+\hat{C}_2y_2(x)+\ldots+\hat{C}_ny_n(x),$$

$$\Rightarrow\ \hat{y}(x)=\hat{C}_1y_1(x)+\hat{C}_2y_2(x)+\ldots+\hat{C}_ny_n(x)+\tilde{y}(x).\ \blacksquare$$

Таким образом, интегрирование линейного неоднородного дифференциального уравнения можно свести к интегрированию соответствующего однородного уравнения и нахождению какого-либо частного решения неоднородного уравнения. Однако обычно нахождение частного решения неоднородного уравнения представляет собой достаточно трудную задачу. Исключение составляют дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью вида

$$f(x)=e^{\alpha x}[P_s(x)\cos\beta x+P_k(x)\sin\beta x],\tag{15.8}$$

где $P_s(x),P_k(x)$ – многочлены степени $s$ и $k$ соответственно, $\alpha$ и $\beta$ – некоторые числа. Функцию (15.8) принято называть ***функцией специального вида.*** Для таких уравнений удалось выяснить структуру частного решения. А именно, была доказана следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 15.2** (о структуре общего решения линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами и правой часть специального вида). *Если правая часть* $f(x)$ *линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами имеет специальный вид* (15.8), *то частное решение такого уравнения может быть найдено в виде*

$$\tilde{y}=x^{\ell}e^{\alpha x}[R_m(x)\cos\beta x+T_m(x)\sin\beta x],\tag{15.9}$$

*где* $R_m(x)$ *и* $T_m(x)$ *– некоторые многочлены степени* $m$ (*где* $m$ *– большая из степеней многочленов* $P_s(x),P_k(x)$ *в правой части* $f(x)$), $\ell$ *– кратность характеристического корня* $\alpha\pm\beta i$ ($\ell=0$, *если число* $\alpha\pm\beta i$ *не является характеристическим корнем*).

ПРИМЕРЫ.

1. Если линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами имеет правую часть $f(x)=P_s(x)$, то частное решение такого уравнения имеет вид:
   а) $\tilde{y}=R_s(x)$, если число $\lambda=0$ не является корнем характеристического уравнения;
   б) $\tilde{y}=x^{\ell}\cdot R_s(x)$, если число $\lambda=0$ является корнем кратности $\ell$ характеристического уравнения.
2. Если $f(x)=P_s(x)e^{\alpha x}$, то частное решение имеет вид:
   а) $\tilde{y}=R_s(x)e^{\alpha x}$, если число $\alpha$ не является корнем характеристического уравнения;
   б) $\tilde{y}=x^{\ell}R_s(x)e^{\alpha x}$, если число $\alpha$ является корнем кратности $\ell$ характеристического уравнения.
3. Если $f(x)=P_s(x)\cos\beta x+P_k(x)\sin\beta x$, (где один из многочленов $P_s(x)$ или $P_k(x)$ может быть равен нулю), то частное решение имеет вид:
   а) $\tilde{y}=R_m(x)\cos\beta x+T_m(x)\sin\beta x$, если число $\pm\beta i$ не является характеристическим корнем уравнения;
   б) $\tilde{y}=x^{\ell}\left[R_m(x)\cos\beta x+T_m(x)\sin\beta x\right]$, если число $\pm\beta i$ является корнем кратности $\ell$ характеристического уравнения.

Находя частное решение по теореме 15.2, многочлены $R_m(x)$ *и* $T_m(x)$ записывают с неопределенными коэффициентами, а затем определяют их, подставляя решение в дифференциальное уравнение.

ПРИМЕР 15.2. Найти общее решение уравнения
$$y''-2y'+y=8e^{3x}.$$
РЕШЕНИЕ. Сначала рассмотрим соответствующее однородное уравнение
$$y''-2y'+y=0.$$
Так как его характеристическое уравнение $\lambda^2-2\lambda+1=0$ имеет корни $\lambda_{1,2}=1$, то общее решение однородного уравнения будет иметь вид
$$y=C_1e^{x}+C_2xe^{x}.$$
Теперь найдем частное решение неоднородного уравнения. Правая часть является произведением числа и показательной функции $e^{3x}$:

$$f(x) = 8e^{3x} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 3,\ \beta = 0,\ s = 0.$$

При этом число $\alpha \pm \beta i = 3$ не является корнем характеристического уравнения. Поэтому частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения надо искать в виде
$$\tilde{y} = Ae^{3x},$$
где $A$ – неизвестный коэффициент.

Имеем:
$$\tilde{y}' = 3Ae^{3x}, \quad \tilde{y}'' = 9Ae^{3x}.$$

Подставим $\tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}''$ в неоднородное уравнение и получим
$$9Ae^{3x} - 2 \cdot 3Ae^{3x} + Ae^{3x} = 8e^{3x},$$
$$\Rightarrow \ 4Ae^{3x} = 8e^{3x},$$
$$\Rightarrow \ 4A = 8 \quad \text{или} \quad A = 2.$$

Таким образом, $\tilde{y} = 2e^{3x}$ – частное решение неоднородного уравнения, а его общее решение имеет вид
$$y = (C_1e^x + C_2xe^x) + 2e^{3x}. \diamond$$

ПРИМЕР 15.3. Найти общее решение уравнения
$$y'' - 3y' + 2y = e^x(3 - 4x).$$

РЕШЕНИЕ. Сначала рассмотрим соответствующее однородное уравнение
$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Так как его характеристическое уравнение $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, то общее решение однородного уравнения будет иметь вид
$$y = C_1e^x + C_2e^{2x}.$$

Теперь найдем частное решение неоднородного уравнения. Правая часть уравнения является произведением многочлена первой степени и показательной функции $e^x$:
$$f(x) = e^x(3 - 4x) \quad \Rightarrow \ \alpha = 1,\ \beta = 0,\ s = 1.$$

При этом число $\alpha \pm \beta i = 1$ является корнем характеристического уравнения кратности 1. Поэтому частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения надо искать в виде
$$\tilde{y} = xe^x(Ax + B) = e^x(Ax^2 + Bx),$$
где $A$ и $B$ – неизвестные коэффициенты.

Имеем:
$$\tilde{y}' = e^x\left[Ax^2 + (B + 2A)x + B)\right],$$
$$\tilde{y}'' = e^x\left[Ax^2 + (B + 4A)x + (2A + 2B)\right].$$

Подставим $\tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}''$ в неоднородное уравнение и получим
$$e^x\left[Ax^2 + (B + 4A)x + (2A + 2B)\right] - 3e^x\left[Ax^2 + (B + 2A)x + B\right] + 2e^x\left[Ax^2 + Bx\right] = e^x(3 - 4x),$$

$$\Rightarrow\ e^x\big[(A-3A+2A)x^2+(4A+B-6A-3B+2B)x+(2A+2B-3B)\big]=e^x(3-4x),$$

$$\Rightarrow\ -2A\cdot x+(2A-B)=3-4x,$$

$$\Rightarrow\ \begin{cases}-2A=-4,\\ 2A-B=3;\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ A=2,\quad B=1.$$

Таким образом, $\widetilde{y}=e^x\cdot x(2x+1)$ – частное решение неоднородного уравнения, а его общее решение имеет вид

$$y=(C_1e^x+C_2e^{2x})+xe^x(2x+1).\diamond$$

ПРИМЕР 15.4. Найти общее решение уравнения

$$y''+2y'+5y=4\cos 2x+\sin 2x.$$

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$y''+2y'+5y=0.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2+2\lambda+5=0$ имеет корни $\lambda_{1,2}=-1\pm 2i$. Поэтому общее решение этого однородного уравнения имеет вид

$$y=C_1e^{-x}\cos 2x+C_2e^{-x}\sin 2x.$$

Правая часть уравнения $f(x)=4\cos 2x+\sin 2x$, т. е. $\alpha=0$, $\beta=2$, степени многочленов при синусе и косинусе $s=k=0$. Так как число $\alpha\pm\beta i=\pm 2i$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде

$$\widetilde{y}=A\cos 2x+B\sin 2x.$$

Имеем

$$\widetilde{y}'=2B\cos 2x-2A\sin 2x,\qquad \widetilde{y}''=-4A\cos 2x-4B\sin 2x.$$

Подставим $\widetilde{y},\widetilde{y}',\widetilde{y}''$ в неоднородное уравнение и получим

$$\big(-4A\cos 2x-4B\sin 2x\big)+2\big(2B\cos 2x-2A\sin 2x\big)+5\big(A\cos 2x+B\sin 2x\big)=$$
$$=4\cos 2x+\sin 2x,$$

$$\Rightarrow\ (-4A+4B+5A)\cdot\cos 2x+(-4B-4A+5B)\cdot\sin 2x=4\cos 2x+\sin 2x,$$

$$\Rightarrow\ (A+4B)\cdot\cos 2x+(-4A+B)\cdot\sin 2x=4\cos 2x+\sin 2x,$$

$$\Rightarrow\ \begin{cases}A+4B=4,\\ -4A+B=1;\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ A=0,\quad B=1.$$

Таким образом $\widetilde{y}=\sin 2x$ – частное решение неоднородного уравнения, а его общее решение имеет вид

$$y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+\sin 2x.\diamond$$

ПРИМЕР 15.5. Найти общее решение уравнения

$$y'' - y = \cos x .$$

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$y'' - y = 0 .$$

Так как его характеристическое уравнение $\lambda^2 - 1 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm 1$, то общее решение однородного уравнения будет иметь вид

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} .$$

Теперь найдем частное решение неоднородного уравнения. Правая часть уравнения является произведением многочлена нулевой степени (число 1) и тригонометрической функции $\cos x$:

$$f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0,\ \beta = 1,\ s = 0 .$$

При этом число $\alpha \pm \beta i = \pm i$ не является корнем характеристического уравнения. Поэтому частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения надо искать в виде

$$\tilde{y} = A\cos x + B\sin x ,$$

где $A$ и $B$ – неизвестные коэффициенты.

Имеем:
$$\tilde{y}' = -A\sin x + B\cos x ,$$
$$\tilde{y}'' = -A\cos x - B\sin x .$$

Подставим $\tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}''$ в неоднородное уравнение и получим:

$$[-A\cos x + B\sin x] - [A\cos x + B\sin x] = \cos x ,$$

$$\Rightarrow \ -2A\cos x - 2B\sin x = \cos x ,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2A = 1, \\ 2B = 0; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{2}, \quad B = 0 .$$

Таким образом, $\tilde{y} = -\frac{1}{2}\cos x$ – частное решение неоднородного уравнения, а его общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x . \ \diamond$$

ПРИМЕР 15.6. Найти общее решение уравнения

$$y'' + y = \cos x .$$

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$y'' + y = 0 .$$

Так как его характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm i$, то общее решение однородного уравнения будет иметь вид

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x .$$

Теперь найдем частное решение неоднородного уравнения. Правая часть уравнения является произведением многочлена нулевой степени (число 1) и тригонометрической функции $\cos x$:

$$f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \alpha = 0,\ \beta = 1,\ s = 0.$$

При этом число $\alpha \pm \beta i = \pm i$ является корнем характеристического уравнения кратности 1. Поэтому частное решение $\widetilde{y}$ неоднородного уравнения надо искать в виде

$$\widetilde{y} = x(A\cos x + B\sin x),$$

где $A$ и $B$ – неизвестные коэффициенты.

Имеем: $$\widetilde{y}' = [A\cos x + B\sin x] + x\cdot[-A\sin x + B\cos x],$$

$$\widetilde{y}'' = 2\cdot[-A\sin x + B\cos x)] + x\cdot[-A\cos x - B\sin x].$$

Подставим $\widetilde{y}, \widetilde{y}', \widetilde{y}''$ в неоднородное уравнение и получим:

$$2\cdot[-A\sin x + B\cos x)] + x\cdot[-A\cos x - B\sin x] + x\cdot[A\cos x + B\sin x] = \cos x,$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot[-A\sin x + B\cos x)] = \cos x,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2A = 0, \\ 2B = 1; \end{cases} \quad \Rightarrow\ A = 0,\quad B = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, $\widetilde{y} = \dfrac{x}{2}\sin x$ – частное решение неоднородного уравнения, а его общее решение имеет вид

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{x}{2}\sin x. \ \diamond$$

При нахождении частных решений линейного неоднородного уравнения часто оказывается полезной следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 15.3** (о наложении решений). *Если $\widetilde{y}_1(x)$ и $\widetilde{y}_2(x)$ – частные решения уравнений*

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f_1(x),$$

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f_2(x)$$

*соответственно, то функция $\widetilde{y}(x) = \widetilde{y}_1(x) + \widetilde{y}_2(x)$ будет являться решением уравнения*

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f_1(x) + f_2(x). \quad (15.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы убедится в справедливости теоремы, достаточно подставить функцию $\widetilde{y}(x) = \widetilde{y}_1(x) + \widetilde{y}_2(x)$ в уравнение (15.10):

$$[\widetilde{y}_1 + \widetilde{y}_2]^{(n)} + a_1(x)[\widetilde{y}_1 + \widetilde{y}_2]^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)[\widetilde{y}_1 + \widetilde{y}_2]' + a_n(x)[\widetilde{y}_1 + \widetilde{y}_2] =$$

$$= \left[\widetilde{y}_1^{(n)} + a_1(x)\cdot\widetilde{y}_1^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\cdot\widetilde{y}_1' + a_n(x)\cdot\widetilde{y}_1\right] +$$
$$+ \left[\widetilde{y}_2^{(n)} + a_1(x)\cdot\widetilde{y}_2^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\cdot\widetilde{y}_2' + a_n(x)\cdot\widetilde{y}_2\right] =$$
$$= f_1(x) + f_2(x). \ \blacksquare$$

ПРИМЕР 15.7. Найти общее решение уравнения
$$y''' - 2y'' + 4y' - 8y = e^{2x}\sin 2x + 2x^2.$$

РЕШЕНИЕ. Характеристическое уравнение $\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda - 8 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_{2,3} = \pm 2i$. Поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид
$$y = C_1 e^{2x} + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x.$$

Правая часть $f(x)$ не имеет специального вида, но она состоит из двух слагаемых, каждое из которых имеет специальный вид. Обозначим $f_1(x) = e^{2x}\sin 2x$, $f_2(x) = 2x^2$ и найдем частные решения $\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2$ неоднородных уравнений
$$y''' - 2y'' + 4y' - 8y = f_1(x) \quad \text{и} \quad y''' - 2y'' + 4y' - 8y = f_2(x).$$
Тогда частное решение $\widetilde{y}$ исходного уравнения будет равно сумме этих частных решений, т. е.
$$\widetilde{y} = \widetilde{y}_1 + \widetilde{y}_2.$$

1) $f_1(x) = e^{2x}\sin 2x$, т. е. $s = 0$, $\alpha = 2$, $\beta = 2$, $\alpha \pm \beta i = 2 \pm 2i$. Так как число $\alpha \pm \beta i = 2 \pm 2i$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения с правой частью $f_1(x)$ следует искать в виде
$$\widetilde{y}_1 = e^{2x}(A\cos 2x + B\sin 2x).$$
Имеем:
$$\widetilde{y}_1' = 2e^{2x}\left[(A+B)\cos 2x + (B-A)\sin 2x\right],$$
$$\widetilde{y}_1'' = 8e^{2x}\left[B\cos 2x - A\sin 2x\right],$$
$$\widetilde{y}_1''' = 16e^{2x}\left[(B-A)\cos 2x + (-A-B)\sin 2x\right].$$
Подставим $\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_1', \widetilde{y}_1'', \widetilde{y}_1'''$ в уравнение, и после приведения подобных слагаемых, получим
$$e^{2x}\cdot\left[(8B-16A)\cos 2x + (-8A-16B)\sin 2x\right] = e^{2x}\sin 2x,$$
$$\Rightarrow \ (8B-16A)\cos 2x + (-8A-16B)\sin 2x = 0\cdot\cos 2x + \sin 2x,$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 8B - 16A = 0, \\ -16B - 8A = 1; \end{cases} \quad \Rightarrow \ B = -\frac{1}{20}, \quad A = -\frac{1}{40},$$
$$\Rightarrow \ \widetilde{y}_1 = e^{2x}\left(-\frac{1}{40}\cos 2x - \frac{1}{20}\sin 2x\right) = -\frac{1}{40}e^{2x}\left(\cos 2x + 2\sin 2x\right).$$

2) $f_2(x)=2x^2$, т. е. правая часть представляет собой многочлен степени $s=2$, $\alpha=\beta=0$. Так как число $\alpha\pm\beta i=0$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения с правой частью $f_2(x)$ следует искать в виде

$$\tilde{y}_2 = Ax^2+Bx+C.$$

Имеем $\quad \tilde{y}_2' = 2Ax+B, \quad \tilde{y}_2''=2A, \quad \tilde{y}_2'''=0.$

Подставим $\tilde{y}_2, \tilde{y}_2', \tilde{y}_2'', \tilde{y}_2'''$ в неоднородное уравнение, и после приведения подобных слагаемых, получим:

$$-8Ax^2+8(A-B)x-4(A-B+2C)=2x^2,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -8A=2, \\ A-B=0, \\ A-B+2C=0; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A=-\frac{1}{4}, \quad B=-\frac{1}{4}, \quad C=0.$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{y}_2=-\frac{1}{4}(x^2+x).$$

Итак, частное решение исходного неоднородного уравнения имеет вид

$$\tilde{y}=\tilde{y}_1+\tilde{y}_2=-\frac{1}{40}e^{2x}\left(\cos 2x+2\sin 2x\right)-\frac{1}{4}(x^2+x),$$

а его общее решение

$$y=\left(C_1e^{2x}+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x\right)-\frac{1}{40}e^{2x}\left(\cos 2x+2\sin 2x\right)-\frac{1}{4}(x^2+x). \diamond$$

## § 16. Понятие краевой задачи

Решая дифференциальные уравнения, мы получаем множество решений. Чтобы выделить из этого множества одно решение, дополнительно задают условия. До сих пор мы имели дело лишь с задачей Коши, т.е. условием выбора решения являлось значение функции и ее производных в некоторой точке. Но в дифференциальных уравнениях, наряду с задачей Коши приходится решать и так называемые краевые (или граничные) задачи. В этих задачах условием выбора решения является значение искомой функции (или значение линейной комбинации искомой функции и ее производных) на концах отрезка, на котором это решение рассматривается.

Если удается найти общее решение дифференциального уравнения, отвечающего краевой задаче, то для решения самой задачи надо из граничных условий определить значения произвольных постоянных, входящих в общее решение. При этом решение не всегда существует, а если существует, то не всегда единственное.