Л.Д. КУДРЯВЦЕВ, А.Д. КУТАСОВ,
В.И. ЧЕХЛОВ, М.И. ШАБУНИН

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

ТОМ 1

ПРЕДЕЛ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ
И ДОПОЛНЕННОЕ

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ
2003

УДК 517
ББК 22 161
К88

Кудрявцев Л Д, Кутасов А Д, Чехлов В И, Шабунин М И **Сборник задач по математическому анализу. Том 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость** Учеб пособие/ Под ред Л Д Кудрявцева — 2-е изд, перераб — М ФИЗМАТЛИТ, 2003 — 496 с — ISBN 5-9221-0306-7

Книга является первой частью трехтомного сборника задач, созданного на основе многолетнего опыта преподавания курса математического анализа в Московском физико-техническом институте В нее включен материал, связанный с понятием предела, непрерывности и производной

Каждый параграф содержит справочный материал, набор типовых примеров с решениями и задачи для самостоятельной работы с ответами

Для студентов университетов и технических вузов с расширенной программой по математике

Табл 55 Ил 94 Библиогр 20 назв

Рецензенты
заведующий кафедрой общей математики ВМиК МГУ им М В Ломоносова, академик *В А Ильин*,
профессор МФГИ, академик *С М Никольский*

ISBN 5-9221-0306-7 (Т 1)
ISBN 5-9221-0305-9

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга является первой частью сборника задач и содержит материал, относящийся к трем важным разделам курса математического анализа — “Предел”, “Непрерывность” и “Дифференцируемость”. Сборник состоит из четырех глав.

В первой главе рассматриваются множества и операции над ними, основные понятия комбинаторики, сведения о действительных и комплексных числах, многочлены и алгебраические уравнения, числовые функции и последовательности. Изучение материала этой главы имеет целью подготовить читателя к освоению курса математического анализа.

Во второй главе содержится большое число задач, связанных с понятием предела последовательности и функции.

В третьей главе собраны задачи по разделу “Производная и дифференциал”, а четвертая глава посвящена применению производных к исследованию функций.

При составлении сборника авторы опирались на многолетний опыт преподавания курса математического анализа в Московском физико-техническом институте. В сборнике содержится большое число оригинальных задач, составленных преподавателями кафедры высшей математики МФТИ и используемых в работе со студентами. Значительная часть задач сборника подготовлена авторами. В сборник включены задачи из широкоизвестных изданий, в частности, из сборника задач по математическому анализу Б. П. Демидовича и сборника задач по высшей математике Н. М. Гюнтера и Р. О. Кузьмина.

Каждый параграф сборника содержит теоретические сведения, примеры решения типовых задач и задачи для самостоятельной работы. Задачи каждого параграфа сгруппированы по темам и каждая группа задач расположена в порядке возрастания трудности — от совершенно простых до достаточно сложных.

Особое внимание в сборнике уделено задачам, способствующим усвоению фундаментальных понятий математического анализа. Большой набор задач, иллюстрирующих ту или иную тему, дает возможность преподавателю использовать задачник для работы в аудитории, для домашних заданий и при составлении контрольных работ.

Сборник задач предназначается в основном для вузов с расширенной программой по математике. Наличие большого числа задач разной трудности дает возможность использовать задачник как в университетах, так и в технических вузах.

Первое издание вышло в свет в 1984 г.

В настоящее издание внесен ряд существенных изменений. В каждом параграфе четко выделен справочный материал, затем даны примеры с решениями и задачи с ответами, которые для удобства читателей приводятся в конце каждого параграфа. Переработан материал гл. I и § 11, 23 в направлении существенного сокращения, добавлены задачи (в небольшом числе) в § 8 – 10, 16, 18, 19, 24 без изменения общей нумерации задач.

Авторы выражают глубокую благодарность коллективу кафедры высшей математики МФТИ, многолетняя плодотворная работа которого в значительной степени способствовала появлению этого сборника.

ГЛАВА 1

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Множества. Комбинаторика

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Множества.

1) Буквами N, Z, Q, R, C обозначают соответственно множества натуральных, целых, рациональных, действительных и комплексных чисел.

2) Если x — элемент множества A, то пишут $x \in A$, а если x не является элементом множества A, то пишут $x \notin A$.

3) Если каждый элемент множества A является элементом множества B, то пишут $A \subset B$ или $B \supset A$ и говорят, что множество A является *подмножеством множества* B. В этом случае говорят также, что A содержится в B или что B содержит A.

4) Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$.

5) Для удобства вводится понятие пустого множества (его обозначают $\varnothing$), которое по определению не содержит элементов и содержится в любом множестве.

2. Операции над множествами.

1) Множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B, называется *объединением множеств* A и B и обозначается $A \cup B$ или $A + B$.

2) Множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству A, так и множеству B, называется *пересечением множеств* A и B и обозначается $A \cap B$ или AB. Если $A \cap B = \varnothing$, то говорят, что множества A и B не пересекаются.

3) Множество, состоящее из всех элементов множества A, не принадлежащих множеству B, называется *разностью множеств* A и B и обозначается $A \setminus B$.

4) Если $A \subset B$, то разность $B \setminus A$ называют *дополнением множества* A *до множества* B и обозначают A'_B.

В тех случаях, когда рассматриваются только подмножества некоторого основного множества U, дополнение множества M до множества U называют просто дополнением M и вместо M'_U пишут просто M'.

Непосредственно из определения дополнения множества следуют равенства

$$M \cup M' = U, \quad M \cap M' = \varnothing, \quad (M')' = M.$$

5) Для любых подмножеств A и B множества U справедливы также следующие равенства, которые называют *законами двойственности* или *законами де Моргана*:

$$(A \cup B)' = A' \cap B', \quad (A \cap B)' = A' \cup B',$$

т. е. дополнение объединения двух множеств равно пересечению их дополнений, а дополнение пересечения двух множеств равно объединению их дополнений.

3. Эквивалентные и неэквивалентные множества.

1) Говорят, что между множествами A и B установлено *взаимно однозначное соответствие*, если каждому элементу множества A сопоставлен один и только один элемент множества B, так что различным элементам множества A сопоставлены различные элементы множества B и каждый элемент множества B оказывается сопоставленным некоторому элементу множества A.

2) Множества, между которыми можно установить взаимно однозначное соответствие, называются *эквивалентными*. Если множества A и B эквивалентны, то пишут $A \sim B$; если они не эквивалентны, то пишут $A \not\sim B$.

3) Если $A \sim B$, то говорят, что множества A и B *имеют одинаковую мощность*.

Если $A \not\sim B$, но $A \sim B_1 \subset B$, то говорят, что множество A *имеет меньшую мощность, чем множество B*.

4) Множество $A \neq \varnothing$ называется *конечным*, если существует такое число $n \in N$, что

$$A \sim \{1, 2, 3, ..., n\}.$$

В этом случае говорят, что множество A содержит n элементов или что множество A имеет мощность n.

Пустое множество $\varnothing$ также считается конечным, его мощность принимается равной нулю.

Множество, не являющееся конечным, называется *бесконечным*.

5) Множество A называется *счетным*, если $A \sim N$. Говорят, что счетное множество имеет счетную мощность. Если множество конечно или счетно, то его называют *не более чем счетным*.

Множество называется *несчетным*, если оно имеет мощность, большую, чем мощность множества N.

Теоремы Кантора.

1. *Множество всех рациональных чисел счетно.*

2. *Множество всех действительных чисел несчетно.*

Множество A называется множеством *мощности континуума*, если $A \sim R$.

4. Система множеств.

1) Пусть дано множество $S = \{s\}$, называемое множеством индексов, и каждому индексу s сопоставлено множество A_s. Множество $\{A_s\}$, элементами которого являются множества A_s, $s \in S$, называют *системой* или *семейством множеств*. Понятия объединения и пересечения двух множеств обобщаются на случай произвольной конечной или бесконечной системы множеств следующим образом.

2) *Объединением* системы множеств A_s, $s \in S$, называется множество всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств системы.

3) *Пересечением* системы множеств A_s, $s \in S$, называется множество всех элементов, содержащихся в каждом множестве системы.

4) Объединение и пересечение системы множеств A_s, $s \in S$, обозначают соответственно

$$\bigcup_{s\in S} A_s \quad \text{и} \quad \bigcap_{s\in S} A_s.$$

В частных случаях, когда система множеств конечна или счетна, пишут

$$\bigcup_{s=1}^{n} A_s, \quad \bigcap_{s=1}^{n} A_s, \quad n \in N, \qquad \text{или} \qquad \bigcup_{s=1}^{\infty} A_s, \quad \bigcap_{s=1}^{\infty} A_s.$$

5. Упорядоченные множества. Множество называется *упорядоченным*, если для любых двух его элементов a и b установлено отношение порядка $a \leqslant b$ или $b \leqslant a$ (a не превосходит b или b не превосходит a), обладающее свойствами:

1) рефлексивности: $a \leqslant a$, т. е. любой элемент не превосходит самого себя;

2) антисимметричности: если $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$, то элементы a и b равны;

3) транзитивности: если $a \leqslant b$, $b \leqslant c$, то $a \leqslant c$.

6. Размещения и перестановки.

1) Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Каждое его упорядоченное подмножество, состоящее из k элементов, называется *размещением* из n элементов по k элементов.

Число размещений из n элементов по k элементов обозначается A_n^k и вычисляется по формуле

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-(k-1)). \tag{1}$$

2) Размещения из n элементов по n элементов называются *перестановками* из n элементов. Число перестановок из n элементов обозначается P_n и вычисляется по формуле

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n = n!. \tag{2}$$

7. Сочетания. Пусть имеется множество, состоящее из n элементов. Каждое его подмножество, содержащее k элементов, называется сочетанием из n элементов по k элементов.

Число всех сочетаний из n элементов по k элементов обозначается символом C_n^k и вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!},$$

или по формуле

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}. \tag{3}$$

Справедливы равенства

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \quad C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k, \quad k < n.$$

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Доказать закон двойственности

$$(A \cap B)' = A' \cup B'.$$

▲ Пусть $x \in (A \cap B)'$; тогда $x \notin A \cap B$ и, следовательно, $x \notin A$ или $x \notin B$, т. е. $x \in A'$ или $x \in B'$, а это означает, что $x \in A' \cup B'$. Таким образом, доказано включение

$$(A \cap B)' \subset A' \cup B'.$$

Пусть $x \in A' \cup B'$; тогда $x \in A'$ или $x \in B'$ и, следовательно, $x \notin A$ или $x \notin B$, т. е. $x \notin A \cap B$, а это означает, что $x \in (A \cap B)'$. Таким образом, доказано включение

$$A' \cup B' \subset (A \cap B)'.$$

Из включений $(A \cap B)' \subset A' \cup B'$ и $A' \cup B' \subset (A \cap B)'$ следует, что множества $(A \cap B)'$ и $A' \cup B'$ состоят из одних и тех же элементов, т. е. равны. ▲

Пример 2. Группа студентов изучает семь учебных дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание занятий на понедельник, если на этот день недели запланированы занятия по четырем дисциплинам?

▲ Различных способов составления расписания столько, сколько существует четырехэлементных упорядоченных подмножеств у семиэлементного множества, т. е. равно числу размещений из семи элементов по четыре элемента. По формуле (1), полагая в ней $n = 7$, $k = 4$, находим

$$A_7^4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840. \ ▲$$

Пример 3. Сколько шестизначных чисел, кратных пяти, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что в числе цифры не повторяются?

▲ Для того чтобы число, составленное из заданных цифр, делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы цифра 5 стояла на последнем месте. Остальные пять цифр могут стоять на оставшихся пяти местах в любом порядке. Следовательно, искомое число шестизначных чисел, кратных пяти, равно числу перестановок из пяти элементов, т. е. $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. ▲

Пример 4. В чемпионате страны по футболу (высшая лига) участвуют 18 команд, причем каждые две команды встречаются между собой 2 раза. Сколько матчей играется в течение сезона?

▲ В первом круге состоится столько матчей, сколько существует двухэлементных подмножеств у множества, содержащего 18 элементов, т. е. их число равно C_{18}^2. По формуле (3) находим

$$C_{18}^2 = \frac{18 \cdot 17}{2} = 153.$$

Во втором круге играется столько же матчей, поэтому в течение сезона состоится 306 встреч. ▲

ЗАДАЧИ

1. Даны множества A, B, C. С помощью операций объединения и пересечения записать множество, состоящее из элементов, принадлежащих:

1) всем трем множествам; 2) хотя бы одному множеству;

3) по крайней мере двум из этих множеств.

2. Доказать, что равенства: 1) $A \cup B = B$; 2) $A \cap B = A$; верны тогда и только тогда, когда $A \subset B$.

3. Доказать, что равенство $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup C$ верно тогда и только тогда, когда $A \supset C$.

4. Доказать равенство:

1) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$; 2) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;

3) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$; 4) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.

5. Доказать, что включение $A \setminus B \subset C$ верно тогда и только тогда, когда $A \subset B \cup C$.

6. Доказать, что:

1) $A \cup (B \setminus C) \supset (A \cup B) \setminus C$; 2) $(A \cup C) \setminus B \subset (A \setminus B) \cup C$.

7. Определить, в каком отношении ($X \subset Y$, $X \supset Y$, $X = Y$) находятся множества X и Y, если:

1) $X = A \cup (B \setminus C)$, $Y = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$;

2) $X = (A \cap B) \setminus C$, $Y = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;

3) $X = A \setminus (B \cup C)$, $Y = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

8. Пусть A и B — произвольные подмножества множества U. Доказать равенство:

1) $(A \setminus B)' = A' \cup B$; 2) $(A \cap B') \cup (A' \cap B) = A \cup B$;

3) $(A \cup B) \cap (A' \cup B') = A \cup B$.

9. Пусть $A \subset U$, $B \subset U$. Найти множество $X \subset U$, удовлетворяющее уравнению

$$(X \cup A)' \cup (X \cup A') = B.$$

10. Найти подмножества A и B множества U, если известно, что для любого множества $X \subset U$ верно равенство

$$X \cap A = X \cup B.$$

11. Пусть $A_s \subset U$, $s \in S$. Доказать:

1) $\left(\bigcup\limits_{s \in S} A_s\right)' = \bigcap\limits_{s \in S} A'_s$; 2) $\left(\bigcap\limits_{s \in S} A_s\right)' = \bigcup\limits_{s \in S} A'_s$.

12. Дана система произвольных множеств A_s, $s \in N$.

1) Пусть $B_n = \bigcup\limits_{s=1}^{n} A_s$, $n \in N$. Доказать, что $\bigcup\limits_{s=1}^{\infty} B_s = \bigcup\limits_{s=1}^{\infty} A_s$.

2) Пусть $B_n = \bigcap\limits_{s=1}^{n} A_s$, $n \in N$. Доказать, что $\bigcap\limits_{s=1}^{\infty} B_s = \bigcap\limits_{s=1}^{\infty} A_s$.

13. Доказать, что множество является бесконечным тогда и только тогда, когда оно эквивалентно некоторому своему собственному подмножеству.

14. Доказать, что если множество A бесконечное, а множество B счетное, то $(A \cup B) \sim A$.

15. Доказать, что если $A \setminus B \sim B \setminus A$, то $A \sim B$.

16. Доказать, что если $A \subset B \subset C$ и $A \sim C$, то $A \sim B$.

17. Доказать счетность следующих множеств:

1) множества всех чисел вида 2^k, $k \in N$;

2) множества всех треугольников на плоскости, вершины которых имеют рациональные координаты;

3) множества всех точек плоскости с рациональными координатами;

4) множества всех многочленов с рациональными коэффициентами.

18. Доказать, что следующие множества имеют мощность континуума:

1) множество всех точек непустого интервала $(a; b)$;

2) множество всех последовательностей, составленных из цифр 0 и 1;

3) множество всех последовательностей действительных чисел;

4) множество всех точек квадрата;

5) множество всех точек круга;

6) множество всех подмножеств счетного множества;

7) множество всех счетных подмножеств множества мощности континуума.

19. В группе 30 студентов. Сколькими способами можно выделить двух человек для дежурства, если:

1) один из них должен быть старшим;

2) старшего быть не должно?

20. На пять сотрудников выделены три путевки. Сколькими способами их можно распределить, если:

1) все путевки различны;

2) все путевки одинаковы?

21. Сколькими способами можно расположить в ряд пять белых и четыре черных шара так, чтобы черные шары не лежали рядом? Рассмотреть два случая:

1) шары одного цвета неотличимы друг от друга;

2) все шары разные.

22. Сколько диагоналей имеет выпуклый n-угольник?

23. Никакие три диагонали выпуклого десятиугольника не пересекаются в одной точке. Определить число точек пересечения диагоналей.

24. На первой из двух параллельных прямых лежат 15 точек, на второй 21. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

25. Сколькими способами на шахматной доске можно расставить 8 ладей одного цвета, чтобы они не били друг друга и стояли только на черных клетках?

26. Из цифр 0, 1, 2, 3 составлены всевозможные четырехзначные числа так, что в каждом числе нет одинаковых цифр. Сколько получилось чисел? Сколько среди них четных чисел?

27. Сколько различных десятизначных чисел можно записать, используя цифры 1 и 2?

28. Сколько различных перестановок можно образовать из букв следующих слов: 1) зебра; 2) баран; 3) водород; 4) абракадабра?

29. Сколькими способами можно раздать 28 костей домино четырем игрокам так, чтобы каждый получил 7 костей?

30. Хоккейная команда состоит из 2 вратарей, 7 защитников и 10 нападающих. Сколькими способами тренер может образовать стартовую шестерку, состоящую из вратаря, двух защитников и трех нападающих?

31. Сколько существует шестизначных чисел, все цифры которых нечетны (1, 3, 5, 7, 9)?

32. Сколько делителей имеет число 462?

33. На полке стоят m книг в черных переплетах и n книг в синих переплетах, причем все книги разные. Сколькими способами можно расставить книги так, чтобы книги в черных переплетах стояли рядом?

34. Сколькими способами можно упаковать 9 разных книг в 5 бандеролей, если 4 бандероли должны содержать по 2 книги?

ОТВЕТЫ

7. 1) $X \supset Y$; 2) $X = Y$; 3) $X \subset Y$. **9.** $X = B'$.
10. $A = U$, $B = \varnothing$. **19.** 1) 870; 2) 435. **20.** 1) 60; 2) 10.
21. 1) 15; 2) 43200. **22.** $\frac{n(n-3)}{2}$. **23.** 210. **24.** 5355. **25.** 576.
26. 18; 10. **27.** 1024. **28.** 1) 120; 2) 60; 3) 420; 4) 83160.
29. $\frac{(28)!}{(7!)^4}$. **30.** 5040. **31.** 15625. **32.** 16. **33.** $(n+1)!\,m!$. **34.** 945.

§ 2. Элементы логики. Метод математической индукции

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Высказывания. Операции над высказываниями.

1) Под *высказыванием* понимают всякое утверждение, о котором имеет смысл говорить, что оно истинно или ложно. Никакое высказывание не может быть одновременно истинным или ложным.

Предложение, о котором невозможно однозначно сказать, истинно оно или ложно, высказыванием не является.

2) Из всякого высказывания A можно получить новое высказывание, *отрицая* его, т. е. утверждая, что высказывание A ложно, иначе говоря, не имеет места, не выполняется. *Отрицание* высказывания A обозначается символом $\overline{A}$ или $\rceil A$. Каково бы ни было высказывание A, из двух высказываний A и $\overline{A}$ одно является истинным, а другое ложным.

3) Высказывание "истинны оба высказывания A и B" называется *конъюнкцией* высказываний A и B и обозначается $A \wedge B$.

4) Высказывание "истинно хотя бы одно из высказываний A и B" называется *дизъюнкцией* высказываний A и B и обозначается $A \vee B$.

5) Высказывание, полученное из данных высказываний A и B при помощи слов "если ..., то ...", называют *импликацией* и обозначают $A \Rightarrow B$ или $A \to B$ (читают: если A, то B). Высказывание A называют при этом *условием*, а высказывание B — *заключением*. Говорят также, что A является *достаточным условием* для B, а B является *необходимым условием* для A.

Высказывание $A \Rightarrow B$ считается ложным только в том случае, когда A истинно, а B ложно.

6) Высказывание, полученное из данных высказываний A и B при помощи слов "тогда и только тогда, когда", называют *эквиваленцией* или *двойной импликацией* и обозначают $A \Leftrightarrow B$ или $A \leftrightarrow B$. Высказывание $A \Leftrightarrow B$ истинно только тогда, когда либо оба высказывания A и B истинны, либо оба ложны. В этом случае говорят также, что высказывания A и B *равносильны* и что каждое из них является *необходимым и достаточным условием* другого.

2. Предложения, зависящие от переменной. Знаки (символы) общности и существования.

1) Предложение $P(x)$, зависящее от переменной x, принадлежащей некоторому множеству M ($x \in M$), не является, вообще говоря, высказыванием. Например, об истинности предложения $P(x) = \{x$ — простое число$\}$ ничего нельзя сказать, если не указать число x. Это предложение является истинным при одних значениях x (например, при $x = 5$, $x = 7$) и ложным при других значениях x (например, при $x = 8$, $x = 15$). Такие предложения называют *неопределенными высказываниями* (*предикатами*).

2) *Знак общности* $\forall$ (перевернутая первая буква английского слова All — все) заменяет слова "все", "всякий", "каждый", "любой". Если $P(x)$ — некоторое неопределенное высказывание, то запись $\forall x\ P(x)$ (или $(\forall x)\, P(x)$) означает, что для любого элемента $x \in M$ истинно $P(x)$, и представляет собой высказывание. Это высказывание истинно, если $P(x)$ истинно для каждого $x \in M$. Чтобы убедиться в ложности высказывания $\forall x\ P(x)$, достаточно указать хотя бы один элемент $a \in M$, для которого $P(a)$ — ложное высказывание (найти один противоречащий пример).

3) *Знак существования* $\exists$ (перевернутая первая буква английского слова Exists — существует) заменяет слова "существует", "найдется". Запись $\exists x\ P(x)$ представляет собой высказывание; оно истинно, если существует такой элемент $a \in M$, для которого $P(a)$ истинно. В противном случае (если в множестве M нет ни одного элемента a, для которого $P(a)$ истинно) высказывание $\exists x\ P(x)$ ложно.

4) Правила построения отрицаний для предложений, содержащих символы $\forall$ и $\exists$ (их в логике называют *кванторами*), можно записать в виде

$$\overline{\forall x \in M\ P(x)} \Leftrightarrow \exists x_0 \in M\ \overline{P(x_0)}, \qquad (1)$$

$$\overline{\exists x_0 \in M\ P(x_0)} \Leftrightarrow \forall x \in M\ \overline{P(x)}. \qquad (2)$$

Таким образом, для построения отрицания предложения, содержащего знаки $\forall$ и $\exists$ и утверждение P, следует знак $\forall$ заменить на $\exists$, знак $\exists$ — на знак $\forall$, а утверждение P — на его отрицание $\overline{P}$.

3. Метод математической индукции. Чтобы доказать, что некоторое утверждение верно для любого номера n, достаточно установить, что:

А) это утверждение верно при $n = 1$;

Б) если утверждение справедливо для номера n (n — любое натуральное число), то оно верно и для следующего номера $n + 1$.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Рассмотрим неопределенные высказывания, заданные на множестве всех четырехугольников Q:

$A(Q) \equiv \{$четырехугольник Q — ромб$\}$,

$B(Q) \equiv$ {диагонали четырехугольника Q взаимно перпендикулярны}. Докажем, что $\forall Q\ A(Q) \Rightarrow B(Q)$, а обратное утверждение $\forall Q\ B(Q) \Rightarrow A(Q)$ неверно.

▲ Так как в любом ромбе диагонали взаимно перпендикулярны, то $A(Q) \Rightarrow B(Q)$ для любого ромба Q.

Обратная теорема неверна: существует четырехугольник с взаимно перпендикулярными диагоналями, не являющийся ромбом. ▲

Пример 2. Пусть $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, — квадратичная функция, $D = b^2 - 4ac$. Доказать, что

$$\{\forall x \in R \quad y \geqslant 0\} \Leftrightarrow \{D \leqslant 0,\ a > 0\}.$$

▲ Из равенства

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right] \tag{1}$$

и условий $D \leqslant 0$, $a > 0$ следует, что $y \geqslant 0$ для всех $x \in R$. Обратно, пусть $y \geqslant 0$ при всех $x \in R$. Докажем, что $D \leqslant 0$ и $a > 0$. Пусть условие $D \leqslant 0$ не выполняется; тогда $D > 0$ и квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет действительные корни x_1 и x_2, а квадратичная функция меняет знак при переходе через точки x_1 и x_2. Итак, $D \leqslant 0$, и из равенства (1) и условия $y \geqslant 0$ при всех $x \in R$ следует, что $a > 0$. ▲

Пример 3. Пусть задано числовое множество M. Записать с помощью кванторов утверждения A и B и их отрицания:

а) $A \equiv$ {все элементы x множества M удовлетворяют условию $x > 0$};

б) $B =$ {существует число $a > 0$ такое, что все элементы множества M удовлетворяют условию $|x| \leqslant M$}.

▲ а) Пусть A не имеет места, т. е. не все элементы множества M удовлетворяют условию $x > 0$. Это означает, что найдется (существует) такой элемент $x \in M$, для которого неравенство $x > 0$ не выполняется, т. е. справедливо противоположное неравенство $x \leqslant 0$. Запишем A и $\overline{A}$ с помощью кванторов:

$$A \equiv \{\forall x \in M\ \ x > 0\}, \qquad \overline{A} \equiv \{\exists x \in M:\ x \leqslant 0\}.$$

б) Пусть не существует числа $a > 0$ такого, чтобы для любого $x \in M$ имело место неравенство $|x| \leqslant a$. Это означает, что для любого $a > 0$ неравенство $|x| \geqslant a$ не может выполняться для каждого $x \in M$. Иначе говоря, существует такой элемент $x = x_a \in M$ (зависящий, вообще говоря, от a), для которого неравенство $|x| \leqslant a$ не выполняется, т. е. справедливо неравенство $|x| > a$.

Запишем B и $\overline{B}$ с помощью кванторов:

$$B \equiv \{\exists a > 0:\ \forall x \in M \quad |x| \leqslant a\},$$

$$\overline{B} \equiv \{\forall a > 0\ \exists x_a \in M:\ |x_a| > a\}. \ ▲$$

Пример 4. Доказать, что при всех $n \in N$ справедливо равенство

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{2}$$

▲ При $n = 1$ равенство (2) является верным $(1 = 1)$. Докажем, что из предположения о том, что верно равенство (1), следует справедливость равенства

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}, \qquad (3)$$

полученного из (2) заменой n на $n+1$.

Прибавляя к обеим частям равенства (2) слагаемое $(n+1)^2$, имеем

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2. \qquad (4)$$

Преобразуем правую часть (4):

$$\frac{n+1}{6}(2n^2 + 7n + 6) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Таким образом, равенство (3) является верным, и поэтому формула доказана для любого $n \in N$. ▲

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что для любых высказываний A и B справедливы равенства

$$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}, \quad \overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}.$$

2. Выяснить, какое из утверждений A и B следует из другого, используя символы $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$:

1) $A \equiv$ {каждое из чисел a, b делится на 7}, $B \equiv$ {сумма $a + b$ делится на 7};

2) $A \equiv$ {последняя цифра числа a четная}, $B \equiv$ {число A делится на 4};

3) $A \equiv$ {треугольник $A_1B_1C_1$ равнобедренный}, $B \equiv$ {две медианы треугольника $A_1B_1C_1$ равны между собой};

4) $A \equiv$ {из отрезков, длины которых равны a, b, c, можно составить треугольник}, $B \equiv$ {положительные числа a, b, c связаны неравенствами $a + b > c$, $b + c > a$, $c + a > b$}.

3. Доказать, что квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает отрицательные значения при всех $x \in R$ тогда и только тогда, когда $D = b^2 - 4ac < 0$ и $a < 0$.

4. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ — квадратный трехчлен, $D = b^2 - 4ac$, x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена, $x_1 \leqslant x_2$ $(D \geqslant 0)$, $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ — абсцисса вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$, M и K — заданные числа. Доказать, что:

1) $\{x_1 < M,\ x_2 < M\} \Leftrightarrow \{D \geqslant 0,\ x_0 < M,\ af(M) > 0\}$;

2) $\{x_1 > M,\ x_2 > M\} \Leftrightarrow \{D \geqslant 0,\ x_0 > M,\ af(M) > 0\}$;

3) $\{x_1 < M < x_2\} \Leftrightarrow \{af(M) < 0\}$;

4) $\{K < x_1 < M,\ K < x_2 < M\} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \{D \geqslant 0,\ K < x_0 < M,\ f(K)f(M) > 0\};$$

5) $\{x_1 < K < M < x_2\} \Leftrightarrow \{af(K) < 0,\ af(M) < 0\}$.

5. Пусть $A_k(x)$ и $B_k(x)$ $(k = 1, 2, ..., n)$ — неопределенные высказывания, заданные на множестве M и такие, что:

А) для любого $x \in M$ хотя бы одно из высказываний $A_k(x)$ является истинным;

Б) $A_k(x) \Rightarrow B_k(x)$, $k = 1, 2, ..., n$;

В) высказывания $B_1(x)$, ..., $B_n(x)$ взаимно исключают друг друга, т. е. если одно из них для каждого $x \in M$ истинно, то все остальные ложны.

Доказать, что $B_k(x) \Rightarrow A_k(x)$, $k = 1, 2, ..., n$, а высказывания $A_1(x)$, ..., $A_n(x)$ взаимно исключают друг друга.

6. Пусть A_k, B_k $(k = 1, 2, 3)$ — неопределенные высказывания, заданные на множестве всех треугольников со сторонами a, b, c и соответствующими углами A, B, C:

$A_1 \equiv \{$угол A острый$\}$, $A_2 \equiv \{$угол A прямой$\}$, $A_3 \equiv \{$угол A тупой$\}$,

$B_1 \equiv \{a^2 < b^2 + c^2\}$, $B_2 \equiv \{a^2 = b^2 + c^2\}$, $B_3 \equiv \{a^2 > b^2 + c^2\}$.

Доказать, что $A_k \Leftrightarrow B_k$ $(k = 1, 2, 3)$.

Методом математической индукции решить задачи 7–13.

7. Доказать, что при каждом $n \in N$ верны равенства:

1) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + ... + n(3n - 1) = n^2(n + 1)$;

2) $1^2 + 3^2 + ... + (2n - 1)^2 = \dfrac{n(4n^2 - 1)}{3}$;

3) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + (n - 1)n = \dfrac{(n - 1)n(n + 1)}{3}$;

4) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left(\dfrac{n(n + 1)}{2}\right)^2$;

5) $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + ... + (n - 1)n^2 = \dfrac{n(n^2 - 1)(3n + 2)}{12}$.

8. Доказать, что при каждом $n \in N$:

1) число $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ кратно 19;

2) число $n(2n^2 - 3n + 1)$ кратно 6;

3) число $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ делится на 11;

4) число $n^5 - n$ делится на 5.

9. Доказать, что при каждом $n \in N$ справедливо неравенство Бернулли

$$(1 + a)^n \geqslant 1 + na, \quad \text{если} \quad a > -1.$$

10. Доказать, что при каждом $n \in N$ верно неравенство:

1) $\dfrac{1}{n + 1} + \dfrac{1}{n + 2} + ... + \dfrac{1}{3n + 1} > 1$;

2) $\dfrac{1}{n + 1} + \dfrac{1}{n + 2} + ... + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24}$;

3) $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5}{6} \cdot ... \cdot \dfrac{2n - 1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{3n + 1}}$;

4) $\sqrt{n} < 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$.

11. Доказать равенство

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} + \ldots + \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2} = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}, \quad n \in N.$$

12. Пусть x_1, x_2, ..., x_n — произвольные положительные числа такие, что $x_1x_2\ldots x_n = 1$. Доказать, что

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqslant n.$$

13. Пусть x_1, x_2, ..., x_n — произвольные положительные числа. Доказать, что

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n},$$

причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

ОТВЕТЫ

2. 1) $A \Rightarrow B$; 2) $B \Rightarrow A$; 3) $A \Leftrightarrow B$; 4) $A \Leftrightarrow B$.

§ 3. Действительные числа

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Множество действительных чисел.

1) *Действительное* (*вещественное*) число a записывается в виде бесконечной десятичной дроби

$$a = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots, \tag{1}$$

где α_0 — неотрицательное целое число, а каждое α_n $(n \in N)$ — одна из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Знак + в записи (1) обычно не пишут, а число вида $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$ называют *неотрицательным*.

2) Бесконечная десятичная дробь называется *периодической* с периодом $\beta_1\ldots\beta_m$ и записывается в виде

$$a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(\beta_1\beta_2\ldots\beta_m), \tag{2}$$

если после некоторого десятичного разряда (его номер обозначен n) группа цифр $\beta_1\beta_2\ldots\beta_m$ все время повторяются. Бесконечные десятичные периодические дроби (и только они) являются *рациональными числами*, т. е. записываются в виде $\dfrac{p}{q}$, где $p \in Z$, $q \in N$.

3) Переход от записи рационального числа a в виде (2) к записи вида $\dfrac{p}{q}$ производится по формуле

$$a = \alpha_0\,\frac{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\beta_1\beta_2\ldots\beta_m - \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}{\underbrace{99\ldots9}_{m}\underbrace{00\ldots0}_{n}}. \tag{3}$$

В числителе дроби (3) записана разность чисел, стоящих после запятой в равенстве (2) соответственно до второго и первого периода, а в знаменателе — число $10^{m+n} - 10^n$.

4) Число $\alpha_0, \alpha_1 ... \alpha_n ...$ называется *абсолютной величиной* (*модулем*) числа (1) и обозначается $|a|$, т. е.

$$|\pm \alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_n...| = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$$

Таким образом,

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если} \quad a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если} \quad a < 0. \end{cases}$$

5) Бесконечная десятичная дробь называется *допустимой*, если она не содержит периода, состоящего только из цифры 9. Любое действительное число может быть записано в виде допустимой бесконечной десятичной дроби.

2. Сравнение действительных чисел.

1) *Сравнение неотрицательных чисел.* Два неотрицательных действительных числа a и b, записанных в виде допустимых бесконечных десятичных дробей

$$a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_n... \quad \text{и} \quad b = \beta_0, \beta_1\beta_2...\beta_n..., \tag{4}$$

равны $(a = b)$ тогда и только тогда, когда

$$\alpha_k = \beta_k \quad \text{при всех} \quad k = 0, 1, 2, ...,$$

т. е.

$$\{a = b\} \Leftrightarrow \{\alpha_k = \beta_k \quad \forall k = 0, 1, 2, ...\}.$$

Поэтому любое действительное число однозначным образом записывается в виде допустимой бесконечной десятичной дроби.

Если неотрицательные действительные числа a и b записаны в виде допустимых бесконечных десятичных дробей (4), то говорят, что число a меньше числа b и пишут $a < b$, если либо $\alpha_0 < \beta_0$, либо $\alpha_0 = \beta_0$ и существует номер n такой, что $\alpha_k = \beta_k$ для всех $k = 0, 1, ..., n-1$, но $\alpha_n < \beta_n$.

2) *Сравнение произвольных действительных чисел.* Если a — неотрицательное число, а b — отрицательное число, то считают, что $b < a$ (или $a > b$). Если оба числа отрицательные, то считают, что $a = b$, если $|a| = |b|$, и $a < b$, если $|b| < |a|$.

3. Неравенства, содержащие знак модуля. Для любых действительных чисел a и b справедливы неравенства

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|, \qquad |a + b| \geqslant ||a| - |b||.$$

4. Числовые промежутки.

1) *Отрезок, интервал, полу интервал* записываются соответственно как

$$[a, b] = \{x\colon\ a \leqslant x \leqslant b\},$$
$$(a, b) = \{x\colon\ a < x < b\},$$
$$[a, b) = \{x\colon\ a \leqslant x < b\}, \qquad (a, b] = \{x\colon\ a < x \leqslant b\}.$$

Точки a и b называют соответственно *левым* и *правым концом* промежутка (отрезка, интервала или полуинтервала).

2) Бесконечные промежутки:

$$(a,+\infty)=\{x\colon x>a\},\quad (-\infty,a)=\{x\colon x<a\},\quad (-\infty,+\infty)=\{x\colon x\in R\}.$$

3) Интервал $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$, где $\varepsilon>0$, называют ε-окрестностью точки a и обозначают $U(a;\varepsilon)$ или $U_\varepsilon(a)$, т. е.

$$U_\varepsilon(a)=\{x\colon\ |x-a|<\varepsilon\}.$$

5. Точные грани числовых множеств.

1) Множество X действительных чисел ($X\subset R$) называется *ограниченным сверху*, если существует число $C\in R$ такое, что все элементы множества X не превосходят C, т. е.

$$\exists C\in R\colon\quad \forall x\in X\quad x\leqslant C.$$

2) Множество $X\subset R$ называется *ограниченным снизу*, если существует такое число C', что все элементы множества X не меньше C', т. е.

$$\exists C'\in R\colon\quad \forall x\in X\quad x\geqslant C'.$$

3) Множество $X\subset R$ называют *ограниченным*, если оно ограничено как сверху, так и снизу, т. е.

$$\exists C'\in R\quad \exists C\in R\colon\quad \forall x\in X\quad C'\leqslant x\leqslant C. \tag{5}$$

Условие (5) равносильно условию

$$\exists C_0>0\colon\quad \forall x\in R\quad |x|\leqslant C_0.$$

4) Если множество X ограниченно сверху, то наименьшее из всех чисел, ограничивающих его сверху, называют его верхней гранью (или точной верхней гранью).

Число M является *точной верхней гранью множества* X, если выполняются следующие условия:

$$\forall x\in X\quad x\leqslant M,\quad \forall\alpha<M\quad \exists x\in X\colon\quad x>\alpha.$$

Точная верхняя грань множества X обозначается $\sup X$ (читается: супремум).

5) Если множество X ограниченно снизу, то наибольшее из всех чисел, ограничивающих его снизу, называют его нижней гранью (или точной нижней гранью).

Число m является *точной нижней гранью множества* X, если выполняются следующие условия:

$$\forall x\in X\quad x\geqslant m,\quad \forall\beta>m\quad \exists x\in X\colon\quad x<\beta.$$

6) Всякое ограниченное сверху (снизу) непустое множество действительных чисел имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.

7) Если множество X не ограничено сверху (не ограничено снизу), то пишут $\sup X=+\infty$ (соответственно $\inf X=-\infty$).

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Записать в виде рациональной дроби бесконечную периодическую десятичную дробь

$$a = 3,7(13).$$

▲ Так как $10^3 a = 3813,(13)$, $10a = 37,(13)$, то $990a = 3676$, откуда

$$a = \frac{3676}{990} = \frac{1838}{495} = 3\,\frac{353}{495}.\ ▲$$

Пример 2. Доказать, что для любых действительных чисел a_k, b_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, удовлетворяющих условиям $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 = 1$, $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2 = 1$, справедливо неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant 1.$$

▲ Так как $|ab| \leqslant \dfrac{a^2 + b^2}{2}$, а $|x + y| \leqslant |x| + |y|$, то $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant$ $\leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_k^2 + b_k^2}{2} = 1$. ▲

ЗАДАЧИ

1. Записать бесконечную периодическую десятичную дробь a в виде $\dfrac{p}{q}$, если p и q — натуральные числа, не имеющие общих делителей:

1) $a = 2,(13)$; 2) $a = 1,3(18)$; 3) $a = 0,125(0)$; 4) $a = 3,4(31)$.

2. Доказать, что числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2/3}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ иррациональные.

3. Может ли сумма двух иррациональных чисел быть рациональным числом?

4. Доказать, что для любых рациональных чисел a и b таких, что $a < b$, найдется иррациональное число c, удовлетворяющее условию $a < c < b$.

5. Доказать, что для любых рациональных чисел p, q, r, из которых хотя бы одно не равно нулю, число $p\sqrt{2} + q\sqrt{3} + r\sqrt{2/3}$ иррациональное.

6. Сравнить следующие действительные числа:

1) $3,3$ и $3,298$; 2) $3,1416$ и $3,14159$; 3) $3,141592$ и $22/7$;
4) $\sqrt{3} + 2$ и $\sqrt{2} + \sqrt{5}$; 5) $\sqrt{7} + \sqrt{10}$ и $\sqrt{3} + \sqrt{19}$.

7. Доказать, что если $|b| < \dfrac{|a|}{2}$, то $\dfrac{1}{|a - b|} < \dfrac{2}{|a|}$.

8. Пусть $X = \{x : x \in Q,\ x^2 < 2\}$. Доказать, что множество X не имеет ни наименьшего, ни наибольшего элементов. Найти $\sup X$ и $\inf X$.

9. Найти $\sup X$ и $\inf X$, если множество X состоит из элементов, являющихся членами последовательности $\{x_n\}$, где:

1) $x_n = \frac{1}{n}$; 2) $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$; 3) $x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}$.

10. Пусть X, Y — непустые ограниченные множества действительных чисел, а $X + Y$ — множество всевозможных чисел вида $x + y$, где $x \in X$, $y \in Y$. Показать, что $X + Y$ — ограниченное множество, причем $\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$, $\inf(X + Y) = \inf X + \inf Y$.

11. Пусть X, Y — непустые ограниченные множества неотрицательных действительных чисел, XY — множество всевозможных чисел xy, где $x \in X$, $y \in Y$. Показать, что XY — ограниченное множество, причем $\sup XY = \sup X \cdot \sup Y$, $\inf XY = \inf X \cdot \inf Y$.

12. Пусть X и Y — множества действительных чисел, $X - Y$ — множество всевозможных чисел вида $x - y$, где $x \in X$, $y \in Y$. Показать, что $\sup(X - Y) = \sup X - \inf Y$.

13. Пусть X — множество действительных чисел, а $-X$ — множество чисел вида $y = -x$, где $x \in X$. Доказать, что $\inf(-X) = -\sup X$, $\sup(-X) = -\inf X$.

14. Пусть X и Y — непустые множества действительных чисел такие, что:

а) для любого $x \in X$ и для любого $y \in Y$ справедливо неравенство
$$x \leqslant y;$$

б) для любого $\varepsilon > 0$ существуют $x_\varepsilon \in X$ и $y_\varepsilon \in Y$ такие, что
$$y_\varepsilon - x_\varepsilon < \varepsilon.$$

Показать, что $\sup X = \inf Y$.

15. Доказать, что множество всех чисел вида $\frac{p}{q}$, где $p \in N$, $q \in N$, $0 < p < q$, не имеет ни наибольшего, ни наименьшего элемента. Найти его точную верхнюю и точную нижнюю грани.

ОТВЕТЫ

1. 1) $\frac{211}{99}$; 2) $\frac{29}{22}$; 3) $\frac{1}{8}$; 4) $\frac{3397}{990}$. **3.** Может.

6. 1) $3,3 > 3,298$; 2) $3,1416 > 3,14159$; 3) $3,141592 < \frac{22}{7}$; 4) $\sqrt{3} + 2 > \sqrt{2} + \sqrt{5}$; 5) $\sqrt{7} + \sqrt{10} < \sqrt{3} + \sqrt{19}$.

8. $\sup X = \sqrt{2}$, $\inf X = -\sqrt{2}$. **9.** 1) 1 и 0; 2) $\frac{3}{2}$ и 0; 3) 1 и $\frac{1}{2}$.

16. 1 и 0.

§ 4. Прогрессии. Суммирование. Бином Ньютона. Числовые неравенства

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Числовая последовательность.

1) Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое действительное число x_n, то говорят, что задана *числовая последовательность* (или просто последовательность)

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Кратко последовательность обозначают символом $\{x_n\}$ или (x_n), число x_n называют *членом* или *элементом* этой последовательности, n — номером члена x_n.

2) Последовательность обычно задается либо формулой, с помощью которой можно вычислить каждый ее член по соответствующему номеру, либо формулой, позволяющей находить члены последовательности по известным предыдущим (рекуррентной формулой).

2. Арифметическая прогрессия.

1) *Арифметическая прогрессия* — последовательность $\{a_n\}$ — определяется рекуррентной формулой

$$a_{n+1} = a_n + d,$$

где a_1 и d — заданные числа; число d называется *разностью* арифметической прогрессии.

2) Формула n-го члена арифметической прогрессии:

$$a_n = a_1 + d(n-1).$$

3) Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому его соседних членов, т. е. при $k \geqslant 2$ справедливо равенство

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}.$$

4) Сумма n первых членов арифметической прогрессии выражается формулой

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

3. Геометрическая прогрессия.

1) *Геометрическая прогрессия* — последовательность $\{b_n\}$ — определяемая рекуррентной формулой

$$b_{n+1} = b_n q,$$

где b_1 и q — заданные числа, отличные от нуля; число q называют *знаменателем* геометрической прогрессии.

2) Формула n-го члена геометрической прогрессии:

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

3) Квадрат каждого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению его соседних членов, т. е. при $k \geqslant 2$ справедливо равенство

$$b_k^2 = b_{k-1}b_{k+1}.$$

Если $b_k > 0$ при всех $k \in N$ $(b_1 > 0\ q > 0)$, то

$$b_k = \sqrt{b_{k-1}b_{k+1}},$$

т. е. каждый член такой геометрической прогрессии равен среднему геометрическому его соседних членов.

4) Сумма S_n первых n членов геометрической прогрессии выражается формулой

$$S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1-q} = b_1\frac{1-q^n}{1-q}, \quad \text{если} \quad q \neq 1.$$

5) Геометрическая прогрессия, у которой $|q| < 1$, называется *бесконечно убывающей*, а ее сумма выражается формулой

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

4. Суммирование.

1) Пусть $a_1, a_2, ..., a_n$ — заданные числа. Их сумма $a_1 + a_2 + ...$ $... + a_n$ обозначается также $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n,$$

где k называется *индексом суммирования*.

2) Сумма не зависит от того, какой буквой обозначен индекс суммирования, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{p=1}^{n} a_p.$$

3) Операция суммирования обладает свойством линейности, т. е. для любых чисел α и β имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha\sum_{k=1}^{n} a_k + \beta\sum_{k=1}^{n} b_k.$$

4) Рассмотрим сумму, содержащую mn слагаемых a_{ij}, где индексы i и j принимают значения от 1 до n и от 1 до m соответственно $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m)$. Эта сумма обозначается

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \quad \text{или} \quad \sum_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m} a_{ij}$$

и называется *двойной суммой*. Имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

5) Задачу о вычислении сумм вида

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k),$$

где $f(x)$ — заданная функция, обычно рассматривают как задачу о нахождении S_n как функции от n. Например, если $f(k) = a_{k+1} - a_k$, где $\{a_n\}$ — заданная последовательность, то

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + \ldots$$
$$\ldots + a_n - a_{n-1} + a_{n+1} - a_n = a_{n+1} - a_1,$$

т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1. \tag{1}$$

4. Бином Ньютона.

1) Для любых чисел a, b и любого $n \in N$ справедлива *формула бинома Ньютона*

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n, \tag{2}$$

где

$$C_n^0 = 1, \quad C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

— число сочетаний из n элементов по k элементов. В частности, $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$, $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$.

2) Слагаемые $C_n^k a^{n-k} b^k$ называют *членами разложения* (2), а числа C_n^k — *коэффициентами разложения* или *биномиальными коэффициентами*. Коэффициенты разложения обладают следующими свойствами:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \quad C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

3) Полагая в формуле (2) $a = 1$, $b = x$, получаем

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k. \tag{4}$$

Подставляя в равенство (4) $x = 1$ и $x = -1$, находим

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n, \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0.$$

3. Числовые неравенства.

1) Если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$, а если $a > b$ и $c < 0$, то $ac < bc$.

2) Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.

3) Если $a > b > 0$, то $\{a > b\} \Leftrightarrow \{\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}\}$.

4) $\{a > b\} \Leftrightarrow \{\sqrt[2n+1]{a} > \sqrt[2n+1]{b}\}$.

5) $\{a^{2k} > b^{2k}\} \Leftrightarrow \{|a| > |b|\}$, $k \in N$.

6) Для любых действительных чисел справедливо неравенство

$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab.$$

7) Если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, то $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

8) Неравенство $|a| < b$, где $b > 0$, равносильно двойному неравенству $-b < a < b$.

9) Для любых неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ справедливо неравенство

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}. \tag{5}$$

Равенство в (5) имеет место лишь при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

10) Для любых действительных чисел a_k, b_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ выполняется *неравенство Коши–Буняковского*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right). \tag{6}$$

Равенство в (6) имеет место тогда и только тогда, когда существуют такие числа α и β, что при всех $k = 1, 2, \ldots, n$ выполняется равенство $\alpha a_k + \beta b_k = 0$.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Вычислить суммы:

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$; 2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

▲ 1) Так как $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, то по формуле (1) находим

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

3) Используя равенство

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$$

и формулу (1), получаем

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right). \ ▲$$

Пример 2. Вычислить сумму $S_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$.

▲ Рассмотрим тождество

$$(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1.$$

Полагая в этом тождестве $x = 1, 2, ..., n$ и складывая почленно получаемые равенства, находим

$$\sum_{k=1}^{n}((k+1)^3 - k^3) = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n.$$

Так как

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},$$

то, используя формулу (1), получаем

$$(n+1)^3 - 1 = 3S_n + \frac{3}{2}\, n(n+1) + n,$$

откуда

$$S_n = \frac{1}{6}\,(2n^3 + 3n^2 + n) = \frac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1).$$

Итак,

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \ \blacktriangle \qquad (7)$$

Замечание. В § 2 (пример 4) равенство (7) было доказано методом индукции.

Пример 3. Вычислить сумму $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx$.

▲ Рассмотрим равенство

$$S_n(x)\cdot 2\sin\frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{n} 2\sin kx \sin\frac{x}{2}.$$

Так как

$$2\sin kx \sin\frac{x}{2} = \cos\left(k - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)x,$$

то по формуле (1) находим

$$S_n(x)\cdot 2\sin\frac{x}{2} = \cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x = 2\sin\frac{n+1}{2}\,x \sin\frac{n}{2}\,x,$$

откуда

$$S_n(x) = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\,x \sin\frac{n}{2}\,x}{\sin\frac{x}{2}}, \quad \text{если} \quad \sin\frac{x}{2} \neq 0;$$

если $\sin(x/2) = 0$, то $S_n(x) = 0$. ▲

Пример 4. Последовательность $\{x_n\}$ задана формулой $x_n = ax_{n-1} + b$. Выразить через x_1, a, b и n:

1) x_n; 2) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$.

▲ 1) Так как $x_k = ax_{k-1} + b$, $x_{k-1} = ax_{k-2} + b$, то

$$x_k - x_{k-1} = a(x_{k-1} - x_{k-2}) = a^2(x_{k-2} - x_{k-3}) = ... = a^{k-2}(x_2 - x_1),$$

т. е.
$$x_k - x_{k-1} = a^{k-2}(x_2 - x_1).$$
Полагая в этой формуле $k = 2, 3, \ldots, n$ и складывая получаемые равенства, находим
$$\sum_{k=2}^{n}(x_k - x_{k-1}) = (x_2 - x_1)\sum_{k=2}^{n} a^{k-2},$$
или
$$x_n - x_1 = (x_2 - x_1)\,\frac{a^{n-1} - 1}{a - 1} = ((a-1)x_1 + b)\,\frac{a^{n-1} - 1}{a - 1},$$
откуда
$$x_n = a^{n-1}x_1 + b\,\frac{a^{n-1} - 1}{a - 1}, \quad a \neq 1.$$
При $a = 1$ последовательность $\{x_n\}$ является арифметической прогрессией с разностью b, и поэтому
$$x_n = x_1 + (n-1)b.$$
$$2)\ S_n = x_1 + \sum_{k=2}^{n} x_k = x_1 + a\sum_{k=2}^{n} x_{k-1} + (n-1)b,$$
$$S_n = x_1 + a(S_n - x_n) + (n-1)b,$$
$$S_n(1-a) = x_1 - ax_n + (n-1)b = x_1 - a^n x_1 - ab\,\frac{a^{n-1} - 1}{a - 1} + (n-1)b,$$
откуда
$$S_n = \frac{(n-1)b}{1-a} + \frac{ab}{(a-1)^2}(a^{n-1} - 1) + \frac{a^n - 1}{a - 1}x_1, \quad a \neq 1. \ \blacktriangle$$

Пример 5. Последовательность $\{x_n\}$ задана формулой
$$x_n = (\alpha + \beta)x_{n-1} - \alpha\beta x_{n-2},$$
где $\alpha\beta \neq 0$. Выразить x_n через x_0, x_1, α, β и n.

▲ Исходное равенство можно записать так:
$$x_n - \alpha x_{n-1} = \beta(x_{n-1} - \alpha x_{n-2}).$$
Обозначим $y_n = x_n - \alpha x_{n-1}$, тогда $y_n = \beta y_{n-1}$, откуда $y_n = \beta^{n-1}y_1$, т. е. $x_n - \alpha x_{n-1} = \beta^{n-1}y_1$, или
$$x_n = \alpha x_{n-1} + \beta^{n-1}y_1.$$
Полагая $x_n = \beta^n z_n$, получаем
$$z_n = \frac{\alpha}{\beta}\,z_{n-1} + \frac{y_1}{\beta}.$$
Считая $\alpha \neq \beta$ и используя результат предыдущего примера, находим
$$z_n = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} z_1 + \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} - 1}{\frac{\alpha}{\beta} - 1} \cdot \frac{y_1}{\beta},$$
где $z_1 = x_1/\beta$, $y_1 = x_1 - \alpha x_0$. Отсюда получаем
$$x_n = x_1\,\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} - \alpha\beta x_0\,\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}, \quad \alpha \neq \beta.$$

Если $\alpha = \beta$, то $x_n = n\alpha^{n-1}x_1 - x_0(n-1)\alpha^n$. ▲

Пример 6. Вычислить сумму $\sum\limits_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2$.

▲ Рассмотрим тождество $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$. Приравнивая в этом тождестве коэффициенты при x^n и используя формулу (4), получаем

$$C_n^n C_n^0 + C_n^{n-1}C_n^1 + \ldots + C_n^{n-k}C_n^k + \ldots + C_n^0 C_n^n = C_{2n}^n.$$

Это равенство в силу (3) можно записать в виде $\sum\limits_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2 = C_{2n}^n$. Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2 = C_{2n}^n.$$

Пример 7. Вычислить сумму $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+1}$.

▲ Используя равенства

$$\frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{(k+1)k!} = \frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n+1-k)}{(n+1)(k+1)!} = \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1},$$

получаем

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}C_{n+1}^k = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1). \ ▲$$

Пример 8. Доказать неравенство Коши–Буняковского (6).

▲ Если $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, то в (6) имеет место равенство. Пусть хотя бы одно из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ отлично от нуля, тогда $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 > 0$. Рассмотрим квадратный трехчлен относительно x

$$ax^2 + 2bx + c = \sum_{k=1}^{n}(a_k x + b_k)^2,$$

где

$$a = \sum_{k=1}^{n}a_k^2, \quad b = \sum_{k=1}^{n}a_k b_k, \quad c = \sum_{k=1}^{n}b_k^2.$$

Так как $(a_k x + b_k)^2 \geqslant 0$, $x \in R$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, то дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + 2bx + c$ неположителен: $b^2 \leqslant ac$. Следовательно,

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right).$$

Выясним, в каком случае в (6) имеет место равенство. Пусть $b^2 = ac$. Тогда если $a = 0$, т. е. $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, то, положив $\alpha = 1$, $\beta = 0$ $(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$, получим

$$\alpha a_k + \beta b_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Пусть $a \neq 0$, тогда квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет корень x_0 (так как дискриминант трехчлена равен нулю), т. е.

$$ax_0^2 + bx_0 + c = \sum_{k=1}^{n}(a_k x_0 + b_k)^2 = 0.$$

Отсюда следует, что $a_k x_0 + b_k = 0$ при $k = 1, 2, ..., n$. Положив $\alpha = x_0$, $\beta = 1$, получаем $\alpha a_k + \beta b_k = 0$, где $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ $(k = 1, 2, ..., n)$.

Легко проверить, что при выполнении условий $\alpha a_k + \beta b_k = 0$ $(k = 1, 2, ..., n)$ соотношение (6) превращается в равенство. ▲

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что если положительные числа a, b, c являются последовательными членами арифметической прогрессии, то числа

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \quad \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}, \quad \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

также являются последовательными членами арифметической прогрессии.

2. Доказать, что если положительные числа a_1, a_2, ..., a_n являются последовательными членами арифметической прогрессии, то

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

3. Пусть S_n — сумма первых n членов арифметической прогрессии. Доказать, что:

1) $S_{n+3} = 3S_{n+2} - 3S_{n+1} + S_n$; 2) $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$.

4. Доказать, что если последовательность $\{a_n\}$ является арифметической прогрессией, то при любом $n \geqslant 3$ и любом $k \in N$ справедливо равенство

$$a_1^k - C_n^1 a_2^k + C_n^2 a_3^k + ... + (-1)^n C_n^n a_{n+1}^k = 0.$$

5. Пусть S_n — сумма первых n членов геометрической прогрессии. Доказать, что

$$S_n(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2.$$

6. Доказать, что для любого числа a и для любого $n \in N$ выполняется равенство

$$(1 + a + a^2 + ... + a^{n-1})(1 + a + a^2 + ... + a^{n+1}) = (1 + a + a^2 + ... + a^n)^2 - a^n.$$

7. Найти следующие суммы:

1) $1 + 11 + 111 + ... + 11...1$ (последнее слагаемое — n-значное число);

2) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + ... + \frac{2n-1}{2^n}$; 3) $1 + 2x + 3x^2 + ... + (n+1)x^n$;

4) $x^n + 2x^{n-1} + ... + (n-1)x^2 + nx$.

8. Доказать, что последовательность $\{b_n\}$ отличных от нуля чисел является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда при каждом $n \geqslant 3$ выполняется равенство

$$(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_{n-1}^2)(b_2^2 + b_3^2 + \ldots + b_n^2) = (b_1 b_2 + b_2 b_3 + \ldots + b_{n-1} b_n)^2.$$

9. Вычислить двойную сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$, если:

1) $a_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j; \end{cases}$ 2) $a_{ij} = i$; 3) $a_{ij} = i - j$; 4) $a_{ij} = |i - j|$.

10. Доказать, что для любых чисел a и b справедливы равенства:

1) $a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum\limits_{k=0}^{n} b^k a^{n-k}$;

2) $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b) \sum\limits_{k=0}^{2n} (-1)^k b^k a^{2n-k}$.

11. Доказать *тождество Лагранжа*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} (a_j b_k - a_k b_j)^2.$$

12. Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — заданные последовательности чисел. Доказать:

1) если $B_m = \sum\limits_{j=1}^{m} b_j$, то при любом $n \in N$ справедливо равенство (*преобразование Абеля*)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n,$$

а при любом $n \in N$ и при любом $p \in N$ выполняется равенство

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_{n+p} B_{n+p} - a_{n+1} B_n;$$

2) если $D_s = \sum\limits_{j=n+1}^{n+s} b_j$, то для любого $p \in N$ выполняется равенство

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{j=1}^{p-1} (a_{n+j} - a_{n+j+1}) D_j + a_{n+p} D_p.$$

13. Вычислить сумму:

1) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(3k-2)(3k+1)}$; 2) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(4k-3)(4k+1)}$;

3) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}$; 4) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$;

5) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}$.

14. Пусть $\{a_n\}$ — арифметическая прогрессия, все члены и разность d которой отличны от нуля.

Доказать, что справедливо равенство:

1) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$;

2) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1} a_{k+2}} = \frac{1}{2d}\left(\frac{1}{a_1 a_2} - \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2}}\right)$;

3) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1} a_{k+2} a_{k+3}} = \frac{1}{3d}\left(\frac{1}{a_1 a_2 a_3} - \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3}}\right)$.

15. Пусть $S_n(p) = \sum\limits_{k=1}^{n} k^p, \quad p \in N$:

1) доказать формулу $\sum\limits_{p=1}^{m} C_{m+1}^{p} S_n(p) = (n+1)^{m+1} - (n+1)$;

2) вычислить по этой формуле $S_n(3)$, пользуясь тем, что

$$S_n(1) = \frac{n(n+1)}{2}, \quad S_n(2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

16. Доказать равенство:

1) $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = C_{2n+1}^{3}$; 2) $\sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$;

3) $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$;

4) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

5) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$;

6) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$;

7) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$.

17. Доказать равенство:

1) $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(x+k\alpha) = \dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\,\alpha\right)\cos\left(x+\frac{n}{2}\,\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq 2\pi k, \quad k \in Z;$

2) $\sum\limits_{k=0}^{n} \sin(x+k\alpha) = \dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\,\alpha\right)\sin\left(x+\frac{n}{2}\,\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq 2\pi k, \quad k \in Z.$

18. Вычислить сумму:

1) $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin(2k-1)x$; 2) $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos(2k-1)x$; 3) $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin^2 kx$;

4) $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos^2 kx$; 5) $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin^3 kx$; 6) $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos^3 kx$.

19. Последовательность $\{x_n\}$ задана формулой $x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}$. Выразить x_n через x_0, x_1 и n, если:

1) $a=2$, $b=3$; 2) $a=3$, $b=-2$; 3) $a=\alpha$, $b=1-\alpha$, $\alpha \neq 2$.

20. Написать формулу бинома Ньютона:

1) $(1+x)^5$; 2) $(a+b)^6$; 3) $(x+y)^7$; 4) $(a-b)^8$.

21. Найти член разложения $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16}$, содержащий x^3.

22. Найти коэффициент многочлена:

1) $(1-x+x^2)^3$ при x^3; 2) $(1+2x-3x^2)^4$ при x^3 и x^4;
3) $(1+x^2-x^3)^9$ при x^8; 4) $(1+x^2+x^3)^7$ при x^{11};

5) $\sum\limits_{k=3}^{15} (1+x)^k$ при x^3.

23. Вычислить сумму:

1) $\sum\limits_{k=1}^{n} (k+1)C_n^k$; 2) $\sum\limits_{k=1}^{n} (k-1)C_n^k$; 3) $\sum\limits_{k=1}^{n} C_{2n}^{2k}$; 4) $\sum\limits_{k=1}^{n} C_{2n}^{2k-1}$;

5) $\sum\limits_{k=0}^{m} (-1)^k C_n^k$, $m<n$; 6) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k (C_n^k)^2$.

24. Доказать равенство:

1) $\sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}$; 2) $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} kC_n^k = 0$;

3) $\sum\limits_{k=0}^{s} C_n^k C_m^{s-k} = C_{m+n}^s$; 4) $\sum\limits_{k=0}^{m} C_{n+k}^n = C_{n+m+1}^{n+1}$;

5) $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{2^{k+1}C_n^k}{k+1} = \dfrac{3^{n+1}-1}{n+1}$; 6) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}C_n^k}{k+1} = \dfrac{n}{n+1}$.

25. Найти члены разложения, являющиеся целыми числами:
1) $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})^5$, 2) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^8$.

26. Найти наибольший коэффициент многочлена:
1) $\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}x\right)^4$; 2) $\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}x\right)^{10}$.

27. Найти наибольший член разложения $(1+\sqrt{2})^{30}$.

28. Доказать формулу:
1) $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$;
2) $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+$
$+3(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)+6abc$;
3) $(a+b+c)^4 = a^4+b^4+c^4+4(a^3b+a^3c+b^3a+b^3c+c^3a+$
$+c^3b)+6(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)+12(a^2bc+b^2ac+c^2ab)$.

29. Доказать формулу
$$(x_1+x_2+\ldots+x_p)^n = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_p=n} \frac{n!}{k_1!\,k_2!\ldots k_p!} x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_p^{k_p},$$
где суммирование ведется по всем целым неотрицательным k_1, k_2, … …, k_p таким, что $k_1+k_2+\ldots+k_p=n$.

30. Доказать, что для любого натурального $n \geqslant 2$ справедливо неравенство:
1) $2 < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 3$; 2) $1 < \sqrt[n]{n} < 1+\dfrac{2}{\sqrt{n}}$;
3) $\sqrt{n} \leqslant \sqrt[n]{n!} < \dfrac{n+1}{2}$.

31. Доказать неравенство $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k+1}} > 1$

32. Пусть $a>0$, $n \in N$, $k \in N$, $k \leqslant n$. Доказать, что
$$(1+a)^n > 1+C_n^k a^k.$$

33. Доказать, что если $x>0$, то справедливы неравенства
$$1+\frac{x}{2+x} < \sqrt{1+x} < 1+\frac{x}{2}.$$

34. Доказать, что если $|x|<1$ и $n \in N$, $n \geqslant 2$, то
$$(1-x)^n+(1+x)^n < 2^n.$$

35. Пусть $a>0$, $n \in N$. Доказать, что
$$a+a^2+\ldots+a^{2n-1} \leqslant n(1+a^{2n})-a^n.$$

36. Пусть $a>0$, $n \in N$, $m \in N$, $m \leqslant n$. Доказать, что
$$a^m+\frac{1}{a^m} \leqslant a^n+\frac{1}{a^n}.$$

37. Доказать, что если A — наименьшее из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, B — наибольшее, то справедливо неравенство

$$A \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \leqslant B.$$

38. Пусть a_1, a_2, ..., a_n — действительные числа, A — наименьшее из чисел $|a_1|$, $|a_2|$, ..., $|a_n|$, а B — наибольшее. Доказать, что

$$A \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \leqslant B.$$

39. Доказать, что для любых действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ справедливо неравенство

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \leqslant n(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2).$$

40. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — действительные числа, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — положительные числа, M — наибольшая из дробей $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$, ..., $\frac{a_n}{b_n}$, а m — наименьшая. Доказать, что

$$m \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} \leqslant M.$$

41. Доказать, что для любых положительных чисел a, b, c справедливо неравенство:

1) $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant 3$; 2) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$.

42. Доказать, что для любых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ справедливо неравенство

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2.$$

43. Доказать, что если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — такие положительные числа, что $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$, то

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) \geqslant 2^n.$$

44. Пусть $a_i > -1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и числа a_i имеют один и тот же знак. Доказать неравенство

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) \geqslant 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

45. Пусть $x_1, \ldots, x_n$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — произвольные действительные числа, $\alpha > 0$. Доказать, что

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k a_k\right| \leqslant \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \frac{\alpha}{4} \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

46. Доказать, что для любых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ справедливы неравенства

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}},$$

связывающее среднее гармоническое, среднее геометрическое, среднее арифметическое и среднее квадратическое чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

47. Доказать, что если $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$, $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$, то

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\,\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n} \leqslant \frac{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}{n}.$$

48. Пусть положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ являются последовательными членами арифметической прогрессии. Доказать, что

$$\sqrt{a_1a_n} \leqslant \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \leqslant \frac{a_1+a_n}{2}.$$

49. Доказать, что если A — наименьшее из положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, B — наибольшее, то справедливо неравенство:

1) $A \leqslant \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \leqslant B$; 2) $A \leqslant \sqrt{\dfrac{a_1^m+a_2^m+\ldots+a_n^m}{n}} \leqslant B$;

3) $A \leqslant \dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}} \leqslant B$.

50. Доказать, что для любых действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ справедливо неравенство:

1) $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{1/2}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{1/2}$;

2) $\left|\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{1/2} - \left(\sum\limits_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{1/2}\right| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n}|a_k-b_k|$;

3) $\left(\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\right)^2 + \left(\sum\limits_{k=1}^{n}b_k\right)^2\right)^{1/2} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)^{1/2}$.

51. Доказать, что если $a_1 \geqslant 0$, $a_2 \geqslant 0$, ..., $a_n \geqslant 0$ и $p \in N$, то

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^p \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^p.$$

ОТВЕТЫ

7. 1) $\dfrac{10^{n+1}-9n-10}{81}$; 2) $3-\dfrac{2n+3}{2^n}$;

3) $\dfrac{1-(n+2)x^{n+1}+(n+1)x^{n+2}}{(1-x)^2}$ при $x \neq 1$; $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ при $x=1$;

4) $\dfrac{x^{n+2}-(n+1)x^2+nx}{(x-1)^2}$ при $x \neq 1$; $\dfrac{n(n+1)}{2}$ при $x=1$.

9. 1) n; 2) $\dfrac{n^2(n+1)}{2}$; 3) 0; 4) $\dfrac{n(n^2-1)}{3}$.

13. 1) $\dfrac{n}{3n+1}$; 2) $\dfrac{n}{4n+1}$; 3) $\dfrac{n(n+2)}{3(2n+1)(2n+3)}$;

4) $\dfrac{1}{18}-\dfrac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$; 5) $\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

15. 2) $S_n(3) = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

18. 1) $\dfrac{\sin^2 nx}{\sin x}$; 2) $\dfrac{\sin 2nx}{2\sin x}$; 3) $\dfrac{n}{2} - \dfrac{\sin nx\cos(n+1)x}{2\sin x}$;

4) $\dfrac{n}{2} + \dfrac{\sin nx\cos(n+1)x}{2\sin x}$;

5) $\dfrac{3\sin\dfrac{n+1}{2}x\sin\dfrac{nx}{2}}{4\sin\dfrac{x}{2}} - \dfrac{\sin\dfrac{3(n+1)}{2}x\sin\dfrac{3nx}{2}}{4\sin\dfrac{3x}{2}}$;

6) $\dfrac{\cos\dfrac{3(n+1)x}{2}\sin\dfrac{3}{2}nx}{4\sin\dfrac{3x}{2}} + \dfrac{3\cos\dfrac{n+1}{2}x\sin\dfrac{nx}{2}}{4\sin\dfrac{x}{2}}$.

19. 1) $x_n = \dfrac{3^n + (-1)^{n-1}}{4}x_1 + \dfrac{3}{4}(3^{n-1} + (-1)^n)x_0$;

2) $x_n = (2^n - 1)x_1 - 2(2^{n-1} - 1)x_0$;

3) $x_n = \dfrac{(\alpha-1)^n - 1}{\alpha - 2}x_1 - \dfrac{\alpha - 1}{\alpha - 2}((\alpha-1)^{n-1} - 1)x_0$ при $\alpha \neq 2$; $x_n = nx_1 - (n-1)x_0$ при $\alpha = 2$.

20. 1) $(1+x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$;

2) $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$;

3) $(x+y)^7 = x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7$;

4) $(a-b)^8 = a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8$.

21. $C_{16}^6x^3$.

22. 1) -7; 2) -40, -74; 3) $36C_9^3 + C_9^4 = 378$; 4) 245; 5) C_{16}^4.

23. 1) $(n+2)2^{n-1}$; 2) $(n-2)2^{n-1} + 1$; 3) 2^{2n-1}; 4) 2^{2n-1};
5) $(-1)^mC_{n-1}^m$; 6) $(-1)^mC_{2m}^m$ при $n = 2m$; 0 при $n = 2m+1$.

25. 1) 60; 2) 625, 7000, 7000, 1120, 16.

26. 1) $\dfrac{27}{64}$; 2) $C_{10}^3\dfrac{2^7}{3^{10}}$. **27.** $C_{30}^{12}2^9$.

§ 5. Комплексные числа

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Определение комплексного числа.

1) *Комплексные числа* — выражения вида $a + bi$ (a, b — действительные числа, i — некоторый символ). Равенство $z = a + bi$ означает, что комплексное число $a + bi$ обозначено буквой z, а запись комплексного числа z в виде $a + bi$ называют *алгебраической формой комплексного числа.*

2) Два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называют *равными* и пишут $z_1 = z_2$, если $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

3) *Сложение* и *умножение* комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ производится согласно формулам

$$z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i, \tag{1}$$

$$z_1 z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i. \tag{2}$$

4) Комплексное число вида $a + 0 \cdot i$ отождествляют с действительным числом a $(a + 0 \cdot i = a)$, число вида $0 + bi$ $(b \neq 0)$ называют *чисто мнимым* и обозначают bi; i называют *мнимой единицей*. Действительное число a называют *действительной частью*, а действительное число b — *мнимой частью* комплексного числа $a + bi$.

5) Справедливо равенство

$$i^2 = -1, \tag{3}$$

а формулы (1) и (2) получаются по правилам сложения и умножения двучленов $a_1 + b_1 i$ и $a_2 + b_2 i$ с учетом равенства (3).

6) Операции вычитания и деления определяются как обратные для сложения и умножения, а для разности $z_1 - z_2$ и частного $\dfrac{z_1}{z_2}$ (при $z_2 \neq 0$) комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ имеют место формулы

$$z_1 - z_2 = a_1 - a_2 + (b_1 - b_2)i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

7) Сложение и умножение комплексных чисел обладают свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1 z_2 = z_2 z_1;$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \quad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3);$$

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

2. Модуль комплексного числа. Комплексно сопряженные числа.

1) *Модулем комплексного числа* $z = a + bi$ (обозначается $|z|$) называется число $\sqrt{a^2 + b^2}$, т. е.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

2) Для любых комплексных чисел z_1, z_2 справедливы равенства

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|;$$

$$\text{если } z_2 \neq 0, \text{ то } \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

3) Число $a - bi$ называется *комплексно сопряженным* с числом $z = a + bi$ и обозначается $\overline{z}$, т. е.

$$\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi.$$

Справедливы равенства

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2, \quad \overline{\overline{z}} = z.$$

4) Для любых комплексных чисел z_1, z_2 верны равенства:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z}_2;$$

$$\text{если } z_2 \neq 0, \text{ то } \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}.$$

5) Частное от деления комплексных чисел можно записать в виде

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z}_2}{|z_2|^2}, \quad z_2 \neq 0. \tag{4}$$

3. Геометрическое изображение комплексных чисел.

1) Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат. Комплексное число $z = a + bi$ изображается точкой плоскости с координатами (a, b), и эта точка обозначается той же буквой z

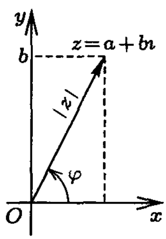

Рис 5.1

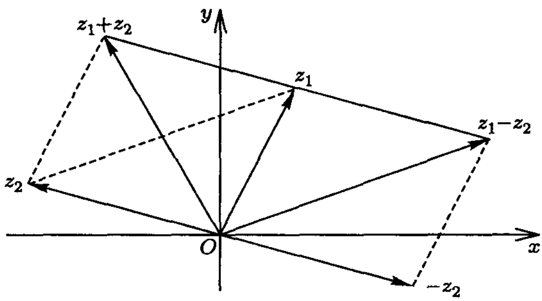

Рис 5.2

(рис. 5.1). Действительные числа изображаются точками оси абсцисс (ее называют *действительной осью*), а чисто мнимые числа — точками оси ординат (ее называют *мнимой осью*). Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называют *комплексной плоскостью.*

2) Комплексному числу $z = a + bi$ можно сопоставить вектор с началом в точке O и концом в точке z (см. рис. 5.1). Этот вектор будем обозначать той же буквой z, его длина равна $|z|$.

3) Число $z_1 + z_2$ изображается вектором, построенным по правилу сложения векторов z_1 и z_2 (рис. 5.2), а вектор $z_1 - z_2$ можно построить как сумму векторов z_1 и $-z_2$.

4) Расстояние между точками z_1 и z_2 равно длине вектора $z_1 - z_2$, т. е.

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2},$$

где $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$.

5) Условию $|z - z_0| = R$, где z_0 — заданное комплексное число, $R > 0$, удовлетворяют точки, лежащие на окружности радиуса R с центром в точке z_0.

6) Для любых комплексных чисел z_1, z_2 справедливы неравенства

$$|z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|, \qquad |z_1 \pm z_2| \geqslant \big||z_1| - |z_2|\big|.$$

4. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.

1) *Аргументом комплексного числа* $z \neq 0$ называется угол φ между положительным направлением действительной оси и вектором z (см. рис. 5.1). Этот угол считается положительным, если отсчет угла ведется против часовой стрелки, и отрицательным — при отсчете по часовой стрелке.

2) Связь между действительной и мнимой частями комплексного числа $z = a + bi$ и его модулем $r = |z|$ и аргументом φ выражается следующими формулами:

$$\begin{cases} a = r\cos\varphi, \\ b = r\sin\varphi; \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases} \tag{6}$$

3) Аргумент комплексного числа $z = a + bi$ $(z \neq 0)$ можно найти, решив систему (6). Эта система имеет бесконечно много решений вида $\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$, где $k \in Z$, φ_0 — одно из решений системы (6), т. е. аргумент комплексного числа определяется неоднозначно.

Для нахождения аргумента комплексного числа $z = a + bi$ $(a \neq 0)$ можно воспользоваться формулой

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}. \tag{7}$$

При нахождении аргумента комплексного числа z с помощью формулы (7) нужно обратить внимание на то, в какой четверти находится точка $z = a + bi$.

4) Из равенств (5) следует, что любое комплексное число $z = a + {}$ $+ bi$, где $z \neq 0$, представляется в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{8}$$

где $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$, φ — аргумент числа z. Запись комплексного числа z в виде (8), где $r > 0$, называют *тригонометрической формой комплексного числа.*

5) Комплексное число $\cos\varphi + i\sin\varphi$ обозначается символом $e^{i\varphi}$, т. е. для любого $\varphi \in R$ функция $e^{i\varphi}$ определяется *формулой Эйлера*

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{9}$$

Равенство (9) находит обоснование в теории аналитических функций. Из (9) следует, что $e^{2\pi i} = 1$, $e^{\pi i} = -1$, $e^{\pi i/2} = i$, $e^{-\pi i/2} = -i$, $|e^{i\varphi}| = {}$ $= 1$ для любого $\varphi \in R$.

6) Справедливы равенства

$$e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \quad \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}, \tag{10}$$

$$e^{in\varphi} = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, \quad n \in Z; \tag{11}$$

формулу (11) называют *формулой Муавра.*

7) Из (8) и (9) следует, что любое комплексное число $z \neq 0$ можно записать в *показательной форме*

$$z = re^{i\varphi}, \quad \text{где} \quad r = |z|, \quad \varphi \text{— аргумент числа } z, \tag{12}$$

а из равенств (10) следует, что если $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$, где $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, то

$$z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \tag{13}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}. \tag{14}$$

Из формул (13) и (14) следует, что при перемножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются; модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей этих чисел, а разность аргументов делимого и делителя является аргументом частного.

8) Если комплексные числа z_1 и z_2 записаны в показательной форме, т. е.

$$z_1 = r_1e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = r_2e^{i\varphi_2},$$

то $z_1 = z_2$ тогда и только тогда, когда

$$r_1 = r_2, \quad \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi, \quad k \in Z.$$

5. Извлечение корня. Рассмотрим уравнение

$$z^n = a, \tag{15}$$

где $a \neq 0$ — комплексное число, $n \in N$ $(n > 1)$. Пусть $z = re^{i\varphi}$, $a = \rho e^{i\theta}$; тогда

$$r^ne^{in\varphi} = \rho e^{i\theta},$$

откуда

$$r^n = \rho, \quad n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad k \in Z,$$

$$r = \sqrt[n]{\rho}, \quad \varphi_k = \frac{1}{n}(\theta + 2k\pi). \tag{16}$$

Уравнение (15) имеет n различных корней

$$z_k = \sqrt[n]{|a|}\, e^{i\varphi_k}, \tag{17}$$

где φ_k определяется формулой (16), $k = 0, 1, \ldots, n-1$, θ — аргумент числа a.

На комплексной плоскости точки z_k $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ располагаются в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{|a|}$ с центром в точке O.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Выполнить действия:

1) $(2+i)^3$; 2) $\dfrac{3+i}{(1+i)(1-2i)}$.

▲ 1) Используя формулу куба суммы и равенства $i^2=-1$, $i^3=-i$, получаем

$$(2+i)^3 = 8+3\cdot 2^2\cdot i+3\cdot 2\cdot i^2+i^3 = 2+11i.$$

2) Обозначим $z_1=3+i$, $z_2=(1+i)(1-2i)$. Тогда по формуле (2) находим $z_2=3-i$, а по формуле (4) получаем

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(3+i)^2}{10} = \frac{9+6i-1}{10} = \frac{4}{5}+\frac{3}{5}\,i. \text{ ▲}$$

Пример 2. Найти множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

1) $|z-1|=|z+i|$; 2) $1<|z+2i|<2$.

▲ 1) Уравнению $|z-1|=|z+i|$ удовлетворяют все точки, равноудаленные от точек $z_1=1$ и $z_2=-i$. Это прямая $y=-x$ (биссектриса второго и четвертого координатных углов).

2) Условию $|z+2i|<2$ удовлетворяют все точки, лежащие внутри круга радиуса 2 с центром в точке $z_0=-2i$, а условию $|z+2i|>1$ — все точки, лежащие вне круга радиуса 1 с центром в точке z_0. Искомое множество точек — кольцо между окружностями радиусов 1 и 2 с общим центром в точке $z_0=-2i$. ▲

Пример 3. Записать в тригонометрической форме комплексное число:

1) $z_1=-1-i$; 2) $z_2=-\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7}$.

▲ 1) Применяя формулу (7), получаем $\operatorname{tg}\varphi=1$, откуда $\varphi=5\pi/4$, так как точка $-1-i$ лежит в третьей четверти. Так как $|z_1|=\sqrt{2}$, то $z_1=\sqrt{2}e^{i5\pi/4}$.

2) Так как точка z_2 лежит во второй четверти, то, используя формулы приведения, получаем $-\cos\dfrac{\pi}{7}=\cos\dfrac{6\pi}{7}$, $\sin\dfrac{\pi}{7}=\sin\dfrac{6\pi}{7}$, и поэтому $z_2=\cos\dfrac{6\pi}{7}+i\sin\dfrac{6\pi}{7}$.

Пример 4. Вычислить $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^6}{(1-i)^4}$.

▲ Так как $1+i\sqrt{3}=2e^{i\pi/3}$, $1-i=\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$, то, применяя формулы (13) и (14), получаем

$$\frac{(1+i\sqrt{3})^6}{(1-i)^4} = \frac{2^6e^{2\pi i}}{(\sqrt{2})^4e^{-i\pi}} = -\frac{1}{16}. \text{ ▲}$$

Пример 5. Найти все корни уравнения $z^6=-1$.

▲ Используя формулы (16) и (17), где $\theta=\pi$, $|a|=\rho=1$, получаем

$$z_k = e^{i(\pi+2k\pi)/6}, \quad k=0,1,2,3,4,5,$$

где $z_1 = e^{i\pi/6} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $z_2 = e^{i\pi/2} = i$, $z_3 = e^{5\pi i/6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $z_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, $z_5 = -i$, $z_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ ▲

ЗАДАЧИ

1. Найти сумму и произведение комплексных чисел z_1 и z_2, если
1) $z_1 = 4 + 5i$, $z_2 = 3 - 2i$, 2) $z_1 = 0{,}5 - 3{,}2i$, $z_2 = 1{,}5 - 0{,}8i$,
3) $z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{3}i$, $z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$

2. Найти разность $z_2 - z_1$ и частное z_2/z_1, если
1) $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 0{,}4 - 0{,}2i$, 2) $z_1 = 1 - 2i$, $x_2 = 0{,}6$,
3) $z_1 = \sqrt{5} - i$, $z_2 = \sqrt{5} - 2i$

3. Найти мнимую часть z, если
1) $z = (2 - i)^3(2 + 11i)$,
2) $z = \dfrac{2 - 3i}{1 + 4i} + i^6$, 3) $z = \dfrac{5 + 2i}{2 - 5i} - \dfrac{3 - 4i}{4 + 3i} - \dfrac{1}{i}$

4. Выполнить действия
1) $i^{17} + i^{18} + i^{19} + i^{20}$, 2) $2i\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$,
3) $\dfrac{1 + i}{1 - i} + \dfrac{1 - i}{1 + i}$, 4) $\dfrac{13 + 12i}{6i - 8} + \dfrac{(1 + 2i)^2}{2 + i}$, 5) $\dfrac{(1 + 2i)^2 - (1 - i)^3}{(3 + 2i)^3 - (2 + i)^2}$

5. Определить, при каких действительных значениях x и y комплексные числа
$$z_1 = y^2 - 7y + 9xi \quad \text{и} \quad z_2 = -12 + 20i + x^2 i$$
равны

6. Определить, при каких действительных значениях x и y комплексные числа
$$z_1 = 8x^2 - 20i^9 \quad \text{и} \quad z_2 = 9x^2 - 4 + 10yi^3$$
являются сопряженными

7. Решить уравнение
1) $(1 + 2i)(z - i) + (4i - 3)(1 - iz) + 1 + 7i = 0$, 2) $z^2 + \bar{z} = 0$

8. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} z_1 + 2z_2 = 1 + i, \\ 3z_1 + iz_2 = 2 - 3i \end{cases}$$

9. На комплексной плоскости даны точки z_1, z_2, z_3, являющиеся вершинами треугольника Найти точку пересечения его медиан

10. В точках $z_1, z_2, \ldots, z_n$ комплексной плоскости расположены материальные точки соответственно с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$ Найти центр тяжести такой системы материальных точек

11. На комплексной плоскости даны точки z_1, z_2, z_3, являющиеся тремя последовательными вершинами некоторого параллелограмма. Найти четвертую вершину этого параллелограмма.

12. На комплексной плоскости даны точки $z_1 = 6 + 8i$, $z_2 = 4 - 3i$. Найти комплексные числа, соответствующие точкам, лежащим на биссектрисе угла, образованного векторами z_1 и z_2.

13. Найти модуль комплексного числа z:

1) $z = -4$; 2) $z = -i$; 3) $z = -5 - 2\sqrt{6}\,i$;
4) $z = 1 + \cos(8\pi/7) + i\sin(8\pi/7)$.

14. Решить уравнение:

1) $z^2 + 3|z| = 0$; 2) $z^2 + 2|z| = 1$; 3) $z^2 + |z|^2 = 0$;
4) $z^2 + z|z| + |z^2| = 0$.

15. Найти множество точек комплексной плоскости, заданное условием:

1) $|z + 1| = 1$; 2) $|z - i| < |z + i|$; 3) $|z + 2i - 1| \leqslant 2$;
4) $|z - 2|^2 + |z + 2|^2 = 26$; 5) $|z - 2| + |z + 2| = 26$;
6) $\sin|z| > 0$; 7) $\lg|z - 10i| < 1$; 8) $|z|^2 + 3z + 3\overline{z} = 0$.

16. Решить систему уравнений:

1) $|z + 1 - i| = |3 + 2i - z| = |z + i|$;

2) $\begin{cases} |z + 1| = |z + 2|, \\ |3z + 9| = |5z + 10i|; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} (1 - i)\overline{z} = (1 + i)z, \\ |z^2 + 51i| = 1. \end{cases}$

17. Доказать, что система уравнений

$$\begin{cases} |z + 1 - i| = \sqrt{2}, \\ |z| = 3 \end{cases}$$

не имеет решений.

18. Найти аргументы комплексного числа:

1) $z = i$; 2) $z = -1$; 3) $z = 8$; 4) $z = 2 - 2i$;
5) $z = \sin(\pi/9) - i\cos(\pi/9)$; 6) $z = 1 + \cos(\pi/7) + i\sin(\pi/7)$.

19. Найти множество точек комплексной плоскости, если один из аргументов φ числа z:

1) равен нулю;
2) равен $5\pi/2$;
3) удовлетворяет неравенствам $2\pi < \varphi < 3\pi$;
4) удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

20. Среди комплексных чисел z, удовлетворяющих условию:

1) $|z + 1 - i| = 1$; 2) $|z + 3 - \sqrt{3}i| \leqslant \sqrt{3}$;

найти число, имеющее наименьший положительный аргумент.

21. Где находится точка z^2, если точка $z = x + iy$ принадлежит прямой $y = 1$?

22. Где находится точка z комплексной плоскости, если точка z^2

принадлежит мнимой оси?

23. Пусть $z \neq \pm 1$. Доказать, что точка $(z-1)/(z+1)$ принадлежит мнимой оси тогда и только тогда, когда точка z принадлежит окружности радиуса $R=1$ с центром в точке $z=0$.

24. Может ли точка $z=0$ принадлежать какому-нибудь многоугольнику, вершины которого находятся в точках

$$z_k = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{k+1}, \quad |z| < 1?$$

25. Представить комплексное число z в тригонометрической форме:

1) $z = -\sqrt{3} + i$; 2) $z = -1$; 3) $z = -\cos\dfrac{\pi}{12} - i\sin\dfrac{\pi}{12}$;

4) $z = 1 + \cos\dfrac{10\pi}{9} + i\sin\dfrac{10\pi}{9}$; 5) $z = \operatorname{tg} 1 - i$.

26. Записать комплексное число z в алгебраической и в тригонометрической формах:

1) $z = \dfrac{i(\cos(5\pi/3) + i\sin(5\pi/3))}{\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)}$; 2) $z = \dfrac{1}{\cos(4\pi/3) - i\sin(4\pi/3)}$;

3) $z = \dfrac{i}{(1+i)^2}$; 4) $z = \dfrac{-\cos(5\pi/12) + i\sin(5\pi/12)}{\cos(13\pi/12) - i\sin(13\pi/12)}$;

5) $z = \dfrac{\left(\cos(\pi/3) - i\sin(\pi/3)\right)(1/2 + i\sqrt{3}/2)}{i}$.

27. Представить в тригонометрической форме комплексное число z:

1) $z = \dfrac{5(\cos 100^\circ + i\sin 100^\circ)i}{3(\cos 40^\circ - i\sin 40^\circ)}$; 2) $z = \dfrac{\sin(2\pi/5) + i(1 - \cos(2\pi/5))}{i-1}$.

28. При повороте на угол $\pi/2$ по часовой стрелке и удлинении в два раза вектор $z_1 = 2 + 5i$ переходит в вектор z_2. Найти комплексное число, соответствующее вектору z_2.

29. Вектор $z = -2 + 3i$ повернут на 180° и удлинен в $1,5$ раза. Найти комплексное число, соответствующее получившемуся вектору.

30. Записать комплексное число z в алгебраической форме:

1) $z = \left(\dfrac{i}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12}$; 2) $z = (\cos 31^\circ + i\sin 31^\circ)^{-10}$;

3) $z = \left(\dfrac{i^8 + \sqrt{3}i^5}{4}\right)^5$; 4) $z = -\dfrac{(2i)^7}{(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})^6}$, 5) $z = \dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$.

31. Записать комплексное число z в тригонометрической форме:

1) $z = (\sqrt{3} - i)^{100}$; 2) $z = \left(\dfrac{\sqrt{3}i + 1}{i - 1}\right)^6$; 3) $z = \dfrac{(1+i)^{2n+1}}{(1-i)^{2n-1}}$, $n \in N$;

4) $z = (\operatorname{tg} 2 - i)^4$; 5) $z = \left(\sin\dfrac{6\pi}{5} + i\left(1 + \cos\dfrac{6\pi}{5}\right)\right)^5$.

32. Найти все корни уравнения:

1) $z^3 = -1$, 2) $z^3 = 8i$; 3) $z^5 = 1$, 4) $z^8 = 1 + i$; 5) $z^4 + 1 = 0$;
6) $z^5 = 1 + \sqrt{3}i$; 7) $z^6 + 64 = 0$; 8) $z^2 = \bar{z}^3$.

33. Представить в показательной форме комплексное число:

1) $z = -\sqrt{12} - 2i$; 2) $z = -\cos(\pi/7) + i\sin(\pi/7)$.

34. Записать в показательной и в алгебраической формах комплексное число:

1) $z = 5\,e^{\pi i/4} \cdot 0{,}2\,e^{\pi i/6}\left(\cos\dfrac{5\pi}{12} - i\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$; 2) $z = \left(\dfrac{1}{2}\,e^{\pi i/12}\right)^{-3}$;

3) $z = (\sqrt{3} - i)^6$; 4) $z = \dfrac{1}{(\cos 12^\circ + i\sin 12^\circ)^5}$;

5) $z = \dfrac{e^{-\pi i/3}(1+\sqrt{3}\,i)^7}{i}$.

35. Доказать формулу

$$(1 + \cos\alpha + i\sin\alpha)^{2n} = \left(2\cos\frac{\alpha}{2}\right)^{2n} e^{in\alpha}, \quad n \in N, \quad \alpha \in R.$$

36. Найти все корни уравнения и записать их в показательной форме:

1) $z^3 = 1$; 2) $z^5 = -1$; 3) $z^3 = -4 + \sqrt{48}\,i$; 4) $z^4 = -1 - \sqrt{3}\,i$.

ОТВЕТЫ

1. 1) $7 + 3i$, $22 + 7i$; 2) $2 - 4i$, $-1{,}81 - 5{,}2i$;
3) $2\sqrt{2}$, 5.

2. 1) $-2{,}6 - 4{,}2\,i$, $0{,}016 - 0{,}088\,i$; 2) $-0{,}4 + 2\,i$, $0{,}12 + 0{,}24\,i$;
3) $-i$, $\dfrac{7}{6} - \dfrac{\sqrt{5}}{6}\,i$;

3. 1) 0; 2) $-11/17$; 3) 3.

4. 1) 0; 2) $-2i$; 3) 0; 4) $-\dfrac{18}{25} + \dfrac{23}{50}i$; 5) $\dfrac{22}{159} - \dfrac{5}{318}i$.

5. $(4;3)$, $(5;3)$, $(4;4)$, $(5;4)$. **6.** $(-2;-2)$, $(2;-2)$.

7. 1) $-1 - i$; 2) 0, -1, $\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. **8.** $z_1 = 1 - i$, $z_2 = i$.

9. $\dfrac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$.

10. $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} m_k z_k\right)\Big/\left(\sum\limits_{k=1}^{n} m_k\right)$. **11.** $z_4 = z_1 + z_3 - z_2$.

12. $t(7 + i)$, t — произвольное положительное число.

13. 1) 4; 2) 1; 3) 7; 4) $2\sin(\pi/14)$.

14. 1) 0, $3i$, $-3i$; 2) $\sqrt{2} - 1$, $1 - \sqrt{2}$, i, $-i$; 3) bi, $b \in R$;
4) $c \pm \sqrt{3}ci$, c — произвольное действительное неположительное число.

15. 1) Окружность радиуса $R = 1$ с центром в точке $z = -1$;
2) полуплоскость $y > 0$;
3) круг (вместе с границей) радиуса $R = 2$ с центром в точке $z = 1 - 2i$;
4) окружность радиуса $R = 3$ с центром в точке $z = 0$;

5) эллипс с фокусами в точках $z_1 = -2$, $z_2 = 2$ и с большой полуосью $a = 13$;

6) система концентрических колец с центром в точке $z = 0$, содержащая интервалы $(2k\pi; 2k\pi + \pi)$, $k \geqslant 0$ — целое, действительной оси;

7) круг радиуса $R = 10$ с центром в точке $z = 10i$, за исключением центра круга и граничной окружности;

8) окружность радиуса $R = 3$ с центром в точке $z = -3$.

16. 1) $\frac{7}{6} + \frac{5}{6}i$; 2) $-\frac{3}{2} - \frac{17}{4}i$, $-\frac{3}{2} - 2i$;
3) $5 - 5i$, $-5 + 5i$, $\sqrt{26} - \sqrt{26}i$, $-\sqrt{26} + \sqrt{26}i$.

18. 1) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$; 2) $\pi + 2\pi k$, $k \in Z$; 3) $2\pi k$, $k \in Z$;
4) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$; 5) $-\frac{7}{18}\pi + 2\pi k$, $k \in Z$; 6) $\frac{\pi}{14} + 2\pi k$, $k \in Z$.

19. 1) Действительная положительная полуось $z = x > 0$;
2) мнимая полуось $z = iy$, $y > 0$;
3) полуплоскость $y > 0$;
4) вся комплексная полуплоскость, за исключением точки $z = 0$.

20. 1) i; 2) $-\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$.

21. Точка $z^2 = x + iy$ принадлежит параболе $x = y^2/4 - 1$.

22. Точка $z = x + iy$ находится на кривой $y = |x|$.

25. 1) $2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$; 2) $\cos\pi + i\sin\pi$;
3) $\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}$; 4) $-2\cos\frac{5\pi}{9}\left(\cos\frac{14\pi}{9} + i\sin\frac{14\pi}{9}\right)$;
5) $\frac{1}{\cos 1}\left(\cos\left(1 + \frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(1 + \frac{3\pi}{2}\right)\right)$.

26. 1) $z = 1 = \cos 0 + i\sin 0$; 2) $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$;
3) $z = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\cos 0 + i\sin 0)$; 4) $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}$;
5) $z = -i = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$.

27. 1) $\frac{5}{3}(\cos 230^\circ + i\sin 230^\circ)$; 2) $\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{5}\left(\cos\frac{29\pi}{20} + i\sin\frac{29\pi}{20}\right)$.

28. $-10 + 4i$. **29.** $3 - \frac{9}{2}i$.

30. 1) 1; 2) $\cos 50^\circ + i\sin 50^\circ$; 3) $\frac{1}{64} - \frac{\sqrt{3}}{64}i$; 4) -2; 5) 2.

31. 1) $2^{100}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$; 2) $8\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$;
3) $2(\cos 0 + i\sin 0)$, если n четное; $2(\cos\pi + i\sin\pi)$, если n нечетное;
4) $\frac{1}{\cos^4 2}(\cos 8 + i\sin 8)$; 5) $-32\cos^5\frac{3\pi}{5}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

32. 1) $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, -1, $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sqrt{3} + i$, $-\sqrt{3} + i$, $-2i$;

3) $\cos\frac{2\pi k}{5} + i\sin\frac{2\pi k}{5}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$;

4) $\sqrt[16]{2}\left(\cos\frac{8k+1}{32}\pi + i\sin\frac{8k+1}{32}\pi\right)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$;

5) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$;

6) $\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}\right)$, $\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{15} + i\sin\frac{7\pi}{15}\right)$, $\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{15} + i\sin\frac{13\pi}{15}\right)$, $\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{15} + i\sin\frac{19\pi}{15}\right)$, $\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$;

7) $\sqrt{3} + i$, $2i$, $-\sqrt{3} + i$, $-\sqrt{3} - i$, $-2i$, $\sqrt{3} - i$;

8) 0, $\cos\frac{2\pi k}{5} + i\sin\frac{2\pi k}{5}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

33. 1) $4e^{7\pi i/6}$; 2) $e^{6\pi i/7}$.

34. 1) $e^{2\pi i} = 1$; 2) $8e^{-\pi i/4} = 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$; 3) $64e^{i\pi} = -64$;
4) $e^{-\pi i/3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $2^7 e^{3\pi i/2} = -2^7 i$.

35. 1) $e^{2\pi k i/3}$ $(k = 0, 1, 2)$; 2) $e^{(2k+1)\pi i/5}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$;
3) $2e^{2(3k+1)\pi i/9}$, $k = 0, 1, 2$; 4) $\sqrt[4]{2}e^{(3k+2)\pi i/6}$, $k = 0, 1, 2, 3$.

§ 6. Многочлены. Алгебраические уравнения. Рациональные дроби

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Многочлен и его корни.

1) Пусть задан *многочлен n-й степени*

$$Q_n(x) = C_n x^n + C_{n-1}x^{n-1} + \ldots + C_1 x + C_0, \quad C_n \neq 0, \tag{1}$$

с действительными или комплексными коэффициентами $C_n, C_{n-1}, \ldots, C_1, C_0$. Число C_n называют *старшим коэффициентом*, а число C_0 — *свободным членом* многочлена $Q_n(x)$. Переменное x может принимать любые значения из множеств R или C.

2) Число a называют *корнем многочлена* $Q_n(x)$, если $Q_n(a) = 0$, а уравнение $Q_n(x) = 0$ — *алгебраическим уравнением* n-й степени.

3) Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ считают *равными* и пишут $P(x) = Q(x)$, если равны коэффициенты этих многочленов при одинаковых степенях.

4) Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — два многочлена, причем многочлен $Q(x) \not\equiv 0$. Если

$$P(x) = T(x)Q(x) + R(x), \tag{2}$$

где $T(x)$ и $R(x)$ — некоторые многочлены, причем $R(x)$ либо равен нулю, либо имеет меньшую степень, чем $Q(x)$, то многочлен $T(x)$ называется *частным* от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$, а $R(x)$ — *остатком* от этого деления.

В частности, если $Q(x) = x - a$, где a — заданное число ($a \in R$ или $a \in C$), а $P(x) = Q_n(x)$, где $Q_n(x)$ — многочлен степени n, то в формуле (2) частное $T(x) = \widetilde{Q}_{n-1}(x)$ — многочлен степени $n-1$, а $R(x) = r$ — некоторое число. Итак, формула деления многочлена $Q_n(x)$ степени n на двучлен $x - a$ имеет вид

$$Q_n(x) = (x - a)Q_{n-1}(x) + r. \tag{3}$$

5) Теорема Безу. *Число a является корнем многочлена $Q_n(x)$ тогда и только тогда, когда этот многочлен делится без остатка на $x - a$, т. е. справедливо равенство*

$$Q_n(x) = \widetilde{Q}_{n-1}(x)(x - a).$$

6) Число a называют *корнем многочлена $Q_n(x)$ кратности* k, если существует число $k \in N$ и многочлен $Q^*_{n-k}(x)$ такие, что для всех x ($x \in R$ или $x \in C$) справедливо равенство

$$Q_n(x) = (x - a)^k Q^*_{n-k}(x), \tag{4}$$

где

$$Q^*_{n-k}(a) \neq 0. \tag{5}$$

Если $a \in R$ и коэффициенты многочлена $Q_n(x)$ — действительные числа, то условия (4), (5) выполняются тогда и только тогда, когда

$$Q_n(a) = 0, \quad Q'_n(a) = 0, \quad \ldots, \quad Q_n^{(k-1)}(a) = 0, \quad Q_n^{(k)}(a) \neq 0.$$

7) Если $Q(x) = x^2 + px + q$, где $p \in R$, $q \in R$, $p^2 - 4q < 0$, то корни x_1 и x_2 многочлена $Q(x)$ — комплексно сопряженные числа:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}, \quad x_2 = -\frac{p}{2} - i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

8) Если $Q_n(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами, а $x_0 = \gamma + i\delta$, $\delta \neq 0$, его корень, то число $\overline{x}_0 = \gamma - i\delta$ также является корнем этого многочлена.

9) Целые корни алгебраического уравнения $Q_n(x) = 0$, где $Q_n(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, являются делителями его свободного члена.

2. Разложение многочлена на множители.

1) Теорема Гаусса (основная теорема алгебры). *Алгебраическое уравнение степени $n \geqslant 1$, т. е. уравнение $Q_n(x) = 0$, где $Q_n(x)$ — многочлен (1) степени n, с действительными или комплексными коэффициентами имеет n корней при условии, что каждый корень считается столько раз, какова его кратность.*

2) Пусть $Q_n(x)$ — многочлен (1) степени n с действительными коэффициентами, a_j ($j = 1, 2, \ldots, k$) — все действительные корни этого многочлена, α_j — кратность корня a_j. Тогда

$$Q_n(x) = C_n(x - a_1)^{\alpha_1} \ldots (x - a_k)^{\alpha_k} R(x),$$

где $R(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами степени $t = n - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j$, не имеющий действительных корней. Если $t > 1$, то многочлен $R(x)$ должен делиться на многочлен $x^2 + px + q = (x - x_0)(x - \overline{x}_0)$, где $x_0 = \gamma + i\delta$ $(\delta \neq 0)$ — комплексный корень многочлена $R(x)$.

Пусть x_j и $\overline{x}_j$ — пара комплексно сопряженных корней многочлена $R(x)$, β_j — кратность этих корней,

$$x^2 + p_j x + q_j = (x - x_j)(x - \overline{x}_j), \quad p_j \in R, \quad q_j \in R,$$

$x_j, \overline{x}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$ — все пары комплексно сопряженных корней многочлена $R(x)$. Тогда

$$Q_n(x) = C_n(x - a_1)^{\alpha_1} \ldots (x - a_k)^{\alpha_k} (x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1} \ldots (x^2 + p_s x + q_s)^{\beta_s},$$
$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_k + 2\sum_{j=1}^{s} \beta_j = n. \tag{6}$$

3. Разложение правильной рациональной дроби на элементарные.

1) Пусть $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ — многочлены степени m и n. Если $m < n$, то функцию $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ называют *правильной рациональной дробью*, а при $m \geqslant n$ — *неправильной*.

2) Если $T(x)$ частное, а $R(x)$ — остаток от деления многочлена $P_m(x)$ на многочлен $Q_n(x)$, то

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = T(x) + \frac{R(x)}{Q_n(x)},$$

где либо $R(x) = 0$ (в случае, когда многочлен $P_m(x)$ нацело делится на многочлен $Q_n(x)$), либо $R(x) \neq 0$, а дробь $\frac{R(x)}{Q_n(x)}$ является правильной.

3) Пусть $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ — многочлены с действительными коэффициентами, $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ — правильная дробь, число a — действительный корень кратности k многочлена $Q_n(x)$. Тогда существуют действительные числа A_1, A_2, ..., A_k такие, что

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{P^*(x)}{Q^*_{n-k}(x)},$$

где $P^*(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами или нуль, $Q^*_{n-k}(x)$ — частное от деления $Q_n(x)$ на $(x-a)^k$ при $P^*(x) \not\equiv 0$. Дробь $\frac{P^*(x)}{Q^*_{n-k}(x)}$ является правильной, а числа A_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$ и многочлен $P^*(x)$ определяются однозначно.

4) Если $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ — многочлены с действительными коэффициентами, дробь $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ является правильной, а число $x_0 = \gamma + i\delta$, где $\delta \neq 0$, — корень многочлена $Q_n(x)$ кратности s, то существуют действительные числа B_j, D_j $(j = 1, 2, ..., s)$ и многочлен $\widetilde{P}(x)$ с действительными коэффициентами такие, что

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{B_s x + D_s}{(x^2 + px + q)^s} + \frac{B_{s-1} x + D_{s-1}}{(x^2 + px + q)^{s-1}} + \ldots + \frac{B_1 x + D_1}{x^2 + px + q} + \frac{\widetilde{P}(x)}{\widetilde{Q}_{n-2s}(x)},$$

где $x^2 + px + q = (x - x_0)(x - \overline{x}_0)$, $\widetilde{Q}_{n-2s}(x)$ — частное от деления $Q_n(x)$ на $(x^2 + px + q)^s$. Дробь $\dfrac{\widetilde{P}(x)}{\widetilde{Q}_{n-2s}(x)}$ при $\widetilde{P}(x) \not\equiv 0$ является правильной, а числа B_j, D_j $(j = 1, 2, ..., s)$ и многочлен $\widetilde{P}(x)$ определяются однозначно.

5) Если $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ — многочлены степеней m и n с действительными коэффициентами, причем $m < n$, а $Q_n(x)$ представляется в виде (6), то

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \sum_{l=1}^{k} \sum_{j=1}^{\alpha_j} \frac{A_l^{(j)}}{(x - a_l)^j} + \sum_{l=1}^{s} \sum_{j=1}^{\beta_j} \frac{B_l^{(j)} x + D_l^{(j)}}{(x^2 + p_l x + q_l)^j}. \qquad (7)$$

Все коэффициенты в правой части (7) — действительные числа и определяются однозначно. Формула (7) дает разложение правильной рациональной дроби на элементарные (простые) дроби.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Остатки от деления многочлена $P(x)$ на $x - 1$ и $x - 2$ равны соответственно 3 и 4. Найти остаток от деления $P(x)$ на $(x - 1)(x - 2)$.

▲ Пусть $r(x)$ — искомый остаток. Тогда $r(x) = ax + b$ и справедливо равенство

$$P(x) = Q(x)(x - 1)(x - 2) + ax + b.$$

Полагая в этом равенстве $x = 1$ и $x = 2$, получаем $3 = a + b$, $4 = 2a + b$, откуда $a = 1$, $b = 2$.

Ответ. $x + 2$. ▲

Пример 2. Разложить многочлен $P(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$ на множители на множестве R.

▲ Делителями свободного члена многочлена $P(x)$ являются числа 1, -1, 2, -2. Так как $P(-1) = 0$, $P(2) = 0$, то числа -1 и 2 — корни многочлена $P(x)$, и поэтому этот многочлен должен делиться нацело на $(x + 1)(x - 2) = x^2 - x - 2$. Тогда существует многочлен $Q(x)$ второй степени, старший коэффициент которого равен 1, такой, что $Q(x) = x^2 + px + q$ и

$$x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = (x^2 - x - 2)(x^2 + px + q).$$

Приравнивая в этом тождестве свободные члены и коэффициенты при x^3, получаем $q=1$, $-1=-1+p$, откуда $p=0$, т. е. $Q(x)=x^2+1$.

Ответ. $(x+1)(x-2)(x^2+1)$. ▲

Замечание. Коэффициенты p и q можно получить, разделив "углом" $P(x)$ на x^2-x-2.

Пример 3. Представить рациональную дробь $\dfrac{x^4}{x^2-x+1}$ в виде суммы многочлена и правильной дроби.

▲ Используя метод деления "уголком", получаем

$$\frac{x^4}{x^2-x+1}=x^2+x-\frac{x}{x^2-x+1}. \ ▲$$

Пример 4. Указать вид разложения правильной рациональной дроби $f(x)=\dfrac{x^2-3x+5}{(x-1)(x+2)^3(x^2+4)^2}$ на элементарные дроби на множестве R.

▲ Многочлен, стоящий в знаменателе дроби, имеет действительные корни 1 и -2 кратностей 1 и 3 соответственно, а также пару комплексно сопряженных корней кратности 2. Следовательно,

$$f(x)=\frac{A}{x-1}+\frac{A_1}{(x+2)^3}+\frac{A_2}{(x+2)^2}+\frac{A_3}{x+2}+\frac{Bx+D}{(x^2+1)^2}+\frac{B_1x+D_1}{x^2+1}. \ ▲$$

Пример 5. Разложить на множестве R рациональную дробь $f(x)$ на элементарные дроби, если:

1) $f(x)=\dfrac{2x^3-4x^2+3x-11}{(x-1)^2(x^2+4)}$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2(1+x^2)^2}$.

▲ 1) $\dfrac{2x^3-4x^2+3x-11}{(x-1)^2(x^2+4)}=\dfrac{A_1}{(x-1)^2}+\dfrac{A_2}{x-1}+\dfrac{Bx+D}{x^2+4}$. В правой части этого равенства приведем дроби к общему знаменателю, а затем приравняем числители левой и правой частей получившегося равенства:

$$P(x)=2x^3-4x^2+3x-11=$$
$$=A_1(x^2+4)+A_2(x-1)(x^2+4)+(Bx+D)(x-1)^2. \quad (8)$$

Из равенства многочленов следует равенство их коэффициентов при одинаковых степенях x, т. е.

$$\begin{cases} 2=A_2+B, \\ -4=A_1-A_2+D-2B, \\ 3=4A_2+B-2D, \\ -11=4A_1-4A_2+D. \end{cases} \quad (9)$$

Решив эту линейную систему, найдем искомые коэффициенты разложения. Эти коэффициенты можно найти, используя значения $P(1)$ и $P'(1)$. Так как $P(1)=-10=5A_1$, то $A_1=-2$. Далее, $P'(1)=1=$

$= 2A_1 + 5A_2$, откуда $A_2 = 1$. Из первого уравнения системы (9) находим $B = 1$, а из третьего уравнения следует, что $D = 1$. Искомое разложение имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{x+1}{x^2+4}.$$

2) Искомое разложение можно получить с помощью следующих преобразований:

$$f(x) = \frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{1}{x^2(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x^2)^2}. \blacktriangle$$

ЗАДАЧИ

1. Найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$, если:

1) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x$, $Q(x) = x + 1$;
2) $P(x) = 2x^{10} - 8x^8 + 7$, $Q(x) = x - 2$;
3) $P(x) = 3x^4 + 4x^2$, $Q(x) = 3x + 2$;
4) $P(x) = x^5 + 4x^4 + x^2 + 3$, $Q(x) = (x+2)(x+4)$;
5) $P(x) = x^7 + x^6 - 6x^5 + x^2 - 5$, $Q(x) = (x+3)(x-2)$;
6) $P(x) = x^{100} - 2x^{51} + 1$, $Q(x) = x^2 - 1$.

2. Найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на $(x+4)(x-5)$, если остатки от деления этого многочлена на $x+4$ и $x-5$ равны соответственно 5 и 14.

3. Найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на $(x+2)(x+4) \times \times (x-3)$, если остатки от деления этого многочлена на $x+2$, $x+4$, $x-3$ равны соответственно 6, 12, 26.

4. Доказать, что многочлен $P(x)$ делится нацело на многочлен $Q(x)$, и найти частное, если:

1) $P(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 3x + 5$, $Q(x) = x^2 + 1$;
2) $P(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 + 2x + 2$, $Q(x) = x^2 - x + 1$.

5. Найти частное $T(x)$ и остаток $R(x)$ от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$, если:

1) $P(x) = x^3 + 5x^2 - 7x - 3$, $Q(x) = x^2 - 8x + 16$;
2) $P(x) = x^{30} - 1$, $Q(x) = x^5 + 1$.

6. Найти такие числа b и c, чтобы многочлен $x^6 + bx^5 + cx^4$ делился нацело на многочлен $Q(x)$, если:

1) $Q(x) = (x+2)(x-3)$; 2) $Q(x) = (x-3)(x-5)$.

7. Найти целые корни уравнения:

1) $x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0$; 2) $x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = 0$;
3) $x^4 + 4x^3 - 25x^2 - 16x + 84 = 0$;
4) $x^6 - 6x^5 + 11x^4 - x^3 - 18x^2 + 20x - 8 = 0$.

8. Определить кратность корня x_0 уравнения:
1) $3x^4 - 4x^3 + 1 = 0, \quad x_0 = 1$;
2) $x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0, \quad x_0 = 2$.

9. Найти действительные корни уравнения:
1) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$; 2) $x^3 + x^2 - 2x - 8 = 0$;
3) $x^4 + 2x^3 - x - 2 = 0$; 4) $x^4 - x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$.

10. Найти все корни уравнения:
1) $2x^3 + 12x^2 + 13x + 15 = 0$; 2) $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 16x + 12 = 0$;
3) $x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 32 = 0$;
4) $x^5 - 2x^4 - 13x^3 + 26x^2 + 36x - 72 = 0$.

11. Представить многочлен $P(x)$ в виде произведения многочленов первой и второй степени с действительными коэффициентами, если:
1) $P(x) = 4x^4 + 15x^2 - 4$; 2) $P(x) = x^5 - x^4 + x - 4$;
3) $P(x) = x^6 + 27$; 4) $P(x) = (x^2 + x)^2 + 4x^2 + 4x - 12$;
5) $P(x) = (x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) + 15$;
6) $P(x) = x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 - 1$; 7) $P(x) = x^4 + 1$.

12. Число $1 + \sqrt{3}$ — корень уравнения $x^4 + ax^3 + bx^2 + 6x + 2 = 0$. Найти остальные корни этого уравнения, если a и b — рациональные числа.

13. Пусть x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3 + px + q = 0$. Доказать, что $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3x_1x_2x_3$.

14. Доказать, что при любых целых m, n, p многочлен $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$ делится нацело на $x^2 + x + 1$.

15. Доказать, что при любом $c \in R$ уравнение $x^3 - x^2 + x + c = 0$ имеет только один действительный корень.

16. Доказать, что при $a \geqslant 0$ и любом $b \in R$ уравнение $x^3 + ax + b = 0$ имеет только один действительный корень.

17. Доказать, что если многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами принимает при всех $x \in R$ положительные значения, то он представляется в виде суммы квадратов двух многочленов с действительными коэффициентами.

18. Пусть x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ с целыми коэффициентами, а $P(x)$ — произвольный многочлен с целыми коэффициентами. Доказать, что $P(x_1) + P(x_2) + P(x_3)$ — целое число.

19. Разложить на элементарные дроби рациональную дробь:
1) $\dfrac{x}{(x-3)(x+4)}$; 2) $\dfrac{x+1}{x^2+x-6}$; 3) $\dfrac{2x^2+5x-34}{(x-1)(x+2)(x-4)}$;
4) $\dfrac{25-2x-x^2}{(x+2)(x-3)^2}$; 5) $\dfrac{x^2+2x+6}{x^3-7x^2+14x-8}$; 6) $\dfrac{5x^2+6x-23}{(x-2)(x+1)^2(x-1)^3}$.

20. Разложить на множестве R рациональную дробь на элементарные:

1) $\dfrac{6}{x^3-1}$; 2) $\dfrac{3}{x^2-x^5}$; 3) $\dfrac{2}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}$;

4) $\dfrac{6x^2+2x+1}{(1-4x)(2x^2-x+2)}$; 5) $\dfrac{6x^2-8x+3}{(1-3x)(-3x^2+x-1)}$;

6) $\dfrac{4x+1}{(3x+2)^2(-3x^2+x-1)}$; 7) $\dfrac{6x+5}{(2x+3)^2(4x^2+12x+10)}$;

8) $\dfrac{1-2x}{x(x+1)^2(x^2+x+1)^2}$.

21. Представить на множестве R в виде суммы многочлена и элементарных дробей рациональную дробь:

1) $\dfrac{2x^4-5x^3+11x^2-17x+19}{x^3-2x^2+3x-6}$; 2) $\dfrac{3x^3+x^2-20x+17}{x^2+x-6}$;

3) $\dfrac{x^4+2x^3-5x^2+x+1}{x^3+2x^2-5x-6}$; 4) $\dfrac{2x^4-x^3-6x^2+4x+1}{x^3-3x-2}$.

ОТВЕТЫ

1. 1) -8; 2) 7; 3) $8/9$; 4) $10x+59$; 5) $1-x$; 6) $2-2x$.
2. $x+9$. **3.** x^2+3x+8. **4.** 1) x^2-3x+5; 2) x^2+4x+2.
5. 1) $T(x)=x+13$, $R(x)=81x-211$;
2) $T(x)=x^{25}-x^{20}+x^{15}-x^{10}+x^5-1$, $R(x)=0$.
6. 1) $b=-1$, $c=-6$; 2) $b=-8$, $c=15$.
7. 1) -2; 2) 2; 3) -7, -2, 2, 3; 4) 2. **8.** 1) 2; 2) 3.
9. 1) $x_1=2$, $x_2=-2$; 2) $x=2$; 3) $x_1=1$, $x_2=-2$;
4) $x_1=-1$, $x_2=2$.
10. 1) $x_1=-5$, $x_{2,3}=-\dfrac{1}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{5}}{2}$; 2) $x_1=1$, $x_2=3$, $x_{3,4}=\pm 2i$;
3) $x_1=-2$, $x_{2,3}=1\pm i\sqrt{3}$, $x_{4,5}=-1\pm i\sqrt{3}$;
4) $x_1=-3$, $x_2=-2$, $x_3=2$, $x_4=3$.
11. 1) $(2x-1)(2x+1)(x^2+4)$; 2) $(x-1)(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$;
3) $(x^2+3)(x^2+3x+3)(x^2-3x+3)$; 4) $(x-1)(x+2)(x^2+x+6)$;
5) $(x+2)(x+6)(x-\sqrt{6}+4)(x+\sqrt{6}+4)$;
6) $(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)^2$;
7) $(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)$.
12. $x_2=1-\sqrt{3}$, $x_3=1+\sqrt{2}$, $x_4=1-\sqrt{2}$.
19. 1) $\dfrac{3}{7(x-3)}+\dfrac{4}{7(x+4)}$; 2) $\dfrac{2}{5(x+3)}+\dfrac{3}{5(x-2)}$;
3) $\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{1}{x-4}$; 4) $\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{2}{x-3}+\dfrac{2}{(x-3)^2}$;
5) $\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{7}{x-2}+\dfrac{5}{x-4}$;
6) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{4}{(x-1)^2}+\dfrac{3}{(x-1)^3}-\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{x-2}$.

20. 1) $\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{2x+4}{x^2+x+1}$; 2) $\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{x-1}{x^2+x+1}$;
3) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{x}{x^2+1}$; 4) $-\dfrac{1}{4x-1}-\dfrac{1+x}{2x^2-x+2}$;
5) $\dfrac{1}{3x-1}+\dfrac{x-1}{3x^2-x+1}$; 6) $-\dfrac{5}{3(3x+2)^2}+\dfrac{4}{3(3x+2)}-\dfrac{4x+1}{9x^2+12x+5}$.

§ 7. Числовые функции. Последовательности

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Понятие числовой функции. Пусть дано числовое множество $X \subset R$, и пусть каждому $x \in X$ поставлено в соответствие число $y \in R$; тогда говорят, что на множестве X определена *числовая функция*. Правило, устанавливающее соответствие, обозначают некоторым символом, например, f, и пишут

$$y = f(x), \quad x \in X.$$

В этой записи x называют *аргументом* или независимой переменной, числа из множества X называют значениями аргумента, множество X называют *областью определения* функции, его обозначают также $D(f)$. Число y_0, соответствующее значению аргумента x_0, называют *значением функции* при $x = x_0$ (или значением функции в точке x_0). Множество всех значений функции f на множестве $D(f)$ обозначается $E(f)$.

Для указания функции используют иногда только символ, которым обозначен закон соответствия, например f.

Функции f и g называют *равными*, если $D(f) = D(g)$ и равенство $f(x) = g(x)$ верно для любого значения аргумента. Если же это равенство верно лишь на множестве $A \subset D(f) \cap D(g)$, то функции f и g называют *равными на множестве* A.

Пусть заданы функции $y = f(x)$ и $z = F(y)$, и пусть область значений функции f содержится в области определения функции F. Функцию

$$z = F(f(x)), \quad x \in D(f),$$

называют *сложной функцией* или *композицией* (суперпозицией) функций f и F и обозначают $F \circ f$.

2. Свойства и характеристики функций.

1) *Ограниченные и неограниченные функции.* Функцию f называют *ограниченной сверху на множестве* $X \subset D(f)$, если существует число C такое, что для любого $x \in X$ верно неравенство

$$f(x) \leqslant C.$$

Используя символы $\exists$ и $\forall$, это определение записывают так:

$$\exists C \quad \forall x \quad ((x \in X) \Rightarrow (f(x) \leqslant C)). \tag{1}$$

Аналогично, функция f *ограничена снизу на множестве* $X \subset D(f)$, если

$$\exists C \quad \forall x \quad ((x \in X) \Rightarrow (f(x) \geqslant C)). \tag{2}$$

Функцию, ограниченную и сверху, и снизу на множестве X, называют *ограниченной на множестве* X. Это определение равносильно следующему: функция f ограничена на множестве $X \subset D(f)$, если существует число $C > 0$ такое, что для любого $x \in X$ верно неравенство $|f(x)| \leqslant C$; короче,

$$\exists C > 0 \quad \forall x \quad ((x \in X) \Rightarrow (|f(x)| \leqslant C)). \tag{3}$$

Если в этих определениях $X = D(f)$, то функцию называют соответственно *ограниченной сверху*, *ограниченной снизу*, *ограниченной.*

Отрицание определения ограниченной функции (см. (3)) выглядит так: функция f *неограничена*, если для любого $C > 0$ найдется $x \in$ $\in D(f)$ такое, что $|f(x)| > C$; короче,

$$\forall C > 0 \quad \exists x \quad ((x \in D(f)) \Rightarrow (|f(x)| > C)). \tag{4}$$

Аналогично формулируются отрицания определений ограниченной сверху (снизу) функции.

2) *Верхняя и нижняя грани, наибольшее и наименьшее значения функции.* Верхнюю (нижнюю) грань множества (гл. I, § 3, п. 5) всех значений функции $y = f(x)$, $x \in D(f)$, называют *верхней* (соответственно *нижней*) *гранью функции* и обозначают

$$\sup f, \ \sup f(x) \quad (\text{соответственно} \quad \inf f, \ \inf f(x))).$$

Если в этом определении рассматривают значения функции лишь на множестве $X \subset D(f)$, то говорят о *верхней* (соответственно *нижней*) *грани функции на множестве* X и пишут

$$\sup_X f, \ \sup_{x\in X} f(x) \quad (\text{соответственно} \quad \inf_X f, \ \inf_{x\in X} f(x))).$$

Значение $f(x_0)$, где $x_0 \in X \subset D(f)$, функции называют *наибольшим* (соответственно *наименьшим*) *на множестве* X, если для любого $x \in X$ верно неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$ (соответственно $f(x) \geqslant$ $\geqslant f(x_0)$). В этом случае число $f(x_0)$ обозначают

$$\max_X f, \quad \max_{x\in X} f(x) \quad (\text{соответственно} \quad \min_X f, \quad \min_{x\in X} f(x)).$$

Если $X = D(f)$, то говорят коротко о *наибольшем* (соответственно *наименьшем*) *значении* функции и обозначают его

$$\max f, \quad \max f(x) \quad (\text{соответственно} \quad \min f, \quad \min f(x)).$$

Наибольшее (наименьшее) значение функции называют также *максимальным* (*минимальным*) значением.

Если существует $\max\limits_X f$, то $\sup\limits_X f = \max\limits_X f$; если существует $\min\limits_X f$, то $\inf\limits_X f = \min\limits_X f$.

Из существования конечного $\sup\limits_X f$ ($\inf\limits_X f$) не следует, вообще говоря, существование максимального (минимального) значения функции.

3) *Монотонные функции.* Функцию f называют *возрастающей* (*неубывающей*) *на множестве* $X \subset D(f)$, если для любых x_1, $x_2 \in X$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

Это определение коротко записывается так:

$$\forall x_1\ \forall x_2 \quad ((x_1 \in X,\ x_2 \in X,\ x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) \leqslant f(x_2))).$$

Функцию f называют *убывающей* (*невозрастающей*) *на множестве* $X \subset D(f)$, если для любых $x_1, x_2 \in X$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) \geqslant f(x_2)$; короче,

$$\forall x_1\ \forall x_2 \quad ((x_1 \in X,\ x_2 \in X,\ x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) \geqslant f(x_2))).$$

Если в этих определениях из неравенства $x_1 < x_2$ следует строгое неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) > f(x_2)$), то функцию называют *строго возрастающей* (соответственно *строго убывающей*) *на множестве* X.

Возрастающие и убывающие функции объединяют названием *монотонные*, строго возрастающие и строго убывающие — названием *строго монотонные*.

Если $X = D(f)$, то указание на множество X опускают.

4) *Четные, нечетные функции.* Функцию $y = f(x)$, определенную на симметричном относительно нуля множестве X, называют: *четной*, если для любого $x \in X$ верно равенство

$$f(-x) = f(x);$$

и *нечетной*, если для любого $x \in X$ верно равенство

$$f(-x) = -f(x).$$

5) *Периодические функции.* Число $T \neq 0$ называют *периодом функции* f, если для любого $x \in D(f)$ выполнено

$$x + T \in D(f), \quad x - T \in D(f) \quad \text{и} \quad f(x + T) = f(x).$$

Функцию, имеющую период, называют *периодической.*

Если T — период функции, то для любого $n \in Z$, $n \neq 0$, число nT также является периодом этой функции.

3. Обратная функция. Пусть функция $y = f(x)$, $x \in D(f)$, такова, что для любых $x_1, x_2 \in D(f)$ из того, что $x_1 \neq x_2$, следует, что $f(x_1) \neq f(x_2)$ (такую функцию называют *взаимно однозначной*). Тогда для каждого $y \in E(f)$ найдется только одно значение $x \in D(f)$ такое, что $f(x) = y$.

Функцию, определенную на $E(f)$ и сопоставляющую значению $y \in E(f)$ такое $x \in D(f)$, что $f(x) = y$, называют *обратной* для функции f и обозначают f^{-1}, т. е.

$$x = f^{-1}(y), \quad y \in E(f).$$

Согласно определению $D(f^{-1}) = E(f)$, $E(f^{-1}) = D(f)$, т. е. множества определения и значений исходной и обратной функций меняются местами.

Функцию, имеющую обратную, называют *обратимой.*

Обозначая, как обычно, аргумент обратной функции через x, а значение через y, ее записывают в виде

$$y = f^{-1}(x), \quad x \in D(f^{-1}).$$

Из определения обратной функции следует, что

$$\forall x \in E(f) \quad f(f^{-1}(x)) = x,$$
$$\forall x \in D(f) \quad f^{-1}(f(x)) = x.$$

Функции $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$ взаимно обратные.

4. График функции. *Графиком функции* $y = f(x)$, $x \in D(f)$, в прямоугольной системе координат Oxy называют множество всех точек плоскости с координатами $(x; f(x))$, $x \in D(f)$.

Каждая прямая, параллельная оси ординат, пересекает график функции не более чем в одной точке.

График *ограниченной* функции $y = f(x)$ весь расположен в полосе между прямыми

$$y = \inf f \quad \text{и} \quad y = \sup f.$$

Каждая прямая $y = \text{const}$, параллельная оси абсцисс, пересекает график *взаимно однозначной* (обратимой) функции не более чем в одной точке.

График *четной* функции симметричен относительно оси ординат, график *нечетной* функции симметричен относительно начала координат.

График *периодической* с периодом $T > 0$ функции получается последовательными сдвигами на T какой-либо его части, расположенной над (под) отрезком длины T.

График обратной функции $y = f^{-1}(x)$, $x \in D(f^{-1})$, симметричен графику функции $y = f(x)$, $x \in D(f)$, относительно прямой $y = x$.

В ряде случаев график функции $y = g(x)$ можно получить преобразованием известного графика другой функции $y = f(x)$. В табл. 1 указаны простейшие из этих случаев.

Таблица 1

Функция $y = g(x)$	Преобразование графика функции $y = f(x)$
$y = f(x) + c$	Сдвиг вдоль оси ординат на c
$y = f(x - c)$	Сдвиг вдоль оси абсцисс на c
$y = f(-x)$	Симметрия относительно оси ординат
$y = -f(x)$	Симметрия относительно оси абсцисс
$y = af(x)$	Умножение каждой ординаты на a
$y = f(ax)$	Деление каждой абсциссы на a

Вместо преобразования графика функции $y = f(x)$ можно воспользоваться преобразованием системы координат. Например, график функции $y = f(x) + c$ получится, если, не меняя графика функции $y = f(x)$ (как множества точек плоскости), взять новую систему координат, сдвинутую на $-c$ вдоль прежней оси ординат, и т. д.

5. Некоторые способы задания функции.

1) Под функцией, *заданной формулой*, понимают функцию, областью определения которой являются все значения аргумента, для которых эта формула имеет смысл, и для которой результатом каждой операции, указанной в формуле, является действительное число.

2) *Неявный способ задания функции.* Функцию называют заданной неявно уравнением $F(x,y) = 0$ (*неявной функцией*), если каждое значение ее аргумента x и соответствующее ему значение функции y являются решением данного уравнения $F(x,y) = 0$.

Графиком уравнения $F(x,y) = 0$ в прямоугольной системе координат xOy называют множество всех точек плоскости, координаты $(x;y)$ которых удовлетворяют этому уравнению.

График всякой функции, заданной неявно уравнением $F(x,y) = 0$, содержится в графике этого уравнения.

Уравнение $F(x,y) = 0$ может задавать не одну, а множество функций.

Иногда от неявного способа задания удается перейти к явному, т. е. задать функцию формулой $y = f(x)$. Например, функцию с неотрицательными значениями, заданную уравнением $x^2 + y^2 = 1$, можно задать явно в виде $y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1; 1]$. График данного уравнения — единичная окружность, а график рассматриваемой функции — верхняя полуокружность (рис. 7.1). Это же уравнение задает и другие

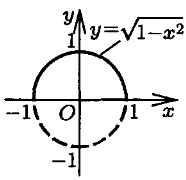

Рис. 7.1

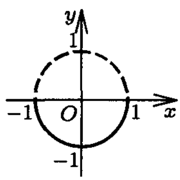

Рис. 7.2

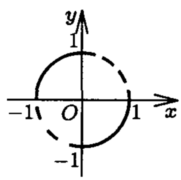

Рис. 7.3

функции, графики двух из них изображены на рис. 7.2, 7.3 сплошными линиями.

3) *Функции, заданные параметрически.* Пусть на множестве T заданы две функции, $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$. Множество всех точек координатной плоскости с координатами $(\varphi(t); \psi(t))$, $t \in T$, называют *кривой, заданной параметрически.*

Например, пара функций $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0; 2\pi]$, задает параметрически единичную окружность.

Пусть X и Y — соответственно множества значений функций $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$, определенных на T. Для каждого $t \in T$ значению $x = \varphi(t)$ сопоставим значение $y = \psi(t)$. При этом может случиться, что значению $x \in X$ сопоставлено более чем одно значение $y \in Y$. Пусть дано правило, по которому из множества значений y, сопоставленных указанным выше способом значению x, выбирается только одно значение. Функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$, $t \in T$, вместе с этим правилом определяют функцию $y = f(x)$, $x \in X$, которую называют *заданной параметрически.*

Например, функции $x = t^2$, $y = t^3$, $t \in R$, вместе с условием $y \geqslant 0$ задают параметрически функцию $y = f(x)$, $x \geqslant 0$, которую в данном случае можно задать и явно в виде $y = x^{3/2}$, $x \geqslant 0$.

6. Элементарные функции.

1) *Основные элементарные функции.* К ним относят:

постоянную —

$$y = \text{const}, \quad x \in R;$$

показательную и обратную ей логарифмическую функции —

$$y = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x \in R,$$

$$y = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x > 0;$$

тригонометрические функции —

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad x \in R,$$

$$y = \operatorname{tg} x, \quad x \neq \pi/2 + \pi n, \quad n \in Z,$$

$$y = \operatorname{ctg} x, \quad x \neq \pi n, \quad n \in Z;$$

обратные тригонометрические функции —

$$y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad y = \operatorname{arcctg} x, \quad x \in R.$$

Эти функции не являются в полном смысле обратными к указанным выше тригонометрическим. Последние, как и все периодические функции, *не имеют* обратных.

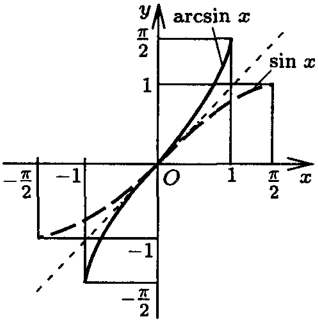

Рис. 7.4

Функция $y = \arcsin x$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, обратна "сужению" $y = \sin x$ на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$ и имеет этот отрезок в качестве *области значений.* Это значит, что

$$\forall x \in [-1, 1] \quad \sin(\arcsin x) = x,$$

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \quad \arcsin(\sin x) = x.$$

Последнее равенство верно *только* для указанных значений $x \in [-\pi/2; \pi/2]$. Графики этих функций изображены на рис. 7.4.

Аналогично, функция $y = \arccos x$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, обратна "сужению" $y = \cos x$ на отрезке $[0; \pi]$. Областью значений функции $y =$

$= \arccos x$ является отрезок $[0;\pi]$. Графики этих функций изображены на рис. 7.5.

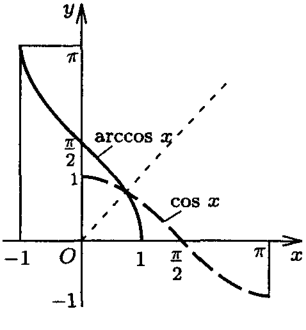

Рис 7 5

Функция

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad x \in R,$$

обратна "сужению"

$$y = \operatorname{tg} x, \quad x \in (-\pi/2; \pi/2),$$

функция $y = \operatorname{arcctg} x$, $x \in R$, обратна "сужению" $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in (0, \pi)$. Их графики изображены на рис. 7.6, 7.7.

2) *Элементарной функцией* называют функцию, которая может быть задана с помощью конечного числа арифметических операций и композиций из основных элементарных функций.

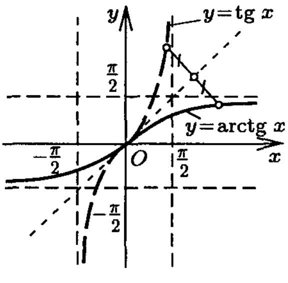

Рис. 7 6

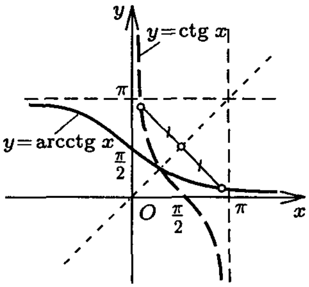

Рис 7.7

Многочленом называют элементарную функцию вида

$$P(x) = a_n x^n + z_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad x \in R;$$

здесь $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in R$, $n \in Z$, $n \geqslant 0$ (см. § 6). Если $a_n \neq 0$, то $P(x)$ называют *многочленом n-й степени* (обозначают его $P_n(x)$), а число n называют *степенью* многочлена. Если все коэффициенты многочлена равны 0, то его называют *нулевым* многочленом.

Рациональной функцией (дробью) называют элементарную функцию, которая может быть задана в виде

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x)$ — многочлен, $Q(x)$ — ненулевой многочлен. Эта функция определена для всех значений x таких, что $Q(x) \neq 0$.

Иррациональной функцией называют элементарную функцию, которая не является рациональной и может быть задана с помощью композиций конечного числа рациональных функций, степенных функций с рациональными показателями и арифметических действий.

Элементарные функции, не являющиеся рациональными или иррациональными, называют *трансцендентными*. Показательная, логарифмическая, тригонометрические и обратные тригонометрические функции являются трансцендентными.

3) *Гиперболические функции. Гиперболический синус* и *гиперболический косинус* определены на R соответственно формулами

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Функция $y = \operatorname{sh} x$ нечетная, строго возрастающая. Функция $y = \operatorname{ch} x$ четная, строго убывающая на $(-\infty; 0]$ и строго возрастающая

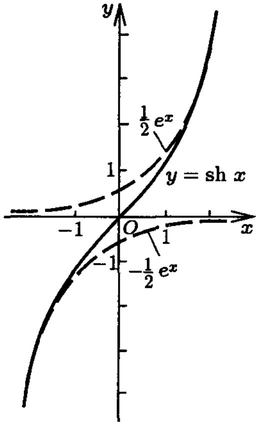

Рис. 7.8

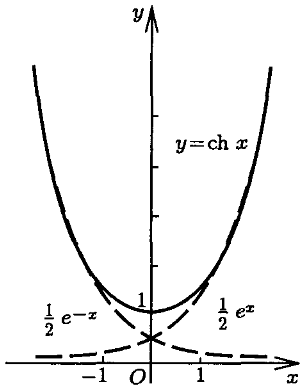

Рис. 7.9

на $[0; +\infty)$. Графики этих функций изображены на рис. 7.8, 7.9. *Гиперболический тангенс* и *гиперболический котангенс* определены формулами

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad x \in R, \tag{19}$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}, \quad x \in R, \quad x \neq 0. \tag{20}$$

Обе функции нечетные, их графики представлены на рис. 7.10, 7.11.

Функции $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{th} x$, $x \in R$, и $y = \operatorname{cth} x$, $x \neq 0$, обратимы, их обратные функции обозначают соответственно:

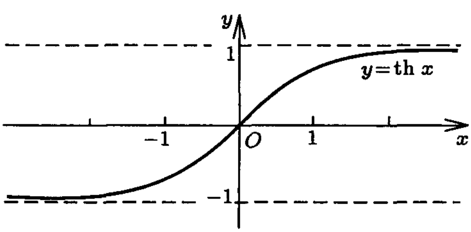

Рис. 7.10

$$y = \operatorname{arcsh} x, \quad x \in R$$

(читают: *ареасинус гиперболический*);

$$y = \operatorname{arcth} x, \quad x \in R$$

(читают: *ареатангенс гиперболический*);

$$y = \operatorname{arcth} x,$$

$$x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$

(читают: *ареакотангенс гиперболический*).

Графики этих обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$ графикам исходных функций

Функция $y = \operatorname{ch} x$, $x \in R$, как четная функция обратной не имеет Но ее сужение

$$y = \operatorname{ch} x, \quad x \in [0, +\infty),$$

имеет обратную, ее обозначают

$$y = \operatorname{arcch} x, \quad x \in [1, +\infty)$$

(читают *ареакосинус гиперболический*)

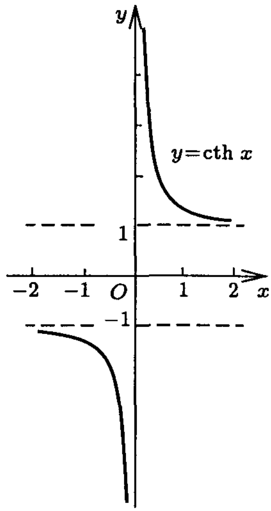

Рис 7 11

7. График функции в полярных координатах. Зафиксируем на плоскости луч l с началом O (рис 7 12) Паре чисел (φ, r), где $r > 0$, сопоставим точку M плоскости такую, что

а) $|OM| = r$,

б) угол поворота луча l до луча OM равен φ, причем, если $\varphi > 0$, то поворот совершается против часовой стрелки, а если $\varphi < 0$, то по часовой стрелке

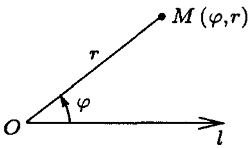

Рис 7 12

Всем парам $(\varphi, 0)$ сопоставим точку O Таким образом, каждой паре чисел (φ, r), $r \geqslant 0$, сопоставлена одна точка плоскости Каждая точка плоскости, отличная от O, оказывается сопоставленной множеству пар $(\varphi + 2\pi n, r)$, где $n \in Z$, $r > 0$ Эти пары чисел называют *полярными координатами точки*

Пусть дана функция $r = f(\varphi)$, $\varphi \in \Phi$, причем $f(\varphi) \geqslant 0$ *Графиком* этой функции в полярных координатах называют множество всех точек плоскости с полярными координатами $(\varphi, f(\varphi))$

Если луч l совпадает с положительным лучом оси Ox прямоугольной системы координат xOy (рис 7 13), то координаты (x, y) и (φ, r) точки связаны формулами

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

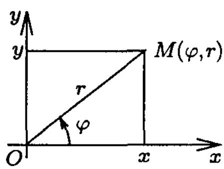

Рис 7 13

8. Последовательности. Функцию, областью определения которой является множество N натуральных чисел, называют *последовательностью* Значения такой функции обозначают x_n (или a_n, b_n и т д) и называют *членами последовательности*, число n называют *номером* члена x_n Последовательность обозначают

$$\{x_n\} \quad \text{или} \quad x_n,\ n \in N, \quad \text{или} \quad x_n,\ n = 1, 2,$$

Другими словами, если каждому натуральному числу n сопоставлено число x_n, то говорят, что задана последовательность $\{x_n\}$ (ср § 4 1)

В качестве множества номеров может быть взято не только множество натуральных чисел, но и какое-либо другое бесконечное подмножество целых чисел, например, множество четных натуральных чисел (тогда последовательность обозначают $\{x_{2k}\}$), множество неотрицательных целых чисел 0, 1, 2, ... и т. д.

Множество значений последовательности может быть как конечным, так и бесконечным, например, множество значений последовательности $\{(-1)^n\}$ состоит из двух чисел, 1 и -1, множество значений последовательности $\{1/n\}$ бесконечно. Последовательность, множество значений которой состоит из одного числа, называют *стационарной.*

Последовательность может быть задана с помощью формулы вида

$$x_n = f(n), \quad n \in N,$$

выражающей x_n через номер n, например,

$$x_n = 2^n, \quad n \in N; \qquad x_n = n!, \quad n \in N.$$

Такую формулу называют *формулой общего члена последовательности.*

Для задания последовательности используют и рекуррентные формулы, т. е. формулы, выражающие n-й член последовательности через члены с меньшими номерами (предшествующие члены). Так определяют арифметическую и геометрическую прогрессии. Другими примерами являются последовательности

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = bx_{n-1} + c, \quad n \in N, \quad n \geqslant 2,$$

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_n = (x_{n-1} + x_{n-2})/2, \quad n \in N, \quad n \geqslant 3;$$

здесь a, b, c — заданные числа.

Последовательность, заданную рекуррентной формулой вида

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \ldots + a_k x_{n-k}, \quad n \in N, \quad n > k,$$

где $a_1, \ldots, a_k$ и k — заданные числа, $k \in N$, называют *возвратной последовательностью порядка* k.

Последовательность x_n, $n \in N$, *ограничена снизу*, если существует число C такое, что для всех $n \in N$ верно неравенство

$$x_n \geqslant C.$$

Последовательность x_n, $n \in N$, *ограничена сверху*, если существует число C такое, что для всех $n \in N$ верно неравенство

$$x_n \leqslant C.$$

Последовательность x_n, $n \in N$, *ограничена*, если существуют числа C_1 и C_2 такие, что для всех $n \in N$ верны неравенства

$$C_1 \leqslant x_n \leqslant C_2.$$

Это определение равносильно следующему: последовательность x_n, $n \in N$, ограничена, если существует число $C > 0$ такое, что для всех $n \in N$ верно неравенство $|x_n| \leqslant C$, или, короче,

$$\exists C > 0 \quad \forall n \in N: \quad |x_n| \leqslant C.$$

Отрицание определения ограниченной последовательности выглядит так: последовательность x_n, $n \in N$, неограниченна, если для любого $C > 0$ найдется $n \in N$ такое, что $|x_n| > C$; короче,

$$\forall C > 0 \quad \exists n \in N: \quad |x_n| > C.$$

Аналогично формулируются отрицания определений ограниченной сверху (снизу) последовательности.

Последовательность x_n, $n \in N$, называют *возрастающей* (*неубывающей*), *начиная с номера* n_0, если для любого $n \geqslant n_0$, $n \in N$, верно неравенство $x_{n+1} \geqslant x_n$.

Последовательность x_n, $n \in N$, называют *убывающей* (*невозрастающей*), *начиная с номера* n_0, если для любого $n \geqslant n_0$, $n \in N$, верно неравенство $x_{n+1} \leqslant x_n$.

Если в этих определениях верны соответственно неравенства $x_{n+1} > x_n$ или $x_{n+1} < x_n$, то последовательность называют соответственно *строго возрастающей* или *строго убывающей*, *начиная с номера* n_0.

Возрастающую или убывающую, начиная с номера n_0, последовательность называют *монотонной*, *начиная с номера* n_0 (строго возрастающую или строго убывающую — *строго монотонной*).

Последовательность, возрастающую с номера $n_0 = 1$, называют *возрастающей* (аналогично, *убывающей* и т. д.).

Данное определение последовательности, возрастающей с номера n_0, равносильно введенному ранее (п. 6) определению функции, возрастающей на множестве натуральных $n \geqslant n_0$, а именно: последовательность x_n, $n \in N$, возрастает, начиная с номера n_0, если для любых $n_1, n_2 \in N$, $n_1 \geqslant n_0$, $n_2 \geqslant n_0$, из неравенства $n_1 < n_2$ следует неравенство $x_{n_1} \leqslant x_{n_2}$. Аналогичная равносильность имеет место и для убывающей, начиная с номера n_0, последовательности и т. д.

Верхнюю (нижнюю) грань множества членов последовательности $\{x_n\}$ называют *верхней* (соответственно *нижней*) *гранью последовательности* и обозначают

$$\sup\{x_n\} \quad (\text{соответственно } \inf\{x_n\}).$$

Член x_n последовательности $\{x_n\}$ называют *наибольшим* (соответственно *наименьшим*), если $x_n \leqslant x_{n_0}$ (соответственно $x_n \geqslant x_{n_0}$) для любого n, и обозначают его

$$\max\{x_n\} \quad (\text{соответственно } \min\{x_n\}).$$

Наибольший (соответственно наименьший) член последовательности называют также *максимальным* (соответственно *минимальным*).

Если существует $\max\{x_n\}$ (соответственно $\min\{x_n\}$), то

$$\sup\{x_n\} = \max\{x_n\} \quad (\text{соответственно } \inf\{x_n\} = \min\{x_n\}).$$

Из существования конечного $\sup\{x_n\}$ (соответственно $\inf\{x_n\}$) не следует существования $\max\{x_n\}$ (соответственно $\min\{x_n\}$).

Последовательность $\{y_k\}$ называют *подпоследовательностью* последовательности $\{x_n\}$, если есть такая строго возрастающая последовательность номеров $\{n_k\}$, что для любого $k \in N$ $y_k = x_{n_k}$, короче,

$$\forall k \quad \exists n_k \quad (y_k = x_{n_k} \text{ и } n_{k+1} > n_k).$$

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Найти область определения функции, заданной формулой

$$y = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x^2 - \sqrt{x}}}.$$

▲ Значения $\sqrt{x}$ определены лишь при $x \geqslant 0$. При $x = 0$ и $x = 1$ знаменатель $x^2 - \sqrt{x}$ равен нулю, поэтому следует считать, что $x \neq$ $\neq 0$, $x \neq 1$. Значения $\sqrt[3]{a}$ определены для любого действительного числа a, и при любом $x > 0$, $x \neq 1$, $a = \dfrac{x-1}{x^2 - \sqrt{x}}$ — действительное число. Поэтому областью определения рассматриваемой функции является множество всех $x > 0$, $x \neq 1$. ▲

Пример 2. Доказать, что функция $y = \dfrac{x}{x^2+1}$, $x \in R$, ограничена.

Из неравенства для среднего геометрического и среднего арифметического следует, что $|x| \leqslant (x^2+1)/2$. Отсюда имеем

$$\left|\frac{x}{x^2+1}\right| = \frac{|x|}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{2}$$

для любого $x \in R$, т. е. данная функция ограничена. ▲

Пример 3. Доказать, что функция $y = 1/x^2$, $x \in R$, $x \neq 0$, неограниченна, и построить ее график.

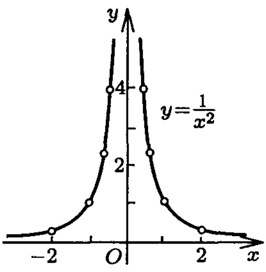

Рис 7 14

▲ Пусть C — произвольное положительное число. Неравенство $1/x^2 > C$ равносильно неравенству $|x| < 1/\sqrt{C}$ при $x \neq 0$. Взяв, например, $x = 1/(2\sqrt{C})$, получим, что $1/x^2 =$ $= 4C > C$, а это и означает, что данная функция неограниченна.

На рис. 7.14 представлен график данной функции. Он симметричен относительно оси ординат, поскольку данная функция четная, и расположен выше оси абсцисс, так как $1/x^2 > 0$ для любого $x \neq 0$. ▲

Пример 4. Доказать, что функция $y = \sin x^2$, $x \in R$, непериодическая.

▲ Достаточно доказать, что функция не имеет положительного периода, так как если бы число $T < 0$ было периодом, то число $-T$ было бы положительным периодом. Доказательство проведем методом от противного.

Допустим, что число $T > 0$ — период функции, т. е. для любого $x \in R$

$$\sin(x+T)^2 = \sin x^2.$$

При $x=0$ отсюда следует, что $\sin T^2 = 0$, т. е. $T^2 = \pi n$, а $T = \sqrt{\pi n}$ при некотором $n \in N$. Если $0 < x < \sqrt{\pi}$, то $\sin x^2 \neq 0$, а поскольку $\sqrt{\pi n}$ — период, то и $\sin(x+\sqrt{\pi n})^2 \neq 0$. Если же $x = \sqrt{\pi}$, то $\sin(\sqrt{\pi}+\sqrt{\pi n})^2 = \sin(\sqrt{\pi})^2 = 0$. Значит, число $\sqrt{\pi}+\sqrt{\pi n}$ является ближайшим справа к $\sqrt{\pi n}$ числом, при котором $\sin x^2 = 0$. Отсюда следует, что $\sqrt{\pi}+\sqrt{\pi n} \leqslant \sqrt{\pi(n+1)}$, так как $\sqrt{\pi(n+1)} > \sqrt{\pi n}$ и $\sin(\sqrt{\pi(n+1)})^2 = 0$ Но неравенство $\sqrt{\pi}+\sqrt{\pi n} \leqslant \sqrt{\pi(n+1)}$, равносильное неравенству $1 \leqslant \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, неверно для любого $n \in N$, так как

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < 1.$$

Значит, неверно и допущение о периодичности функции $\sin x^2$, т. е. эта функция непериодическая. ▲

Пример 5. Доказать, что функция, заданная формулой

$$y = x^2 - 4x + 2: \tag{5}$$

а) на R необратима;

б) на $(-\infty; 2]$ обратима; построить график обратной функции.

▲ а) Уравнение

$$x^2 - 4x + 2 = y_0 \tag{6}$$

имеет решения

$$x_1 = 2 + \sqrt{y_0+2} \quad \text{и} \quad x_2 = 2 - \sqrt{y_0+2}$$

для любого $y_0 \geqslant -2$. При $y_0 > -2$ эти решения различны, т. е. для $y_0 > -2$ имеются два различных значения аргумента x_1 и x_2 такие, что $y(x_1) = y(x_2)$ (каждая прямая $y = y_0$, $y_0 > -2$, пересекает график функции в двух точках. Значит, функция, определенная формулой (5), на всем R необратима.

б) Уравнение (6) для любого $y_0 \geqslant -2$ имеет лишь одно решение

$$x = 2 - \sqrt{y_0+2} \tag{7}$$

из промежутка $(-\infty; 2]$. Значит, функция, определенная формулой (5), на $(-\infty; 2]$ обратима. Графиком этой функции является левая от прямой $x = 2$ часть параболы на рис. 7.15, каждая прямая $y = y_0$, $y_0 \geqslant -2$, пересекает этот график только в одной точке. Область значений данной функции — промежуток $[-2; +\infty)$ — является областью определения

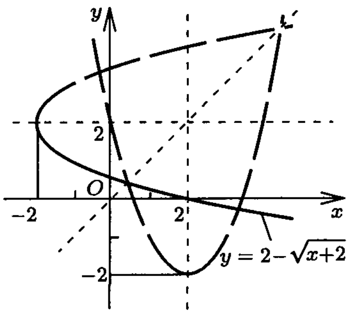

Рис 7 15

обратной функции, которая согласно (7) задается формулой

$$y = 2 - \sqrt{x+2}. \tag{8}$$

Чтобы получить график обратной функции, совершим симметрию параболы $y = x^2 - 4x + 2$ относительно прямой $y = x$ (рис. 7.15). Нижняя от прямой $y = 2$ часть получившейся параболы и будет графиком функции (8). ▲

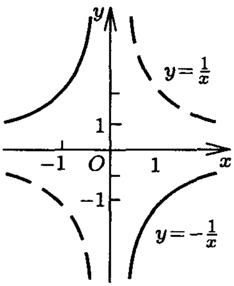

Рис. 7.16

Пример 6. По известному графику функции $y = 1/x$, $x \in R$, $x \neq 0$ (гипербола, рис. 7.16) построить график функции

$$y = \frac{x}{1-x}, \quad x \in R, \quad x \neq 1.$$

▲ Имеем

$$y = \frac{x}{1-x} = -\frac{1+(x-1)}{x-1} = -\frac{1}{x-1} - 1. \tag{9}$$

Симметрия относительно оси абсцисс гиперболы $y = 1/x$ дает график функции $y = -1/x$, $x \in R$, $x \neq 0$ (рис. 7.16). Возьмем новую систему координат, получающуюся из прежней в соответствии с (9) сдвигом влево вдоль оси абсцисс на единицу, а затем сдвигом на единицу вверх по оси ординат (рис. 7.17). Кривая, изображающая график функции $y = -1/x$, будет в новой системе координат графиком функции $y = x/(1-x)$. ▲

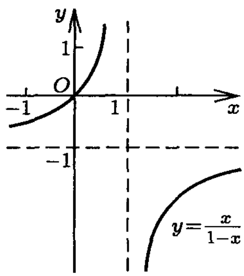

Рис. 7.17

Пример 7. Построить график функции

$$y = E(x), \quad x \in R \quad (\text{целая часть } x),$$

где $E(x)$ — наибольшее целое число, не превосходящее x*).

▲ На каждом промежутке $[n; n+1)$, где $n \in Z$, данная функция постоянна и равна n. В соответствии с этим изображен ее график на рис. 7.18. Стрелка на графике указывает на то, что точка в ее острие не принадлежит графику. ▲

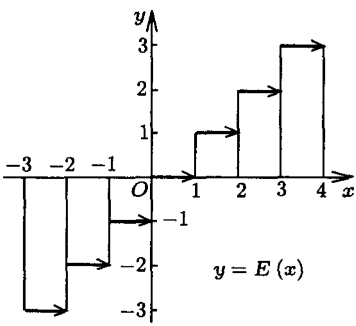

Рис. 7.18

Пример 8. Построить график функции, заданной формулой

$$y = \frac{1}{2^x - 1}.$$

▲ Функция определена для всех таких $x \in R$, что $2^x \neq 1$, т. е. $x \neq 0$.

*) Иногда эту функцию обозначают $y = [x]$.

При построении ее графика можно использовать график функции $y =$

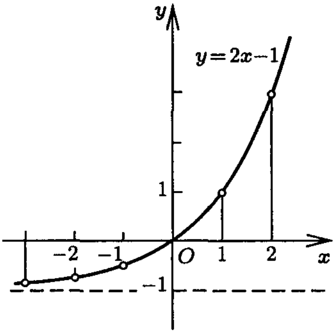

Рис. 7.19

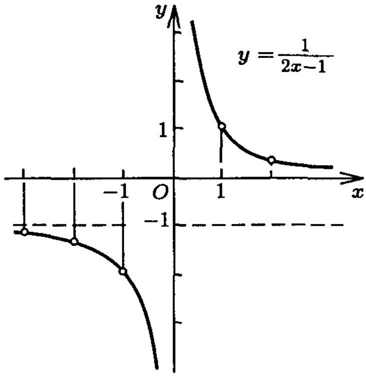

Рис. 7.20

$= 2^x - 1$, $x \in R$ (рис. 7.19). Эта функция строго возрастает от -1 до $+\infty$. Значения данной функции обратны значениям функции $y = 2^x - 1$. На $(-\infty; 0)$ данная функция убывает от -1 до $-\infty$, а на $(0; +\infty)$ убывает от $+\infty$ до 0 (рис. 7.20). ▲

Пример 9. Построить график функции, заданной формулой

$$y = \log_3(x^2 - 1).$$

▲ Функция определена для всех x таких, что $|x| > 1$, т. е. на объединении интервалов $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$. Функция четная, ее график симметричен относительно оси ординат.

Данная функция является композицией функций $y = x^2 - 1$ (ее график показан на рис. 7.21) и логарифмической функции $y = \log_3 x$.

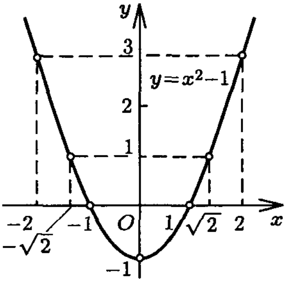

Рис. 7.21

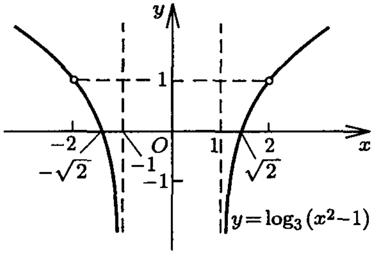

Рис. 7.22

На интервале $(1; +\infty)$ значения $x^2 - 1$ строго возрастают от 0 до $+\infty$, поэтому значения $\log_3(x^2 - 1)$ строго возрастают от $-\infty$ до $+\infty$. График пересекает ось абсцисс при $x = \sqrt{2}$ и $x = -\sqrt{2}$ (рис. 7.22). ▲

Пример 10. Доказать, что функция, обратная для функции

$$y = \operatorname{ch} x, \quad x \in [0; +\infty),$$

является элементарной, и построить ее график.

▲ На $[0; +\infty)$ функция $y = \operatorname{ch} x$ строго возрастает и поэтому обратима. Областью определения обратной функции будет промежуток $[1; +\infty)$, являющийся множеством значений исходной функции. Для каждого $y \in [1; +\infty)$ уравнение $\operatorname{ch} x = y$, т. е.

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y,$$

сводится к квадратному относительно e^x уравнению

$$(e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0.$$

Отсюда находим $e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$, $x = \ln(y \pm \sqrt{y^2 - 1})$. Условию $x \geqslant 0$ удовлетворяет только решение $x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$. Таким образом, обратная функция задается формулой

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \in [1; +\infty).$$

Видно, что эта функция получается с помощью конечного числа арифметических операций и композиций степенных и логарифмической функций, т. е. является элементарной.

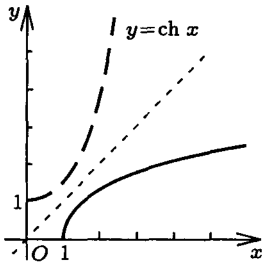

Рис. 7.23

График обратной функции получаем симметрией относительно прямой $y = x$ графика функции $y = \operatorname{ch} x$, $x \in [0; +\infty)$ (рис. 7.23). ▲

Пример 11. Построить график функции, заданной формулой

$$y = \cos^2 x.$$

▲ Функция определена на R, является четной, периодической с периодом π. Поскольку

$$\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2,$$

ее график получается из графика функции $y = \cos x$ сжатием вдвое вдоль оси Ox, сдвигом на единицу вверх по оси Oy и сжатием вдвое вдоль оси Oy. В соответствии с этим изображен график на рис. 7.24.

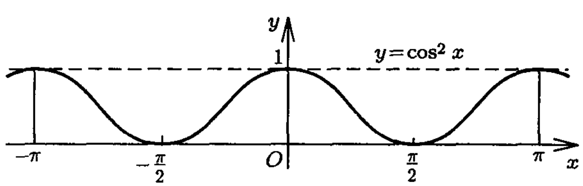

Рис. 7.24

Пример 12. Построить график функции, заданной формулой

$$y = \frac{1}{\sin x}.$$

▲ Областью определения функции является множество всех $x \in$ $\in R$ таких, что $\sin x \neq 0$, т. е. $x \neq \pi n$, $n \in Z$. Функция нечетная, периодическая с периодом 2π. Построим график на интервале $(0;\pi)$, затем продолжим его на $(-\pi;0)$ симметрично относительно начала координат, а далее продолжим периодически с периодом 2π.

Если $x \in (0;\pi)$, то $0 < \sin x < 1$, и поэтому

$$1 \leqslant \frac{1}{\sin x},$$

причем

$$\min \frac{1}{\sin x} = \left.\frac{1}{\sin x}\right|_{x=\pi/2} = 1.$$

Поскольку $\sin(\pi/2 + \alpha) = \sin(\pi/2 - \alpha)$, график симметричен отно-

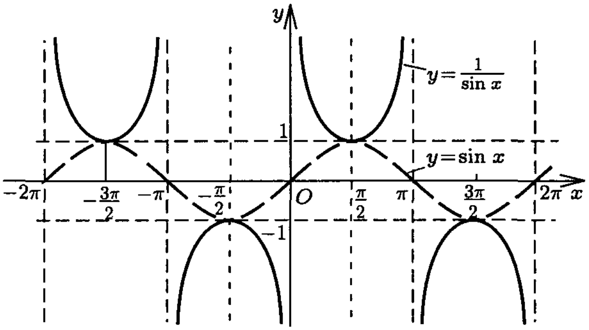

Рис. 7.25

сительно прямой $x = \pi/2$. При увеличении x от 0 до $\pi/2$ значения $\sin x$ строго возрастают от 0 до 1, поэтому значения $1/\sin x$ строго убывают от $+\infty$ до 1 (рис. 7.25). ▲

Функции, заданные формулами

$$y = \frac{1}{\sin x}, \quad y = \frac{1}{\cos x},$$

называют соответственно *косекансом* и *секансом* и обозначают

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}.$$

Пример 13. Построить график функции

$$y = x\cos x, \quad x \in R.$$

▲ Функция нечетная, поэтому построим ее график при $x \geqslant 0$, а затем совершим симметрию относительно начала координат. При построении графика будем руководствоваться тем, что ординаты его точек получаются перемножением ординат точек графиков функций $y = x$ и $y = \cos x$ (рис. 7.26).

График проходит через начало координат и пересекает ось Ox при $x = \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$ (где $\cos x = 0$). Поскольку $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, при $x \geqslant 0$ имеем

$$-1 \leqslant x \cos x \leqslant x,$$

т. е. график лежит между прямыми $y = x$ и $y = -x$. При $x = 2\pi n$,

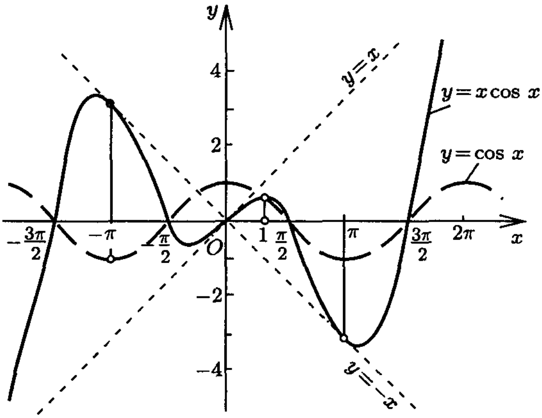

Рис 7.26

$n \in Z$ (где $\cos x = 1$), график имеет общие точки с прямой $y = x$, а при $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$ (где $\cos x = -1$), — общие точки с прямой $y = -x$.

Если $0 < x < 1$, то $0 < x\cos x < \cos x$ и $x \cos x < x$, т. е. график лежит ниже графиков $y = \cos x$ и $y = x$. При $x = 1$ графики $y = x\cos x$ и $y = \cos x$ пересекаются, при этом $y = \cos 1 \approx 0,54$. Если $x > 1$, то $|x \cos x| > |\cos x|$, при $\cos x \neq 0$, т. е. точки графика $y = x \cos x$ лежат дальше от оси Ox, чем соответствующие точки графика $y = \cos x$. В соответствии с этим, рассчитав и отметив несколько промежуточных точек, изображаем график (см. рис. 7.26). Он представляет собой кривую, колеблющуюся между прямыми $y = x$ и $y = -x$. ▲

Пример 14. Построить графики функций, заданных формулами: 1) $y = \sin(\arcsin x)$; 2) $y = \arcsin(\sin x)$.

▲ 1) Эта функция определена на $[-1; 1]$. Функция $\sin x$, где $x \in [-\pi/2; \pi/2]$, является обратной для функции $\arcsin x$, $x \in [-1; 1]$, поэтому (см. п. 6, 1) для любого $x \in [-1, 1]$ верно равенство

$$\sin(\arcsin x) = x.$$

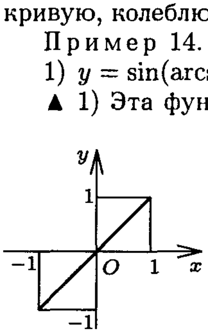

Рис. 7.27

Отсюда следует, что $y = x$, $x \in [-1; 1]$, т. е. графиком данной функции является отрезок прямой $y = x$ (рис. 7.27).

2) Эта функция определена на R, периодична

с периодом 2π, так как $\sin(x+2\pi) = \sin x$, и, значит,

$$\arcsin(\sin(x+2\pi)) = \arcsin(\sin x).$$

Из того, что $\sin(\pi/2+\alpha) = \sin(\pi/2-\alpha)$ для любого $\alpha \in R$, следует

$$\arcsin(\sin(\pi/2+\alpha)) = \arcsin(\sin(\pi/2-\alpha)).$$

Значит, график данной функции симметричен относительно прямой $x = \pi/2$. Построим график на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$, продолжим его симметрично относительно прямой $x = \pi/2$ на отрезок $[\pi/2; 3\pi/2]$, затем с отрезка $[-\pi/2; 3\pi/2]$ продолжим периодически с периодом 2π.

Функция $\arcsin x$, $x \in [-1; 1]$, обратная для функции $\sin x$, $x \in [-\pi/2; \pi/2]$, поэтому для любого $x \in [-\pi/2; \pi/2]$ имеем

$$\arcsin(\sin x) = x.$$

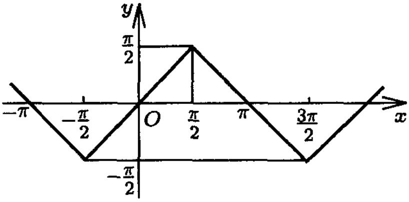

Рис. 7.28

Таким образом, на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$ график данной функции совпадает с прямой $y = x$ (рис. 7.28). Из симметрии графика относительно прямой $x = \pi/2$ следует, что на отрезке $[\pi/2; 3\pi/2]$ он совпадает с прямой $y = \pi - x$, т. е.

$$\arcsin(\sin x) = \pi - x, \quad x \in [\pi/2; 3\pi/2].$$

На этом отрезке функция $y = \arcsin x$, $x \in [-1; 1]$, не является обратной для функции $y = \sin x$. ▲

Пример 15. Построить график функции, заданной формулой

$$y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}.$$

▲ Данная функция является композицией функций $z = 1/x^2$, $x \in R$, $x \neq 0$, с множеством значений $(0; +\infty)$ и функции $y = \operatorname{arctg} z$, $z \in R$. Областью определения данной функции являются все значения $x \neq 0$. Функция четная, ее график симметричен относительно оси ординат.

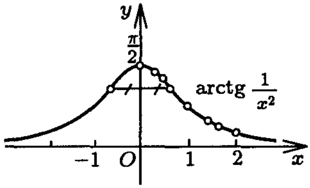

Рис. 7.29

Из свойств функций $z = 1/x^2$ и $y = \operatorname{arctg} z$ следует, что при возрастании x от 0 до $+\infty$ значения $1/x^2$ убывают от $+\infty$ до 0, а значения $\operatorname{arctg}(1/x^2)$ убывают от $\pi/2$ до 0. Рассчитав и отметив несколько промежуточных точек, рисуем график (рис. 7.29). Точка $(0; \pi/2)$ не входит в график. ▲

Пример 16. Построить кривую

$$x = t^2, \quad y = t^3, \quad t \in R.$$

▲ Функция $x = t^2$ при $t \geqslant 0$ обратима, и обратной к ней является функция $t = \sqrt{x}$, $x \geqslant 0$. Поэтому при $t \geqslant 0$ имеем $y = (\sqrt{x})^3 = x^{2/3}$, т. е. кривая совпадает с графиком функции $y = x^{3/2}$, $x \geqslant 0$ (рис. 7.30).

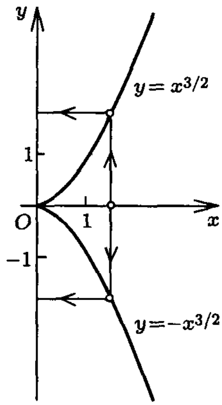

Рис. 7.30

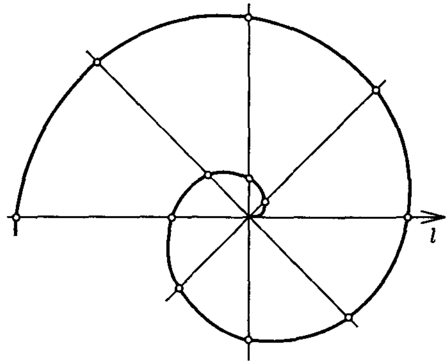

Рис. 7.31

При $t \leqslant 0$ аналогично имеем $t = -\sqrt{x}$, $x \geqslant 0$, и $y = (-\sqrt{x})^3 = -(x)^{3/2}$, т. е. при $t \leqslant 0$ кривая совпадает с графиком функции $y = -(x)^{3/2}$, $x \geqslant 0$.

Отметим, что данная кривая совпадает с графиком уравнения $x^3 = y^2$, а также с графиком функции $x = y^{2/3}$. ▲

Пример 17. Построить график функции $r = \varphi$, $\varphi \in [0; +\infty)$, в полярных координатах.

С ростом φ растут и значения r, т. е. расстояние от точки графика до центра O. Рассчитав и отметив на плоскости несколько точек, рисуем график. Отметим, что каждый луч, составляющий с лучом l угол α $(0 \leqslant \alpha < 2\pi)$, пересекает график в бесконечном множестве точек вида $(\alpha + 2\pi n; \alpha + 2\pi n)$, $n \in Z$, $n \geqslant 0$ (рис. 7.31).

График данной функции называют *спиралью Архимеда.*

При построении графиков функций в полярных координатах иногда бывает удобно перейти к прямоугольным координатам. В свою очередь для некоторых функций их графики в прямоугольных координатах бывает проще построить, перейдя к полярным координатам.

Пример 18. Построить в полярных координатах график функции, заданной формулой

$$r = \frac{1}{\cos\varphi - \sin\varphi}. \tag{10}$$

▲ Областью определения этой функции являются все те значения φ, для которых

$$\cos\varphi - \sin\varphi > 0. \tag{11}$$

Функция периодична с периодом 2π, поэтому достаточно рассмотреть лишь значения φ из промежутка $[-3\pi/2; \pi/2]$, удовлетворяющие неравенству (11), т. е. $\varphi \in (-3\pi/4; \pi/4)$. Для таких φ имеем $r\cos\varphi - r\sin\varphi = 1$, или, переходя к прямоугольным координатам, $x - y = 1$, т. е. $y = x - 1$. График функции $y = x - 1$ есть прямая (рис. 7.32). Как доказано, каждая точка графика функции (10) принадлежит этой прямой. Легко показать, что верно и обратное: каждая точка прямой $y = x - 1$ принадлежит графику функции (10). Значит, графиком (10) является прямая $y = x - 1$. ▲

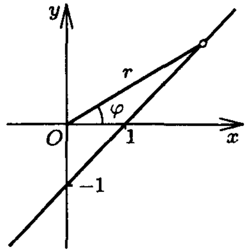

Рис. 7.32

Пример 19. Найти формулу общего члена для последовательности:

1) $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, $n \in N$, $n \geqslant 3$ (*последовательность Фибоначчи*);

2) $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_n = x_{n-1} - (1/4)\,x_{n-2}$, $n \in N$, $n \geqslant 3$;

3) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_n = x_{n-1} - x_{n-2}$, $n \in N$, $n \geqslant 3$.

▲ 1) Найдем последовательность вида $\{\lambda^n\}$, удовлетворяющую условию $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, $n \in N$, $n \geqslant 3$ (здесь $\lambda \neq 0$ может быть, вообще говоря, и комплексным числом). После подстановки $x_n = \lambda^n$ получим уравнение $\lambda^2 = \lambda + 1$ (его называют характеристическим уравнением), откуда $\lambda_1 = (1 + \sqrt{5})/2$, $\lambda_2 = (1 - \sqrt{5})/2$. Каждая из последовательностей $\{\lambda_1^n\}$ и $\{\lambda_2^n\}$ удовлетворяет условию $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$. Для любых чисел α и β последовательность с общим членом $x_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n$ также удовлетворяет этому условию. Найдем α и β так, чтобы

$$x_1 = \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 = 1, \quad x_2 = \alpha\lambda_1^2 + \beta\lambda_2^2 = 1;$$

получим

$$\alpha = \frac{1 - \lambda_2}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \beta = \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)} = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Подставляя значения λ_1, λ_2, α и β в формулу $x_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n$, находим формулу общего члена

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), \quad n \in N,$$

последовательности, определяемой условиями 1).

2) Поступая, как и в случае 1), придем к характеристическому уравнению $4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$, имеющему один двукратный корень $\lambda = 1/2$. Последовательность $\{2^{-n}\}$ удовлетворяет условию

$$x_n = x_{n-1} - \frac{1}{4}\,x_{n-2}, \quad n \in N, \quad n \geqslant 3.$$

Другой такой последовательностью является, как легко проверить, последовательность $\{n2^{-n}\}$. Последовательности вида $\{\alpha 2^{-n} + \beta n 2^{-n}\}$ также удовлетворяют этому условию. Определив α и β из условий

$$x_1 = \alpha \cdot \frac{1}{2} + \beta \cdot \frac{1}{2} = a, \quad x_2 = \alpha \cdot \frac{1}{4} + \beta \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} = b,$$

получим

$$\alpha = 4a - 4b, \quad \beta = 4b - 2a.$$

Значит, формула общего члена последовательности, заданной условиями 2), имеет вид

$$x_n = (2a - 2b + (2b - a)n)2^{1-n}, \quad n \in N.$$

3) В этом случае характеристическое уравнение $\lambda^2 = \lambda - 1$ имеет комплексные корни $\lambda_1 = e^{i\pi/3}$ и $\lambda_2 = e^{-i\pi/3}$. Последовательность, удовлетворяющую условиям 3), будем искать в виде $x_n = \alpha e^{i\pi n/3} + \beta e^{-i\pi n/3}$, и из условий $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ найдем, что

$$\alpha = \frac{1}{i\sqrt{3}}\, e^{-i\pi/3}, \quad \beta = -\frac{1}{i\sqrt{3}}\, e^{i\pi/3}.$$

Отсюда

$$x_n = \frac{1}{i\sqrt{3}}\left(e^{i\pi(n-1)/3} - e^{-i\pi(n-1)/3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\pi(n-1)}{3}, \quad n \in N. \blacktriangle$$

Пример 20. Доказать, что ограничены последовательности:
1) $x_n = \dfrac{(-1)^n n + 10}{\sqrt{n^2+1}}$, $n \in N$; 2) $x_n = \dfrac{n}{a^n}$, $n \in N$, где $a > 1$.

▲ 1) Поскольку

$$|(-1)^n n + 10| \leqslant |(-1)^n n| + 10 = n + 10, \quad \sqrt{n^2+1} > n,$$

имеем

$$|x_n| = \frac{|(-1)^n n + 10|}{\sqrt{n^2+1}} \leqslant \frac{n+10}{n} = 1 + \frac{10}{n} \leqslant 11,$$

что и означает ограниченность $\{x_n\}$.

2) Очевидно, для всех $n \in N$ имеем

$$\frac{n}{a^n} > 0.$$

Поскольку $a - 1 > 0$, по неравенству Бернулли имеем для всех $n \in N$

$$a^n = (1 + a - 1)^n \geqslant n(a-1),$$

откуда

$$\frac{n}{a^n} \leqslant \frac{1}{a-1}.$$

Таким образом, для всех n верны неравенства

$$0 < \frac{n}{a^n} \leqslant \frac{1}{a-1},$$

т. е. последовательность ограниченна. ▲

Пример 21. Доказать, что неограниченны последовательности:
1) $x_n = n^{\cos \pi n}$, $n \in N$; 2) $x_n = \dfrac{100 - n^3}{n^2 - 10}$, $n \in N$.

▲ 1) Если $n = 2k$, то $\cos 2\pi k = 1$ и $x_{2k} = 2k$. Пусть C — произвольное положительное число. Возьмем четное число $2k$, большее C (например, $2k = 2(E(C) + 1)$); тогда $x_{2k} > C$, т. е. данная последовательность неограниченна.

2) Из формулы общего члена имеем

$$|x_n| = \frac{n^3|100/n^3 - 1|}{n^2|1 - 10/n^2|} = n\left|\frac{100/n^3 - 1}{1 - 10/n^2}\right|.$$

Если $n \geqslant 6$, то
$$\frac{100}{n^3} < \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad 1 - \frac{100}{n^3} > \frac{1}{2};$$
но $0 < 1 - \dfrac{10}{n^2} < 1$, поэтому
$$|x_n| = n^{(1-100/n^3)/(1-10/n^2)} > n\frac{1/2}{1} = \frac{n}{2}.$$

Для произвольного положительного числа C возьмем $n > 2C$ (например, $n = [2C] + 1$); тогда $|x_n| > \dfrac{n}{2} > C$, и, значит, данная последовательность неограниченна. ▲

Пример 22. Доказать, что последовательность
$$x_n = \frac{5^n}{n!}, \quad n \in N,$$
строго убывает, начиная с некоторого номера.

▲ Рассмотрим отношение
$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{5^{n+1}n!}{(n+1)!\,5^n} = \frac{5}{n+1}.$$
Видно, что при $n \geqslant 5$
$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \frac{5}{6} < 1,$$
и, значит, $x_{n+1} < x_n$ (так как $x_n > 0$). Итак, данная последовательность строго убывает, начиная с $n = 5$. ▲

Пример 23. Доказать, что последовательность
$$x_n = (1 + 1/n)^n, \quad n \in N,$$
строго возрастает.

▲ Рассмотрим отношение
$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+2)^{n+1}n^n}{(n+1)^{n+1}(n+1)^n} = \left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n}.$$
Из неравенства Бернулли имеем для любого $n \in N$
$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} > 1 - \frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{n}{n+1}.$$
Поэтому для любого $n \in N$
$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > \frac{n}{n+1}\,\frac{n+1}{n} = 1,$$
т. е. $x_{n+1} > x_n$, и, значит, данная последовательность строго возрастает. ▲

Пример 24. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$, где
$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}, \quad n \in N:$$

1) строго возрастает, если $a = 0$;

2) строго убывает, если $a = 4$.

▲ Для $n \in N$ имеем $x_{n+2}^2 = 6 + x_{n+1}$, $x_{n+1}^2 = 6 + x_n$, откуда

$$x_{n+2}^2 - x_{n+1}^2 = x_{n+1} - x_n. \qquad (12)$$

Доказательство проведем методом математической индукции. 1) Если $x_1 = 0$, то $x_2 = \sqrt{6} > x_1$.

Допустим, что неравенство $x_{n+1} > x_n$ верно для $n \in N$. Тогда из (12) следует, что $x_{n+2}^2 > x_{n+1}^2$, и так как $x_{n+2} > 0$ и $x_{n+1} > 0$, то верно неравенство $x_{n+2} > x_{n+1}$. Значит, $x_{n+1} > x_n$ для любого $n \in N$, т. е. последовательность строго возрастает.

2) В этом случае $x_1 = 4$, $x_2 = \sqrt{10} < x_1$. Как и выше, легко доказать, что для любого $n \in N$ из неравенства $x_{n+1} < x_n$ следует неравенство $x_{n+2} < x_{n+1}$. Значит, $x_{n+1} < x_n$ для любого $n \in N$, т. е. в этом случае последовательность строго убывает. ▲

ЗАДАЧИ

Найти области определения функции, заданной формулой (1, 2).

1. 1) $y = \dfrac{x}{x+1}$; 2) $y = \dfrac{x+1}{x^2-1}$; 3) $y = \dfrac{x^3-1}{x^2-6x+8}$;
4) $y = \dfrac{(x+2)^2}{x^3-4x}$; 5) $y = \dfrac{1}{x+|x|}$; 6) $y = \dfrac{x^2}{2|x|-3}$;
7) $y = \dfrac{|x+2|+1-2x-2x^2}{|2x+2|-1}$.

2. 1) $y = \sqrt[3]{x^2-1}$; 2) $y = \sqrt{-x^2}$; 3) $y = \sqrt[4]{2-x}$;
4) $y = \sqrt{2-x-x^2}$; 5) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 6) $y = \dfrac{\sqrt[6]{x^2-1}}{x}$;
7) $y = \dfrac{x}{(9-x^2)^{2/3}}$; 8) $y = \sqrt{x^2(x-2)}$; 9) $y = \sqrt{\dfrac{x-3}{1-3x+2x^2}}$.

3. Найти многочлен $P(x)$ степени не выше трех, удовлетворяющий условиям:

1) $P(-2) = 1$, $P(-1) = 6$, $P(0) = 5$, $P(1) = 10$;

2) $P(x_1) = y_1$, $P(x_2) = y_2$, $P(x_3) = y_3$, $P(x_4) = y_4$, $x_i \neq x_j$, $i, j = 1, 2, 3, 4$.

4. Найти многочлен $P(x)$ степени не выше n, удовлетворяющий условиям

$$P(x_1) = y_1, \quad P(x_2) = y_2, \quad \ldots, \quad P(x_n) = y_n, \quad P(x_{n+1}) = y_{n+1},$$

если $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n+1)$. Такой многочлен называют *интерполяционным*.

5. Найти области определения функций f_1, f_2, $f_1 + f_2$, если f_1 и f_2 заданы формулами:

1) $f_1(x) = \sqrt[4]{3-x}$, $f_2(x) = \sqrt{x+1}$;

2) $f_1(x) = \sqrt{1-x^2}$, $f_2(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{2x-1}}$;

3) $f_1(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x-3}$, $f_2(x) = \lg(x^2-4)$;

4) $f_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{5x-x^2}}$, $f_2(x) = \operatorname{tg}(x)$;

5) $f_1(x) = \lg(16-x^2)$, $f_2(x) = \dfrac{1}{1-\sin x}$;

6) $f_1(x) = x + \sqrt{x-1}$, $f_2(x) = x - \sqrt{x-1}$.

6. Найти области определения функций f и $1/f$, если f задана формулой:

1) $f(x) = x^2 - x + 1$; 2) $f(x) = |x| - 2$; 3) $f(x) = \lg(1-x^2)$;
4) $f(x) = x + \sqrt{x+2}$; 5) $f(x) = \sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}$;
6) $f(x) = 5^x - 2^{x+1}$; 7) $f(x) = 3 - 2\cos x$;
8) $f(x) = \sqrt{2} - 2\sin x$; 9) $f(x) = 1 - \operatorname{ctg} x$.

7. Для функции

$$f(x) = 5x^m + ax^n + bx^{-m} + 2x^{-n},$$
$$x \in R, \quad x \neq 0, \quad m, n \in N,$$

найти a и b так, чтобы $f(x) = f(1/x)$ для любого $x \neq 0$.

8. Найти $f(a) + f(-a)$, если $f(x) = x^3 + 3x - 1$.

9. Найти $f(1+b) - f(1-b)$, если $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$.

10. Найти $y(a + 1/a)$, если $y = \sqrt{x^2-4}$ и:
1) $a > 1$; 2) $0 < a < 1$; 3) $-1 < a < 0$; 4) $a < -1$.

11. Найти множество значений функции:
1) $f(x) = 2x - 5$, $x \in [-2; 2]$; 2) $f(x) = |x-1|$, $x \in [0; 5]$;
3) $f(x) = x + \operatorname{sign} x$, $x \in R$; 4) $f(x) = x^2 + 2x - 3$, $x \in R$;
5) $f(x) = -2x^2 + x + 1$, $x \in R$;
6) $f(x) = 5 - 12x - 2x^2$, $x \in [-4; 1]$;
7) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $x \in (0; +\infty)$; 8) $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x}$, $x \in (-\infty; 0)$;
9) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$, $x \in R$.

12. Найти множество значений функции, заданной формулой:
1) $y = \sqrt{x^2+1}$; 2) $y = \sqrt[4]{x^2-1}$; 3) $y = \sqrt{x(4-x)}$;
4) $y = \sqrt{\dfrac{9x^2+1}{x}}$; 5) $y = ax + \dfrac{b}{x}$, где $ab > 0$;
6) $y = ax + \dfrac{b}{x}$, где $ab < 0$; 7) $y = \dfrac{x^2+2x-2}{x^2-x+1}$.

13. Найти композиции $f \circ g$ и $g \circ f$ и указать их области определения для функций, заданных формулами:
1) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$; 2) $f(x) = g(x) = \sqrt{1-x^2}$;

3) $f(x)=10^x$, $g(x)=\lg x$; 4) $f(x)=x^5$, $g(x)=x+5$;

5) $f(x)=\begin{cases} x, & x\in[0;+\infty), \\ 0, & x\in(-\infty;0), \end{cases}$ $g(x)=\begin{cases} 0, & x\in[0;+\infty), \\ x^2, & x\in(-\infty;0); \end{cases}$

6) $f(x)=\ln x^2$, $g(x)=\sin x$.

14. Написать формулы, задающие композиции:

1) $u\circ v\circ w\circ y\circ z$; 2) $z\circ y\circ w\circ v\circ u$; 3) $w\circ y\circ v\circ z\circ u$;
4) $y\circ v\circ z\circ u\circ w$;

если $u=\sin x$, $v=\log_2 x$, $w=1+x$, $y=1/x$, $z=\sqrt{x}$.

15. Доказать *ассоциативность* композиции, т. е. что

$$(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h).$$

16. Найти какую-либо функцию f, удовлетворяющую условию:

1) $f(x-2)=\dfrac{1}{x+1}$, $x\in R$, $x\neq 1$;

2) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x^2+1$, $x\in R$, $x\neq 0$; 3) $f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=x$, $x\in R$, $x\neq -1$;

4) $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^4+1}{x^2}$, $x\in R$, $x\neq 0$; 5) $f(x^2)=1-|x|^3$, $x\in R$.

17. Существует ли функция $f(x)$, $x\in[0;+\infty)$, удовлетворяющая для любого $x\in R$ равенству $f(x^2)=1+x$?

18. Пусть $f(x)=\dfrac{x}{ax+b}$, $g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$. Найти:

1) $f\circ f\circ f(x)$; 2) $g\circ g\circ g(x)$;
3) $f\circ f\circ\ldots\circ f(x)$ (n композиций);
4) $g\circ g\circ\ldots\circ g(x)$ (n композиций).

19. Выяснить, какие из указанных функций являются четными, какие нечетными, какие не являются ни четными, ни нечетными:

1) $y=|x|$, $x\in R$; 2) $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$, $x\in R$;

3) $y=\dfrac{1}{1-x^5}$, $x\in(-1,1)$; 4) $y=\dfrac{1}{1-x^4}$, $x\in(-1;1)$;

5) $y=\begin{cases} x^4, & x>0, \\ x^2, & x\leqslant 0; \end{cases}$ 6) $y=\dfrac{x^6}{x^2+1}$, $x\in(-\infty;1]$;

7) $y=|x+1|$, $x\in R$; 8) $y=|x+1|+|x-1|$, $x\in R$;
9) $y=|10-x|-|10+x|$, $x\in R$.

20. Доказать, что произведение двух четных или двух нечетных функций — функция четная, а произведение четной и нечетной функций — функция нечетная.

21. В одной системе координат построить графики функций:

1) $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$, $y=x^4$; 2) $y=\dfrac{1}{x}$, $y=\dfrac{1}{x^2}$, $y=\dfrac{1}{x^3}$;

3) $y=x$, $y=x^{1/2}$, $y=x^{1/3}$, $y=x^{1/4}$;

4) $y = \dfrac{1}{x}$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

Построить графики функций (22–25):

22. 1) $y = \sqrt{4 - x^2}$; 2) $y = -\sqrt{9 - x^2}$;
3) $y = 3 - \sqrt{1 - x^2}$; 4) $y = \sqrt{2x - x^2} - 1$.

23. $\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ (читается: сигнум икс).

24. 1) $y = \{x\}$, где $\{x\} = x - E(x)$ — дробная часть x;
2) $y = E(1/x)$.

25. 1) $y = |x - 1|$; 2) $y = |x + 2|$; 3) $y = |x + 1| + |x - 1|$;
4) $y = \dfrac{|x + 1| - |x - 1|}{2}$; 5) $y = \operatorname{sign} x - \dfrac{|x + 1| - |x - 1|}{2}$;
6) $y = \operatorname{sign} x^2$; 7) $y = \operatorname{sign}(x^2 - 1)$;
8) $y = \operatorname{sign} \dfrac{2 - x}{2 + x}$; 9) $y = \operatorname{sign}(x^3 - 4x)$.

26. Построить графики функций $f(x)$, $-f(x)$, $f(-x)$, $-f(-x)$, $f(x) - 3$, $f(x - 3)$, если:
1) $f(x) = 2x + 6$; 2) $f(x) = 4x - x^2$;
3) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$; 4) $f(x) = 1/x$.

27. Построить график функции:
1) $y = \dfrac{2x - 1}{x}$; 2) $y = \dfrac{1}{x + 1}$; 3) $y = \dfrac{3x}{x - 2}$; 4) $y = \dfrac{x - 1}{x + 2}$.

28. Построить графики функций $f(x)$, $|f(x)|$ и $f(|x|)$, если:
1) $f(x) = 3x - 8$; 2) $f(x) = 3 - 2x$; 3) $f(x) = x^2 - x - 2$;
4) $f(x) = 6x - x^2 - 5$; 5) $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$; 6) $f(x) = \dfrac{x + 1}{2 - x}$.

29. Продолжить функцию $y = f(x)$, $x \in (0; a)$, на $(-a; 0]$ так, чтобы получившаяся на $(-a; a)$ функция была: а) четной; б) нечетной:
1) $y = x$, $x \in (0; +\infty)$; 2) $y = x^2$, $x \in (0; +\infty)$;
3) $y = \sqrt{x}$, $x \in (0; +\infty)$; 4) $y = x + 5$, $x \in (0; +\infty)$;
5) $y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in (0; 1)$; 6) $y = x^2 - 4x + 3$, $x \in (0; +\infty)$;
7) $y = \dfrac{1}{x(x + 1)}$, $x \in (0; +\infty)$.

Задать продолжение формулой и построить график получившейся функции.

30. Построить в одной системе координат графики функций $f(x)$ и $1/f(x)$, если:
1) $f(x) = 3x - 2$; 2) $f(x) = x^2 + 1$;
3) $f(x) = x^2 - 1$; 4) $f(x) = \dfrac{2 - x}{2 + x}$.

31. Построить в одной системе координат графики функций f_1, f_2 и $f_1 + f_2$, если:

1) $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = \frac{1}{2}x$; 2) $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = -\frac{1}{x^2}$;
3) $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$; 4) $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = \frac{1}{x-1}$.

32. Построить в одной системе координат графики функций f_1, f_2 и $f_1 - f_2$, если:

1) $f_1(x) = \sqrt{4-x^2}$, $f_2(x) = x^2$; 2) $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 1/x$;
3) $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = 4x$; 4) $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = 1/x^2$.

33. Доказать, что функции f и g взаимно обратны:

1) $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $g(x) = \frac{x}{1-x}$;
2) $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$, $g(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$.

34. Доказать, что график функции f симметричен относительно прямой $y = x$:

1) $f(x) = \frac{a}{x}$ $(a \neq 0)$; 2) $f(x) = \sqrt[7]{2-x^7}$.

35. Выяснить, являются ли взаимно обратными функции, заданные формулами:

1) $y = \frac{x+1}{x-1}$, $y = \frac{x+1}{x-1}$; 2) $y = 1 - \sqrt[3]{x}$, $y = (1-x)^3$;
3) $y = 1 + \sqrt{x}$, $y = (x-1)^2$; 4) $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = \sqrt{1-x^2}$.

36. Среди функций указать обратимые:

1) $y = 2x - 1$; 2) $y = |x|$; 3) $y = 1/x^3$; 4) $y = x^2 + 2x - 3$;
5) $y = \sqrt[3]{x^4}$; 6) $y = \sqrt{x-1}$; 7) $y = \operatorname{sign} x$; 8) $y = x^2 \operatorname{sign} x$.

Обратные функции задать формулами и построить их графики.

37. 1) При каких a и b функция $y = ax + b$ имеет обратную и совпадает с ней?

2) При каких $\alpha \in R$ функция $y = x^\alpha$, $x > 0$, совпадает со своей обратной?

38. Доказать ограниченность функции:

1) $y = x^2 - x - 1$, $x \in [-1; 5]$; 2) $y = \frac{1}{x-10}$, $x \in [0; 5]$;
3) $y = \frac{x^3}{x^4+1}$, $x \in R$; 4) $y = \frac{\sqrt[3]{x^4+10}}{x^2+1}$, $x \in R$;
5) $y = \frac{x^2-1}{|x^3-1|}$, $x \in R$, $x \neq 1$; 6) $y = \frac{3x^2+6x+10}{\sqrt{0{,}1x^4+1}}$.

39. Сформулировать и записать, используя символы $\exists$, $\forall$, определения того, что функция:

1) неограниченна сверху; 2) неограниченна снизу.

40. Доказать, что функция $y = 1/x$, $x \in R$, $x \neq 0$:
1) неограниченна сверху; 2) неограниченна снизу.

41. Доказать, что функция $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1;1)$, ограниченна снизу и неограниченна сверху.

42. Доказать, что ограниченной функцией является:
1) сумма ограниченных функций;
2) произведение ограниченных функций.

43. Найти $\max\limits_X f$, $\min\limits_X f$, если:
1) $f(x) = x^2 - 4x - 5$, $X = [0;5]$;
2) $f(x) = -x^2 + 5x - 6$, $X = [0;4]$;
3) $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$, $X = [-10;-3]$; 4) $f(x) = \dfrac{4-x^2}{4+x^2}$, $X = [-1;3]$;
5) $f(x) = \dfrac{x^4+4}{x^2}$, $X = [1;2]$; 6) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4+9}$, $X = R$.

44. Доказать, что если функция f знакопостоянна на множестве X, то
$$\max_X \frac{1}{f} = \min_X f, \quad \min_X \frac{1}{f} = \max_X f.$$

45. Доказать, что $\max f$ и $\min f$ не существуют, если:
1) $f(x) = \dfrac{x^2}{|x|}$, $x \in R$, $x \neq 0$; 2) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $x \in (-1;+\infty)$;
3) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in R$.

46. Доказать, что существует $\min f$, но не существует $\max f$, и найти $\min f$, если:
1) $f(x) = x^2 - 3x$, $x \in R$; 2) $f(x) = x^3 + \dfrac{8}{x^3}$, $x \in (0;+\infty)$;
3) $f(x) = \dfrac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in R$; 4) $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x^2-4}$, $x \in [1;2)$.

47. Доказать, что существует $\max f$, но не существует $\min f$ и найти $\max f$, если:
1) $f(x) = 4x - x^2 - 6$, $x \in R$; 2) $f(x) = 2\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $x \in (-8;0)$;
3) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$, $x \in R$; 4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$, $x \in [0;1)$.

48. Найти $\sup\limits_X f$, $\inf\limits_X f$, а также $\max\limits_X f$, $\min\limits_X f$, если последние существуют:
1) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$, $X = (0;+\infty)$; 2) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$, $X = (-\infty;0)$;
3) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$, $X = R$;

4) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$, $X = \{x \in (-2;3],\ x \neq 2\}$;

5) $f(x) = x - E(x)$, $X = R$.

49. 1) Доказать, что если существует $\max\limits_X f$, то $\sup\limits_X f = \max\limits_X f$.

2) Доказать, что если существует $\min\limits_X f$, то $\inf\limits_X f = \min\limits_X f$.

50. Доказать, что $\inf\limits_{x\in X}(-f(x)) = -\sup\limits_{x\in X} f(x)$.

51. Доказать, что функция $y = x^3 + x$ возрастает.

52. Доказать, что функция $y = (1-x^2)/x$ убывает на любом интервале, не содержащем нуля.

53. Доказать, что функция $y = (1+x^2)/x$:

1) строго возрастает на $(-\infty;-1]$ и на $[1;+\infty)$;

2) строго убывает на $[-1;0)$ и на $(0;1]$.

54. Найти наибольшие промежутки, на которых функция $y = x^4 - 2x^2 - 2$: 1) возрастает; 2) убывает.

55. 1) Доказать, что строго монотонная функция взаимно однозначна.

2) Привести пример взаимно однозначной немонотонной функции.

56. Найти область определения функции:

1) $y = \dfrac{1}{16^{x^2} - 2^x}$; 2) $y = \sqrt{2^x - 3^x}$; 3) $y = \log_2 x^2$ и $y = 2\log_2 x$;

4) $y = \log_x 5$; 5) $y = (\lg(100-x))^{-1}$;

6) $y = \ln x + \ln(x-1)$ и $y = \ln x(x-1)$;

7) $y = \log_{3+x}(x^2-1)$; 8) $y = \log_3 \log_{0,5} x$.

57. Найти множество значений функции:

1) $y = 10^{-x^2}$; 2) $y = \dfrac{1}{1-2^{-x}}$; 3) $y = 4^x - 2^x + 1$;

4) $y = \lg(x^2+10)$; 5) $y = \log_2(4-x^4)$; 6) $y = \log_3 x + \log_x 3$.

58. Выяснить, какие из функций являются четными, какие нечетными, какие не являются ни четными, ни нечетными:

1) $y = x \cdot 2^{-x}$; 2) $y = |\lg x|$; 3) $y = \ln e^x$; 4) $y = 10^{\lg x}$;

5) $y = 10^x + 10^{-x}$; 6) $y = \dfrac{1}{3^x} - \dfrac{1}{3^{-x}}$; 7) $y = \operatorname{th} x - \sqrt[3]{x}$;

8) $y = \ln(1-x^2)$; 9) $y = \ln \operatorname{cth} x$.

59. Доказать:

1) $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$;

2) $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$;

3) $\operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$;

4) $\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$;

5) $\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = (\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y))/2$;

6) $\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = (\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y))/2$;

7) $\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y = (\operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{sh}(x-y))/2$.

60. Доказать ограниченность функции:

1) $y = 10^{-|x|}$; 2) $y = 0,3^{x^2-1}$; 3) $y = 1/\lg(2+x^4)$;

4) $y = \log_4(x^2+5) - \log_2(1+|x|)$; 5) $y = (\lg x + \log_x 10)^{-1}$.

61. Доказать неограниченность функции:

1) $y = 0{,}4^x$, $x \in R$; 2) $y = \log_{0,1} x$, $x \in (1; +\infty)$;

3) $y = x^x$, $x \in (0; +\infty)$; 4) $y = \log_x 2$, $x \in (1; +\infty)$;

62. Доказать, что при $a > 1$:

1) $\sup\limits_{(0;+\infty)} a^{1/x} = +\infty$, $\inf\limits_{(0,+\infty)} a^{1/x} = 1$;

2) $\sup\limits_{(-\infty;0)} a^{1/x} = 1$, $\inf\limits_{(-\infty;0)} a^{1/x} = 0$.

63. Найти $\inf f$, $\sup f$, а также $\max f$, $\min f$, если они существуют:

1) $f(x) = 2^{-|x+2|}$; 2) $f(x) = (\sqrt{2}-1)^{1-x^2}$;

3) $f(x) = 1 - 2^{1/(x-1)}$; 4) $f(x) = 8 - 2^{x+1} - 4^x$;

5) $f(x) = \lg(x^2+x-2)$; 6) $f(x) = \log_{0,1}(4x-3-x^2)$;

7) $f(x) = (\log_2(2/x))\log_2 8x$.

64. Доказать, что функция $y = 2^{1/x}$ убывает на каждом интервале, не содержащем нуля.

65. Доказать, что функция $y = \log_3(x^2-2x)$ убывает на $(-\infty; 0)$ и возрастает на $(2; +\infty)$.

66. Исследовать на монотонность функцию:

1) $y = (2/3)^{1/x}$; 2) $y = 3^{|x|}$; 3) $y = 2^{1-x} - 2^{x-1}$;

4) $y = \lg(1+x^3)$; 5) $y = \log_x 10$; 6) $y = \ln(4x-x^2)$;

7) $y = \log_{0,5} \dfrac{x}{x+1}$.

Построить график функции (67, 68).

67. 1) $y = 3^{-|x+2|}$; 2) $y = 2^{1/x}$; 3) $y = \dfrac{2^x}{2^{x+1}-1}$;

4) $y = \log_4|x+1|$; 5) $y = 1 - 2\log_{1/3}|x|$; 6) $y = |\log_{0,5} x| - 1$;

7) $y = \lg x^2$; 8) $y = \log_{0,2} 5^x$; 9) $y = 8^{\log_8(x-3)}$.

68. 1) $y = (1{,}5)^{x^2-1}$; 2) $y = 2^{(x+1)/x}$; 3) $y = \log_2(x^2+x-2)$;

4) $y = \log_{0,1}(4x-3-x^2)$; 5) $y = \log_3((x+2)/x)$; 6) $y = \log_x 3$.

69. Функцию, заданную на $(0; +\infty)$, продолжить, задав формулой, на $(-\infty; 0]$: а) четно, б) нечетно. Построить график получившейся функции:

1) $y = -3 \cdot 2^{x-1}$; 2) $y = 1 - 2\lg x$;

3) $y = \log_{x+2} x$; 4) $y = \operatorname{th}(x-1)$.

70. Найти функцию, обратную данной функции, указать ее область определения и построить ее график:

1) $y = 3^{1-x}$; 2) $y = 1 + \lg(x+2)$; 3) $y = \dfrac{2^x}{2^x+1}$;

4) $y = \log_x 10$; 5) $y = 2^{x-1} - 2^{-x}$; 6) $y = \ln(x - \sqrt{x^2-1})$.

71. Для указанной функции задать обратную функцию формулой и построить график:

1) $y = \operatorname{ch} x$, $x \in (-\infty; 0)$; 2) $y = \operatorname{sh} x$, $x \in R$;

3) $y = \operatorname{th} x$, $x \in R$; 4) $y = \operatorname{cth} x$, $x \in R$, $x \neq 0$.

72. Доказать, что график функции $y = \ln(1-e^x)$ симметричен относительно прямой $y = x$.

73. Доказать, что функция $y = x - E(x)$, $x \in R$, периодическая, и найти ее наименьший положительный период.

74. Доказать, что функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рациональное}, \\ 0, & \text{если } x \text{ иррациональное}, \end{cases}$$

периодична и любое ненулевое рациональное число — ее период, никакое же иррациональное число периодом не является.

75. Найти наименьший положительный период функции:

1) $y = \sin 3x$; 2) $y = 6\cos(3\pi x/4)$; 3) $y = \operatorname{tg}(3x+5)$;

4) $y = \sin^2(x-1)$; 5) $y = |\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x|$; 6) $y = \sin x + \cos 2x$;

7) $y = \cos 2x \cos 6x$.

76. Доказать, что функция не является периодической:

1) $y = \sin|x|$; 2) $y = \cos(1/x)$; 3) $y = \cos x \cos\sqrt{3}x$.

77. Доказать, что если функция $y = f(x)$ периодична с периодом T, то функция $y = f(ax+b)$, $a \neq 0$, периодична с периодом T/a.

78. Найти область определения функции:

1) $y = \dfrac{\operatorname{ctg} 2x}{\sin(x/3)}$; 2) $y = \sqrt{\cos x}$; 3) $y = (\sin x - 2\sin^2 x)^{-3/4}$;

4) $y = \arccos(3-x)$; 5) $y = \arcsin(0,5x-1) + \arccos(1-0,5x)$;

6) $y = \ln\cos x$; 7) $y = \sqrt{\ln\sin x}$.

79. Найти множество значений функции:

1) $y = 1 - 2|\cos x|$; 2) $y = \sin x + \sin(x + \pi/3)$;

3) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$; 4) $y = \dfrac{1+\sin x}{\sin x}$; 5) $y = \arccos|x|$;

6) $y = \pi - |\operatorname{arctg} x|$; 7) $y = \cos(\arcsin x)$; 8) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{2x}{x^2+1}$.

Выяснить, какие из функций являются четными, какие нечетными и какие не являются ни четными, ни нечетными (80, 81).

80. 1) $y = x + \sin x$; 2) $y = x^2 - \cos x$; 3) $y = \sin x \operatorname{tg} x$; 4) $y = (1 - x^2)\cos x$; 5) $y = (1 + \cos x)\operatorname{ctg} x$; 6) $y = \dfrac{1+\sin x}{\sin x}$; 7) $y = \cos(x+1)$; 8) $y = \sin 5x + \cos 3x$.

81. 1) $y = \arcsin x^2$; 2) $y = 2\arccos(-x)$; 3) $y = \arccos|x|$; 4) $y = |\operatorname{arctg} x|$; 5) $y = \arccos(\cos x)$; 6) $y = \cos(\arccos x)$; 7) $y = \arcsin x + \arccos x$.

82. Доказать:

1) $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$; 2) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$, $|x| \leqslant 1$;
3) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \pi/2$, $x \in R$;
4) $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$, $x \in R$.

83. Используя неравенства $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, $x \in (0; \pi/2)$, доказать неравенство:

1) $\sin x \geqslant x$, $x \leqslant 0$; 2) $|\sin x| \leqslant |x|$, $x \in R$;
3) $\operatorname{ctg} x < 1/x$, $x \in (0;\pi/2)$; 4) $\cos x < \pi/2 - x$, $x \in (0;\pi/2)$;
5) $\operatorname{ctg} x > \pi/2 - x$, $x \in (0;\pi/2)$; 6) $\operatorname{tg} x < 2/(\pi - 2x)$, $x \in (0;\pi/2)$;
7) $\cos x \geqslant 1 - x^2/2$, $x \in R$; 8) $\sin x \geqslant x - x^3/2$, $x \in (0;+\infty)$;
9) $\arcsin x > x$, $x \in (0;1)$; 10) $|\operatorname{arctg} x| \leqslant |x|$, $x \in R$.

84. Доказать ограниченность функции:

1) $y = \dfrac{\cos x}{1{,}5 - \sin x}$; 2) $y = \dfrac{2\sin x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$; 3) $y = \operatorname{ctg} x \sin 2x$;
4) $y = \cos 2x \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$; 5) $y = \dfrac{1}{x}\sin x$.

85. Доказать неограниченность функции:

1) $y = x\sin x$; 2) $y = \dfrac{1}{\cos x}$; 3) $y = \dfrac{\sin x}{0{,}5 + \sin x}$; 4) $y = \dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}$.

86. Найти $\sup f$, $\inf f$, а также $\max f$ и $\min f$, если они существуют:

1) $y = 4\sin^2 x - 12\sin x + 5$; 2) $y = \sqrt{\dfrac{1}{2} - \sin x}$; 3) $y = \dfrac{\cos x}{1 + \cos x}$;
4) $y = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$; 5) $y = \cos x \operatorname{tg} x$; 6) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$;
7) $y = \operatorname{arctg}|x|$.

87. Исследовать на монотонность функцию:

1) $y = \dfrac{1}{\cos x}$, $x \in [-\pi;\pi]$, $|x| \neq \dfrac{\pi}{2}$; 2) $y = \sin\dfrac{1}{x}$, $x \geqslant \dfrac{2}{3\pi}$;
3) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$; 4) $y = \arccos|x|$; 5) $y = \sin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

6) $y = \cos \dfrac{x^2}{1+x^2}$; 7) $y = \operatorname{arctg} x - x$.

Построить график функции (88–90).

88. 1) $y = \cos 3x$; 2) $y = 2\sin(2x-3)$; 3) $y = \operatorname{tg}(2x - \pi/3) + 1$; 4) $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x$; 5) $y = |\sin x|$; 6) $y = \sin |x|$; 7) $y = \sin^2 x$; 8) $y = \cos x$ и $y = \sqrt{1-\sin^2 x}$; 9) $y = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$.

89. 1) $y = \sec x$; 2) $y = \sin(\cos x)$; 3) $y = \sqrt{\sin x}$; 4) $y = 2^{\cos x}$; 5) $y = \log_2 \sin x$.

90. 1) $y = \arcsin(1-x)$; 2) $y = \operatorname{arctg}|x|$; 3) $y = \operatorname{arcctg}(1/x)$; 4) $y = \cos(\arccos x)$; 5) $y = \arccos(\cos x)$; 6) $y = x - \arcsin(\sin x)$.

91. Функцию, заданную формулой при $x > 0$, продолжить, задав формулой, на значении $x \leqslant 0$: а) четно, б) нечетно. Построить график получившейся функции:

1) $y = 1 + \sin x$; 2) $y = \operatorname{ctg} x$; 3) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$; 4) $y = \arccos 2x$; 5) $y = \operatorname{arctg}(x-1)$.

92. Выразить через элементарные функции обратную функцию к заданной и построить ее график:

1) $y = \sin x,\ x \in [-3\pi/2; -\pi/2]$; 2) $y = \cos x,\ x \in [-\pi; 0]$; 3) $y = \operatorname{tg} x,\ x \in (\pi/2; 3\pi/2)$; 4) $y = \operatorname{ctg} x,\ x \in (-\pi; 0)$; 5) $y = 2\sin 3x,\ x \in [\pi/6; \pi/2]$; 6) $y = 2\arcsin(x/2),\ |x| \leqslant 2$; 7) $y = \arcsin\sqrt{1-x^2},\ x \in [-1; 0]$; 8) $y = \arcsin\sqrt{1-x^2},\ x \in [0; 1]$; 9) $y = \operatorname{arctg}(1/x),\ x \neq 0,\ x \in R$.

93. Доказать, что график функции

$$y = \arccos(2\sin^2(x/2)), \quad x \in [0; \pi/2],$$

симметричен относительно прямой $y = x$.

94. Доказать, что следующее уравнение задает функцию, и построить ее график:

1) $\dfrac{xy-1}{y-x} = 0$; 2) $\dfrac{y-2x^2}{y-8} = 0$; 3) $\dfrac{x^2+y^2-6}{\sqrt{y}+x} = 0$; 4) $\dfrac{x^5+y^4}{x^2+y^2} = 0$; 5) $\dfrac{x^4-y^8}{\lg^2 x + y^2} = 0$.

95. Изобразить график уравнения:

1) $|x| + |y| = 1$; 2) $|x| - |y| = 2$; 3) $x^4 - y^4 = 0$; 4) $x^2 - y^4 = 0$; 5) $x^2 + y^2 - 4y = 0$; 6) $y^2 + 2\cos 2x = 2$; 7) $x^2/4 + y^2 = 1$ (*эллипс*); 8) $x^2 - y^2 = x^4$.

96. Доказать, что график следующего уравнения является объединением графиков нескольких функций $y = f(x)$ или $x = g(y)$; построить графики этих функций:

1) $|y| + |x-2| = x$; 2) $|x+y| + |x-y| = 1$;
3) $|y| = \log_{0,5} x$; 4) $(x-|x|)^2 + (y-|y|)^2 = 4$.

97. Построить график уравнения и показать, что он не может быть получен объединением конечного числа графиков функций:
1) $|x| - x = |y| - y$; 2) $|y| = |y - \sin x|$.

98. Выяснить, какие из данных точек A и B принадлежат кривой:
1) $x = t^2 - 1,\ y = t^3 - t$; $A(0;0)$, $B(3;3)$;
2) $x = \sin t + 1,\ y = \cos t - 1$; $A(0;-1)$, $B(1,6;-0,2)$;
3) $x = 2\cos t - \cos 2t,\ y = 2\sin t - \sin 2t$; $A(3/2;\sqrt{3})$; $B(1;2)$;
4) $x = 2^t \sin t,\ y = 2^t \cos t$; $A(2;2)$, $B(0;2^\pi)$.

99. Исключив параметр t, получить уравнение, график которого совпадает с кривой; изобразить этот график:
1) $x = t-1,\ y = t^2 - 2t + 2$; 2) $x = 2 - 3\cos t,\ y = 1 + 3\sin t$;
3) $x = 2\cos t,\ y = 3\sin t$; 4) $x = |\ln t|,\ y = 1 + t^3$;
5) $x = (t+1)^2,\ y = (t-1)^2$.

100. Построить по точкам кривую:
1) $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t$ (*циклоида*);
2) $x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t$ (*астроида*).

101. Записать в полярных координатах уравнение и построить его график:
1) $x + y + 1 = 0$; 2) $x^2 + y^2 = 2x$; 3) $2xy = x^2 - y^2$;
4) $x = y^2 - 1/4$.

102. Построить график функции в полярных координатах:
1) $r = 1/\varphi$ (*гиперболическая спираль*);
2) $r = e^\varphi$ (*логарифмическая спираль*);
3) $r = 8\sin(\varphi - \pi/3)$; 4) $r = 1/(1 - \sin\varphi)$.

103. Построить график уравнения, перейдя к полярным координатам:
1) $(x^2+y^2)^2 = 2(x^2-y^2)$ (*лемниската Бернулли*);
2) $y^2(1-x) = x^3$ (*циссоида*).

Найти область определения функции (104–107).

104. 1) $y = \sqrt{\dfrac{x}{6-x}}$; 2) $y = \sqrt{3 - 5x - 2x^2}$; 3) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x}{1-|x|}}$;
4) $y = \sqrt{x^2 - |x| - 2}$; 5) $y = \sqrt[4]{3+x} + \sqrt[4]{3-x}$;
6) $y = (8 - 2x - x^2)^{-3/2}$.

105. 1) $y = \lg(x^2+1)$; 2) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x+2}{\lg\cos x}}$; 3) $y = \lg\dfrac{3x - x^2}{x-1}$;

4) $y=\sqrt{\log_3 \dfrac{2x-3}{x-1}}$; 5) $y=\dfrac{\sqrt{x+5}}{\lg(9-5x)}$; 6) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\log_2(x^2+2x-3)}$;

7) $y=\log_{x+1}(x^2-3x+2)$; 8) $y=\log_x \log_{0,5}\left(\dfrac{4}{3}-2^{x-1}\right)$;

9) $y=\lg(1,25^{1-x^2}-0,4096^{1+x})$; 10) $y=\ln(1-\lg(x^2-5x+16))$.

106. 1) $y=\dfrac{\operatorname{tg} x}{\cos 2x}$; 2) $y=\sqrt{\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}}$;

3) $y=\lg(16-x^2)+\operatorname{ctg} x$.

107. 1) $y=\arccos(0{,}5x-1)$; 2) $y=\arccos x-\arcsin(3-x)$;

3) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x^2-9}$; 4) $y=\arcsin\dfrac{x^2-1}{x}$;

5) $y=\sqrt{\arcsin x-\arccos x}$; 6) $y=\arcsin(2\cos x)$;

7) $y=\operatorname{tg}(2\arccos x)$; 8) $y=\lg(1-2\operatorname{arcctg} x)$;

9) $y=\dfrac{\arcsin(0{,}5x-1)}{\sqrt{x^2-3x+1}}$; 10) $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\arcsin(2-x)}$;

11) $y=\dfrac{\sqrt{\cos x-1/2}}{\sqrt{6-35x-6x^2}}$; 12) $y=\dfrac{\log_{2x}3}{\arccos(2x-1)}$.

Найти множество значений функции (108, 109).

108. 1) $y=\dfrac{2x}{x^2+9}$; 2) $y=\dfrac{3-x^2}{3+x^2}$; 3) $y=\sqrt{x^2+2x+2}$;

4) $y=\sqrt{8-2x-x^2}$; 5) $y=\sqrt{2x-1-x^2}$; 6) $y=2^{x^2+4x-5}$;

7) $y=\log_3(5+4x-x^2)$; 8) $y=\log_{x^2} x$; 9) $y=\sqrt{2\log_2 x-\log_2^2 x}$.

109. 1) $y=\sin x-5\cos x$; 2) $y=1-2|\sin 2x|$; 3) $y=\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$;

4) $y=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$; 5) $y=\sqrt{\lg\sin x}$; 6) $y=\cos^2 x-\sin x$;

7) $y=\log_2(\cos x+\sin^2 x)$; 8) $y=\cos\left(\dfrac{1}{2}\arcsin x\right)$;

9) $y=\operatorname{arcctg}(\sin x)$.

110. 1) Доказать, что для любого $x\in R$:

а) $E(x+1)=E(x)+1$; б) $E(x+n)=E(x)+n$, $n\in Z$.

2) Найти множество значений функции $x-E(x-2)$.

111. Найти все значения a, при которых область определения функции f содержит область значений функции g, если:

1) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2a+x}{a-x}}$, $g(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+4a-2}$;

2) $f(x)=\lg(x^2+a)$, $g(x)=\dfrac{x^2+x-a}{x}$;

3) $f(x)=\arcsin(2^x-a)$, $g(x)=\log_2(2a+1/2-a\cdot 2^x)$.

112. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 2$, $BC = 1$ и высотой $h = 1$ проведена прямая, перпендикулярная основанию AD и пересекающая его в точке M. Найти зависимость площади S отсеченной части с вершиной A от расстояния $x = AM$.

113. Около сферы радиуса r описан конус. Найти зависимость объема V этого конуса от его высоты; указать область определения получившейся функции.

114. Рассматриваются сечения правильного тетраэдра $ABCD$, параллельные ребру AB и высоте DO тетраэдра. Найти зависимость площади S сечения от расстояния x между плоскостью сечения и ребром AB, если высота грани тетраэдра равна b. Найти наибольшее значение S.

115. Радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, равен R. Найти зависимость радиуса вписанной окружности от угла α при вершине треугольника. Найти наибольшее значение этого радиуса.

116. На бесконечную прямолинейную нить с началом O равномерно на расстоянии l друг от друга нанизаны бусинки, первая из них находится в точке O. Нить однородна с линейной плотностью ρ, масса каждой бусинки равна m. Найти зависимость массы участка OM нити от длины $x = OM$.

117. Два луча, угол между которыми равен $60°$, имеют общее начало. Из этого начала по одному из лучей вылетела частица со скоростью v, а через час по другому лучу — вторая частица со скоростью $3v$. Найти зависимость расстояния между частицами от времени движения первой частицы. На какое наименьшее расстояние сблизятся частицы после вылета второй из них?

118. Область определения функции содержит m элементов, а область значений — n элементов. Доказать, что:

1) $n \leqslant m$;

2) для того чтобы функция была взаимно однозначной, необходимо и достаточно, чтобы $n = m$.

119. Найти число всех:

1) функций, определенных на множестве D из m элементов, со значениями из множества E из n элементов;

2) взаимно однозначных функций, область определения и множество значений которых содержат по n элементов.

120. Область определения функции f — счетное множество.

1) Доказать, что если функция f взаимно однозначна, то и множество ее значений счетно.

2) Привести пример не взаимно однозначной функции f, множество значений которой также счетно.

121. Выяснить, какие из заданных функций обратимы:

1) $y = 2 + x - x^2$, $x \in [0,5; +\infty)$; 2) $y = x^3 - x$, $x \in R$;

3) $y = x^4 - 2x^2 - 8$, $x \in [0; 2]$; 4) $y = -x|x| - 2x + 8$, $x \in R$;

5) $y = 1 - \sin x$, $x \in [0; \pi]$; 6) $y = \operatorname{tg} x$, $x \in (0; \pi)$, $x \neq \pi/2$;

7) $y = 9^x - 3^x$, $x \in R$; 8) $y = \arccos(|x| - 1)$, $x \in [-1; 2]$;

9) $y = \operatorname{arcctg}(x|x|)$, $x \in R$.

122. Доказать, что функции f и g взаимно обратны:

1) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$, $g(x) = \dfrac{2x+1}{x}$;

2) $f(x) = x^2 + 1$, $x \in (-\infty; 0]$, $g(x) = -\sqrt{x-1}$, $x \in [1; +\infty)$;

3) $f(x) = -e^{(1-x^2)/2}$, $x \in [0; +\infty)$, $g(x) = \sqrt{1 - 2\ln(-x)}$,
$x \in [-\sqrt{e}; 0)$;

4) $f(x) = \ln \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$, $x \in (0; +\infty)$, $g(x) = f(x)$;

5) $f(x) = \sin x$, $x \in [\pi/2; 3\pi/2]$, $g(x) = \pi - \arcsin x$, $x \in [-1; 1]$;

6) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in [-\pi; 0]$, $x \neq -\dfrac{\pi}{2}$, $g(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x - \pi, & x \geqslant 0, \\ \operatorname{arctg} x, & x < 0. \end{cases}$

Функцию, обратную к заданной, выразить через элементарные и построить ее график (123–125).

123. 1) $y = \sqrt[4]{x^3}$, $x \in [0; +\infty)$; 2) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$, $x \in (-\infty; 0]$, $x \neq -1$;

3) $y = x|x| + 2x$, $x \in R$; 4) $y = \dfrac{x^2 + 3x}{x^2 - 5x}$, $x \in R$, $x \neq 0$, $x \neq 5$;

5) $y = \dfrac{x^2 + 1}{2x}$, $x \in [1; +\infty)$; 6) $y = \dfrac{x^2 + 1}{2x}$, $x \in (0; 1]$;

7) $y = x - \sqrt{x^2 - 1}$, $x \in (-\infty; -1]$;

8) $y = \sqrt{x^2 - 1} + x$, $x \in (-\infty; -1]$.

124. 1) $y = 2^{x^2 - 2x}$, $x \in (-\infty; 1]$;

2) $y = 1 - e^{(1-x)/(1+x)}$, $x \in R$, $x \neq -1$; 3) $y = \dfrac{3^x - 2^x}{3^x + 2^x}$, $x \in R$;

4) $y = \dfrac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}} + 1$, $x \in R$;

5) $y = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $x \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$.

125. 1) $y = \sin x$, $x \in [5\pi/2; 7\pi/2]$; 2) $y = 2\cos(x/2)$, $x \in [2\pi; 4\pi]$;

3) $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in (-\pi/2; \pi/2)$, $x \neq 0$; 4) $y = \sin^2(x/2)$, $x \in [2\pi; 3\pi]$;

5) $y = 1/\cos x$, $x \in [-\pi; 0]$, $x \neq -\pi/2$;

6) $y = \arccos\sqrt{1 - x^2}$, $x \in [0; 1]$; 7) $y = \arccos\sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1; 0]$;

8) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1+x}{1-x}$, $x \in R$, $x \neq 1$.

126. 1) Доказать, что функция $y = x^3 + \frac{5}{9}x$ обратима. Построить в одной системе координат графики данной и обратной функций. Найти точки пересечения этих графиков.

2) Доказать, что если n — нечетное натуральное число, $p > 0$, $q \in R$, то функция $y = x^n + px + q$ обратима.

127. Доказать, что функция $y = \sqrt[3]{x + \sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{x^2 - 1}}$ имеет обратную, и найти ее.

128. Пусть $y = \operatorname{arcch} x$, $x \geqslant 1$, — обратная функция для функции $y = \operatorname{ch} x$, $x \geqslant 0$. Доказать, что функция

$$y = \begin{cases} 2\operatorname{ch}\left(\frac{1}{3}\operatorname{arcch} x\right), & x \geqslant 1, \\ 2\cos\left(\frac{1}{3}\arccos x\right), & -1 \leqslant x < 1, \end{cases}$$

является обратной для функции $y = (x^3 - 3x)/2$, $x \geqslant 1$.

129. Найти функцию, обратную для функции

$$y = (x^3 + 3x)/2, \quad x \in R.$$

130. Найти наибольший промежуток вида $[a; +\infty]$, на котором функция

$$y = 1 + 2\sin\frac{x-1}{x+1}$$

обратима, и найти на этом промежутке обратную функцию.

131. 1) Доказать, что функция $y = \frac{2x+3}{x-2}$ совпадает со своей обратной.

2) При каких условиях на a, b, c, d функция $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ обратна самой себе?

132. Доказать, что график функции $y = \log_a \frac{a^x + \alpha}{\beta a^x - 1}$, $\alpha\beta \neq -1$, симметричен относительно прямой $y = x$.

133. Пусть a и b — такие числа, что область определения функции $y = \ln(a + be^x)$ — непустое множество. При каких a и b эта функция совпадает со своей обратной?

134. При каких a, b и c функция

$$y = \operatorname{arctg}(a + b\operatorname{tg} x) + c, \quad x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right),$$

совпадает со своей обратной?

135. Найти все λ, при которых обратима функция f, и задать обратную функцию формулой, если

$$f(x) = (\arcsin x)^2 + \lambda \arccos x, \quad x \in [-1; 1].$$

136. Доказать, что:

1) $\cos(2\arccos x) = 2x^2 - 1$, $x \in [-1; 1]$;

2) $\sin(3\arcsin x) = 3x - 4x^3,\ x \in [-1; 1]$;

3) $\operatorname{tg}(3\operatorname{arctg} x) = \dfrac{x(3-x^2)}{1-3x^2},\ x \in R,\ x^2 \neq \dfrac{1}{3}$;

4) $3\arccos x - \arccos(3x - 4x^3) = \pi,\ x \in [-1/2; 1/2]$;

5) $\arccos \dfrac{1-x^2}{1+x^2} = 2|\operatorname{arctg} x|,\ x \in R$.

137. Найти все значения x, для которых верно равенство:

1) $\arccos\sqrt{1-x^2} = \arcsin x$; 2) $\arccos\sqrt{1-x^2} = -\arcsin x$;

3) $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg}(1/x)$; 4) $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg}(1/x) - \pi$;

5) $\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x} = \operatorname{arctg} x + \dfrac{\pi}{4}$; 6) $\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x} = \operatorname{arctg} x - \dfrac{3\pi}{4}$.

Установить, какие из функций являются четными, какие не являются ни четными, ни нечетными (138–140).

138. 1) $y = \dfrac{2^x + 2^{-x}}{3^x - 3^{-x}}$; 2) $y = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$; 3) $y = \left|\dfrac{10^x + 1}{10^x - 1}\right|$;

4) $y = \operatorname{ch}(x + \operatorname{sh} x)$; 5) $y = \operatorname{th}(x + \operatorname{ch} x)$;

6) $y = \ln^2(\sqrt{x^2+1} + x)$; 7) $y = \cos x \operatorname{sh} x + \sin x \operatorname{ch} x$;

8) $y = \operatorname{arcsh}(\operatorname{sh} x)$; 9) $y = \operatorname{th}(\operatorname{arcth} x)$.

139. 1) $y = \dfrac{\sin x}{x}$; 2) $y = \sin x + 2x^3$; 3) $y = \operatorname{tg} x - \cos x$;

4) $y = \dfrac{|\sin x|}{1 - \cos x}$; 5) $y = (x-1)^2 \sin^2 x$;

6) $y = \cos(x - \pi/4) + \sin(x - \pi/4)$; 7) $y = \sin \operatorname{tg} x$;

8) $y = \operatorname{ctg} \cos x$.

140. 1) $y = \arcsin x^2$; 2) $y = 2\arccos(-x)$; 3) $y = \arccos|x|$;

4) $y = \arccos x - \dfrac{\pi}{2}$; 5) $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$;

6) $y = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)$; 7) $y = \arcsin(\arccos x)$;

8) $y = \sin(2x - \operatorname{arcctg} x)$.

141. Представить функцию f в виде суммы четной и нечетной функций:

1) $f(x) = (x+1)^3$; 2) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^4}$; 3) $f(x) = \sin(x+1)$;

4) $f(x) = \dfrac{1}{x-1},\ |x| < 1$.

142. Доказать, что всякая функция, определенная на симметричном относительно начала координат множестве, представима в виде суммы четной и нечетной функций.

143. Представить функцию в виде суммы четной и нечетной функций, если:

1) $y = |x-1|$; 2) $y = a^x$; 3) $y = \ln(1 + e^x)$; 4) $y = \sin(x^3 + x^2)$;

5) $y = \operatorname{tg}(x - 5)$; 6) $y = \arccos x$; 7) $y = -\operatorname{arcctg} x$;

8) $y = \operatorname{arctg}(1 - x)$.

144. Функция f ни четная, ни нечетная, функция g четная, функция h нечетная. Выяснить, может ли сумма:

1) $f + g$ быть: а) четной, б) нечетной;

2) $f + h$ быть: а) четной, б) нечетной.

145. Функция f ни четная, ни нечетная, функция g четная, функция h нечетная и имеет смысл композиция любых двух из этих функций. Указать все композиции, являющиеся:

1) четными функциями; 2) нечетными функциями.

146. 1) Доказать, что функция, обратная к нечетной, — нечетная функция.

2) Может ли функция, обратная к данной, быть четной?

Доказать ограниченность функции (147–149).

147. 1) $y = x - \sqrt{x^2 - 1}$, $x \in [1; +\infty)$; 2) $y = \sqrt[3]{x^3 + 8} - x$;

3) $y = \sqrt[4]{x^4 + 2} - |x|$; 4) $y = \dfrac{|x^2 - 1|}{x^4 - 1}$; 5) $y = \dfrac{x - 4}{2 - \sqrt{x}}$, $x \in [0; 4)$;

6) $y = \dfrac{x + 1}{x + \sqrt[3]{x^4}}$, $x \in (-\infty; -1)$; 7) $y = \dfrac{x^{7/3} - x^2}{(x - 1)\sqrt[3]{2 + x^4}}$.

148. 1) $y = 2^{\sin x}$; 2) $y = 2^{1/x}$, $x \in (-\infty; 0)$; 3) $y = \dfrac{\operatorname{ch} x}{1 + 3^{|x|}}$;

4) $y = \dfrac{1}{x^2 + \ln^2 x}$; 5) $y = \log_x(1 + x)$, $x \in [2; +\infty)$.

149. 1) $y = \operatorname{tg} x \cos 3x$; 2) $y = \dfrac{\cos 2x}{\operatorname{ctg} x - 1}$; 3) $y = \dfrac{2\cos x}{\pi - 2x}$;

4) $y = \operatorname{ctg} x - \dfrac{1}{\sin x}$, $|x| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $x \neq 0$.

150. Доказать неограниченность функции:

1) $y = x^3 - 3x$; 2) $y = x^3/(x^2 - 1)$, $x \in (-\infty; -2]$;

3) $y = 3^x/x$, $x \in (-\infty; 0)$; 4) $y = 2^x/x$, $x \in [1; +\infty)$;

5) $y = 2^{1/x}$, $x \in (0; +\infty)$; 6) $y = \log_x(1 + x)$, $x \in (1; 2]$;

7) $y = x \sin x$; 8) $y = \dfrac{\cos x}{x}$; 9) $y = \dfrac{1}{x} \sin \dfrac{1}{x}$.

151. Доказать, что любой многочлен степени не ниже первой — неограниченная функция.

152. Привести пример функции, определенной на отрезке и неограниченной на нем.

153. Привести пример функции, определенной на отрезке и неограниченной в окрестности каждой точки этого отрезка.

154. Исследовать на монотонность и построить график функции:

1) $y = \dfrac{x - 1}{|x| + 1}$; 2) $y = \dfrac{x + 2}{|x| - 3}$; 3) $y = \dfrac{1 - |x - 1|}{1 + |x|}$;

4) $y = \dfrac{|x-1|-|x+1|}{|x-1|+|x+1|}$; 5) $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$; 6) $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$.

Исследовать на монотонность функцию (155, 156).

155. 1) $y = \sqrt{x^2-1}$; 2) $y = \sqrt{2x-x^2}$; 3) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-5}-2}$;

4) $y = \sqrt[3]{1-x^2}$; 5) $y = 1-\sqrt[5]{x^3-1}$; 6) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-8}}$;

7) $y = \sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}$; 8) $y = \sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}$;

9) $y = x-\sqrt{x^2-1}$.

156. 1) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$, $x \in [0;\pi]$;

2) $y = \dfrac{2-\sin x}{2+\sin x}$, $x \in [0;2\pi]$; 3) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$, $x \in (0;\pi)$, $x \neq \dfrac{\pi}{2}$;

4) $y = 0{,}3^{(x^7-1)/x}$; 5) $y = \log_2(8x-x^2)$; 6) $y = \ln(\sqrt{x^2+1}+x)$;

7) $y = 2\cdot 3^{1-x} - 9^{-x}$; 8) $y = 2\log_2(1+x^2) - \log_x^2(1+x^2)$.

157. Доказать, что функция $y = x - \varepsilon \sin x$, где $0 < \varepsilon \leqslant 1$, строго возрастает.

158. Доказать, что функция $y = x^3 + x^2$:

1) возрастает на $(0;+\infty)$; 2) немонотонна на $[-1;0]$.

159. Доказать, что функция $y = \dfrac{\sin(x+\alpha)}{\sin(x+\beta)}$, $\alpha,\ \beta \in R$, монотонна на любом интервале, содержащемся в ее области определения.

160. Функция $y = f(x)$ монотонна. Доказать, что:

1) функция $y = -f(x)$ монотонна;

2) если $f(x) > 0$ для любого $x \in D(f)$, то функция $y = 1/f(x)$ монотонна.

161. Доказать, что сумма возрастающих (убывающих) на интервале $(a;b)$ функций возрастает (убывает) на $(a;b)$.

162. Доказать, что композиция монотонных функций является монотонной функцией.

163. Доказать, что:

1) функция, обратная к возрастающей функции, является возрастающей;

2) функция, обратная к убывающей функции, является убывающей функцией.

164. Сформулировать и записать, используя символы $\exists$, $\forall$, утверждение:

1) функция не является возрастающей;

2) функция не является убывающей;

3) функция не является монотонной.

165. Привести пример двух возрастающих на интервале $(a;b)$ функций, произведение которых:

1) возрастающая на $(a;b)$ функция;

2) убывающая на $(a;b)$ функция;

3) немонотонная на $(a;b)$ функция.

166. Привести пример функции, определенной на R, которая не является монотонной ни на одном интервале.

167. Функцию $f(x)$, $x \in (a;b)$, называют *возрастающей в точке* $x_0 \in (a;b)$, если существует $\delta > 0$ такое, что $f(x) \leqslant f(x_0)$ для всех $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ и $f(x) \geqslant f(x_0)$ для всех $x \in (x_0; x_0 + \delta)$.

Является ли монотонно возрастающей на $(a;b)$ функция, возрастающая в каждой точке интервала $(a;b)$?

168. Пусть x_0 — решение уравнения $a^x + b^x = c$, и пусть либо $0 < a < 1$ и $0 < b < 1$, либо $a > 1$ и $b > 1$. Доказать, что других решений это уравнение не имеет.

169. Пусть f, g и $f - g$ — возрастающие функции и $f(x_0) = g(x_0)$. Доказать, что система

$$\begin{cases} f(x) = g(y), \\ f(y) = g(z), \\ f(z) = g(x) \end{cases}$$

имеет единственное решение.

170. Пусть функции f и g определены на множестве X.

1) Пусть $f(x) \geqslant g(x)$ для любого $x \in X$. Доказать, что

$$\sup_X f \geqslant \sup_X g, \quad \inf_X f \geqslant \inf_X g.$$

2) Пусть $\sup\limits_X f = +\infty$, $\inf\limits_X g \neq -\infty$. Доказать, что

$$\sup_X (f + g) = +\infty.$$

3) Пусть $\inf\limits_X f = -\infty$, $\sup\limits_X g \neq +\infty$. Доказать, что

$$\inf_X (f + g) = -\infty.$$

171. Пусть функция f нечетная. Доказать, что

$$\inf_{x<0} f = -\sup_{x>0} f, \quad \sup_{x<0} f = -\inf_{x>0} f.$$

172. Сформулировать и записать, используя символы $\exists$, $\forall$, утверждение:

1) число a не является верхней гранью функции;

2) число a не является нижней гранью функции.

173. Найти $\min\limits_X f$, если:

1) $f(x) = x + \dfrac{3}{x}$, $X = (0; +\infty)$; 2) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$, $X = (1; +\infty)$;
3) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} + \operatorname{ctg}^2 x + 1$, $X = \left[\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{3}\right]$;
4) $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x$, $X = (0; \pi/2)$.

174. Найти:
1) $\min(x - 2\sqrt{x})$; 2) $\max\limits_{(0;\pi/2)}(3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x)$.

175. Найти $\max\limits_X f$, если:
1) $f(x) = 9x^5 + \dfrac{1}{x^5}$, $X = (-\infty; 0)$; 2) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2}$, $X = (0; +\infty)$;
3) $f(x) = x\sqrt[4]{1 - x^4}$, $X = [-1; 1]$;
4) $f(x) = \log_x(x+1) + \log_{x+1} x$, $X = (0; 1)$.

176. Найти $\max f$, $\min f$, если:
1) $f(x) = e^{-|x|} - e^{-2|x|}$; 2) $f(x) = \cos^2 x + \cos x + 3$;
3) $f(x) = \sin^2 x - 4\sin x + 3$; 4) $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$;
5) $f(x) = \sin x \sin 3x$; 6) $f(x) = \cos(1 + \sin x)$;
7) $f(x) = \sin(2\cos x - 1)$; 8) $f(x) = x^2/(x^4 + 1)$;
9) $f(x) = (x+1)/(x^2+3)$.

177. Найти $\max\limits_X f$, $\min\limits_X f$, если:
1) $f(x) = \log_{1/3}(x^2 + x - 2)$, $X = [3; 6]$;
2) $f(x) = \log_9(8x - x^2 - 7)$, $X = [2; 5]$;
3) $f(x) = \cos^2 x + \sin x$, $X = [\pi/3; \pi]$;
4) $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x}$, $X = [1; 3]$; 5) $f(x) = \dfrac{x^2+9}{x+4}$, $X = [-14; -7]$;
6) $f(x) = \dfrac{2x+5}{x^2-4}$, $X = [-1{,}5; 1{,}5]$.

178. Сформулировать и записать, используя символы $\exists$, $\forall$, утверждение:

1) значение $f(x_0)$, $x_0 \in X$, не является наибольшим;

2) значение $f(x_0)$, $x_0 \in X$, не является наименьшим значением функции на множестве X.

179. Найти $\min(x - \sqrt{x+3})$.

180. Найти $\max f$, $\min f$, если:
1) $f(x) = x - \sqrt{1 - x^2}$; 2) $f(x) = \sqrt{6-x} + \sqrt{x-2}$.

181. Найти $\min f$, если:
1) $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$;
2) $f(x) = (x-1)(x-2)(x-5)(x-6)$;

3) $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$, где $b-a = d-c$;

4) $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (x-a_k)^2$; 5) $f(x) = \left(\dfrac{2+\cos x}{\sin x}\right)^2$.

182. Найти $\min\limits_{[0;1)} \left(\dfrac{1}{\sqrt[n]{1+x}} + \dfrac{1}{\sqrt[n]{1-x}}\right)$, $n \in N$.

183. Доказать:

1) графики функций $y = f(x)$ и $y = f(-x)$ симметричны относительно оси ординат;

2) графики функций $y = f(x)$ и $y = -f(x)$ симметричны относительно оси абсцисс;

3) графики функций $y = f(x)$ и $y = -f(-x)$ симметричны относительно начала координат;

4) графики функций $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$ симметричны относительно прямой $y = x$.

184. График функции g симметричен графику функции f относительно прямой $x = x_0$. Выразить значения функции g через значения функции f.

185. График функции g симметричен графику функции f относительно прямой $y = y_0$. Выразить значения функции g через значения функции f.

186. График функции g симметричен графику функции f относительно точки $(x_0; y_0)$. Выразить значения функции g через значения функции f.

Построить график функции (187–194).

187. 1) $y = |x-1| + |x-2| - |x-3|$;

2) $y = |x-2| + |x| + |x+2| - 3$; 3) $y = |x - 2|x-1||$;

4) $y = |2x - |x| - 1|$; 5) $y = \dfrac{1}{2a}(|x+a| - |x-a|)$, $a > 0$;

6) $y = \operatorname{sign} x - \dfrac{1}{2a}(|x+a| - |x-a|)$, $a > 0$; 7) $y = \left|\dfrac{3+2|x|}{3-2|x|}\right|$;

8) $y = \dfrac{|x+2| + |x-1|}{|x-2| + |x+1|}$.

188. 1) $y = 2(x+2)^3 - 3$; 2) $y = 1{,}2 + \dfrac{1}{4}(1-x)^3$;

3) $y = x^3 + x$; 4) $y = \dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{4}x - x^3$; 5) $y = 0{,}1(1-x)^4 - 1$;

6) $y = 2 - \dfrac{1}{8}(x+2)^4$.

189. 1) $y = \sqrt{1-2x} - 2$; 2) $y = 3 - 0{,}5\sqrt{3x-2}$;

3) $y = 2\sqrt[3]{3x-6} + 1$; 4) $y = 2 + \sqrt[3]{1 - \dfrac{1}{3}x}$;

5) $y = (2x+1)^{1/4}$; 6) $y = 3 - \frac{1}{2}(8x-1)^{2/3}$;
7) $y = 3 - \frac{1}{2}x^{5/3}$; 8) $y = (x-1)^{7/2} - 1$.

190. 1) $y = \sqrt{|3-x|}$; 2) $y = \sqrt{9-4|x|}$; 3) $y = \sqrt[3]{8-|x-1|}$;
4) $y = \sqrt{|x+1|^3} - 1$.

191. 1) $y = \frac{1}{\sqrt{4-x}}$; 2) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{2x+8}}$; 3) $y = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$;
4) $y = \frac{2}{2\sqrt{x}+1}$; 5) $y = \frac{3}{4-2\sqrt[3]{x+1}}$.

192. 1) $y = \frac{x^2+4}{x}$; 2) $y = \frac{x^2-4}{2x}$; 3) $y = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$;
4) $y = \frac{2x}{4-x^2}$; 5) $y = \frac{x^2}{x^2+1}$; 6) $y = \frac{1}{x^2+2x+3}$;
7) $y = \frac{1}{x^2-9}$; 8) $y = \frac{1}{x^2-2x-8}$.

193. 1) $y = \frac{x}{x^2+1}$; 2) $y = \frac{x}{x^2-1}$; 3) $y = \frac{x^2-x+1}{x^2+1}$;
4) $y = \frac{2x^2-4x+6}{x^2-2x+2}$.

194. 1) $y = \sqrt{5+4x-x^2}$; 2) $y = (\sqrt{1-x^2}+1)\operatorname{sign} x$;
3) $y = 2 - \sqrt{8-2x-x^2}$; 4) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 5) $y = \frac{\operatorname{sign}(x-1)}{\sqrt{3x-x^2}}$;
6) $y = x\sqrt{100-x^2}$; 7) $y = x + \sqrt{1-x^2}$.

195. Найти соотношение между a, b, c, d, при котором график функции $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ получается сдвигом графика функции:
1) $y = \frac{1}{x}$; 2) $y = \frac{x-x_1}{x-x_2}$, $x_1 \neq x_2$.

196. Найти центр симметрии графика функции:
1) $y = \frac{x}{2x-1}$; 2) $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0$; 3) $y = x^3 - 6x^2$;
4) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$.

197. Доказать, что графики функций $y = x^3 - 3a^2x$ и $y = x^3 - 3ax^2$ получаются один из другого сдвигом.

Построить график функции (198–202).

198. 1) $y = x^3 - 3x^2 + 2x$; 2) $y = x^3 + 6x^2$.

199. 1) $y = E(|x|)$; 2) $y = E(x^2-1)$; 3) $y = E(1/x)$;
4) $y = (E(x))^2 - 2E(x) - 1$; 5) $y = |x - E(x) - 0{,}5|$;
6) $y = (x - E(x))^2$; 7) $y = \frac{1}{x}E(x)$; 8) $y = (-1)^{E(1/x)}$.

200. 1) $y = 1 - 3^{0,5x-1}$; 2) $y = \frac{1}{3}\, 2^{1-3x} + 2$; 3) $y = \log_3(0,5x + 2)$;
4) $y = -\frac{4}{3}\log_4(1-x)$; 5) $y = 3^{2-|x+3|}$; 6) $y = |0,5^x - 2|$;
7) $y = \lg(3-x)^2$; 8) $y = \log_{0,5}|1-2x| + 2$; 9) $y = |\log_2|x||$.

201. 1) $y = 2^{|\log_2 x|}$; 2) $y = 2^{1/x}$; 3) $y = 3^{(1-x)/(1+x)}$;
4) $y = 0,5^{x^2-x}$; 5) $y = \log_{1/3}(x^2 - 8x) + 2$; 6) $y = \lg\frac{1-2x}{x+3}$;
7) $y = e^{1/(x^2-1)}$; 8) $y = \frac{1+3^{-x}}{3+3^{x+1}}$; 9) $y = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$.

202. 1) $y = E(2^x)$; 2) $y = 2^{E(x)}$; 3) $y = 2^{x-E(x)}$;
4) $y = E(\log_2 x)$; 5) $y = \lg(x - E(x))$.

203. Доказать, что данная функция периодическая, и найти ее наименьший положительный период:
1) $y = x - \alpha E(x/\alpha)$, $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$; 2) $y = E(2x+5) - 2x$;
3) $y = |\sin(\sqrt{2}x + 1)|$; 4) $y = \sin 2x + \sin^2 3x$;
5) $y = \sin 4x + 5\cos 6x$; 6) $y = 3\sin 4x + 2\,\mathrm{tg}\, 5x$;
7) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$; 8) $y = \mathrm{tg}\,(x + \sin x)$; 9) $y = \sin(\cos x)$;
10) $y = \cos(\sin x)$; 11) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$.

204. Доказать, что данная функция непериодична:
1) $y = \sin\sqrt{|x|}$;
2) $y = \cos x + \cos x\sqrt{2} + \ldots + \cos x\sqrt{n}$, $n \in N$, $n \geqslant 2$;
3) $y = \sin x + \sin\sqrt{2}x$.

205. Доказать, что если отношение периодов периодических функций f и g является рациональным числом, то функции $f+g$ и fg периодичны.

206. Найти наименьший положительный период функции:
1) $y = 8\sin\frac{9x}{8} + 2\cos\frac{3x}{2}$; 2) $y = \sin\frac{3x}{4} + \sin\frac{9x}{8}$;
3) $y = a\sin\frac{p_1 x}{q_1} + b\cos\frac{p_2 x}{q_2}$, где $p_1, p_2, q_1, q_2 \in N$, $p_1 q_2 \neq p_2 q_1$;
4) $y = a\sin\frac{p_1 x}{q_1} + b\sin\frac{p_2 x}{q_2}$, где $p_1, p_2, q_1, q_2 \in N$, $p_1 q_2 \neq p_2 q_1$;
5) $y = a\sin\frac{p_1 x}{q_1} + b\,\mathrm{tg}\frac{p_2 x}{q_2}$, где $p_1, p_2, q_1, q_2 \in N$, $p_1 q_2 \neq p_2 q_1$.

207. При каких a и b ($ab \neq 0$ функция $y = ax - E(bx + c)$ периодична и каков ее наименьший положительный период?

208. Привести примеры непериодических функций f и g таких, что функции: 1) $f+g$; 2) $f \cdot g$;
периодичны и имеют наименьший положительный период.

209. Привести примеры периодической функции f и непериодической функции g таких, что функции: 1) $f+g$; 2) $f \cdot g$;

периодичны и имеют наименьший положительный период.

210. Существует ли функция, для которой каждое иррациональное число является периодом, а каждое рациональное не является?

211. График функции $y = f(x)$, $x \in R$, симметричен относительно каждой из прямых $x = a$ и $x = b$, $a \neq b$. Доказать, что $y = f(x)$ — периодическая функция, и найти ее период.

212. График функции $y = f(x)$, $x \in R$, симметричен относительно точки $A(a; b)$ и прямой $x = c$ $(c \neq a)$. Доказать, что $f(x)$ — периодическая функция, и найти ее период.

213. Доказать, что функция f является периодической, если существует $T \neq 0$ такое, что для любого $x \in D(f)$ $x + T \in D(f)$, $x - T \in D(f)$ и выполнено одно из условий:

1) $f(x+T) = -f(x)$; 2) $f(x+T) = \dfrac{1}{f(x)}$;

3) $f(x+T) = \dfrac{f(x)+a}{bf(x)-1}$; 4) $f(x+T) = \dfrac{1}{1-f(x)}$.

Найти период функции f.

214. Пусть функция g обратна самой себе, и пусть определена композиция $g \circ f$. Пусть существует $T \neq 0$ такое, что для любого $x \in D(f)$ выполнены условия

$$x + T \in D(f),\ x - T \in D(f) \text{ и } f(x+T) = g(f(x)).$$

Доказать, что f — периодическая функция, и найти ее период.

Построить график функции (215, 216).

215. 1) $y = 2\cos(2x+1)$; 2) $y = \operatorname{ctg}(x/2 + \pi/6) - 1$;
3) $y = \sin x \operatorname{ctg} x$; 4) $y = \cos x + |\cos x|$;
5) $y = |\sin 2x - \cos 2x|$; 6) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

216. 1) $y = \dfrac{1}{1+2\cos x}$; 2) $y = \operatorname{ctg}^2 x$; 3) $y = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$;
4) $y = |\sin x \operatorname{tg} x|$; 5) $y = \sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$.

Построить график функции (217–219).

217. 1) $y = 0{,}5^{|\sin x|}$; 2) $y = 2^{\operatorname{tg} x}$; 3) $y = \log_{0,5} \cos x$;
4) $y = \log_2 \dfrac{1}{\sin(\pi/6) + \sin x}$; 5) $y = \log_{\cos x} \sin x$;
6) $y = 1 + \sqrt{\lg \cos 2\pi x}$.

218. 1) $y = \cos x^2$; 2) $y = \sin x^2$; 3) $y = \cos(\cos x)$;
4) $y = \sin(2\sin x)$; 5) $y = \sin(1/x)$; 6) $y = \operatorname{tg}(\pi/x^2)$;
7) $y = \sin(\pi x/(1+x^2))$; 8) $y = \cos\log_2(x/2)$.

219. 1) $y = x + \sin x$; 2) $y = x\sin x$; 3) $y = x^2 \cos x$;

4) $y = e^{-x}\sin x$; 5) $y = x\cos(1/x)$; 6) $y = (2\sin 3x)/(1+x^2)$;
7) $y = \dfrac{\cos 2x}{x^2}$; 8) $y = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$; 9) $y = (1+\cos x)\cos 4x$.

220. Построить график функции $f(x+2t) + f(x-2t)$, где

$$f(x) = \begin{cases} 1+\cos x, & |x| \leqslant \pi, \\ 0, & |x| > \pi, \end{cases}$$

полагая: 1) $t = 0$; 2) $t = \pi/6$; 3) $t = \pi/4$; 4) $t = \pi/3$; 5) $t = \pi/2$.

Построить график функции (221–224).

221. 1) $y = 3\arccos(x/2) + 1$; 2) $y = \operatorname{arcctg}|x|$;
3) $y = \operatorname{arcctg}|x| - \operatorname{arctg}|x|$; 4) $y = x + \operatorname{arctg} x$;
5) $y = \arcsin(1/x)$.

222. 1) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ и $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$;
2) $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$ и $y = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)$;
3) $y = \arccos(\sin x)$; 4) $y = \arccos(\cos x) - x$;
5) $y = x - \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$; 6) $y = x\arcsin(\sin x)$;
7) $y = x\arccos(\cos x)$; 8) $y = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arcctg}(1/x)$;
9) $y = \arccos(\cos x) - \arcsin(\sin x)$.

223. 1) $y = \arccos\sqrt{1-x^2}$; 2) $y = 4\arcsin\sqrt{1-x^2}$;
3) $y = \cos(2\arccos x)$; 4) $y = \sin(3\arcsin x)$;
5) $y = \operatorname{tg}(3\operatorname{arctg} x)$; 6) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}$;
7) $y = \arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

224. 1) $y = E(\sin x)$; 2) $y = \cos x - E(\cos x)$;
3) $y = \arcsin(x - E(x))$; 4) $y = \arccos x - E(\arccos x)$.

225. Пусть $\max\{f(x), g(x)\}$ — наибольшее, а $\min\{f(x), g(x)\}$ — наименьшее из двух чисел $f(x)$ и $g(x)$ при $x \in D(f)\cap D(g)$. Построить график функции:

1) $y = \max\{x^2, \sqrt{|x|}\}$; 2) $y = \max\{x^3, 1/x\}$;
3) $y = \max\{\sin x, \cos x\}$; 4) $y = \min\{2^x, 9/(1+2^{-x})\}$;
5) $y = \min\{\cos x, \cos 2x\}$; 6) $y = \min\{\log_2 x, \log_x 2\}$.

226. Построить график функции:
1) $y = \cos(3\arccos x)$; 2) $y = \cos(4\arccos x)$;
3) $y = \sin(2\arccos x)$; 4) $y = \sin(3\arccos x)$.

227. Доказать, что для любого $n \in N$:

1) функция $T_n(x) = \cos(n\arccos x)$ совпадает на $[-1; 1]$ с полиномом степени n;

2) функция $\sin(n\arccos x)$ совпадает на $[-1; 1]$ с функцией вида $\sqrt{1-x^2}\cdot Q_{n-1}(x)$, где $Q_{n-1}(x)$ — полином степени $n-1$.

228. Построить график уравнения:

1) $y^2 = x^2 + 4|x| + 4$; 2) $y^2 + 4|y + x| - 4x + 3 = 0$;
3) $y^2 - (5^x - 1)(y - 1) = 0$; 4) $|y| = \dfrac{1}{||x+1| - 3|}$;
5) $\lg(xy - 1) = \lg((1 - x)(1 - y))$; 6) $|y| = \log_{1/3} ||x + 2| - 1|$;
7) $x^2 + y^2 - x - 3y = 0$; 8) $x^2 + y^2 = 2(|x| + |y|)$.

229. Доказать, что уравнение

$$\sqrt{y^3} + xy - x\sqrt{y} - x^2 = 0$$

задает функцию, и построить ее график.

230. Построить график уравнения:
1) $|y| = \cos x$; 2) $\cos|x| + \sin|y| = 0$; 3) $|\sin x|^y + |\cos x|^y = 1$;
4) $|y - \sin x + 1| + |y - \sin x| = 1$.

231. Найти значения t, соответствующие точке A кривой:
1) $A(0;0)$, $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$;
2) $A(3;2)$, $x = 2\operatorname{tg} t$, $y = 2\sin^2 t + \sin 2t$;
3) $A(2;2)$, $x = 2\operatorname{tg} t$, $y = 2\sin^2 t + \sin 2t$;
4) $A(-9;0)$, $x = 3(2\cos t - \cos 2t)$, $y = 3(2\sin t - \sin 2t)$.

232. Выяснить, какие из точек A, B принадлежат кривой:
1) $A(5;1)$, $B(1;-1)$; $x = 2 + 5\cos t$, $y = 5\sin t - 3$.
2) $A(-31;3)$, $B(10;8)$; $x = t^3 + t$, $y = t^2 + 2t$.

233. Задать кривую уравнением и построить ее:
1) $x = 6t - t^2$, $y = 3t$; 2) $x = t^3 + 1$, $y = t^2$;
3) $x = \cos t$, $y = \sin 2t$; 4) $x = \operatorname{tg} t$, $y = \sin 2t + 2\cos 2t$;
5) $x = \sin 3t$, $y = \sin t$.

234. Построить кривую:
1) $x = \dfrac{2+t^2}{1+t^2}$, $y = \dfrac{t^2}{1+t^2}$; 2) $x = \dfrac{1}{1-t^2}$, $y = \dfrac{t^2}{1-t^2}$;
3) $x = \dfrac{t}{1+|t|}$, $y = \dfrac{|t|}{1+t}$; 4) $x = \left|\dfrac{t}{1-t}\right|$, $y = \dfrac{t}{1-|t|}$;
5) $x = 3\cos t$, $y = 4\sin t$; 6) $x = t^2 - 2t$, $y = t^2 + 2t$.
7) $x = \cos t$, $y = t + 2\sin t$; 8) $x = 2^{t-1}$, $y = (t^3 + 1)/4$.

235. Построить график функции в полярных координатах:
1) $r = \dfrac{\varphi}{\varphi - \pi}$; 2) $r = 2|\cos 3\varphi|$; 3) $\varphi = \dfrac{r}{r-1}$; 4) $\varphi = \arcsin(r - 1)$.

236. Пусть α — иррациональное число,

$$f(x) = \alpha x - E(\alpha x), \quad x \in Z.$$

Доказать, что:
1) $f(x) < 1$ для любого $x \in Z$;
2) $f(x_1) - f(x_2) = f(x_1 - x_2)$, если $f(x_1) - f(x_2) > 0$;
$f(x_1) - f(x_2) = f(x_1 - x_2) - 1$, если $f(x_1) - f(x_2) < 0$;

3) для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $x \in Z$ такое, что $0 < f(x) < \varepsilon$.

237. Функцию f называют *выпуклой вверх* (*вниз*) *на промежутке* X, если для любых $x_1,\ x_2 \in X$ и любого $\alpha \in [0;1]$ верно неравенство

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geqslant \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$$

(соответственно $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leqslant \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$).

График выпуклой вверх на отрезке $[a;b]$ функции лежит не ниже прямой, проведенной через точки $(a; f(a))$, $(b; f(b))$.

Доказать, что функция:

1) $y = ax^2 + bx + c$ выпукла вниз на R при $a > 0$ и выпукла вверх на R при $a < 0$;

2) $y = a^x$ выпукла вниз на R;

3) $y = \log_a x$ выпукла вверх на $(0;+\infty)$ при $a > 1$ и выпукла вниз на $(0;+\infty)$ при $0 < a < 1$;

4) $y = \sin x$ выпукла вверх на $[0;\pi]$ и выпукла вниз на $[-\pi;0]$.

238. Указать промежутки выпуклости вверх и выпуклости вниз функции:

1) $y = |x|$; 2) $y = x^3$; 3) $y = \dfrac{1}{x}$; 4) $y = \dfrac{2x-5}{x+1}$;

5) $y = \operatorname{ch} x$; 6) $y = \operatorname{sh} x$; 7) $y = \lg|x|$; 8) $y = |\ln x|$.

239. Доказать, что если f и g — выпуклые вверх функции, то и функция $\alpha f + \beta g$, где $\alpha \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0$, также является выпуклой вверх.

240. Доказать:

1) функция, обратная к выпуклой вверх строго возрастающей функции, выпукла вниз;

2) функция, обратная к выпуклой вверх строго убывающей функции, выпукла вверх.

241. Указать промежутки выпуклости вверх и выпуклости вниз функции:

1) $y = \operatorname{tg} x,\ x \in (-\pi/2;\pi/2)$; 2) $y = \cos^2 x,\ x \in (0;2\pi)$;

3) $y = \arcsin x,\ x \in [-1;1]$; 4) $y = \operatorname{arcctg} x,\ x \in R$.

242. Функция f такова, что для любых $x_1,\ x_2 \in R$ верно неравенство

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2)).$$

Доказать, что для любых $x_1, x_2, x_3 \in R$ верно неравенство

$$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right) < \frac{1}{3}(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)).$$

243. Функция f выпукла вниз на R. Доказать, что для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n \in R$ и любых $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $0 \leqslant \alpha_j \leqslant 1$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$, верно неравенство (*неравенство Иенсена*)

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n f(x_n).$$

244. Функция $f(x)$ определена на R, и для любых $x_1, x_2 \in R$

$$f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2).$$

1) Доказать, что для всех рациональных x

$$f(x) = f(1) \cdot x.$$

2) Доказать, что если f неограниченна в окрестности некоторой точки, то она неограниченна в любой окрестности любой точки.

245. Функция f с $D(f) \neq \{0\}$ такова, что для любых $\alpha, \beta \in R$ и любых $x_1, x_2 \in D(f)$ выполнены условия

$$\alpha x_1 + \beta x_2 \in D(f), \quad f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2).$$

Доказать, что $D(f) = R$ и для любого $x \in R$

$$f(x) = f(1)x.$$

246. Для функции f существуют числа $T \neq 0$ и a такие, что для любого $x \in D(f)$ имеет место

$$x + T \in D(f), \quad x - T \in D(f)$$

и верно одно из равенств:

1) $f(x+T) = f(x) + a$; 2) $f(x+T) = f(x) + ax$.

Доказать, что соответственно:

1) $f(x) = \varphi(x) + \frac{a}{T}\,x$; 2) $f(x) = \varphi(x) + \frac{a}{2T}(x^2 - Tx)$;

где $\varphi(x)$ — периодическая с периодом T функция.

247. Для функции f существуют число $T \neq 0$ и многочлен $Q_n(x)$ степени n такие, что для любого $x \in D(f)$ имеет место

$$x + T \in D(f), \quad x - T \in D(f)$$

и

$$f(x+T) = f(x) + Q_n(x).$$

Доказать, что существует многочлен $P_{n+1}(x)$ степени $n+1$ такой, что

$$f(x) = \varphi(x) + P_{n+1}(x),$$

где $\varphi(x)$ — периодическая с периодом T функция.

248. Для функции f существуют числа $T \neq 0$ и $k > 0$ такие, что для любого $x \in D(f)$ имеет место

$$x + T \in D(f), \quad x - T \in D(f)$$

и

$$f(x+T) = kf(x).$$

Доказать, что существует число $a > 0$ такое, что

$$f(x) = a^x \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — периодическая функция.

249. Выяснить, какие из чисел a, b являются членами последовательности $\{x_n\}$, если:

1) $a = 1215,\ b = 12555;\ x_n = 5 \cdot 3^{2n-3},\ n \in N;$
2) $a = 6,\ b = 8;\ x_n = \sqrt{n^2 + 32n} - n,\ n \in N;$
3) $a = 6,\ b = 11;\ x_n = (n^2 + 11)/(n + 1),\ n \in N;$
4) $a = 248,\ b = 2050;\ x_n = 2^n - n,\ n \in N.$

250. Найти наибольший член последовательности:

1) $\{21/(3n^2 - 14n - 17)\}$; 2) $\{n/(n^2 + 9)\}$; 3) $\{2^{-n} - 3 \cdot 4^{-n}\}$;
4) $\{n^2/2^n\}$.

251. Найти наименьший член последовательности:

1) $\{(2n - 5)(2n - 11)\}$; 2) $\{n + 5/n\}$; 3) $\{\log_3^2 n - 3\log_3 n\}$;
4) $\{1{,}4^n/n\}$.

252. Является ли последовательность $\{y_k\}$ подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$, если:

1) $x_n = n,\ n \in N;$
а) $y_k = k^2 + 1,\ k \in N;$ б) $y_k = k^2 - 4k + 5,\ k \in N;$
2) $x_n = 2n,\ n \in N;$
а) $y_k = 2^k,\ k \in N;$ б) $y_k = 2(k + (-1)^k),\ k \in N;$
3) $x_n = 1/n,\ n \in N;$
а) $y_k = 1/(k - \cos \pi k),\ k \in N;$ б) $y_k = 1/(3k - \cos \pi k),\ k \in N.$

253. Пусть $\{x_{n_k}\}$ — подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$. Доказать, что $n_k \geqslant k,\ k \in N$.

254. Привести пример последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_k\}$ таких, что $\forall k\ \exists n_k\colon\ y_k = x_{n_k}$, но $\{y_k\}$ не является подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$.

255. Привести пример последовательности $\{x_n\}$, удовлетворяющей условию:

1) $\forall m\ \exists n\colon x_m \neq x_n$; 2) $\exists N\ \forall n \geqslant N\colon x_n < x_N$;
3) $\exists N_1\ \forall n \geqslant N_1\colon x_{N_1} > x_n$ и $\exists N_2\ \forall n \geqslant N_2\colon x_{N_2} < x_n$;
4) $\exists N\ \forall n > N\ \forall m > n\colon\ x_n < x_m$;
5) $\forall n\ \exists m > n\ \exists k > n\colon x_m < x_n < x_k$.

256. По известным трем членам x_1, x_2, x_3 последовательности найти формулу общего члена в виде $x_n = f(n)$, где $f(x)$ — многочлен не выше второй степени.

257. Доказать, что если $x_1 = a^{1/k}$ $(a > 0)$, $x_{n+1} = (a/x_n)^{1/k}$, $n \in N$, то $x_n = a^{(1-(-k)^{-n})/(k+1)}$.

258. Пусть

$$x_0 = 1, \quad x_1 = a, \quad x_n = (\alpha + \beta)^{-n} \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k} \beta^k x_{n-k} x_k,$$

$$n \in N, \quad n \geqslant 2,$$

где a, α, β — положительные числа. Найти формулу общего члена этой последовательности и номер наибольшего члена.

259. 1) Найти общий член последовательности $\{x_n\}$, если $x_1 = a$ и $x_{m+n} = x_m + x_n + mn$ для любых m, $n \in N$.

2) Существует ли последовательность $\{x_n\}$ такая, что для любых m, $n \in N$ верно равенство $x_{m+n} = x_m + x_n + m + n$?

260. Найти формулу общего члена последовательности, заданной рекуррентным способом (a, b, α, β — заданные числа):

1) $x_1 = 0$, $x_{n+1} = (x_n + 1)/(n + 1)$, $n \in N$;
2) $x_1 = a$, $x_{n+1} = (n + 1)(x_n + 1)$, $n \in N$;
3) $x_1 = 1/2$, $x_{n+1} = 1/(2 - x_n)$, $x \in N$;
4) $x_1 = a$, $x_{n+1} = \alpha x_n + \beta 2^n$, $\alpha \neq 2$, $n \in N$;
5) $x_1 = 1/2$, $x_{n+1} = 2/(3 - x_n)$, $n \in N$;
6) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_{n+2} = (3x_{n+1} - x_n)/2$, $n \in N$;
7) $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n$, $n \in N$.

261. Найти формулу общего члена для последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, если

$$x_1 = a, \quad y_1 = b,$$
$$x_{n+1} = (2x_n + y_n)/3, \quad y_{n+1} = (x_n + 2y_n)/3, \quad n \in N.$$

262. Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентным способом:

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n, \quad n \in N;$$

a, b, p, q —заданные числа.

1) Доказать, что если уравнение $\lambda^2 = p\lambda + q$ имеет различные корни λ_1 и λ_2, то общий член последовательности $\{x_n\}$ имеет вид

$$x_n = \frac{(\lambda_2 a - b)\lambda_1^{n-1} - (\lambda_1 a - b)\lambda_2^{n-1}}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad n \in N.$$

2) Доказать, что если уравнение $\lambda^2 = p\lambda + q$ имеет кратный корень $\lambda \neq 0$, то общий член последовательности $\{x_n\}$ имеет вид

$$x_n = (2a\lambda - b + n(b - a\lambda))\lambda^{n-2}, \quad n \in N.$$

263. Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентным способом:

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n + r, \quad n \in N;$$

a, b, p, q, r — заданные числа. Найти формулу общего члена, если:

1) уравнение $\lambda^2 = p\lambda + q$ имеет различные корни λ_1 и λ_2;
2) уравнение $\lambda^2 = p\lambda + q$ имеет кратный корень $\lambda_0 \neq 0$.

264. Найти формулу общего члена последовательности, заданной рекуррентным способом:

1) $x_1 = x_2 = 1$, $x_{n+2} = 0{,}5(x_{n+1} + x_n) + 1$, $n \in N$;
2) $x_1 = x_2 = 1$, $x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n + 2$, $n \in N$.

265. Найти формулу общего члена последовательности $\{x_n\}$, если $x_1 = a > 0$, $x_{n+1} = 1/(1 + x_n)$, $n \in N$.

266. Найти все значения $a \in R$, для которых формулы $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n/(2 + x_n)$, $n \in N$, задают последовательность. Найти формулу общего члена этой последовательности.

267. Пусть $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n/(4 - x_n)$, $n \in N$.

1) Показать, что если $a \notin [3; 4]$, то эти формулы задают последовательность, и найти формулу ее общего члена.

2) Найти все значения a, при которых эти формулы не определяют последовательность.

268. Найти формулу общего члена последовательности, заданной рекуррентным способом (a, b, c, d — заданные числа):

1) $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n/(b + x_n)$, $n \in N$;

2) $x_1 = a$, $x_{n+1} = bx_n/(c + dx_n)$, $n \in N$.

269. Пусть $x_1 = p$, $p \in N$, $x_{n+1} = x_n + 2^n$, $n \in N$. Доказать, что существует подпоследовательность этой последовательности, все члены которой делятся на 3.

270. Пусть

$$S_n = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!},$$

$$a_n = 3 - \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 2!} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3!} - \ldots - \frac{1}{(n-1)n \cdot n!}.$$

Доказать, что

$$a_n = S_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

271. Доказать, что если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — ограниченные последовательности, то ограничены и последовательности

1) $\{x_n \cdot y_n\}$; 2) $\{\alpha x_n + \beta y_n\}$, $\alpha, \beta \in R$.

272. Привести пример ограниченных последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, $y_n \neq 0$, $n \in N$, таких, что последовательность $\{x_n/y_n\}$ неограниченна.

273. Последовательность $\{x_n\}$ ограниченна, последовательность $\{y_n\}$ удовлетворяет условию: существует $C > 0$ такое, что для любого $n \in N$ верно неравенство $|y_n| \geqslant C$. Доказать, что последовательность $\{x_n/y_n\}$ ограниченна.

274. Последовательность $\{x_n\}$ неограниченна. Доказать, что она содержит подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такую, что $x_{n_k} \geqslant k$, $k \in N$, или $x_{n_k} < -k$, $k \in N$.

275. Доказать ограниченность последовательности:

1) $\left\{\dfrac{2n^2 - 1}{2 + n^2}\right\}$; 2) $\left\{\dfrac{1 - n}{\sqrt{n^2 + 1}}\right\}$; 3) $\left\{\dfrac{n + (-1)^n}{3n - 1}\right\}$;

4) $\left\{\dfrac{n^2+4n+8}{(n+1)^2}\right\}$; 5) $\left\{\dfrac{5n^6+6}{(n^4+1)(n^2-1)}\right\}$.

276. Доказать неограниченность последовательности:
1) $\{(-1)^n n\}$; 2) $\{n^2-n\}$; 3) $\{(1-n)/\sqrt{n}\}$; 4) $\{n+(-1)^n n\}$;
5) $\{n^{(-1)^n}\}$; 6) $\{(1-n)^{\sin(\pi n/2)}\}$; 7) $\{n^3/(n^2+1)\}$;
8) $\{(n-n^4)/(n+2)^3\}$.

277. Доказать ограниченность последовательности:

1) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k}$, $n \in N$; 2) $x_n = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!}$, $n \in N$;

3) $x_n = \dfrac{1}{n^3} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{i} j$, $n \in N$.

278. Доказать, что если $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (n+1)(a_n+1)$, $n \in N$, то последовательность $x_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{1}{a_k}\right)$ ограниченна *).

279. Доказать ограниченность последовательности $\{x_n\}$ и найти $\sup\{x_n\}$, $\inf\{x_n\}$, если:

1) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$, $n \in N$; 2) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{4k^2-1}$, $n \in N$;

3) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$, $n \in N$; 4) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{2^k}$, $n \in N$.

Доказать ограниченность последовательности (280–282).

280. 1) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(2k-1)2k}$, $n \in N$;

2) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(a+(k-1)d)(a+kd)}$, $n \in N$;

3) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}$, $n \in N$; 4) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$, $n \in N$;

5) $x_n = \log_2 \left(\left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)\right)$, $n \in N$, $n \geqslant 2$.

281. 1) $\left\{\dfrac{3n+5}{\sqrt{4n^2-1}}\right\}$; 2) $\left\{\dfrac{\sqrt{n^3+2}}{(n+3)(\sqrt{n}+1)}\right\}$;

3) $\left\{\dfrac{\sqrt[3]{n^6+2n}+\sqrt{n^3+2}}{3n-2n^2}\right\}$.

---

*) $\prod\limits_{k=1}^{n} c_k$ — произведение чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

282. 1) $\{\sqrt{n^2+1}-n\}$; 2) $\{\sqrt{n-1}-\sqrt{n+1}\}$;
3) $\{n(\sqrt{n^4+n}-\sqrt{n^4-n})\}$; 4) $\{\sqrt[3]{9n-n^3}+\sqrt[3]{9n+n^3}\}$;
5) $\{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n^2-1}\}$; 6) $\left\{\sqrt{\dfrac{n^4+n^3}{n^2+1}}-\sqrt{n^2-1}\right\}$.

283. Доказать неограниченность последовательности:
1) $\{\sqrt{n^4+n^3+1}-\sqrt{n^4-n^3+1}\}$; 2) $\{\sqrt{n^2+(-1)^n\sqrt{n^3}}-n\}$.

284. Найти p, q, $0 \leqslant q < p$, при которых ограниченна последовательность:
1) $\{\sqrt{n^p+n^q+1}-\sqrt{n^p-n^q+1}\}$; 2) $\{\sqrt[3]{n^p-n^q+1}-\sqrt[3]{n^p+1}\}$;
3) $\{\sqrt[k]{n^p+an^q+1}-\sqrt[k]{n^p+bn^q+1}\}$, $k \in N$, $k \geqslant 2$, $a \neq b$.

285. Доказать ограниченность последовательности:
1) $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$; 2) $\{\sqrt[n]{n}\}$; 3) $\left\{\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\right\}$, $x > 0$.

286. 1) Доказать, что последовательность $\{(\ln n)/n\}$ ограничена сверху числом $\ln 2$.
2) Найти $\sup\{(\ln n)/n\}$.

287. Доказать ограниченность последовательности:
1) $\left\{\dfrac{2^n+1}{3^n-2}\right\}$; 2) $\left\{\dfrac{5^{2n+1}+2^n}{1-25^n}\right\}$; 3) $\left\{\dfrac{\ln^2 n+10}{\ln^2 n^2+2}\right\}$;
4) $\{\lg(3n+5)-\lg(n+1)\}$; 5) $\{\ln(\sqrt{2n^2+1}-n)-\ln n\}$;
6) $\left\{\dfrac{\ln(n^2+1)-\ln(n+1)}{\ln(n+0,5)}\right\}$; 7) $\left\{\dfrac{n+\ln n}{n+1}\right\}$; 8) $\left\{n\ln\dfrac{n+1}{n}\right\}$;
9) $\{\ln^2(n+1)-\ln^2 n\}$.

288. Доказать неограниченность последовательности:
1) $\{5^n-4^n\}$; 2) $\left\{\dfrac{3^n-2^n}{2^n+1}\right\}$; 3) $\sqrt[n]{n!}$; 4) $\left\{\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right\}$ *);
5) $\left\{\dfrac{2^n}{n^2}\right\}$; 6) $\left\{\dfrac{a^n}{n^k}\right\}$, $|a|>1$, $k \in R$; 7) $\left\{\dfrac{n+1}{\log_2(n+1)}\right\}$.

289. Доказать ограниченность последовательности:
1) $\{n/3^n\}$; 2) $\{n^2/2^n\}$; 3) $\{n^p/2^n\}$, $p \in R$; 4) $\{nq^n\}$, $|q|<1$;
5) $\{n^pq^n\}$, $p \in R$, $|q|<1$.

290. Доказать:
1) ограниченность последовательности

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} kq^k, \quad n \in N, \quad |q| < 1;$$

*) $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n$; $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)$.

2) неограниченность последовательности

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} kq^{n-k}, \quad n \in N, \quad q \in R, \quad q \neq 0.$$

291. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ такая, что

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{x_n^4 + 1}{5x_n}, \quad n \in N:$$

1) ограничена снизу числом $1/5$; 2) ограничена сверху числом 2.

292. Доказать ограниченность последовательности:

1) $x_1 = a > 0,\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{b^2}{x_n}\right)$;

2) $x_1 = a,\ x_2 = b,\ x_{n+2} = \dfrac{x_{n+1} + x_n}{2}$.

293. Доказать неограниченность последовательности:

1) $x_1 = x_2 = 1,\ x_{n+2} = x_{n+1} + 6x_n$;

2) $x_1 = -4,\ x_2 = 3,\ x_{n+2} = x_{n+1} + \dfrac{3}{4}\,x_n$.

294. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$, где $x_1 = x_2 = 1$, $x_{n+2} = x_{n+1} + \dfrac{x_n}{2^n}$, $n \in N$, ограниченна.

295. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность натуральных чисел такая, что последовательность

$$S_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}, \quad n \in N,$$

ограниченна. Доказать, что последовательность

$$y_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{x_k}\right), \quad n \in N,$$

ограниченна.

296. Доказать неограниченность последовательности

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2, \quad n \in N.$$

297. 1) Доказать, что если последовательность $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_n$ ограниченна, то ограниченна и последовательность $\{x_n\}$.

2) Верно ли, что если последовательность $\{x_n\}$ неограниченна, то неограниченна и последовательность

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_n, \quad n \in N?$$

298. Доказать ограниченность последовательности:

1) $\{n(a^{1/n}-1)\}$, $a>0$, $a\neq 1$; 2) $\left\{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)^2}-\sqrt{n}\right\}$;

3) $\{n^{\alpha}(\sqrt[n]{n}-1)\}$, $\alpha<1$.

Доказать, что данная последовательность монотонна, начиная с некоторого номера (299–301).

299. 1) $\left\{\frac{n+1}{2n-1}\right\}$; 2) $\left\{\frac{3n+4}{n+2}\right\}$; 3) $\left\{\frac{100n}{n^2+16}\right\}$;
4) $\{n^3-6n^2\}$; 5) $\left\{\frac{n^2+24}{n+1}\right\}$; 6) $\left\{\frac{n^3}{n^2-3}\right\}$; 7) $\left\{\frac{n^2}{n^3+32}\right\}$;
8) $\left\{\frac{1-n}{\sqrt{n}}\right\}$.

300. 1) $\{\sqrt{3n-2}\}$; 2) $\{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\}$; 3) $\{\sqrt[3]{n^3-1}-n\}$;
4) $\{\sqrt{n^2+n}-n\}$; 5) $\left\{\frac{n+1}{\sqrt{n^2+7}}\right\}$; 6) $\left\{\frac{n-3}{\sqrt{n^2+1}}\right\}$.

301. 1) $\{2^n-100n\}$; 2) $\{3^n-2^n\}$; 3) $\{2^{n+1}-3^{n-2}\}$;
4) $\left\{\frac{6^{n+1}-5^{n+1}}{6^n+5^n}\right\}$; 5) $\left\{\frac{4^{n-1}+3^{n-1}}{4^n+3^n}\right\}$; 6) $\left\{\frac{100^n}{n!}\right\}$; 7) $\left\{\frac{2^n}{n}\right\}$;
8) $\{\lg(n+1)-\lg n\}$; 9) $\{\ln(n^2+9n)-2\ln n\}$.

302. Доказать, что последовательность $\{nq^n\}$, $0<q<1$, монотонна, начиная с некоторого номера; указать этот номер.

303. При каких соотношениях между a, b, c, d последовательность $\left\{\frac{an+b}{cn+d}\right\}$, начиная с некоторого номера, будет:
1) возрастающей; 2) убывающей?

304. Доказать, что последовательность

$$x_n=1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k(2k+1)}-\frac{1}{2(n+1)}$$

монотонна.

305. Доказать, что последовательность

$$x_n=\frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=1}^{n}k\cdot k!,\quad n\in N,$$

возрастает и ограниченна. Найти $\inf\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$.

306. Сформулировать, используя символы $\exists$, $\forall$, утверждение:
1) последовательность $\{x_n\}$ не является возрастающей;
2) последовательность $\{x_n\}$ не является убывающей.

307. Доказать, что данная последовательность немонотонна:
1) $\{(-1)^n\}$; 2) $\left\{\frac{1}{n}\sin\frac{\pi n}{2}\right\}$; 3) $\{n+(-1)^n\}$; 4) $\{\sin n\}$;

5) $x_1 = 1$; $x_{n+1} = \dfrac{1}{1+x_n}$, $n \in N$.

308. Доказать, что если $\{x_n\}$ — монотонная последовательность, то и последовательность $\left\{\dfrac{1}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}\right\}$ монотонна.

309. Доказать, что данная последовательность убывает, начиная с некоторого номера:

1) $\{n/4^n\}$; 2) $\{(3n+1)^2/3^n\}$; 3) $\{n^3/2^n\}$; 4) $\{n^{1/n}\}$.

310. Доказать монотонность последовательности:

1) $\{n - 6\lg n\}$; 2) $\{\lg n - n\}$; 3) $\{(\lg n)/n\}$.

311. Доказать, что последовательность:

1) $\{(1 + 1/(2n))^n\}$ возрастает; 2) $\{(1 + 1/n)^{n+1}\}$ убывает.

312. Доказать, что при любом $x > 0$:

1) последовательность $\{(1 + x/n)^n\}$ возрастает;

2) последовательность $\{(1 + x/n)^{n+1}\}$, где $l \in N$, $l > x$, убывает.

313. Доказать, что при $a \neq 1$, $a > 0$ возрастает последовательность:

1) $\left\{\dfrac{a^n - 1}{n}\right\}$; 2) $\{n(1 - a^{1/n})\}$.

314. Доказать, что последовательность $x_1 = -10$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n + 1}{n+1}$, $n \in N$, убывает, начиная с некоторого номера; указать этот номер.

315. Пусть $x_1 = 3$, $x_{n+1} = 0{,}5\,x_n^2 - 1$, $n \in N$. Доказать, что эта последовательность:

1) ограничена снизу, но не ограничена сверху; 2) возрастает.

316. Пусть $x_1 = 2$, $x_{n+1} = 0{,}5\,x_n^2 - 1$, $n \in N$:

1) доказать, что эта последовательность ограниченна;

2) доказать, что подпоследовательности $\{x_{2k}\}$ и $\{x_{2k-1}\}$ данной последовательности монотонны, начиная с некоторого номера.

317. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$, где $x_1 = 4$, $x_{n+1} = (2 + x_n^2)/(2x_n)$, $n \in N$, убывает.

318. Последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ заданы рекуррентным способом:

$$x_1 = a > 0, \quad y_1 = b > 0,$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n), \quad y_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}(x_n^2 + y_n^2)}, \quad n \in N.$$

Доказать, что:

1) $y_n \geqslant x_n$, $n \in N$, $n \geqslant 2$;

2) последовательность $\{x_n\}$ возрастает ($n \geqslant 2$);

3) последовательность $\{y_n\}$ убывает ($n \geqslant 2$);

4) $|y_{n+1} - x_{n+1}| \leqslant |b-1|/4^n$.

319. Доказать, что если

$$x_1 = a > 0, \quad y_1 = b > 0,$$
$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = 0{,}5\,(x_n + y_n), \quad n \in N,$$

то:

1) последовательность $\{x_n\}$ возрастает, а последовательность $\{y_n\}$ убывает;

2) обе последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ ограничены;

3) $|y_{n+1} - x_{n+1}| \leqslant |b-a|/2^n$.

320. Доказать, что любая последовательность содержит монотонную подпоследовательность.

321. Пусть $C_\alpha^0 = 1$, $C_\alpha^n = C_\alpha^{n-1} \cdot \dfrac{\alpha - n + 1}{n}$, $n \in N$, где $\alpha \in R$. Доказать, что:

1) $C_\alpha^n = \dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}$, $n \in N$;

2) последовательности $\{C_{3/2}^n\}$, $\{C_{1/2}^n\}$, $\{C_{-1/2}^n\}$, $\{C_{-1}^n\}$ ограниченны;

3) последовательности $\{C_{-2}^n\}$, $\{C_{-3,5}^n\}$ неограниченны;

4) последовательность $\{C_\alpha^n\}$ ограниченна при $\alpha \geqslant -1$;

5) последовательность $\{C_\alpha^n\}$ неограниченна при $\alpha < -1$;

6) последовательность $\{|C_\alpha^n|\}$ убывает (в широком смысле) при $\alpha \geqslant -1$, начиная с некоторого номера;

7) последовательность $\{|C_\alpha^n|\}$ возрастает (в широком смысле) при $\alpha < -1$, начиная с некоторого номера;

8) последовательность $\{C_\alpha^n \cdot q^n\}$ ограниченна при $\alpha < -1$, $|q| < 1$.

ОТВЕТЫ

1. 1) $x \neq 1$ *); 2) $x \neq 1$, $x \neq -1$; 3) $x \neq 2$, $x \neq 4$; 4) $x \neq -2$, $x \neq 0$, $x \neq 2$; 5) $x > 0$; 6) $x \neq -3/2$, $x \neq 3/2$; 7) $x \neq -3/2$, $x \neq -1/2$.

2. 1) R; 2) $\{0\}$; 3) $x \leqslant 2$; 4) $[-2;1]$; 5) $(-1;1)$; 6) $(-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$; 7) $x \neq -3$; $x \neq 3$; 8) $\{0\} \cup [2;+\infty)$; 9) $(0{,}5;1) \cup [3;+\infty)$.

3. 1) $2x^3 + 3x^2 + 5$;

2) $$\frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}\,y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}\,y_2 + {}$$
$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}\,y_3 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}\,y_4.$$

*) Такая краткая запись означает, что областью определения является множество $\{x \in R\colon\ x \neq -1\}$.

4. $P(x)=\sum\limits_{j=1}^{n+1}\prod\limits_{i=1,i\neq j}^{n+1}\dfrac{(x-x_j)}{(x_j-x_i)}\,y_j.$

5. 1) $(-\infty;3]$; $[-1;+\infty)$; $[-1;3]$;
2) $[-1;1]$; $\{x\in R\colon\ x\neq 1/2\}$, $\{x\in[-1;1]\colon\ x\neq 1/2\}$;
3) $[3;+\infty)$; $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$; $[3;+\infty)$;
4) $(0;5)$; $\{x\in R\colon\ x\neq\pi/2+\pi n,\ n\in Z\}$; $\{x\in(0;5)\colon\ x\neq\pi/2;$ $x\neq 3\pi/2\}$;
5) $(-4;4)$; $\{x\in R\colon\ x\neq\pi/2+2\pi n,\ n\in Z\}$; $\{x\in(-4;4)\colon\ x\neq\pi/2\}$;
6) $[1;+\infty)$; $[1;+\infty)$; $[1;+\infty)$.

6. 1) R; R; 2) R; $\{x\in R\colon\ x\neq 2,\ x\neq -2\}$;
3) $(-1;1)$; $\{x\in(-1;1)\colon\ x\neq 0\}$;
4) $[-2;+\infty)$; $\{x\in[-2;+\infty)\colon\ x\neq -1\}$;
5) $[-1/2;+\infty)$; $\{x\in[-1/2;+\infty)\colon\ x\neq 0\}$;
6) R; $\left\{x\in R\colon\ x\neq\dfrac{\lg 2}{\lg 2{,}5}\right\}$; 7) R; R;
8) R; $\left\{x\in R\colon\ x\neq(-1)^n\pi/4+\pi n,\ n\in Z\right\}$;
9) $\{x\in R\colon\ x\neq\pi n,\ n\in Z\}$; $\{x\in R\colon\ x\neq\pi n,\ x\neq\pi/4+\pi n,\ n\in Z\}$.

7. $a=2$, $b=5$ при $m\neq n$; $a\in R$, $b=a+3$ при $m=n$.

8. -2. 9. $8b^3$. 10. 1) $a-1/a$; 2) $1/a-a$; 3) $a-1/a$; 4) $1/a-a$.

11. 1) $[-9;-1]$; 2) $[0;4]$; 3) $(-\infty;-1)\cup(0)\cup(1;+\infty)$; 4) $[-4;+\infty)$;
5) $(-\infty;9/8]$; 6) $[-9;23]$; 7) $[2;+\infty)$; 8) $(-\infty;-4]$; 9) $[0;1)$.

12. 1) $[1;+\infty)$; 2) $[0;+\infty)$; 3) $[0;2]$; 4) $[\sqrt{6};+\infty)$;
5) $(-\infty;-2\sqrt{ab}]\cup[2\sqrt{ab};+\infty)$; 6) R; 7) $[-2;2]$, $x\in R$.

13. 1) $f\circ g(x)=x,\ x\geqslant 0$; $g\circ f(x)=x,\ x\in R$;
2) $f\circ g(x)=g\circ f(x)=|x|,\ x\in[-1;1]$;
3) $f\circ g(x)=x,\ x>0$; $g\circ f(x)=x,\ x\in R$;
4) $f\circ g(x)=(x+5)^5,\ x\in R$; $g\circ f(x)=x^5+5,\ x\in R$;
5) $f\circ g(x)=\begin{cases}0, & x\in[0;+\infty),\\ x^2, & x\in(-\infty;0);\end{cases}$ $g\circ f(x)=0,\ x\in R$;
6) $f\circ g(x)=\ln\sin^2 x,\ x\neq\pi n,\ n\in Z$; $g\circ f(x)=\sin\ln x^2,\ x\neq 0$.

14. 1) $\sin\log_2\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt{1+\log_2\sin x}}$; 3) $1+\dfrac{1}{\log_2\sqrt{\sin x}}$;
4) $\dfrac{1}{\log_2\sqrt{\sin(1+x)}}$.

16. 1) $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+1$; 3) $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$;
4) $f(x)=x^2-2$; 5) $f(x)=1-x^{3/2}$.

17. Не существует.

18. 1) $f\circ f\circ f(x)=\dfrac{x}{a(1+b+b^2)x+b^3}$, $\{x\in R\colon\ ax+b\neq 0,$ $a(1+b)x+b^2\neq 0,\ a(1+b+b^2)x+b^3\neq 0\}$;
2) $g\circ g\circ g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{a^6+(a^4+a^2+1)x^2}}$;

3) если $b \neq 1$, то $f \circ f \circ \ldots \circ f(x) = \dfrac{x}{a(b^n-1)/(b-1)x+b^n}$, $\{x \in R$: $a\dfrac{b^k-1}{b-1}x + b^k \neq 0,\ k = 1, 2, \ldots, n\}$, а если $b = 1$, то $f \circ f \circ \ldots \circ f(x) = \dfrac{x}{anx+1}$, $\{x \in R,\ akx+1 \neq 0,\ k = 1, 2, \ldots, n\}$;

4) если $a^2 \neq 1$, то $g \circ g \circ \ldots \circ g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{a^{2n} + (a^{2n}-1)/(a^2-1)x^2}}$, а если $a^2 = 1$, то $g \circ g \circ \ldots \circ g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.

19. 1) Четная; 2) нечетная; 3) ни четная, ни нечетная; 4) четная; 5) ни четная, ни нечетная; 6) ни четная, ни нечетная; 7) ни четная, ни нечетная; 8) четная; 9) нечетная.

29. 1) а) $y = -x$, $x \in (-\infty; 0)$, $y(0) \in R$ *); б) $y = x$, $x \in (-\infty; 0]$;
2) а) $y = x^2$, $x \in (-\infty; 0)$, $y(0) \in R$; б) $y = -x^2$, $x \in (-\infty; 0]$;
3) а) $y = \sqrt{-x}$, $x \in (-\infty; 0)$, $y(0) \in R$; б) $y = -\sqrt{-x}$, $x \in (-\infty; 0]$;
4) а) $y = -x+5$, $x \in (-\infty; 0)$, $y(0) \in R$; б) $y = x-5$, $x \in (-\infty; 0)$, $y(0) = 0$;
5) а) $y = \sqrt{1-x^2}$, $x \in (-1; 0)$, $y(0) \in R$; б) $y = -\sqrt{1-x^2}$, $x \in (-1; 0)$, $y(0) = 0$;
6) а) $y = x^2+4x+3$, $x \in (-\infty; 0)$, $y(0) \in R$; б) $y = -x^2-4x-3$, $x \in (-\infty; 0)$, $y(0) = 0$;
7) а) $y = \dfrac{1}{x(x-1)}$, $x \in (-\infty; 0)$, $y(0) \in R$; б) $y = \dfrac{1}{x(1-x)}$, $x \in (-\infty; 0)$, $y(0) = 0$.

35. 1) Являются; 2) являются; 3) не являются; 4) не являются.

36. 1) Обратная функция $y = (x+1)/2$; 2) необратима; 3) обратная функция $y = x^{-1/3}$; 4) необратима; 5) обратная функция $y = \sqrt[5]{x^3}$; 6) обратная функция $y = \sqrt{|x|}\operatorname{sign} x$.

37. 1) а) $a = -1$, $b \in R$ или $a = 1$, $b = 0$; 2) $\alpha = \pm 1$.

39. 1) $\forall C > 0\ \exists x \in D(f)\ f(x) > C$; 2) $\forall C > 0\ \exists x \in D(f)\ f(x) < -C$.

43. 1) $\max f = 0$ **), $\min f = -9$; 2) $\max f = 1/4$, $\min f = -6$; 3) $\max f = 3$, $\min f = 5/4$; 4) $\max f = 1$, $\min f = -5/13$; 5) $\max f = 5$, $\min f = 4$; 6) $\max f = 1/6$, $\min f = 0$.

46. 1) $-9/4$; 2) $\sqrt{2}$; 3) 0; 4) $-1/3$.

47. 1) -2; 2) $-2\sqrt{2}$; 3) 1; 4) 1.

48. 1) $\sup f = +\infty$; $\inf f = \min f = 2$; 2) $\sup f = \max f = -2$; $\inf f = -\infty$; 3) $\sup f = 1$; $\inf f = \min f = 0$; 4) $\sup f = +\infty$; $\inf f = -\infty$; 5) $\sup f = 1$; $\inf f = \min f = 0$.

54. Возрастает на $[-1; 0]$ и $[1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -1]$ и $[0; 1]$.

---

*) Здесь и далее в аналогичных примерах эта запись означает, что за $y(0)$ можно взять любое действительное число

**) Там, где ясно, о каком множестве X идет речь, вместо $\max\limits_X f$ написано $\max f$

56. 1) $(-\infty;0)\cup(0;0,25)\cup(0,25;+\infty)$; 2) $(-\infty;0]$;
3) $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; $(0;+\infty)$; 4) $(0;1)\bigcup(1;+\infty)$;
5) $(-\infty;99)\cup(99;100)$; 6) $(1;+\infty)$; $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$;
7) $(-3;-2)\cup(-2;-1)\cup(1;+\infty)$; 8) $(0;1)$.
57. 1) $(0;1]$; 2) $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$; 3) $[3/4;+\infty)$; 4) $[1;+\infty)$;
5) $(-\infty;2]$; 6) $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.
58. 1) Ни четная, ни нечетная; 2) ни четная, ни нечетная;
3) нечетная; 4) ни четная, ни нечетная; 5) четная;
6) нечетная; 7) нечетная; 8) четная; 9) ни четная, ни нечетная.
63. 1) $\sup f=\max f=1$, $\inf f=0$;
2) $\sup f=+\infty$, $\inf f=\min f=\sqrt{2}-1$; 3) $\sup f=1$, $\inf f=-\infty$;
4) $\sup f=8$, $\inf f=-\infty$; 5) $\sup f=+\infty$, $\inf f=-\infty$;
6) $\sup f=+\infty$, $\inf f=\min f=0$; 7) $\sup f=\max f=4$, $\inf f=-\infty$.
66. 1) Строго возрастает на $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$;
2) строго убывает на $(-\infty;0]$, строго возрастает на $[0;+\infty)$;
3) строго убывает на R; 4) строго возрастает на $(-1;+\infty)$;
5) строго убывает на $(0;1)$ и $(1;+\infty)$;
6) строго возрастает на $(0;2]$, строго убывает на $[2;4)$;
7) строго убывает на $(-\infty;-1)$, строго убывает на $(0;+\infty)$.
69. 1) а) $y=-3\cdot 2^{-x-1}$, $x\in(-\infty;0)$, $y(0)\in R$; б) $y=3\cdot 2^{-x-1}$, $x\in(-\infty;0)$, $y(0)=0$;
2) а) $y=1-2\lg(-x)$, $x\in(-\infty;0)$, $y(0)\in R$; $x\in(-\infty;0)$, $y(0)\in R$;
б) $y=-1+2\lg(-x)$, $x\in(-\infty;0)$, $y(0)=0$;
3) а) $y=\log_{2-x}(-x)$, $x\in(-\infty;0)$, $y(0)\in R$; б) $y=-\log_{2-x}(-x)$, $x\in(-\infty;0)$, $y(0)=0$;
4) а) $y=-\operatorname{th}(x+1)$, $x\in(-\infty;0)$, $y(0)\in R$; б) $y=\operatorname{th}(x+1)$, $x\in(-\infty;0)$, $y(0)=0$.
70. 1) $y=\log_3(3/x)$, $x\in(0;+\infty)$; 2) $y=10^{x-1}-2$, $x\in R$;
3) $y=\log_2(x/(1-x))$, $x\in(0;1)$; 4) $y=10^{1/x}$, $x\in R$, $x\neq 0$;
5) $y=\log_2(x+\sqrt{x^2+2})$, $x\in R$; 6) $y=\operatorname{ch}x$, $x\in(-\infty;0)$.
71. 1) $y=\ln(x-\sqrt{x^2-1})$; 2) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$;
3) $y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$; 4) $y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1}$.
73. 1. **75.** 1) $2\pi/3$; 2) $8/3$; 3) $\pi/3$; 4) π; 5) $\pi/2$; 6) 2π; 7) $\pi/2$.
78. 1) $x\neq\pi n/2$, $n\in Z$; 2) $x\in[-\pi/2+2\pi n;\pi/2+2\pi n]$, $n\in Z$;
3) $x\in(2\pi n;\pi/6+2\pi n)\bigcup(5\pi/6+2\pi n;\pi+2\pi n)$, $n\in Z$;
4) $x\in[2;4]$; 5) $x\in[0;4]$;
6) $x\in(-\pi/2+2\pi n;\pi/2+2\pi n)$, $n\in Z$; 7) $x=\pi/2+2\pi n$, $n\in Z$.
79. 1) $[-1;1]$; 2) $[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$; 3) $[1/2;1]$; 4) $(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$;
5) $[0;\pi/2]$; 6) $(\pi/2;\pi]$; 7) $[0;1]$; 8) $[-\pi/4;\pi/4]$.
80. 1) Нечетная; 2) четная; 3) четная; 4) четная; 5) нечетная;
6) ни четная, ни нечетная; 7) ни четная, ни нечетная;
8) ни четная, ни нечетная.
81. 1) Четная; 2) ни четная, ни нечетная; 3) четная; 4) четная;

5) четная; 6) нечетная; 7) четная.

86. 1) $\sup f = \max f = 21$, $\inf f = \min f = -3$;

2) $\sup f = \max f = \sqrt{3/2}$, $\inf f = \min f = 0$;

3) $\sup f = \max f = 1/2$, $\inf f = \min f = -\infty$;

4) $\sup f = +\infty$, $\inf f = \min f = 2$; 5) $\sup f = 1$, $\inf f = -1$;

6) $\sup f = \pi/2$, $\inf f = -\pi/2$; 7) $\sup f = \max f = \pi/2$, $\inf f = 0$.

87. 1) Строго убывает на $[-\pi; -\pi/2)$ и $(-\pi/2; 0]$, строго возрастает на $[0; \pi/2)$ и $(\pi/2; \pi]$;

2) строго возрастает на $[2/(3\pi); 2/\pi]$, строго убывает на $[2/\pi; +\infty)$;

3) строго убывает на $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$;

4) строго возрастает на $[-1; 0]$, строго убывает на $[0; 1]$;

5) строго возрастает на R;

6) строго возрастает на $(-\infty; 0]$, строго убывает на $[0; +\infty)$;

7) строго убывает на R.

91. 1) а) $y = 1 - \sin x$, $x < 0$, $y(0) \in R$; б) $y = -1 + \sin x$, $x < 0$, $y(0) = 0$;

2) а) $y = -\operatorname{ctg} x$, $x < 0$, $y(0) \in R$; б) $y = \operatorname{ctg} x$, $x < 0$, $y(0) = 0$;

3) а) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$, $x < 0$, $y(0) \in R$; б) $y = -\dfrac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$, $x < 0$, $y(0) = 0$;

4) а) $y = \pi - \arccos 2x$, $x < 0$, $y(0) \in R$; б) $y = \arccos 2x - \pi$, $x < 0$, $y(0) = 0$;

5) а) $y = -\operatorname{arctg}(x + 1)$, $x < 0$, $y(0) \in R$; б) $y = \operatorname{arctg}(x + 1)$, $x < 0$, $y(0) = 0$.

92. 1) $y = -\pi - \arcsin x$; 2) $y = -\arccos x$; 3) $y = \pi + \operatorname{arctg} x$;

4) $y = \operatorname{arcctg} x - \pi$; 5) $y = (\pi - \arcsin(x/2))/3$;

6) $y = 2\sin(x/2)$, $x \in [-\pi; \pi]$; 7) $y = -\cos x$, $x \in [0; \pi/2]$;

8) $y = \cos x$, $x \in [0; \pi/2]$; 9) $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in (-\pi/2; \pi/2)$, $x \neq 0$.

94. 1) $y = 1/x$, $x \neq 0$, $x \neq \pm 1$; 2) $y = 2x^2$, $x \neq \pm 2$;

3) $y = \sqrt{6 - x^2}$, $x \neq -\sqrt{2}$; 4) $x = -y^{4/5}$, $y \neq 0$; 5) $x = y^2$.

98. 1) A; 2) A и B; 3) B; 4) ни A, ни B.

99. 1) $y = x^2 + 1$; 2) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$; 3) $x^2/4 + y^2/9 = 1$;

4) $3x = |\ln(y - 1)|$; 5) $8(x + y) = (x - y)^2 + 16$.

101. 1) $r = \dfrac{1}{\sqrt{2}\cos(\varphi + 3\pi/4)}$; 2) $r = 2\cos\varphi$;

3) $\varphi = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{2}$ $(n = 0, 1, 2, 3)$ и $r = 0$; 4) $r = \dfrac{1}{4\sin^2(\varphi/2)}$.

104. 1) $[0; 6)$; 2) $[-3; 0,5]$; 3) $x \neq \pm 1$; 4) $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$;

5) $[-3; 3]$; 6) $(-4; 2)$.

105. 1) R; 2) $x \in (-\pi/2 + 2\pi n;\ 2\pi n) \cup (2\pi n;\ \pi/2 + 2\pi n)$, $n \in Z$;

3) $(-\infty; 0) \cup (1; 3)$; 4) $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$; 5) $(-5; 8/5) \cup (8/5; 9/5)$;

6) $(-\infty; -\sqrt{5} - 1) \cup (-\sqrt{5} - 1; -3) \cup [2; +\infty)$;

7) $(-1; 0) \cup (0; 1) \cup (2; +\infty)$; 8) $(0; 1) \cup (1; \log_2(8/3))$;

9) $(-1; 5)$; 10) $(2; 3)$.

106. 1) $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in Z$;
2) $\dfrac{\pi}{4} + \pi n < x \leqslant \dfrac{3\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; 3) $-4 < x < 4$, $x \neq \pm\pi$, $x \neq 0$.
107. 1) $[0;4]$; 2) $\varnothing$; 3) $x \neq \pm 3$;
4) $[-(1+\sqrt{5})/2; (1-\sqrt{5})/2] \cup [(\sqrt{5}-1)/2; (\sqrt{5}+1)/2]$;
5) $[1/\sqrt{2}; 1]$; 6) $\pi/3 + \pi n \leqslant x \leqslant 2\pi/3 + \pi n$, $n \in Z$;
7) $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $x \neq \pm 1/\sqrt{2}$; 8) $(\operatorname{ctg} 0,5; +\infty)$;
9) $[0; (3-\sqrt{5})/2) \cup ((3+\sqrt{5})/2; 4]$; 10) $[1;2)$;
11) $(-6; -5\pi/3] \cup [-\pi/3; 1/6)$; 12) $(0;1/2) \cup (1/2;1)$.
108. 1) $[-1/3; 1/3]$; 2) $(-1;1]$; 3) $[1;+\infty)$; 4) $[0;3]$; 5) $\{0\}$;
6) $[2^{-9}; +\infty)$; 7) $(-\infty; 2]$; 8) $\{1/2\}$; 9) $[0;1]$.
109. 1) $[-\sqrt{26}; \sqrt{26}]$; 2) $[-1;1]$; 3) $[0;+\infty)$; 4) R; 5) $\{0\}$;
6) $[-1; 5/4]$; 7) $(-\infty; \log_2(5/4)]$; 8) $[1/\sqrt{2}; 1]$; 9) $[\pi/4; 3\pi/4]$.
110. 2) $[2;3)$. **111.** 1) $a > 1$; 2) $a > 0$, $a < -1$; 3) $0 \leqslant a \leqslant 1/2$.
112. $S = x^2$, $x \in [0;1/2]$, $S = (4x-1)/4$, $x \in [1/2; 3/2]$, $S = 1{,}5 - (2-x)^2$, $x \in [3/2; 2]$.
113. $V = \dfrac{\pi r^2}{3} \dfrac{h^2}{h-2r}$, $h > 2r$.
114. $S = 4\sqrt{2/3}x(b-2x)$, $0 \leqslant x \leqslant b/3$, $S = \sqrt{2/3}(b-x)^2$, $b/3 < x \leqslant b$; $\max S = b^2/\sqrt{6}$.
115. $2R\sin(\alpha/2)(1-\sin(\alpha/2))$; $R/2$. **116.** $\rho x + m(1 + E(x/l))$.
117. $S = vt$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $S = v\sqrt{7t^2 - 15t + 9}$, $t > 1$; $\min S = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} v$.
119. 1) n^m; 2) $n!$. **121.** Обратимы функции: 1), 4), 6), 9).
123. 1) $y = x^{4/3}$, $x \geqslant 0$; 2) $y = -\sqrt{(x+1)/x}$, $x \leqslant -1$, $x > 0$;
3) $y = 1 - \sqrt{1-x}$, $x < 0$; $y = -1 + \sqrt{1+x}$, $x \geqslant 0$;
4) $y = (5x+3)/(x-1)$, $x \neq 1$, $x \neq -3/5$;
5) $y = x + \sqrt{x^2-1}$, $x \geqslant 1$; 6) $y = x - \sqrt{x^2-1}$, $x \geqslant 1$;
7) $y = (x^2+1)/2x$, $x \leqslant -1$; 8) $y = (x^2+1)/2x$, $-1 \leqslant x < 0$.
124. 1) $y = 1 - \sqrt{\log_2 2x}$, $x \geqslant 1/2$;
2) $y = (1 - \ln(1-x))/(1 + \ln(1-x))$, $x < 1$, $x \neq 1 - e^{-1}$;
3) $y = \log_{1,5} \dfrac{1+x}{1-x}$, $-1 < x < 1$; 4) $y = 0,5 \lg \dfrac{x}{2-x}$, $0 < x < 2$;
5) $y = 0{,}5(a^x - a^{-x})$, $x \in R$.
125. 1) $y = 3\pi - \arcsin x$, $x \in [-1;1]$;
2) $y = 4\pi - 2\arccos(x/2)$, $x \in [-2;2]$;
3) $y = \operatorname{arcctg} x$, $x \in (0;+\infty)$, $y = \operatorname{arcctg} x - \pi$, $x \in (-\infty; 0)$;
4) $y = 2\pi + 2\arcsin\sqrt{x} = 2\pi + \arccos(1-2x)$, $x \in [0;1]$;
5) $y = -\arccos(1/x)$, $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$;
6) $y = \sin x$, $x \in [0; \pi/2]$; 7) $y = -\sin x$, $x \in [0; \pi/2]$;
8) $y = \operatorname{tg}(x - \pi/4)$, $x \in (-\pi/2; -\pi/4) \cup (-\pi/4; \pi/2)$.
126. 1) $(0;0)$, $(2/3; 2/3)$, $(-2/3; -2/3)$.
127. $y = (x^3 - 3x)/2$, $|x| \geqslant 2$.

129. $y = \sqrt[3]{x + \sqrt{x^2+1}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{x^2+1}}$, $x \in R$.

130. $\left[\dfrac{2-\pi}{2+\pi}; +\infty\right)$, $y = \dfrac{1+\arcsin 0{,}5(x-1)}{1-\arcsin 0{,}5(x-1)}$, $x \in [-1; 1+2\sin 1)$.

131. 2) $a + d = 0$, $|a| + |c| \neq 0$ или $b = c = 0$, $a = d \neq 0$.

133. $b = -1$, $a > 0$ или $b = 1$, $a = 0$.

134. $c = \pi$, $b = -1$, $a \in R$ или $c = \pi$, $b = 1$, $a = 0$.

135. $|\lambda| \geqslant \pi$; если $\lambda \leqslant -\pi$, то $y = \sin 0{,}5(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda\pi + 4x})$, $x \in \left[\dfrac{\pi^2}{4} + \lambda\pi; \dfrac{\pi^2}{4}\right]$; если $\lambda \geqslant \pi$, то $y = \sin 0{,}5(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda\pi + 4x})$, $x \in \left[\dfrac{\pi^2}{4}; \dfrac{\pi^2}{4} + \lambda\pi\right]$.

137. 1) $0 \leqslant x \leqslant 1$; 2) $-1 \leqslant x \leqslant 0$; 3) $0 < x$; 4) $x < 0$; 5) $x < 1$; 6) $x > 1$.

138. 1) Нечетная; 2) нечетная; 3) четная; 4) четная; 5) ни четная, ни нечетная; 6) четная; 7) нечетная; 8) нечетная; 9) нечетная.

139. 1) Четная; 2) нечетная; 3) ни четная, ни нечетная; 4) четная; 5) ни четная, ни нечетная; 6) нечетная; 7) нечетная; 8) четная.

140. 1) Четная; 2) ни четная, ни нечетная; 3) четная; 4) нечетная; 5) ни четная, ни нечетная; 6) нечетная; 7) ни четная, ни нечетная; 8) четная.

141. 1) $(3x^2+1) + (x^3+3x)$; 2) $-\dfrac{3}{x^4} + \dfrac{1}{x^3}$;
3) $\cos x \sin 1 + \sin x \cos 1$; 4) $\dfrac{1}{x^2-1} + \dfrac{x}{x^2-1}$.

143. 1) $0,5(|x-1| + |x+1|) + 0,5(|x-1|) - |x+1|)$;
2) $0,5(a^x + a^{-x}) + 0,5(a^x - a^{-x})$; 3) $\ln 2 \operatorname{ch} \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}$;
4) $\cos x^3 \sin x^2 + \sin x^3 \cos x^2$; 5) не представима;
6) $\dfrac{\pi}{2} + (-\arcsin x)$; 7) $-\dfrac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} x$;
8) $0{,}5(\operatorname{arctg}(1-x) + \operatorname{arctg}(1+x)) + 0{,}5(\operatorname{arctg}(1-x) - \operatorname{arctg}(1+x)) = \operatorname{arctg} \dfrac{2}{\sqrt{x^4+4}+x^2} - \operatorname{arctg} \dfrac{2x}{\sqrt{x^4+4}-x^2+2}$.

144. 1) а) Нет; б) да; 2) а) да; б) нет.

145. 1) $f \circ g$, $g \circ h$, $h \circ g$; 2) $h \circ h$. **146.** 2) Нет.

154. 1) Постоянная на $(-\infty; 0]$, строго возрастает на $[0; +\infty)$;
2) строго убывает на $(-\infty; -3)$, $(-3; 3)$, $(3; +\infty)$;
3) строго возрастает на $(-\infty; 1]$, строго убывает на $[1; +\infty)$;
4) строго возрастает на $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$, строго убывает на $[-1; 1]$;
5) строго убывает на $(-\infty; 0]$, строго возрастает на $[0; +\infty)$;
6) строго возрастает на $(-\infty; -1)$ и $(-1; 0]$, строго убывает на $[0; 1)$ и $(1; +\infty)$.

155. 1) Убывает на $(-\infty; -1]$, возрастает на $[1; +\infty)$;
2) возрастает на $[0; 1]$, убывает на $[1; 2]$;

3) возрастает на $(-\infty; -3)$ и $(-3; -\sqrt{5}]$, убывает на $[\sqrt{5}; 3)$ и $[3; +\infty)$;

4) возрастает на $(-\infty; 0]$, убывает на $[0; +\infty)$; 5) убывает на R;

6) возрастает на $(-\infty; -2\sqrt{2})$ и $(-2\sqrt{2}; 0]$, убывает на $[0; 2\sqrt{2})$ и $(2\sqrt{2}; +\infty)$;

7) возрастает на $[2; +\infty)$; 8) возрастает на $[1; +\infty)$;

9) возрастает на $(-\infty; -1]$, убывает на $[1; +\infty)$.

156. 1) Убывает на $[0; \pi/4]$ и $[\pi/2; 3\pi/4]$, возрастает на $[\pi/4; \pi/2]$ и $[3\pi/4; \pi]$;

2) убывает на $[0; \pi/2]$ и $[3\pi/2; 2\pi]$, возрастает на $[\pi/2; 3\pi/2]$;

3) убывает на $(0; \pi/4]$ и $[3\pi/4; \pi]$, возрастает на $[\pi/4; \pi/2]$ и $(\pi/2; 3\pi/4]$;

4) убывает на $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$;

5) возрастает на $(0; 4]$, убывает на $[4; 8)$; 6) возрастает на R;

7) возрастает на $(-\infty; -1]$, убывает на $[-1; +\infty)$;

8) возрастает на $(-\infty; -1]$ и $[0; 1]$, убывает на $[-1; 0]$ и $[1; +\infty)$.

167. Является. **173.** 1) $2\sqrt{3}$; 2) 4; 3) 4; 4) 1.

174. 1) -1; 2) $9/4$. **175.** 1) -6; 2) $1/8$; 3) $1/\sqrt{2}$; 4) -2.

176. 1) $\max f = 1/4$, $\min f = 0$; 2) $\max f = 5$, $\min f = 11/4$;
3) $\max f = 8$, $\min f = 0$; 4) $\max f = 1$, $\min f = 1/4$;
5) $\max f = 9/16$, $\min f = -1$; 6) $\max f = 1$, $\min f = \cos 2$;
7) $\max f = \sin 1$, $\min f = -1$; 8) $\max f = 1/2$, $\min f = 0$;
9) $\max f = 1/2$, $\min f = -1/6$.

177. 1) $\max f = -1/\lg 3$; $\min f = -\lg 40/\lg 3$;
2) $\max f = 1$; $\min f = \lg 5/\lg 9$; 3) $\max f = 5/4$; $\min f = 1$;
4) $\max f = 5$; $\min f = 4$; 5) $\max f = -18$; $\min f = -20{,}5$;
6) $\max f = -1$; $\min f = -32/7$.

179. $-3{,}25$.

180. 1) $\max f = 1$; $\min f = -\sqrt{2}$; 2) $\max f = 2\sqrt{2}$; $\min f = 2$.

181. 1) -1; 2) -4; 3) $-(ad - bc)^2/4 = -((b-a)(c-a))^2/4$;

4) $\dfrac{n-1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} a_i^2$; 5) 3.

182. 2. **184.** $g(x) = f(2x_0 - x)$. **185.** $g(x) = 2y_0 - f(x)$.

186. $g(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$.

195. 1) $c \neq 0$, $bc - ad = c^2$; 2) $c \neq 0$, $bc - ad = c^2(x_2 - x_1)$.

196. 1) $(1/2; 1/2)$; 2) $(-d/c; a/c)$; 3) $(2; -16)$;
4) $(-b/3a; (2b^3 - 9abc + 27a^2d)/27a^2)$.

203. 1) $|\alpha|$; 2) $1/2$; 3) $\pi/\sqrt{2}$; 4) π; 5) π; 6) π; 7) $\pi/2$; 8) 2π; 9) 2π; 10) π; 11) 2π.

206. 1) $16\pi/3$; 2) $16\pi/3$;
3) $2\pi n_0 \dfrac{q_1}{p_1} = 2\pi m_0 \dfrac{q_2}{p_2}$, где $\dfrac{p_1q_2}{p_2q_1} = \dfrac{n_0}{m_0}$ — несократимая дробь.

207. $a = b$, $T = 1/|a|$. **210.** Нет. **211.** $2|a - b|$. **212.** $4|a - c|$.

213. 1) $2T$; 2) $2T$;

3) если $ab \neq -1$, то период равен $2T$, если $ab = -1$, периодом является любое, не равное нулю, число;

4) $3T$.

214. $2T$.

231. 1) $t = \pm 1$; 2) $t = 1$; 3) $t = \pi(4n+1)/4$, $n \in Z$;
4) $t = \pi(2n+1)$, $n \in Z$.

232. 1) A; 2) B.

233. 1) $x = 2y - y^2/9$; 2) $y = (x-1)^{2/3}$; 3) $y^2 = 4x^2(1-x^2)$;
4) $y = 2(1+x-x^2)/(1+x^2)$; 5) $x = 3y - 4y^3$.

238. 1) Выпукла вниз на R;
2) выпукла вверх на $(-\infty; 0]$, выпукла вниз на $[0; +\infty)$;
3) выпукла вверх на $(-\infty; 0)$, выпукла вниз на $(0; +\infty)$;
4) выпукла вниз на $(-\infty; -1)$, выпукла вверх на $(-1; +\infty)$;
5) выпукла вниз на R;
6) выпукла вверх на $(-\infty; 0]$, выпукла вниз на $[0; +\infty)$;
7) выпукла вверх на $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$;
8) выпукла вниз на $(0; 1]$, выпукла вверх на $[1; +\infty)$.

241. 1) Выпукла вверх на $(-\pi/2; 0]$, выпукла вниз на $[0; \pi/2)$;
2) выпукла вверх на $[0; \pi/4]$, $[3\pi/4; 5\pi/4]$, $[7\pi/4; 2\pi]$, выпукла вниз на $[\pi/4; 3\pi/4]$, $[5\pi/4; 7\pi/4]$;
3) выпукла вверх на $[-1, 0]$, выпукла вниз на $[0; 1]$;
4) выпукла вверх на $(-\infty; 0]$, выпукла вниз на $[0; +\infty)$.

249. 1) a; 2) b; 3) a, b; 4) a.

250. 1) $x_6 = 3$; 2) $x_3 = 1/6$; 3) $x_3 = 5/64$; 4) $x_3 = 9/8$.

251. 1) $x_4 = -9$; 2) $x_2 = 4{,}5$; 3) $x_5 = \log_3^2 5 - 3\log_3 5$;
4) $x_3 = 1{,}4^3/3$.

252. 1) а) Да; б) нет; 2) а) да; б) нет; 3) а) нет; б) да.

256. $x_n = \dfrac{x_1}{2}(n-2)(n-3) - x_2(n-1)(n-3) + \dfrac{x_3}{2}(n-1)(n-2)$.

258. $x_n = a^n/n!$; если $0 < a < 2$, то $\max\{x_n\} = x_1$; если $a \geqslant 2$, то $\max\{x_n\} = x_{E(a)}$.

259. 1) $x_n = n\left(a + \dfrac{1}{2}(n-1)\right)$.

260. 1) $x_n = \dfrac{1}{n!}\sum\limits_{k=1}^{n-1} k!$; 2) $x_n = n!\left(a + \sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{k!}\right)$; 3) $x_n = \dfrac{n}{n+1}$;
4) $x_n = a\alpha^{n-1} + 2\beta\dfrac{2^{n-1} - \alpha^{n-1}}{2-\alpha}$; 5) $x_n = \dfrac{3\cdot 2^{n-1} - 2}{3\cdot 2^{n-1} - 1}$;
6) $x_n = 2 - 2^{2-n}$; 7) $x_n = \dfrac{(a+b)2^{n-1} + (b-2a)(-1)^n}{3}$.

261. $x_n = (a + b + (a-b)\cdot 3^{1-n})/2$; $y_n = (a + b - (a-b)\cdot 3^{1-n})/2$.

263. 1) Если $p + q \neq 1$, то

$$x_n = \frac{(\lambda_2(a+\alpha) - b - \alpha)\lambda_1^{n-1} - (\lambda_1(a+\alpha) - (b-\alpha))\lambda_2^{n-1}}{\lambda_2 - \lambda_1} - \alpha,$$

где $\alpha = r/(p+q-1)$; если $p+q=1$, то

$$x_n = a - \frac{r(n-1)}{p-2} + \left(b - a + \frac{r}{p-2}\right)\frac{(p-1)^{n-1}-1}{p-2};$$

2) если $p \neq 2$, то

$$x_n = (2\lambda_0(a+\alpha) - b - \alpha + n(b + \alpha - \lambda_0(a+\alpha)))\lambda_0^{n-2} - \alpha,$$

где $\alpha = -\dfrac{4r}{(p-2)^2}$; если $p=2$, то

$$x_n = a + (n-2)(b-a) + \frac{(n-1)(n-2)}{2}r.$$

264. 1) $x_n = (6n - 1 - 8(-0,5)^n)/9$; 2) $x_n = (2^{n+1} - 2(-1)^n)/3 - 1$.

265. $x_n = \dfrac{(a-\lambda)(-\lambda^2)^{n-1} + \lambda(\lambda a + 1)}{\lambda a + 1 + \lambda(\lambda - a)(-\lambda^2)^{n-1}}$, где $\lambda = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

266. $a \neq -2^k/(2^k-1)$, $k \in N$; $x_n = a/((a+1)2^{n-1} - a)$.

267. 1) $x_n = 3a/(a - (a-3)4^{n-1})$; 2) $a = 3 \cdot 4^k/(4^k - 1)$, $k \in N$.

268. 1) Если $b \neq 1$, $a \neq -(b-1)b^k/(b^k-1)$, $k \in N$, то $x_n = a(b-1)/((a+b-1)b^{n-1} - a)$, $n \in N$, $n \geqslant 2$; если $b=1$, $a \neq -1/k$, $k \in N$, то $x_n = a/(1+(n-1)a)$, $n \in N$;

2) если $b \neq c$, $ad \neq (c-b)c^k/(b^k - c^k)$, $k \in N$, то

$$x_n = a(b-c)b^{n-1}/(adb^{n-1} + (b-c-ad)c^{n-1}), \quad n \in N, \quad n \geqslant 2;$$

если $b=c$, $ad \neq -b/k$, $k \in N$, то $x_n = ab/(b+(n-1)ad)$, $n \in N$, $n \geqslant 2$.

284. 1) $p \geqslant 2q$; 2) $p \geqslant 1{,}5q$; 3) $p \geqslant kq/(k-1)$.

286. 2) $(\ln 3)/3$. **297.** 2) Верно. **302.** $E(q/(1-q)) + 1$.

303. 1) $ad > bc$; 3) $ad < bc$. **305.** $\inf\{x_n\} = 0,5$, $\sup\{x_n\} = 1$.

314. 6.

ГЛАВА 2

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

§ 8. Предел последовательности

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Понятие предела. Число a называют *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное N, что для любого $n \geqslant N$ верно неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon;$$

короче,

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geqslant N\colon\quad |x_n - a| < \varepsilon; \tag{1}$$

на языке окрестностей: если для каждой окрестности числа a найдется номер, начиная с которого все члены последовательности принадлежат этой окрестности; в символической записи

$$\forall U(a)\ \exists N\ \forall n \geqslant N\colon\quad |x_n| \in U(a). \tag{2}$$

Иными словами, какую бы окрестность числа a ни взять, вне этой окрестности либо нет ни одного члена последовательности, либо находится лишь конечное количество ее членов.

Последовательность может иметь только один предел.

Если a — предел последовательности $\{x_n\}$, то пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

а саму последовательность называют *сходящейся к a*, иногда просто сходящейся.

Число a *не является* пределом последовательности $\{x_n\}$, если существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любого натурального N найдется номер $n \geqslant N$ такой, что

$$|x_n - a| \geqslant \varepsilon,$$

короче,

$$\exists\varepsilon > 0\ \forall N\ \exists n \geqslant N\colon\quad |x_n - a| \geqslant \varepsilon; \tag{1$'$}$$

на языке окрестностей: если существует окрестность числа a, вне которой находится бесконечно много членов последовательности.

Последовательность называют *расходящейся*, если никакое число не является ее пределом, другими словами, если для любого числа a существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любого натурального N найдется номер $n \geqslant N$ такой, что

$$|x_n - a| \geqslant \varepsilon,$$

короче,

$$\forall a \ \exists \varepsilon > 0 \ \forall N \ \exists n \geqslant N\colon \quad |x_n - a| \geqslant \varepsilon. \tag{3}$$

2. Свойства сходящихся последовательностей.

1) *Если последовательность имеет предел, то она ограниченна.* Значит, если последовательность неограниченна, то она расходится. Последовательность, сходящуюся к нулю, называют *бесконечно малой.*

Если последовательность $\{x_n\}$ бесконечно малая, а последовательность $\{y_n\}$ ограниченная, то их произведение, последовательность $\{x_n y_n\}$, бесконечно малая.

2) *Для того чтобы число a было пределом последовательности $\{x_n\}$, необходимо и достаточно, чтобы для всех n*

$$x_n = a + \alpha_n,$$

где $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность.

3) *Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, то для любого числа α существует $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha x_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha x_n = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.*

4) *Если существуют $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$, то:*

а) *существует $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n)$ и*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n;$$

б) *существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n$ и*

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n;$$

в) *если к тому же $y_n \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$ и*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

5) *Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ и для всех n, начиная с некоторого, $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$, то*

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a$$

(теорема о трех последовательностях).

6) *Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и для всех n, начиная с некоторого, $x_n \leqslant b$ (или $x_n \geqslant c$), то*

$$a \leqslant b \quad (\textit{или } a \geqslant c).$$

7) *Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > a$ (или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n < b$), то для всех n, начиная с некоторого,*

$$x_n > a \quad (\textit{или } x_n < b).$$

3. Бесконечно большие последовательности. Последовательность $\{x_n\}$ называют *бесконечно большой*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное N, что для любого $n \geqslant N$ верно неравенство

$$|x_n| > \varepsilon,$$

и в этом случае пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Бесконечно большая последовательность $\{x_n\}$ имеет пределом $+\infty$ (соответственно $-\infty$), если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное N, что для любого $n \geqslant N$ верно неравенство

$$x_n > \varepsilon \quad (\text{соответственно } x_n < -\varepsilon),$$

и это записывают так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (соответственно $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$).

Во всех этих случаях говорят, что последовательность *имеет бесконечный предел.*

Всякая бесконечно большая последовательность является неограниченной и расходящейся.

Неограниченная последовательность может и не быть бесконечно большой.

4. Частичный предел. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Если подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ имеет предел $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$, где a — число или одна из бесконечностей $+\infty$, $-\infty$, то a называют *частичным пределом последовательности* $\{x_n\}$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, где a — число или одна из бесконечностей $+\infty$, $-\infty$, то любая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ имеет тот же предел:

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a.$$

Теорема (Больцано–Вейерштрасса). *Любая ограниченная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность.*

Всякая неограниченная последовательность имеет частичный предел $+\infty$ или $-\infty$. Таким образом, множество частичных пределов любой последовательности *не пусто.*

Пусть L — множество частичных пределов последовательности $\{x_n\}$ (наряду с числами L может содержать и $+\infty$, и $-\infty$). *Верхним* (*нижним*) *пределом последовательности* $\{x_n\}$ называют $\sup L$ ($\inf L$), и обозначают его

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \sup L \quad \left(\varliminf_{n\to\infty} x_n = \inf L\right).$$

Верхний и нижний пределы последовательности являются ее частичными пределами.

5. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши. Последовательность $\{x_n\}$ называют *фундаментальной*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное N, что для любого $n \geqslant N$ и любого $m \geqslant N$ верно неравенство

$$|x_n - x_m| < \varepsilon,$$

короче,
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n \geqslant N \ \forall m \geqslant N\colon \quad |x_n - x_m| < \varepsilon \tag{4}$$

(*условие Коши*). Это же условие формулируют и так: *для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное N, что для любого $n \geqslant N$ и любого натурального p верно неравенство*

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon,$$

короче,
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n \geqslant N \ \forall p\colon \quad |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon. \tag{4$'$}$$

Теорема (критерий Коши). *Для того чтобы последовательность имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

Для того чтобы последовательность не имела конечного предела, необходимо и достаточно, чтобы она не удовлетворяла условию Коши, т. е. удовлетворяла *отрицанию условия Коши*: существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого натурального N найдутся такие $n \geqslant N$ и $m \geqslant N$, что

$$|x_n - x_m| \geqslant \varepsilon,$$

короче,
$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall N \ \exists n \geqslant N \ \exists m \geqslant N\colon \quad |x_n - x_m| \geqslant \varepsilon. \tag{5}$$

6. Монотонные последовательности. Число e.

Теорема (Вейерштрасса). *Ограниченная и монотонная, начиная с некоторого номера, последовательность имеет конечный предел.*

Последовательность

$$x_n = (1 + 1/n)^n, \quad n \in N,$$

строго возрастает, т. е. $\forall n \ x_n < x_{n+1}$, ограниченна: $2 \leqslant x_n < 3$, поэтому имеет предел, обозначаемый e,

$$\lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n = e,$$

это нерациональное число $e = 2{,}718\,281\,828\,459\,045\ldots$

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Доказать исходя из определения, что число 1 является пределом последовательности $x_n = n/(n+1)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

▲ Рассмотрим модуль разности

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1}.$$

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$ будет выполнено, если $1/(n+1) < \varepsilon$, т. е. при $n > 1/\varepsilon - 1$. В качестве N

возьмем какое-нибудь натуральное число, удовлетворяющее условию $N > 1/\varepsilon - 1$, т. е. $1/(N+1) < \varepsilon$ *). Тогда для всех $n \geqslant N$ выполнены неравенства

$$|x_n - 1| = \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{N+1} < \varepsilon.$$

Это и означает, что 1 есть предел последовательности $\{n/(n+1)\}$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1. \ \blacktriangle$$

Пример 2. Доказать исходя из определения, что

$$\lim_{n\to\infty} (1/3)^n = 0.$$

▲ Так как $3^n > n$ для любого $n \geqslant 1$, то

$$|(1/3)^n - 0| = 1/3^n < 1/n.$$

Пусть $\varepsilon > 0$, выберем натуральное N такое, что $1/N < \varepsilon$. Тогда для любого $n \geqslant N$ имеем

$$|(1/3)^n - 0| < 1/n \leqslant 1/N < \varepsilon.$$

Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} (1/3)^n = 0$. ▲

Пример 3. Доказать, что последовательность $\{(-1)^n + 1/n\}$ расходится.

▲ Нужно доказать, что никакое число не является пределом данной последовательности.

Отметим на числовой прямой несколько членов последовательности, например,

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 3/2, \quad x_3 = -2/3, \quad x_4 = 5/4, \quad x_5 = -4/5,$$
$$x_6 = 7/6, \quad x_12 = 13/12, \quad x_13 = -12/13.$$

Рис. 8.1 показывает, что расстояние между двумя соседними членами

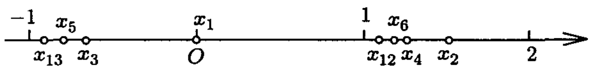

Рис. 8.1

последовательности больше 1. Докажем, что это действительно так для любых двух соседних членов. Из этих членов один имеет четный номер $n = 2k$, и

$$x_{2k} = 1 + 1/(2k) > 1.$$

Соседний член имеет нечетный номер $2k+1$ (или $2k-1$), и

$$x_{2k+1} = -1 + \frac{1}{2k+1} < 0 \quad \left(\text{или} \quad x_{2k-1} = -1 + \frac{1}{2k-1} \leqslant 0\right).$$

Отсюда следует, что $|x_n - x_{n+1}| > 1$.

*) Например, $N = E(1/\varepsilon)$, где $E(a)$ — целая часть числа a.

Для произвольного числа a возьмем окрестность единичной длины — интервал $(a - 1/2;\ a + 1/2)$. Любые соседние члены x_n и x_{n+1} оба вместе не могут находиться в этой окрестности, так как расстояние между ними больше 1. По крайней мере один из этих членов будет лежать вне окрестности.

Таким образом, для любого числа a существует $\varepsilon = 1/2$ такое, что для любого натурального N найдется n, равное либо N, либо $N + 1$ такое, что $|x_n - a| > 1/2 = \varepsilon$. Это и означает, что данная последовательность расходится. ▲

Пример 4. Доказать, что последовательность $\{(n^2 - 10)/n\}$ расходится.

▲ Докажем, что данная последовательность неограниченна. Имеем

$$x_n = n - 10/n \geqslant n - 10.$$

Пусть C — произвольное положительное число. Возьмем какое-нибудь натуральное число $n_0 > C + 10$, тогда $x_{n_0} \geqslant n_0 - 10 > C$. Это означает, что последовательность $\{(n^2 - 10)/n\}$ неограниченна, а поэтому расходится. ▲

Пример 5. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^3 - 3n^2}{n^3 + 1}$.

▲ Преобразуем формулу для общего члена к виду

$$x_n = \frac{5 - 3/n}{1 + 1/n^3}.$$

Учитывая, что $\{1/n\}$ и $\{1/n^3\}$ — бесконечно малые последовательности, и используя теоремы о пределах, получаем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5 - 3/n}{1 + 1/n^3} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} (5 - 3/n)}{\lim\limits_{n\to\infty} (1 + 1/n^3)} = \frac{5}{1} = 5. \ ▲$$

Пример 6. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} (5^n/n^n) = 0$.

▲ Для всех $n \geqslant 15$ верно неравенство $5/n \leqslant 1/3$, поэтому

$$0 < (5/n)^n \leqslant (1/3)^n$$

при $n \geqslant 15$. Здесь слева и справа стоят члены последовательности, имеющие пределом нуль. Значит, по теореме о трех последовательностях и

$$\lim_{n\to\infty} (5/n)^n = 0. \ ▲$$

Пример 7. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ и $x_n \geqslant -1$ для любого n; пусть p — натуральное число. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[p]{1 + x_n} = 1.$$

▲ Если $x_n \geqslant 0$, то $1 + x_n \geqslant 1$, поэтому

$$1 \leqslant \sqrt[p]{1 + x_n} \leqslant (\sqrt[p]{1 + x_n})^p = 1 + x_n = 1 + |x_n|,$$

а если $-1 \leqslant x_n < 0$, то $0 \leqslant 1 + x_n < 1$, поэтому

$$1 > \sqrt[p]{1 + x_n} \geqslant (\sqrt[p]{1 + x_n})^p = 1 + x_n = 1 - |x_n|.$$

Объединяя эти результаты, для любого $x_n \geqslant -1$ получаем

$$1 - |x_n| \leqslant \sqrt[p]{1 + x_n} \leqslant 1 + |x_n|.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$ и

$$\lim_{n\to\infty} (1 - |x_n|) = \lim_{n\to\infty} (1 + |x_n|) = 1.$$

Отсюда следует, что и
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[p]{1 + x_n} = 1. \ \blacktriangle$$

Пример 8. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n} - n)$.

▲ Преобразуем формулу общего члена:

$$\sqrt{n^2+n} - n = \frac{(\sqrt{n^2+n} - n)(\sqrt{n^2+n} + n)}{\sqrt{n^2+n} + n} =$$
$$= \frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/n} + 1}.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} (1/n) = 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n} - n) = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1 + 1/n} + 1} = \frac{1}{2}. \ \blacktriangle$$

Пример 9. Пусть $a > 1$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

▲ Обозначим $\sqrt[n]{a} - 1 = \alpha_n$, тогда $\alpha_n > 0$ и $a = (1 + \alpha_n)^n \geqslant n\alpha_n$ (по неравенству Бернулли, § 2), $0 < \alpha_n \leqslant a/n$, для всех n. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, а
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} (1 + \alpha_n) = 1. \ \blacktriangle$$

Пример 10. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

▲ Обозначим $\sqrt[n]{n} - 1 = \alpha_n$, тогда $\alpha_n \geqslant 0$ и

$$n = (1 + \alpha_n)^n \geqslant \frac{n(n-1)}{2} \alpha_n^2$$

при $n \geqslant 2$ (см. § 4). Так как $n - 1 \geqslant n/2$ при $n \geqslant 2$, то $n \geqslant n^2\alpha_n^2/4$, откуда получаем $0 \leqslant \alpha_n \leqslant 2/\sqrt{n}$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, а

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} (1 + \alpha_n) = 1. \ \blacktriangle$$

В следующих двух примерах дано сравнение скорости роста трех возрастающих последовательностей $\{a^n\}$, $\{n\}$ и $\{\log_a n\}$, где $a > 1$.

Пример 11. Пусть $a > 1$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} (n/a^n) = 0$.

▲ Поскольку $a - 1 > 0$, имеем

$$a_n = (1 + a - 1)^n \geqslant \frac{n(n-1)}{2} (a-1)^2 \geqslant \frac{n^2}{4} (a-1)^2$$

для всех $n \geqslant 2$. Отсюда следует, что

$$0 \leqslant \frac{n}{a^n} \leqslant \frac{4}{n} (a-1)^2.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n}(a-1)^2\right)=0,$$

то и

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{a^n}\right)=0 \quad \blacktriangle$$

Пример 12. Пусть $a > 1$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0$.

▲ Для доказательства воспользуемся определением предела и результатом предыдущего примера.

Пусть $\varepsilon > 0$. На множестве натуральных чисел n неравенство

$$\frac{\log_a n}{n} < \varepsilon$$

равносильно неравенству $n < (a^\varepsilon)^n$. Поскольку $a^\varepsilon > 1$, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(a^\varepsilon)^n}=0,$$

поэтому существует натуральное N такое, что для всех $n \geqslant N$

$$\frac{n}{(a^\varepsilon)^n} < 1,$$

т. е. $n < a^{\varepsilon n}$ Отсюда следует, что для всех $n \geqslant N$

$$0 \leqslant \frac{\log_a n}{n} < \varepsilon;$$

это и означает, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0. \quad \blacktriangle$$

Таким образом, из трех последовательностей $\{a^n\}$, $\{n\}$, $\{\log_a n\}$, $a > 1$, первая возрастает существенно быстрее других, а третья — медленнее других.

Пример 13. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$.

▲ Если $k \geqslant 4$, то $2/k \leqslant 1/2$, поэтому при $n \geqslant 4$

$$0 < \frac{2^n}{n!} = \frac{8}{1\ 2\ 3}\cdot\frac{2}{4}\ \cdots\ \frac{2}{n} \leqslant \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} = \frac{32}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{32}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$, то и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$ ▲

Пример 14. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=+\infty$.

▲ Пусть ε — произвольное положительное число, а N — такое натуральное число, что $N > \varepsilon^2$ *). Тогда для всех $n \geqslant N$ верно неравенство $\sqrt{n} \geqslant \sqrt{N} > \varepsilon$. Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=+\infty$. ▲

Пример 15. Доказать, что всякая неограниченная последовательность имеет частичный предел, равный либо $+\infty$, либо $-\infty$.

▲ Неограниченная последовательность непременно неограничена либо сверху, либо снизу.

---

*) Например, $N = E(\varepsilon^2) + 1$

Пусть последовательность $\{x_n\}$ неограниченна снизу. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется член последовательности x_n такой, что $x_n < -\varepsilon$. Для $\varepsilon = 1$ найдется член последовательности x_{n_1} такой, что $x_{n_1} < -1$, его и примем за первый член подпоследовательности. Среди конечного числа членов последовательности с номерами от 1 до n_1 имеется наименьший, его обозначим m_1. Возьмем теперь $\varepsilon = 2$. Из неограниченности последовательности снизу следует, что найдется член x_{n_2} такой, что $x_{n_2} < -2$ и $x_{n_2} < m_1$. Последнее в силу выбора m_1 означает, что $n_2 > n_1$. Примем x_{n_2} за второй член подпоследовательности. Аналогично будем находить члены подпоследовательности x_{n_3} и т. д.

Докажем, что этот процесс не оборвется. Допустим, что найден член подпоследовательности x_{n_k}, $k \geqslant 2$, удовлетворяющий неравенству $x_{n_k} < -k$. Обозначим через m_k наименьший среди членов последовательности от x_1 до x_{n_k}. Возьмем $\varepsilon = k + 1$. В силу неограниченности снизу найдется член последовательности $x_{n_{k+1}}$ такой, что $x_{n_{k+1}} < -(k+1)$ и $x_{n_{k+1}} < m_k$. Из последнего следует, что $n_{k+1} > n_k$, и, значит, $x_{n_{k+1}}$ можно принять за $(k+1)$-й член подпоследовательности.

Таким образом, существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такая, что $x_{n_k} < -k$ для любого k, и, значит,

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = -\infty.$$

Аналогично доказывается, что последовательность, неограниченная сверху, имеет подпоследовательность, пределом которой служит $+\infty$. ▲

Пример 16. Для последовательности

$$x_n = \frac{(3\cos(\pi n/2) - 1)n + 1}{n}, \quad n \in N,$$

найти множество частичных пределов $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$ и $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$, а также $\sup\{x_n\}$ и $\inf\{x_n\}$.

▲ При $n = 4k$ имеем

$$x_n = \frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n},$$

и, значит, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{4k} = 2$, $2 < x_{4k} \leqslant 2 + 1/4$, причем $x_4 = 9/4$. При $n = 4k+1$ или $n = 4k+3$ имеем

$$x_n = \frac{-n+1}{n} = -1 + \frac{1}{n},$$

и, значит, $-1 < x_n < 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{4k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{4k+3} = -1$. При $n = 4k+2$ имеем

$$x_n = \frac{-4n+1}{n} = -4 + \frac{1}{n},$$

значит, $-4 < x_n < 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{4k+2} = -4$.

Таким образом, числа 2, -1, -4 являются частичными пределами данной последовательности. Рассмотренные четыре подпоследовательности $\{x_{4k}\}$, $\{x_{4k+1}\}$, $\{x_{4k+2}\}$, $\{x_{4k+3}\}$ составляют вместе всю данную последовательность. Отсюда следует, что других частичных пределов данная последовательность не имеет.

Очевидно,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = x - 2, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = -4.$$

Из предыдущих рассмотрений следует также, что

$$\sup\{x_n\} = x_4 = 9/4, \quad \inf\{x_n\} = -4. \ \blacktriangle$$

Пример 17. Доказать, что последовательность

$$x_n = \frac{\cos 1}{3} + \frac{\cos 2}{3^2} + \ldots + \frac{\cos n}{3^n}, \quad n \in N,$$

сходится.

▲ Оценим модуль разности $x_{n+p} - x_n$:

$$|x_{n+p} - x_n| = \left|\frac{\cos(n+1)}{3^{n+1}} + \ldots + \frac{\cos(n+p)}{3^{n+p}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{3^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{3^{n+p}} = \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{1 - 1/3^p}{1 - 1/3} < \frac{1}{2\cdot 3^n} < \frac{1}{3^n}.$$

Пусть ε — произвольное положительное число. Поскольку $\lim(1/3^n) = 0$, для этого ε существует N такое, что для любого $n \geqslant N$ верно неравенство $1/3^n < \varepsilon$. Значит, если $n \geqslant N$, а p — произвольное натуральное число, то

$$|x_{n+p} - x_n| < \frac{1}{3^n} < \varepsilon.$$

Таким образом, условие Коши выполнено, и поэтому данная последовательность сходится. ▲

Пример 18. Доказать, что последовательность

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}, \quad n \in N,$$

расходится.

▲ Оценим разность $x_{n+p} - x_n$:

$$x_{n+p} - x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} + \ldots + \frac{1}{n+p} = \frac{p}{n+p}.$$

Если здесь взять $p = n$, то получим

$$x_{2n} - x_n \geqslant n/(n+n) = 1/2, \quad n \in N.$$

Отсюда видно, что данная последовательность удовлетворяет отрицанию условия Коши. А именно, при $\varepsilon = 1/2$ для любого натурального N возьмем $n = N$, $m = 2N$, тогда будем иметь

$$|x_{2N} - x_N| = x_{2N} - x_N \geqslant 1/2.$$

Значит, данная последовательность не имеет конечного предела, т. е. расходится. ▲

Пример 19. Доказать, что последовательность *) $x_n = \dfrac{n!}{(2n+1)!!}$, $n \in N$, имеет предел, и найти его.

▲ Составим отношение

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)! \cdot (2n+1)!!}{(2n+3)!! \cdot n!} = \frac{n+1}{2n+3}.$$

Поскольку $(n+1)/(2n+3) < 1/2$ для любого $n \geqslant 1$, $x_{n+1} < x_n/2 < x_n$. Значит, данная последовательность убывающая. Очевидно, для любого $n \geqslant 1$ выполнены неравенства $0 < x_n \leqslant x_1 = 1/3$, т. е. последовательность ограниченна. Отсюда следует, что она сходится.

Обозначим $c = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Последовательность $\{x_{n+1}\}$ является подпоследовательностью данной последовательности, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = c$. Переходя теперь к пределу в равенстве $x_{n+1} = x_n \dfrac{n+1}{2n+3}$, получаем

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+3} \cdot \lim_{n\to\infty} x_n,$$

откуда $c = \dfrac{1}{2}c$, $c = 0$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. ▲

Пример 20. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$, где $x_1 = 0$, $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$, $n \in N$, имеет предел, и найти его.

▲ В примере 24, 1) § 7 было доказано, что данная последовательность строго возрастает. Докажем ее ограниченность. Очевидно, для любого $n \in N$

$$x_n \geqslant 0 \quad \text{и} \quad x_n^2 < x_{n+1}^2 = 6 + x_n,$$

т. е.

$$x_n^2 - x_n - 6 < 0,$$

откуда $x_n < 3$.

Таким образом, $\{x_n\}$ — ограниченная возрастающая последовательность, и, значит, существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$. Заметим, что $c > 0$.

Переходя к пределу в равенстве $x_{n+1}^2 = 6 + x_n$ и учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = c$, получаем $c^2 = 6 + c$, откуда находим $c = 3$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$. ▲

Пример 21. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k, \quad \text{где} \quad k \in N,\ k \geqslant 2.$$

▲ Очевидно, $(1 + k/n)^n > 0$, а из неравенства

$$1 + \frac{k}{n} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k, \quad n \in N,$$

*) $(2n+1)!!$ — произведение всех нечетных чисел от 1 до $2n+1$ включительно.

следует, что

$$\left(1+\frac{k}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{kn} < e^k.$$

Значит, данная последовательность ограниченна.

Обозначим общий член последовательности через x_n и рассмотрим отношение x_{n+1}/x_n:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1+k/(n+1)\right)^{n+1}}{\left(1+k/n\right)^n} = \left(\frac{1+k/(n+1)}{1+k/n}\right)^{n+1}\left(1+\frac{k}{n}\right) =$$

$$= \left(\frac{n(n+k+1)}{(n+1)(n+k)}\right)^{n+1}\frac{n+k}{n}.$$

Так как $(n+1)(n+k) = n(n+k+1)+k$, то

$$\frac{n(n+k+1)}{(n+1)(n+k)} = \frac{(n+1)(n+k)-k}{(n+1)(n+k)} = 1 - \frac{k}{(n+1)(n+k)}.$$

В силу неравенства Бернулли

$$\left(\frac{n+(n+k+1)}{(n+1)(n+k)}\right)^{n+1} = \left(1-\frac{k}{(n+1)(n+k)}\right)^{n+1} > 1-\frac{k}{n+k} = \frac{n}{n+k}.$$

Учитывая это, получаем

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n(n+k+1)}{(n+1)(n+k)}\right)^{n+1}\frac{n+k}{n} > \frac{n}{n+k}\,\frac{n+k}{n} = 1,$$

т. е. $x_{n+1} > x_n$, и, значит, $\{x_n\}$ — возрастающая последовательность. Из доказанного следует, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Рассмотрим подпоследовательность $x_{pk} = ((1+1/p)^p)^k$ при $n = pk$, $p \in N$. Так как $\lim\limits_{p\to\infty}(1+1/p)^p = e$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_{pk} = e^k$. Значит, и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{p\to\infty} x_{pk} = e^k. \ \blacktriangle$$

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, указав для каждого $\varepsilon > 0$ такое N, что для любого $n \geqslant N$ верно неравенство $|x_n| < \varepsilon$, если:

1) $x_n = 1/n$; 2) $x_n = a/n$ (a — произвольное данное число);

3) $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$; 4) $x_n = \dfrac{2+(-1)^n}{n}$;

5) $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$; 6) $x_n = \dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi n}{2}$.

Отметить на числовой прямой (в случае 2) взять $a = -1$) первые шесть членов этих последовательностей.

2. Доказать, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+b}{n} = 1$, где $b \in R$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n}{2n-1} = \dfrac{3}{2}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2-n}{2+n} = -1$;
5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{n^2} = 1$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0$, где $p \geqslant 1$.

3. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, а последовательность $\{y_n\}$ такова, что существуют натуральные p и n_0 такие, что $y_n = x_{n+p}$ (или $y_n = x_{n-p}$) для любого $n \geqslant n_0$. Доказать, что последовательность y_n сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$. Иными словами, изменение (в частности, отбрасывание или добавление) конечного числа членов сходящейся последовательности оставляет ее сходящейся к тому же пределу.

4. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, указав для каждого $\varepsilon > 0$ такое N, что для любого $n \geqslant N$ верно неравенство $|x_n| < \varepsilon$, если:
1) $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$; 2) $x_n = \dfrac{2}{\sqrt{2n-1}}$; 3) $x_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3n-11}}$;
4) $x_n = \dfrac{1}{\sqrt[k]{n}}$, $k \in \mathbb{N}$.

5. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1$.

6. Доказать, что:
1) $\lim\limits_{n\to\infty} (-0{,}5)^n = 0$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} (0{,}99)^n = 0$.

7. Доказать, что если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

8. Доказать, что $\{x_n\}$ — бесконечно малая последовательность, если:
1) $x_n = \dfrac{n^2-1}{n^3}$; 2) $x_n = \dfrac{2n+3}{n^2}$; 3) $x_n = \dfrac{q^n}{n}$, $|q| \leqslant 1$;
4) $x_n = \dfrac{2n+1}{(n+1)2^n}$; 5) $x_n = \dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$.

9. Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ была бесконечно малой, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{|x_n|\}$ была бесконечно малой. Доказать.

10. Привести пример последовательности $\{x_n\}$, удовлетворяющей условию
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geqslant N\colon \quad x_n < \varepsilon$$
и такой, что: 1) она не имеет предела; 2) она имеет предел. Может ли этот предел быть равным 1?

11. Сформулировать на языке “ε–N” отрицание того, что $\{x_n\}$ — бесконечно малая последовательность, и записать его, используя символы $\exists$, $\forall$.

12. Доказать, что число a не является пределом последовательности $\{x_n\}$, если:
1) $x_n = (-1)^n$, $a = -1$; 2) $x_n = \dfrac{2-\cos\pi n}{2+\cos\pi n}$, $a = 3$;

3) $x_n = \cos(\pi n/3)$, $a = 1/2$; 4) $x_n = 2^{(-1)^n n}$, $a = 0$.

13. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ расходится, если:

1) $x_n = (-1)^n$; 2) $x_n = n$; 3) $x_n = \sin \frac{\pi n}{2}$;

4) $x_n = E\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$; 5) $x_n = \sin n$; 6) $x_n = \frac{n}{n+1} \cos \frac{2\pi n}{3}$.

14. Последовательность $\{x_n\}$ расходится, а последовательность $\{y_n\}$ такова, что существуют натуральные p и n_0 такие, что $y_n = x_{n+p}$ (или $y_n = x_{n-p}$) для любого $n \geqslant n_0$. Доказать, что последовательность $\{y_n\}$ расходится. Иными словами, изменение (в частности, добавление или отбрасывание) конечного числа членов расходящейся последовательности оставляет ее расходящейся.

15. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ расходится, если:

1) $x_n = (-1)^n n$; 2) $x_n = n^{(-1)^n}$; 3) $x_n = \frac{n^2 - 2n}{n+1}$;

4) $x_n = n^2 \sin \frac{\pi n}{4}$; 5) $x_n = (0{,}5)^{((-1)^n - 1)n}$.

16. Привести пример такой последовательности $\{x_n\}$, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ и из двух последовательностей $\{\operatorname{sign} x_n\}$, $\{(\operatorname{sign} x_n)^2\}$:

1) обе сходятся; 2) обе расходятся;

3) первая расходится, а вторая сходится.

17. 1) Последовательность $\{x_n\}$ сходится, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Доказать, что сходится и последовательность $\{|x_n|\}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$.

2) Привести пример расходящейся последовательности $\{x_n\}$, для которой последовательность $\{|x_n|\}$ сходится.

18. У последовательности $\{x_n\}$ подпоследовательности $\{x_{2k}\}$ и $\{x_{2k-1}\}$ имеют один и тот же предел. Доказать, что и сама последовательность сходится к этому пределу.

19. Последовательность $\{x_n\}$ такова, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = a$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = b$, $a \neq b$. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ расходится.

20. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ расходится, если x_n равно:

1) $\log_a(2 + (-1)^n)$, $a > 0$ $a \neq 1$;

2) $\arcsin \frac{(-1)^n n}{n+1}$; 3) $\frac{2^{n+1} - (-3)^n}{(-2)^n + 3^{n+1}}$.

21. Доказать, что последовательность:

1) $x_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} k$, $n \in N$, сходится;

2) $x_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k$, $n \in N$, расходится.

22. Привести пример последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, имеющих одно и то же множество значений и таких, что:

1) $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, но $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

2) $\{x_n\}$ сходится, а $\{y_n\}$ расходится.

23. Последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Множества значений этих последовательностей совпадают. Доказать, что эти множества конечны.

24. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $m_n = \inf\limits_{k\geqslant n}\{x_n\}$, $M_n = \sup\limits_{k\geqslant n}\{x_n\}$, $n \in N$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} m_n = \lim\limits_{n\to\infty} M_n = x$.

25. Доказать, что если $x_n \geqslant 0$, $n \in N$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{x_n} = \sqrt[3]{a}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[p]{x_n} = \sqrt[p]{a}$, $p \in N$.

26. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если:

1) $x_n = \sqrt{9 + \dfrac{1}{n}}$; 2) $x_n = \left(8 - \dfrac{1}{n^2}\right)^{-1/3}$; 3) $x_n = \sqrt[3]{\dfrac{n + 0{,}25}{8n + 1}}$;

4) $x_n = \dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+1}}$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+2n}}$; 6) $x_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+2}$;

7) $x_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+n} + n}$; 8) $x_n = \sqrt{n^2-1} - n - 1$;

9) $x_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}$; 10) $x_n = \sqrt[3]{n^3+2n^2} - n$;

11) $x_n = \dfrac{n}{2}\left(\sqrt[3]{1 + \dfrac{2}{n}} - 1\right)$.

27. Доказать, что сходящаяся последовательность достигает хотя бы одной из своих точных граней — верхней или нижней.

28. Является ли обязательно число a пределом последовательности $\{x_n\}$, если:

1) существует такое натуральное число N, что для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $n \geqslant N$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие натуральные числа N и $n \geqslant N$, что $|x_n - a| < \varepsilon$?

29. Пусть $x_n > 0$, $n \in N$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Доказать, что:

1) $\forall N\ \exists n_0 \geqslant N\ \forall n > n_0\colon\ x_n < x_{n_0}$;

2) $\forall N\ \exists n_0 \geqslant N\ \forall n\ (1 \leqslant n < n_0)\colon\ x_n > x_{n_0}$.

30. Пусть K — множество всех сходящихся последовательностей, а $K_1, K_2, \ldots, K_8$ — множества всех последовательностей, удовлетворяющих соответственно условиям:

1) $\exists \varepsilon > 0\ \exists N\ \exists n \geqslant N\colon\ |x_n| < \varepsilon$;

2) $\exists \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geqslant N\colon\ |x_n| < \varepsilon$;
3) $\exists \varepsilon > 0\ \forall N\ \exists n \geqslant N\colon\ |x_n| < \varepsilon$;
4) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \exists n \geqslant N\colon\ |x_n| < \varepsilon$;
5) $\exists \varepsilon > 0\ \forall N\ \forall n \geqslant N\colon\ |x_n| < \varepsilon$;
6) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geqslant N\colon\ |x_n| < \varepsilon$;
7) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geqslant N\colon\ |x_n| < \varepsilon$;
8) $\forall \varepsilon > 0\ \forall N\ \forall n \geqslant N\colon\ |x_n| < \varepsilon$.

1) Какие из следующих включений верны: а) $K_6 \subset K_2$; б) $K_2 \subset K_6$; в) $K_7 \subset K_2$; г) $K_8 \subset K$; д) $K \subset K_8$?

2) Для каких $j = 1, 2, \ldots, 8$ верно включение $K_j \subset K$?

3) Какие из множеств K_j $(j = 1, 2, \ldots, 8)$ содержат как сходящиеся, так и расходящиеся последовательности?

4) Какие из множеств K_j $(j = 1, 2, \ldots, 8)$ содержат неограниченные последовательности?

5) Какому из условий 1)–8) удовлетворяет любая последовательность?

6) Какие из множеств K_j $(j = 1, 2, \ldots, 8)$ совпадают?

31. Доказать, что если последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет условию

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists a\ \exists N\ \forall n \geqslant N\colon\ |x_n - a| < \varepsilon,$$

то $\{x_n\}$ — сходящаяся последовательность. Доказать, что верно и обратное.

32. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ расходится тогда и только тогда, когда

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall a\ \forall N\ \exists n \geqslant N\colon\ |x_n - a| \geqslant \varepsilon$$

(сравните эту запись с определением расходящейся последовательности в (3)).

33. Последовательность $\{y_k\}$ получена перестановкой членов последовательности $\{x_n\}$, т. е. для любого n существует k_n такое, что $x_n = y_{k_n}$, причем, если $n_1 \neq n_2$, то $k_{n_1} \neq k_{n_2}$, и обратно, для любого k существует такое n_k, что $y_k = x_{n_k}$, причем, если $k_1 \neq k_2$, то $n_{k_1} \neq n_{k_2}$.

Доказать, что:

1) если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то и $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = a$;

2) если $\{x_n\}$ расходится, то и $\{y_k\}$ расходится.

Иными словами, перенумерация элементов последовательности не меняет ее свойства сходимости или расходимости.

34. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если:

1) $x_n = \dfrac{9 + n/(n+1)}{2 + 1/n}$; 2) $x_n = \dfrac{3 + 0,5^n}{0,3^{n+1} + 5}$; 3) $x_n = \dfrac{n}{3n+2}$;

4) $x_n = \dfrac{2-n}{n+1} + \dfrac{n \cdot 2^{-n}}{n+2}$; 5) $x_n = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^5$; 6) $x_n = \dfrac{n^3+27}{n^4-15}$;
7) $x_n = \dfrac{(n+5)^3 - n(n+7)^2}{n^2}$; 8) $x_n = \dfrac{n^2+1}{2n+1} - \dfrac{3n^2+1}{6n+1}$;
9) $x_n = \dfrac{(-1)^n + 1/n}{1/n^2 - (-1)^n}$; 10) $x_n = \dfrac{3n}{5+3^{n+1}}$;
11) $x_n = \dfrac{1+2+\ldots+n}{n+2} - \dfrac{n}{2}$.

35. Известно, что $x_n \neq 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$, если:

1) $y_n = \dfrac{2x_n - 1}{x_n - 2}$; 2) $y_n = \dfrac{x_n - 1}{x_n^2 - 1}$; 3) $y_n = \dfrac{x_n^2 + x_n - 2}{x_n - 1}$;
4) $y_n = \dfrac{x_n^2 - 3x_n + 2}{x_n^2 - 1}$.

36. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если:

1) $x_n = \dfrac{2^{n+2} + 3^{n+3}}{2^n + 3^n}$; 2) $x_n = \dfrac{5 \cdot 2^n - 3 \cdot 5^{n+1}}{100 \cdot 2^n + 2 \cdot 5^n}$; 3) $x_n = \dfrac{2^n + 3^{-n}}{2^{-n} - 3^n}$;
4) $x_n = \dfrac{(-1)^n \cdot 6^n - 5^{n+1}}{5^n - (-1)^{n+1} \cdot 6^{n+1}}$; 5) $x_n = \dfrac{a^n}{1+a^n}$, $a \neq -1$;
6) $x_n = \dfrac{a^n}{1+a^{2n}}$; 7) $x_n = \dfrac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}}$, $a \neq 0$.

37. Верно ли, что:
1) если $a_n^2 \to a^2$, то $a_n \to a$; 2) если $a_n^3 \to a^3$, то $a_n \to a$?

38. Последовательность $\{x_n\}$ имеет конечный предел a. На координатной плоскости проведены прямые AA_n через точки $A(a; a^2)$ и $A_n(x_n; x_n^2)$, $n \in N$. Пусть a_n — абсцисса точки пересечения прямой AA_n с осью Ox. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

39. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если x_n равно:

1) $\dfrac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n^2+1)^2 - (n^2-1)^2}$; 2) $\dfrac{(n^2+3n+4)^3 - (n^2+3n-4)^3}{(n^2+5n+6)^3 - (n^2+5n-6)^3}$;
3) $\dfrac{n^2}{n+1} - \dfrac{n^3}{n^2+1}$; 4) $n - \dfrac{3}{3/n - 3/n^2 + 1/n^3}$;
5) $\dfrac{(2+n)^{100} - n^{100} - 200n^{99}}{n^{98} - 10n^2 + 1}$; 6) $\dfrac{\lg^2 10n}{\lg^2 n}$; 7) $\dfrac{\ln(n^2 - n + 1)}{\ln(n^{10} + n + 1)}$;
8) $\dfrac{\lg(n^2 + 2n\cos n + 1)}{1 + \lg(n+1)}$; 9) $n^2\left(\left(1+\dfrac{p}{n}\right)^q - \left(1+\dfrac{q}{n}\right)^p\right)$, где $p, q \in N$.

40. Пусть a_n — общий член, а S_n — сумма первых n членов арифметической прогрессии с разностью $d \neq 0$.

Найти:
1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{n^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{a_n^2}$ $(a_n \neq 0)$.

41. Пусть $|q| < 1$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} aq^n$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$.

42. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если:

1) $x_n = 0{,}\underbrace{11...1}_{n}$;

2) $x_1 = 0{,}4$, $x_2 = 0{,}45$, $x_3 = 0{,}454$, $x_4 = 0{,}4545$, $x_5 = 0{,}45454$, ..., ..., $x_{2k} = 0{,}4545...45$, ...;

3) $x_1 = 0{,}2$, $x_2 = 0{,}23$, $x_3 = 0{,}234$, $x_4 = 0{,}2342$, $x_5 = 0{,}23423$, $x_6 = 0{,}234234$, ...

43. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)} = 1$.

44. Найти:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + ... + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}\right)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$.

45. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если x_n равно:

1) $\dfrac{\sqrt[n]{8}-1}{\sqrt[n]{16}-1}$; 2) $\dfrac{3\sqrt[n]{16}-4\sqrt[n]{8}+1}{(\sqrt[n]{2}-1)^2}$;

3) $\dfrac{3}{1-\sqrt[n]{8}} - \dfrac{5}{1-\sqrt[n]{32}}$; 4) $\dfrac{\sqrt[n]{a^m}-1}{\sqrt[n]{a^k}-1}$, $a > 1$, $k, m \in N$.

46. Привести примеры последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ и:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 0$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 1$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = +\infty$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$ не существует.

47. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$. Следует ли отсюда, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$;

2) хотя бы одна из последовательностей $\{x_n\}$ или $\{y_n\}$ стремится к нулю?

48. Привести примеры расходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, для которых сходится последовательность:

1) $\{x_n + y_n\}$; 2) $\{x_n y_n\}$; 3) $\{x_n / y_n\}$.

49. Последовательность $\{x_n\}$ сходится, а последовательность $\{y_n\}$ расходится. Доказать, что при $b \neq 0$ последовательность $\{ax_n + by_n\}$ расходится.

50. Последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $x \neq 0$, последовательность $\{y_n\}$ расходится. Доказать, что последовательность $\{x_n y_n\}$ не сходится.

51. Привести пример последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ таких, что $\{x_n\}$ сходится, $\{y_n\}$ расходится, а $\{x_n y_n\}$ сходится.

52. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $x_n \neq 0$, $n \in N$.

1) Существует ли $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$?

2) Доказать, что если этот предел существует и равен q, то $|q| \leqslant 1$.

3) Может ли последовательность $\{x_{n+1}/x_n\}$ быть неограниченной?

53. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если x_n равно:

1) $\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}$; 2) $\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}$;

3) $\sqrt{(n+2)(n+1)} - \sqrt{n(n-1)}$; 4) $\sqrt[3]{n^3+n^2+2002} - n$;

5) $n^{3/2}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} - 2\sqrt{n})$; 6) $\dfrac{n^3}{3}\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{3}{n^3}} - 1\right)$.

54. При каких a последовательность

$$x_n = \sqrt{an^2+bn+2} - n, \quad n \in N,$$

имеет предел? Чему равен этот предел?

55. Найти:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{(n+a_1)(n+a_2)} - n)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{(n+a_1)(n+a_2)(n+a_3)} - n)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[p]{(n+a_1)(n+a_2)\ldots(n+a_p)} - n)$, $p \in N$.

56. Пусть $x_n = (n+1)^\alpha - n^\alpha$, $n \in N$. Доказать, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ при $0 < \alpha < 1$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ при $\alpha > 1$.

57. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если x_n равно:

1) $\dfrac{1}{n(\sqrt{n^2-1} - n)}$; 2) $\dfrac{\sqrt{n^2+1} - n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$; 3) $\dfrac{2n - \sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{n^2+3} - n}$;

4) $\dfrac{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+n} - n - 1}$; 5) $\dfrac{\sqrt{n^2+1} - n}{\sqrt{n^3+1} - n\sqrt{n}}$; 6) $\dfrac{\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n}}$;

7) $\dfrac{\sqrt[4]{n^3+n} - \sqrt{n}}{n+2+\sqrt{n+1}}$.

58. Найти:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2002}{n}\right)^n$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a}{n}\right)^n$ (a — произвольное число);

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+3}{n^2}\right)^n$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+10}{2n-1}\right)^n$.

59. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$.

60. Пусть $0<a\leqslant 1$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

61. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если x_n равно:

1) $\sqrt[3n]{8}$; 2) $\sqrt[2n]{0{,}5}$; 3) $\sqrt[n^2]{6}$; 4) $\dfrac{\sqrt[n]{10}-2}{1+\sqrt[n]{0{,}01}}$; 5) $\sqrt[n]{2+\dfrac{1}{n}}$;

6) $\sqrt[n]{\dfrac{5n+1}{n+5}}$; 7) $\sqrt[n]{\dfrac{2n+5}{n-0{,}5}}$; 8) $\sqrt[n]{3^n+2^n}$; 9) $\dfrac{\sqrt[n]{3}-1}{\sqrt[n]{9}-1}$;

10) $\dfrac{\sqrt[n]{8}-1}{\sqrt[n]{2}-1}$; 11) $4^{(n+2)/(n+1)}$; 12) $(1+11^n)^{1/(n+2)}$;

13) $a^{1/(n+p)}$, где $a>0$, $p>0$.

62. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если x_n равно:

1) $\sqrt[n]{n^2}$; 2) $\sqrt[n]{5n}$; 3) $\sqrt[2n]{2n}$; 4) $\sqrt[4n]{n}$; 5) $\sqrt[n^2]{n}$; 6) $\sqrt[n]{n+3}$;

7) $\dfrac{1+\sqrt[n]{2}}{1+\sqrt[n]{2n}}$; 8) $\dfrac{\sqrt[n]{n^3}+\sqrt[n]{7}}{3\sqrt[n]{n^2}+\sqrt[n]{3n}}$; 9) $\sqrt[n]{3n-2}$; 10) $\sqrt[n]{n^3+3n}$;

11) $\sqrt[n]{\dfrac{2n^2-5n+3}{n^5+1}}$.

63. Доказать, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n=0$, где $|q|<1$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{5^n}=0$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3}{3^n}=0$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0$, где $|a|>1$, k — натуральное число.

64. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если x_n равно:

1) $\dfrac{n^3+3^n}{n+3^{n+1}}$; 2) $\dfrac{n^{10}-1}{1+n\ 1{,}1^n}$; 3) $\sqrt[n]{3^n+n\cdot 2^n}$;

4) $\sqrt[n]{\dfrac{n^2+4^n}{n+5^n}}$; 5) $\sqrt[n]{\dfrac{10}{n}-\dfrac{1}{1{,}26n}}$.

65. Пусть $0<a<1$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_a n}{n}=0$.

66. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если x_n равно:

1) $\dfrac{n\lg n}{n^2-1}$; 2) $\dfrac{5n+\lg n}{n-3{,}5}$; 3) $\dfrac{\log_2(n+3)}{n-1{,}3}$; 4) $\dfrac{\log_5(n^2+1)}{n}$;

5) $\dfrac{n-\lg n}{\log_2(4^n+1)}$.

67. Доказать, что для любого a $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$.

68. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если x_n равно:

1) $\dfrac{(-2)^n}{(n+2)!}$; 2) $\dfrac{1}{(0{,}3)^n n!}$; 3) $\dfrac{n\cdot 3^n+1}{n!+1}$; 4) $\dfrac{4^n+n^2\cdot 2^n-1}{n^4+(n!)^2}$;

5) $\dfrac{10^n+n!}{2^n+(n+1)!}$; 6) $\dfrac{(-3)^{n^2-n}}{(n^3)!}$; 7) $\dfrac{2^{n/2}+(n+1)!}{n(3^n+n!)}$.

69. Привести пример такой последовательности $\{x_n\}$, что:

1) $x_n > -1$ для любого $n \in N$, а $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -1$;

2) $x_n < 2$ для любого $n \in N$, а $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$;

3) $x_n > 100$ для $n = 1, 2, \ldots, 100$, а $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 5$ и для любого N найдутся $n \geqslant N$ и $m \geqslant N$ такие, что $x_n < 5$, а $x_m > 5$.

70. Привести пример таких последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, что:

1) $x_n < y_n$ для любого $n \in N$, но $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y_n$;

2) $x_n > y_n$ для $n = 1, 2, \ldots, 1000$, но $\lim\limits_{n\to\infty} x_n < \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

3) $x_n/y_n \geqslant 1000$ для любого $n \in N$, но $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

71. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если x_n равно:

1) $\dfrac{n!}{n^n}$; 2) $\dfrac{n\sin n!}{n\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$; 3) $\dfrac{n\operatorname{arctg} n}{n^2-2}$; 4) $\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k k$;

5) $\left(\dfrac{n^2}{n^2+1}\right)^{(n-1)/(n+1)}$; 6) $\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{(1-\sqrt{n})/(1-n)}$; 7) $\left(\dfrac{2n-1}{5n+1}\right)^{n^2}$;

8) $\left(\dfrac{3n^2-n+1}{2n^2+n+1}\right)^{n^3/(1-n)}$; 9) $\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

72. Пусть $a_n \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = q$, где $q > 1$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

73. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\ldots(1+a^n)}$, $a > 0$.

74. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если x_n равно:

1) $\sqrt[n]{3^n-2^n}$; 2) $\sqrt[n]{\dfrac{2n^3+1}{3n^3-2}}$; 3) $\sqrt[n]{a^n+b^n}$, $a > 0$, $b > 0$.

75. Найти:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$.

76. Доказать, что: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{1/\sqrt{n}} = 1$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/\sqrt{n}} = 1$, $a > 0$.

77. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если x_n равно:

1) $\sqrt[3n]{n}$; 2) n^{p/n^k}, $p,k \in N$; 3) $\sqrt[n]{n+a}$; 4) $\sqrt[n]{an+b}$;

5) $\sqrt[n]{n^3-3n+1}$; 6) $\sqrt[2n]{n^2-1}$; 7) $\sqrt[n]{2^n n^2+2n-1}$;

8) $\sqrt[n]{\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2^n}}$; 9) $\dfrac{\sqrt[n]{n^4}+2\sqrt[n]{n^2}-3}{\sqrt[n]{n^2}-3\sqrt{n}+2}$; 10) $\sqrt[3n]{\dfrac{n^4-2n+3}{n^2+1}}$;

11) $\sqrt[n^2]{\dfrac{n-1}{n+1}}+\sqrt[n]{3^n n^3+2}$.

78. Доказать, что если для любого $n \in N$

$$0 < a/n^k \leqslant x_n \leqslant bn^p, \quad k,p \in N,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1.$$

79. Доказать, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} (5-0{,}5n) = -\infty$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n n = \infty$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$, где $|a|>1$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n-100} = +\infty$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/p} = +\infty$, где $p \in N$; 7) $\lim\limits_{n\to\infty} \lg n = +\infty$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty} \log_a n = +\infty$, где $a>1$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty} \log_a n = -\infty$, где $0<a<1$.

80. Доказать, что для того, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$.

81. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$) и для всех n, начиная с некоторого, $x_n \geqslant cy_n$ (соответственно $x_n \leqslant cy_n$), где $c>0$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (соответственно $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$).

82. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ и для всех n, начиная с некоторого, $|x_n| \geqslant cy_n$, где $c>0$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

83. Доказать, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} n^p = +\infty$, где $p \geqslant 1$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (2n-5)^5 = +\infty$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} (\lg n)^3 = +\infty$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} (\log_a n)^p = +\infty$, где $a>1$, $p \geqslant 1$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty} (0{,}5-(-1)^n\sqrt[3]{n}) = \infty$; 7) $\lim\limits_{n\to\infty} (-n)^n = \infty$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty} (4\sqrt{n}-n) = -\infty$.

84. 1) Пусть $x_n \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = \infty$.

2) Пусть $x_n \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = 0$.

85. Доказать, что $\{x_n\}$ — бесконечно большая последовательность, если x_n равно:

1) $\left(\dfrac{n}{10}\right)^n$; 2) $\dfrac{n^2}{n+8}$; 3) $\dfrac{n!}{4^n}$; 4) $\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}-1}$; 5) $\dfrac{2}{1-\sqrt[n]{n}}$;

6) $\dfrac{5^n}{n^2}$; 7) $\dfrac{a^n}{n^k}$, где $|a|>1$, $k \in N$.

86. 1) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ и $y_n \geqslant c$ для всех $n \in N$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n) = +\infty$.

2) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ и $y_n \leqslant c$ для всех $n \in N$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n) = -\infty$.

87. 1) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, где a — это $+\infty$ или $-\infty$. Доказать, что:

а) если для всех n, начиная с некоторого, $y_n \geqslant c > 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = a$;

б) если для всех n, начиная с некоторого, $y_n \leqslant c < 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = -a$.

2) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ и для всех n, начиная с некоторого, $|y_n| \geqslant c > 0$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \infty$.

88. Доказать, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(5/n - n) = -\infty$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\lg n + 2\cos \pi n) = +\infty$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt{n}}{n+1} = +\infty$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}(an+b) = +\infty$ при $a>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}(an+b) = -\infty$ при $a<0$, $b \in R$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4-100n}{n^2+100} = +\infty$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n}) = +\infty$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n^2-1}-n)} = -\infty$.

89. Записать с помощью символов $\forall$, $\exists$ определение того, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

90. Сформулировать на "языке $\varepsilon - N$" и записать с помощью символов $\exists$, $\forall$ отрицания того, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

91. Верны ли утверждения:

1) всякая бесконечно большая последовательность неограниченна;

2) всякая неограниченная последовательность является бесконечно большой?

92. Сформулировать в позитивной форме утверждения:

1) последовательность не стремится к ∞;

2) последовательность не стремится к $+\infty$;

3) последовательность не стремится к $-\infty$.

93. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ неограниченна, но не стремится к ∞, если:

1) $x_n = n^2\cos(\pi n/2)$; 2) $x_n = n^{(-1)^n}$;

3) $x_n = \dfrac{n}{1+n\sin(\pi n/2)}$, $n \in N$.

94. Доказать, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-n+3}{n^2+1} = +\infty$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-100}{n^2+100} = +\infty$.

95. При каких a последовательность

$$x_n = \frac{n^4+1}{n^3-2} - \frac{an^2}{5n+2}, \quad n \in N,$$

сходится к: 1) $+\infty$; 2) $-\infty$; 3) конечному пределу?

96. При каких p и q из N последовательность

$$x_n = \frac{a_0n^p + a_1n^{p-1} + \ldots + a_{p-1}n + a_p}{b_0n^q + b_1n^{q-1} + \ldots + b_{q-1}n + b_q}, \quad n \in N,$$

где $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$, имеет:

1) конечный предел; 2) бесконечный предел?

97. Доказать, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n!} = +\infty$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\sqrt{n-1}} = +\infty$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{\log_a(n+1)} = +\infty$, $a > 1$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n!}{n} = +\infty$.

98. Доказать, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}} = -\infty$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^3}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}-\sqrt{n-1}) = -\infty$.

99. При каких a последовательность

$$x_n = \sqrt{n^2+n^\alpha} - n, \quad n \in N,$$

сходится к: 1) $+\infty$; 2) конечному пределу? Во втором случае найти этот предел.

100. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если x_n равно:

1) $\dfrac{(n+1)(n+2)\ldots(2n-1)2n}{n^n}$; 2) $\sqrt[n]{n!}$; 3) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$;

4) $\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)^{n!}$; 5) $\dfrac{1}{n}(1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n})$.

101. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, $y_n \neq 0$, $n \in N$, и для всех n, начиная с некоторого, $|y_n| \leqslant C$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty.$$

102. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, где x — не равное нулю число, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$ (или равно $+\infty$, $-\infty$). Доказать, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \infty$ (соответственно равно $+\infty$, $-\infty$) при $x > 0$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \infty$ (соответственно равно $-\infty$, $+\infty$) при $x < 0$.

103. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Верно ли, что:

1) если $|y_n| \leqslant C$, $n \in N$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \infty$;

2) если $y_n \geqslant x_n$, $n \in N$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$;

3) если $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \infty$?

104. Пусть
$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$$
или
$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = -\infty.$$
Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = +\infty$.

2) Пусть
$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = -\infty.$$
Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = -\infty$.

105. Указать такие последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, что
$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$$
и, кроме того:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = +\infty$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 1$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = -\infty$;

4) последовательность $\{x_n - y_n\}$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела.

106. Указать такие последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, что
$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$$
и, кроме того:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 0$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 1$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = +\infty$;

4) последовательность $\{x_n - y_n\}$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела.

107. Указать такие последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, что
$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \infty$$
и, кроме того:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 1$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \infty$;

4) последовательность $\{x_n y_n\}$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела.

108. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, то последовательность $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} x_n\right\}$ неограниченна.

109. Указать сходящуюся подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$, если x_n равно:

1) $(-1)^n$; 2) $\sin\left(\dfrac{\pi n}{4}\right)$; 3) $n - 5E\left(\dfrac{n-1}{5}\right)$.

110. Привести пример последовательности, не имеющей ни одной сходящейся (к числу) подпоследовательности.

111. Привести пример неограниченной последовательности, имеющей сходящуюся (к числу) подпоследовательность.

112. Доказать, что для того, чтобы a (число, $+\infty$ или $-\infty$) было частичным пределом последовательности, необходимо и достаточно, чтобы в любой окрестности a содержалось бесконечно много членов этой последовательности.

113. Найти все частичные пределы последовательности $\{x_n\}$, если x_n равно:

1) $\dfrac{(-1)^n}{n+1}$; 2) $\dfrac{n^2}{n+5}$; 3) $\dfrac{1-n^3}{1+n^2}$; 4) $(-1)^n$; 5) $3^{(-1)^n n}$;
6) $\sin(\pi n/4)$; 7) $n\cos(\pi n/2)$.

114. У последовательности $\{x_n\}$ подпоследовательность $\{x_{2k}\}$ имеет пределом a, а подпоследовательность $\{x_{2k-1}\}$ имеет пределом b (a, b — числа или $+\infty$, $-\infty$). Доказать, что только a и b являются частичными пределами последовательности $\{x_n\}$.

115. Доказать, что всякая монотонная последовательность имеет только один частичный предел.

116. Для последовательности $\{x_n\}$ найти множество частичных пределов, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$, если:

1) $x_n = \cos\dfrac{\pi n}{3}$; 2) $x_n = (-1)^n\dfrac{2n+1}{n}$; 3) $x_n = \left(1{,}5\cos\dfrac{2\pi n}{3}\right)^n$;

4) $\{x_n\} =$
$$= \left\{1, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \ldots, \frac{9}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{2}{10^2}, \ldots, \frac{99}{10^2}, \ldots, \frac{1}{10^n}, \frac{2}{10^n}, \ldots, \frac{10^n-1}{10^n}, \ldots\right\}.$$

117. Для последовательности $\{x_n\}$ найти $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$, а также $\sup\{x_n\}$, $\inf\{x_n\}$, если x_n равно:

1) $\dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$; 2) $(-1)^n\dfrac{3n-1}{n+2}$; 3) $\dfrac{n^2\sin(\pi n/2)+1}{n+1}$;
4) $\dfrac{((-1)^n-1)n^2+n+1}{n}$; 5) $\dfrac{(1+\cos\pi n)n+\lg n}{\lg 2n}$.

118. Привести пример расходящейся последовательности, имеющей только один частичный предел.

119. Доказать, что последовательность сходится тогда и только тогда, когда она ограниченна и имеет один частичный предел.

120. У последовательности $\{x_n\}$ подпоследовательности $\{x_{2k}\}$, $\{x_{2k-1}\}$ и $\{x_{3k}\}$ сходятся. Доказать, что сходится и сама последовательность.

121. Доказать, что всякая неограниченная последовательность либо является бесконечно большой, либо имеет конечный частичный предел.

122. Последовательности $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ таковы, что для любого k существует n, такое, что $y_k = x_{n_k}$. Известно, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел. Следует ли отсюда, что и последовательность $\{y_k\}$ имеет предел?

123. Для последовательности $\{x_n\}$ найти множество частичных пределов, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, $\sup\{x_n\}$, $\inf\{x_n\}$, если x_n равно:

1) $(\cos(\pi n/2))^{n+1}$; 2) $(1+(-1)^n n)/n$; 3) $(-n)^{\sin(\pi n/2)}$;

4) $\dfrac{1}{n} + \sin\dfrac{\pi n}{3}$; 5) $\dfrac{(1-(-1)^n)2^n+1}{2^n+3}$; 6) $\sqrt[n]{4^{(-1)^n}+2}$;

7) $2^{(-1)^n n} n$; 8) $\dfrac{1}{2}\left(n-2-3E\left(\dfrac{n-1}{3}\right)\right)\left(n-3-3E\left(\dfrac{n-1}{3}\right)\right)$.

124. Найти множество частичных пределов последовательностей:

1) $\left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{2}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{2}{4}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{4}, \dfrac{5}{4}, \ldots, \dfrac{1}{2^n}, \ldots, \dfrac{2^n+1}{2^n}, \ldots\right\}$;

2) $\left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{2}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{2}{4}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{4}, \ldots, \dfrac{9}{4}, \ldots, \dfrac{1}{2^n}, \dfrac{2}{2^n}, \ldots, \dfrac{3^n}{2^n}, \ldots\right\}$.

125. Последовательность $\{x_n\}$ такова, что

$$x_1 = 0, \quad x_{2k} = \frac{x_{2k-1}}{2}, \quad x_{2k+1} = 1 + x_{2k}, \quad k \in N.$$

Найти $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

126. Доказать, что если последовательность $\{x_n\}$ не достигает своей:

а) верхней грани M, то $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = M$;

б) нижней грани m, то $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = m$.

127. Доказать, что у любой последовательности есть монотонная подпоследовательность.

128. Доказать, что для всякой последовательности $\{x_n\}$ $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ и $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ являются ее частичными пределами.

129. 1) Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограниченна снизу, $m_n =$

$= \inf\limits_{k\geqslant n}\{x_k\}$. Доказать, что последовательность $\{m_n\}$ сходится и
$$\lim_{n\to\infty} m_n = \varliminf_{n\to\infty} x_n.$$

2) Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограниченна сверху, $M_n = \sup\limits_{k\geqslant n}\{x_k\}$. Доказать, что последовательность $\{M_n\}$ сходится и
$$\lim_{n\to\infty} M_n = \varlimsup_{n\to\infty} x_n.$$

130. Доказать, что множество частичных пределов последовательности замкнуто.

131. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — ограниченные последовательности. Доказать, что
$$\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} (x_n + y_n).$$

132. Доказать, что если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$:

1) ограниченны сверху, то
$$\varlimsup_{n\to\infty} (x_n + y_n) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n;$$

2) ограниченны снизу, то
$$\varliminf_{n\to\infty} (x_n + y_n) \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n\ ^{*)}.$$

133. Пусть $x_n > 0$, $n \in N$. Доказать, что:

1) $\varliminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$; 2) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$.

134. Привести пример последовательности, у которой множество частичных пределов совпадает с множеством значений последовательности и: 1) конечно; 2) счетно.

135. Указать последовательность, множеством частичных пределов которой является множество натуральных чисел.

136. Указать последовательность, частичными пределами которой были бы: 1) все числа вида $1/n$, $n \in N$; 2) все рациональные числа.

Может ли множество частичных пределов последовательности состоять только из этих чисел?

137. На плоскости даны несовпадающие точки A, B, C. Точка A_1 — середина отрезка CB, точка A_2 — середина отрезка AA_1, A_3 — середина CA_2, ..., A_{2k} — середина AA_{2k-1}, A_{2k+1} — середина CA_{2k}, ... Найти частичные пределы последовательности точек $\{A_n\}$.

138. Построить последовательность, множеством частичных пределов которой является отрезок $[a; b]$.

139. Последовательность $\{x_n\}$ ограниченна,
$$\lim_{n\to\infty} (x_n - x_{n+1}) = 0, \quad a = \varliminf_{n\to\infty} x_n, \quad b = \varlimsup_{n\to\infty} x_n, \quad a \neq b.$$

---

*) Считают, что $(+\infty) + (\infty) = +\infty$, $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.

Доказать, что любое число из отрезка $[a, b]$ является частичным пределом последовательности $\{x_n\}$

140. Последовательность $\{x_n\}$ такова, что $x_{n+1} > x_n - \alpha_n$, где $\alpha_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ Пусть $a = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$, $b = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$ Доказать, что любое c, $a \leqslant c \leqslant b$, является частичным пределом последовательности $\{x_n\}$

141. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна, если

1) $x_n = \dfrac{1}{n}$, $n \in N$, 2) $x_n = \dfrac{n+1}{3n-2}$, $n \in N$,

3) $x_n = 0,\underbrace{77\ldots7}_{n \text{ цифр}}$, $n \in N$,

4) $x_n = a + aq + \ldots + aq^{n-1}$, где $|q| < 1$, $n \in N$,

5) $\{x_n\} = \left\{1, -1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}, \ldots, \dfrac{1}{n}, -\dfrac{1}{n}, \ldots\right\}$,

6) $x_1 = 1$, $x_n = x_{n-1} + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n!}$ $(n = 2, 3, \ldots)$

142. Пусть a_0 — целое неотрицательное число, $\{a_n\}$ — последовательность, члены которой — цифры Рассмотрим последовательность конечных десятичных дробей $x_n = a_0, a_1a_2 \ldots a_n$, $n \in N$ Доказать, что эта последовательность фундаментальна

143. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится, если x_n равно

1) $\dfrac{\sin a}{2} + \dfrac{\sin 2a}{2^2} + \dfrac{\sin 3a}{2^3} + \ldots + \dfrac{\sin na}{2^n}$, $a \in R$,

2) $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k q^k$, где $|q| < 1$, $|a_k| \leqslant C$, $k \in N$, 3) $1 + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$,

4) $\dfrac{1}{1\cdot 2} - \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$

144. Доказать, что фундаментальная последовательность ограниченна

145. Доказать, что у фундаментальной последовательности любая подпоследовательность фундаментальна

146. Доказать, что для того, чтобы последовательность $\{x_n\}$ была фундаментальной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \qquad |x_n - x_N| < \varepsilon$$

147. Пользуясь отрицанием условия Коши, доказать, что последовательность $\{x_n\}$ расходится, если x_n равно

1) $0{,}2^{(-1)^n n}$, 2) $\dfrac{n\cos\pi n - 1}{2n}$, 3) $(-1)^n\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$,

4) $\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)^n$; 5) $\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{2}{3^2}+\ldots+\dfrac{n}{(n+1)^2}$.

148. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — фундаментальные последовательности. Доказать, что:

1) $\{x_n+y_n\}$ — фундаментальная последовательность;

2) $\{x_ny_n\}$ — фундаментальная последовательность;

3) если $|y_n|\geqslant c>0$, $n\in N$, то $\{x_n/y_n\}$ — фундаментальная последовательность.

149. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится, если x_n равно:

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin k\alpha}{k(k+1)}$, $\alpha\in R$; 2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}$, где $|a_k|\leqslant C$, $k\in N$.

150. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ расходится, если x_n равно:

1) $\sqrt[n]{((-1)^{n+1}-1)^n+1}$; 2) $\cos n$; 3) $E\left(\dfrac{n^2+1}{3}\right)-\dfrac{n^2}{3}$;

4) $\dfrac{n^2}{p}-E\left(\dfrac{n^2+1}{p}\right)$, $p\in N$, $p\geqslant 3$; 5) $\sin n$;

6) $\cos(an+b)$, где $a,b\in R$, $a\neq 2k\pi$, $k\in N$; 7) $\operatorname{tg} n$.

151. Пусть l_n, $n\in N$, — число натуральных чисел p, удовлетворяющих неравенству

$$100n+1\leqslant p^2\leqslant 100(n+1).$$

Доказать, что последовательность $\{l_n\}$ расходится.

152. Пусть l_n, $n\in N$, — число натуральных чисел p, удовлетворяющих неравенству

$$n^k+1\leqslant p^{k+1}\leqslant (n+1)^k,$$

где k — данное натуральное число. Доказать, что последовательность $\{l_n\}$ расходится.

153. Последовательность $\{x_n\}$ такова, что последовательность $\left\{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_n\right\}$ сходится. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

154. Последовательность $\{x_n\}$ монотонна и $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. Доказать, что последовательность

$$S_n=x_1-x_2+\ldots+(-1)^{n-1}x_n,\quad n\in N,$$

сходится.

155. Доказать, что монотонная ограниченная последовательность фундаментальна.

156. Последовательность $\{x_n\}$ такова, что $|x_{n+1}-x_n|\leqslant C\alpha^n$, где $0<\alpha<1$, $n\in N$. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится.

157. Доказать, что для любого $x \in R$ последовательность
$$S_n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}, \quad n \in N,$$
сходится.

158. Привести пример расходящейся последовательности $\{x_n\}$ такой, что для любого $p \in N$
$$\lim_{n \in \infty} |x_{n+p} - x_n| = 0.$$

159. Последовательность $\{x_n\}$ не сходится. Доказать, что существует последовательность натуральных чисел $\{p_n\}$ такая, что последовательность $\{x_{n+p_n} - x_n\}$ не стремится к 0.

160. Для последовательности $\{x_n\}$ обозначим
$$M_n = \sup_{k \geqslant n,\ l \geqslant n} \{|x_k - x_l|\}.$$
Доказать: для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяла условию Коши, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 0$.

161. Последовательность $\{x_n\}$ такова, что для всех n, начиная с некоторого, $0 < x_{n+1} < x_n$, и последовательность $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} x_n\right\}$ сходится.

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = 0$.

162. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится, и найти ее предел, если x_n равно:

1) $\dfrac{n^3}{10^n}$; 2) $\dfrac{2000^n}{n!}$;

3) $x_1 = 8,\ x_2 = \dfrac{8}{1}\,\dfrac{11}{7},\ \ldots,\ x_n = \dfrac{8}{1}\,\dfrac{11}{7}\,\ldots\,\dfrac{3n+5}{6n-5},\ \ldots$

163. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится, если x_n равно:

1) $\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$; 2) $1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^3} + \ldots + \dfrac{1}{n^n}$; 3) $1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}$.

164. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, и найти его, если:

1) $x_1 = 13,\ x_{n+1} = \sqrt{12 + x_n}$;

2) $x_1 = \sqrt[k]{5},\ x_{n+1} = \sqrt[k]{5x_n}$, где $k \in N$;

3) $x_1 = \sqrt[k]{a},\ x_{n+1} = \sqrt[k]{ax_n}$, где $k \in N,\ a > 0$;

4) $x_{n+1} = \dfrac{4}{3}x_n - x_n^2$: а) $x_1 = \dfrac{1}{6}$; б) $x_1 = \dfrac{1}{2}$; в) $x_1 = \dfrac{7}{6}$;

5) $x_1 = 1,\ x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{x_n},\ n \in N$. (У к а з а н и е. Рассмотреть подпоследовательности $\{x_{2k}\}$ и $\{x_{2k-1}\}$.)

165. Доказать, что последовательность $\{(1 + 1/n)^{n+1}\}$ монотонно

убывает и
$$\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^{n+1}=e.$$

166. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, где x_n равно:

1) $\left(1+\dfrac{1}{n+k}\right)^n$, $k\in N$; 2) $\left(\dfrac{2^n+1}{2^n}\right)^{2^n}$; 3) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$;

4) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$; 5) $\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n$; 6) $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$.

167. Пусть $\{k_n\}$ — последовательность натуральных чисел и $\lim\limits_{n\to\infty} k_n=+\infty$. Доказать, что
$$\lim_{n\to\infty}(1+1/k_n)^{k_n}=e.$$

168. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+1/n)=0$.

(Указание. Доказать, что $\ln(1+1/n)<1/n$, $n\in N$.)

169. Доказать, что монотонная последовательность имеет предел, если какая-либо ее подпоследовательность имеет предел.

170. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если x_n равно:

1) $\dfrac{n^\alpha}{n!}$, $\alpha>0$; 2) $\dfrac{(n+k)!}{n^n}$, $k\in N$; 3) $\dfrac{n^n}{(2n)!}$; 4) $\dfrac{n^n}{(n!)^2}$;

5) $\dfrac{n^n}{(n!)^\alpha}$, $\alpha>0$; 6) $\log_a\dfrac{4^n n!}{n^n}$, $a>0$, $a\neq 1$.

171. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится, если x_n равно:

1) $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\ldots+\dfrac{1}{2n}$; 2) $1+\dfrac{1^2}{4}+\dfrac{2^2}{4^2}+\ldots+\dfrac{n^2}{4^n}$;

3) $\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\ldots\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)$.

172. Пусть $x_n>0$ для всех $n\geqslant n_0$. Доказать, что последовательность $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$, $n\in N$, имеет предел, конечный или бесконечный.

173. Последовательность $\{x_n\}$ ограниченна,
$$y_n=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\{x_k\},\quad z_n=\min_{1\leqslant k\leqslant n}\{x_k\},\quad n\in N.$$

Доказать, что последовательности $\{y_n\}$ и $\{x_n\}$ сходятся. Обязательно ли их пределы являются частичными пределами последовательности $\{x_n\}$?

174. Пусть $x_{n+1}\geqslant x_n$, $y_{n+1}\leqslant y_n$, $n\in N$, и $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$. Доказать, что последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся и $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

175. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если x_n равно:

1) $\left(1+\dfrac{1}{n(n+2)}\right)^n$; 2) $\left(\dfrac{2^n+3}{2^n+1}\right)^n$; 3) $\left(\dfrac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{n^2}$;
4) $\left(\dfrac{n^2+n}{n^2+2n+2}\right)^n$; 5) $\left(\dfrac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\right)^n$.

176. Доказать, что для любого $n \in N$:
1) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n > e^{1-1/n}$; 2) $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2} < \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) < \dfrac{1}{n}$.

177. Найти:
1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\log_a(n+1)-\log_a n}$, $a>0$, $a\neq 1$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

178. Доказать, что для любого $k \in N$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{kn}\right)^n = \sqrt[k]{e}$.

179. Доказать, что для любого рационального числа $r>0$
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = e^r.$$

180. Доказать, что для любого действительного числа $x>0$
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

181. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$, если:
1) $x=-k$, $k\in N$; 2) $x=-1/k$, $k \in N$; 3) $x\in R$, $x<0$.

182. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $x_n>0$. Доказать, что
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$$

183. Найти: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n-1}\right)^n$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n/2}$.

184. Пусть $\{x_n\}$ — арифметическая прогрессия с разностью $d\neq 0$. Найти:
1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+\ldots+\dfrac{1}{a_na_{n+1}}\right)$, если $a_n\neq 0$, $n\in N$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\dfrac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}\right)$,
если $a_n>0$, $n\in N$.

185. Пусть a — цифра, $a\neq 0$. Найти
$$\lim_{n\to\infty} 10^{-n}(a+aa+\ldots+\underbrace{aa\ldots a}_{n\ \text{знаков}}).$$

186. Пусть $p_1,p_2,\ldots,p_k$, $a_1,a_2,\ldots,a_k$ — положительные числа. Существует ли
$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1a_1^{n+1}+p_2a_2^{n+1}+\ldots+p_ka_k^{n+1}}{p_1a_1^n+p_2a_2^n+\ldots+p_ka_k^n}\ ?$$
Если существует, то найти этот предел.

187. Пусть $x_n = (n+1)^\alpha - n^\alpha$, $n \in N$. Доказать, что:
1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ при $0 < \alpha < 1$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ при $\alpha > 1$.

188. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если x_n равно:

1) $\dfrac{n^2+3n-2}{1+2+\ldots+n}$; 2) $\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n^3}$;

3) $\dfrac{1-2+3-\ldots+(2n-1)-2n}{\sqrt{n^2+1}}$; 4) $\dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}$;

5) $\dfrac{1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)}{n^3}$; 6) $\dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^2} - \dfrac{n}{3}$;

7) $\dfrac{1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2}{n^3}$;

8) $\dfrac{1}{n}\left(\left(a+\dfrac{1}{n}\right)^2 + \left(a+\dfrac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(a+\dfrac{n-1}{n}\right)^2\right)$.

189. Доказать, что последовательность

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} \frac{j}{n^3}, \quad n \in N,$$

имеет предел, и найти его.

190. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если:

1) $x_n = \left(1-\dfrac{2}{2\cdot 3}\right)\left(1-\dfrac{2}{3\cdot 4}\right)\ldots\left(1-\dfrac{2}{(n+1)(n+2)}\right)$, $n \in N$;

2) $x_1 = 1$, $x_n = \left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$, $n \in N$, $n \geqslant 2$.

191. Пусть $x_n \neq 1$, $n \in N$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. Найти

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n + x_n^2 + \ldots + x_n^k - k}{x_n - 1}, \quad k \in N.$$

192. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

193. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $a > 0$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = 1$.

194. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_k$, $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — положительные числа. Существует ли

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p_1 a_1^n + p_2 a_2^n + \ldots + p_k a_k^n}\,?$$

Если существует, то найти этот предел.

195. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \ldots + a_{p-1} n + a_p}{b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + \ldots + b_{q-1} n + b_q}} = 1,$$

где $p, q \in N$, $a_0/b_0 > 0$.

196. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/\sqrt{n}} = 1$.

197. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $x_n > 0$, $n \in N$, то
$$\lim_{n\to\infty} x_n^{1/x_n} = 1.$$

198. Найти: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{n+1}{2n-1}\right)^n$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt[n]{\lg n}}{(1+1/n)^{n^2}}$.

199. Пусть $|q| < 1$, $S_n = q + 2q^2 + 3q^3 + \ldots + nq^n$, $n \in N$. Доказать, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, и найти его.

200. Найти
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lg(5n^2+3n+1)}{\sqrt{n}+1}.$$

201. Доказать, что для любых $a > 0$, $a \neq 1$, $\alpha > 0$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n^\alpha} = 0.$$

202. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ и $x_n > 0$, $n \in N$. Доказать, что для любого $a > 0$, $a \neq 1$,
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a x_n}{x_n} = 0.$$

203. 1) Доказать, что если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ таковы, что
$$\lim_{n\to\infty} (|x_n + y_n| - |x_n - y_n|) = +\infty,$$
то
$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = \lim_{n\to\infty} |y_n| = \lim_{n\to\infty} x_n y_n = +\infty.$$

2) Доказать, что верно и обратное утверждение.

204. 1) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $m_n = \inf\limits_{k\geqslant n} \{x_k\}$, $n \in N$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} m_n = +\infty$.

2) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, $M_n = \sup\limits_{k\geqslant n}\{x_k\}$, $n \in N$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = -\infty$.

205. Пусть $\{p_n\}$ — последовательность натуральных чисел, и пусть последовательность
$$S_n = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n}, \quad n \in N,$$
сходится. Доказать, что сходится и последовательность
$$\sigma_n = \left(1 + \frac{1}{p_1}\right)\left(1 + \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{p_n}\right), \quad n \in N.$$

206. Пусть $S_n = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!}$, $n \in N$. Доказать, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = e$; 2) $e - S_n \leqslant \dfrac{n+2}{n!(n+1)^2}$.

207. Доказать, что разность $e - S_n$, $n \in N$ (S_n из задачи 206), убывает с ростом n быстрее, чем разность $e - (1 + 1/n)^n$.

208. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}\right) = \dfrac{1}{e}$.

209. Доказать, что число e иррационально.

210. Пусть $\sigma_n = 3 - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)(k+1)!}$, $n \in N$. Доказать, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = e$;

2) разность $\sigma_n - e$ убывает быстрее, чем разность $e - S_n$, где S_n из задачи 206.

211. Доказать, что для любого $n \in N$

$$e < (1 + 1/n)^n (1 + 1/(2n)).$$

212. Последовательность $\{x_n\}$ такую, что $x_1 = a$, $x_{n+1} = qx_n + d$, $n \in N$, называют *арифметико-геометрической прогрессией* со знаменателем q и разностью d.

Доказать, что:

1) при $|q| < 1$ эта последовательность сходится, и найти ее предел;

2) при $|q| > 1$ и $a \neq d/(1-q)$ эта последовательность расходится.

213. Пусть $\{x_n\}$ — арифметико-геометрическая прогрессия со знаменателем $q \neq 1$ и разностью d (см. задачу 212), $S_n = x_1 + \ldots + x_n$, $n \in N$.

Найти: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} (S_n - nx_n)$.

214. В треугольнике ABC_1 проведена биссектриса C_1C_2, в треугольнике AC_1C_2 проведена биссектриса C_2C_3, в треугольнике AC_2C_3 — биссектриса C_3C_4 и т. д. Доказать, что последовательность величин углов $C_{n+1}C_nA$, $n \in N$, имеет предел, и найти его, если угол BAC равен α.

215. Вписанная в треугольник $A_1B_1C_1$ окружность касается его сторон B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1 в точках A_2, B_2, C_2 соответственно, вписанная в треугольник $A_2B_2C_2$ окружность касается его сторон B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2 в точках A_3, B_3, C_3 соответственно и т. д. Найти предел последовательности величин углов $B_nA_nC_n$ при $n \to \infty$.

216. В трапеции $ABCD$ ($AD \| BC$) точки B_1 и C_1 — середины диагоналей AC и BD, в трапеции AB_1C_1D точки B_2 и C_2 — середины диагоналей AC_1 и B_1D и т. д. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} |B_nC_n|$, если $|AD| = a$ в случаях: а) $|AD| > |BC|$; б) $|AD| < |BC|$.

217. Пусть $a > 0$, $x_1 = \sqrt{a}$, $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$, $n \in N$. Доказать, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, и найти его.

218. Исследовать на сходимость последовательность:

1) $x_1 = 0,\ x_{n+1} = \dfrac{x_n + 1}{x_n + 2},\ n \in N;$

2) $x_1 = 1/2,\ x_{n+1} = (1 - x_n)^2,\ n \in N.$

219. Пусть $x_1 = a,\ 0 < a < 1,\ x_{n+1} = 1 + qx_n^2,\ n \in N$. При каких $q \in [0; 1]$ последовательность $\{x_n\}$ сходится?

220. Пусть $x_1 > 0,\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right)$, где $a > 0,\ n \in N$. Доказать, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, и найти его.

221. Пусть $x_1 > 0,\ x_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(2x_n + \dfrac{125}{x_n^2}\right),\ n \in N$. Доказать, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, и найти его.

222. Пусть $x_1 = \sqrt{2},\ x_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{x_n}},\ n \in N$. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится.

223. Доказать, что:

1) последовательность $\{x_n\}$, где $x_1 = a,\ a > -1,\ x_{n+1} = \dfrac{1}{1 + x_n}$, имеет предел, и найти его;

2) у последовательности $\{x_n\}$, где $x_1 = a,\ 0 < a < 1,\ x_{n+1} = 1 - x_n^2$, ее подпоследовательности $\{x_{2k}\}$ и $\{x_{2k-1}\}$ имеют пределы, являющиеся корнями уравнения $x = x^2(2 - x^2)$.

224. Исследовать на сходимость последовательность $(n \in N)$:

1) $x_1 = -3,\ x_{n+1} = 1 + \dfrac{6}{x_n}$; 2) $x_1 = -\dfrac{7}{13},\ x_{n+1} = \dfrac{1 + x_n}{2x_n}$;

3) $x_1 = \dfrac{8}{17},\ x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n} - \dfrac{3}{2}$; 4) $x_1 = \dfrac{6}{7},\ x_{n+1} = 4 - \dfrac{3}{x_n}$.

225. Пусть $x_1 > 0,\ x_{n+1} = \dfrac{a}{x_n} + b,\ n \in N$, где $a > 0,\ b > 0$. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится, и найти ее предел.

226. Пусть $a \in R,\ x_1 = \dfrac{a}{2},\ x_{n+1} = \dfrac{a}{2} + \dfrac{x_n^2}{2}$. Найти все значения a, при которых последовательность $\{x_n\}$ сходится, и найти ее предел.

227. 1) Пусть $0 < x_1 < 1,\ x_{n+1} = x_n(2 - x_n),\ n \in N$:

а) доказать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$;

б) исследовать последовательность $\{x_n\}$ на сходимость, если $x_1 \notin (0; 1)$.

2) Пусть $0 < x_1 < 1/a,\ x_{n+1} = x_n(2 - ax_n),\ n \in N$, где $a > 0$. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1/a$.

3) Пусть $0 < x_1 < a,\ x_{n+1} = x_n(a - x_n),\ n \in N$. Доказать, что:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a - 1$ при $a > 1$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ при $0 < a \leqslant 1$.

228. Последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ удовлетворяют условиям:

1) $x_1 = a > 0,\ y_1 = b > 0,\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n + y_n),\ y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n},\ n \in N;$

2) $x_1 = a > 0,\ y_1 = b > 0,\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n + y_n),\ y_{n+1} = \dfrac{2x_n y_n}{x_n + y_n},$ $n \in N$.

Доказать, что последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. В случае 2) найти этот предел.

229. При каких a и b из R сходится (соответственно расходится) последовательность $\{x_n\}$, если $x_1 = a$, $x_2 = b$ и:

1) $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$; 2) $x_{n+2} = 4x_{n+1} - 3x_n$;

3) $x_{n+2} = -2x_{n+1} - x_n$; 4) $x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n$, $n \in N$?

230. Пусть $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n/(4 - x_n)$, $n \in N$. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, и найти его, если:

1) $0 < a < 3$; 2) $3{,}5 < a < 4$.

231. Доказать сходимость последовательности и найти ее предел, если:

1) $x_1 = 4,\ x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$; 2) $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \sqrt[3]{6 + x_n}$;

3) $x_1 = 3,\ x_{n+1} = \sqrt{12 + x_n},\ n \in N$.

232. Доказать, что последовательность $x_1 = a$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2 + x_n}$, $n \in N$, имеет предел, и найти его, если:

1) $a < 0$; 2) $a < -2$; 3) $-1 < a < 0$.

233. Доказать, что последовательность $x_1 = a$, $x_{n+1} = 1 + \dfrac{b}{x_n}$, $n \in N$, где $b < -1/4$, расходится.

234. Пусть $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n^2 + 3x_n + 1$, $n \in N$.

Установить, имеет ли эта последовательность предел (конечный или бесконечный), и найти его, если:

1) $a = -5/4$; 2) $a = -3/4$; 3) $a = -7/4$; 4) $a = -9/4$.

235. Доказать, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, и найти его, если

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = 2 - 1/x_n.$$

236. Доказать, что последовательность

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = 1 - 1/4x_n, \quad n \in N,$$

сходится, и найти ее предел, если:

1) $a > 1/2$; 2) $a < 0$; 3) $0 < a < 1/4$.

237. Доказать, что если $x_1 > 0$, $x_{n+1} = a(x_n + 1/x_n)$, $n \in N$, то:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ при $a \geqslant 1$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a/(1-a)}$ при $0 < a < 1$.

238. Исследовать на сходимость последовательность ($n \in N$):

1) $x_1 = 9/10,\ x_{n+1} = 1/(2x_n - 1)$; 2) $x_1 = 2,\ x_{n+1} = 6/(x_n - 1)$.

239. Пусть $x_1 = a,\ x_{n+1} = x_n^2 + (1-2p)x_n + p^2,\ n \in N$.

Найти все значения a и p, при которых последовательность $\{x_n\}$ сходится.

240. Доказать, что последовательность

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \frac{bx_n}{c + dx_n}, \quad n \in N,$$

имеет предел, и найти его ($a,\ b,\ c,\ d \in R$ и таковы, что $c + dx_n \neq 0$ для любого $n \in N$, $bd \neq 0$, $|b| \neq |c|$, $ad \neq b - c$).

241. Доказать, что последовательность

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = 1 + b/x_n, \quad n \in N,$$

где $0 > b > -1/4$, сходится; найти ее предел.

242. Пусть $x_1 > 0,\ x_{n+1} = ax_n + b/x_n,\ n \in N$, где $a > 0,\ b > 0$. Доказать, что существует конечный или бесконечный предел этой последовательности, и найти его.

243. Доказать, что существует единственная последовательность $\{x_n\}$ такая, что $x_1 = 1,\ x_n = x_{n+1} + x_{n+2},\ x_n > 0,\ n \in N$. Доказать, что эта последовательность имеет предел, и найти его.

244. Последовательность x_n такова, что

$$x_{n+2} = \frac{5}{2}x_{n+1} + x_n, \quad n \in N, \quad x_1 = a.$$

Как следует выбрать x_2, чтобы эта последовательность сходилась? Чему будет равен ее предел?

245. Доказать, что последовательность

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}, \quad n \in N,$$

где $\alpha > 0$, сходится.

246. 1) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = 0.$$

2) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = a.$$

3) Привести пример расходящейся последовательности $\{x_n\}$, для которой существует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

247. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

248. Последовательность $\{x_n\}$ такова, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = a$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n} = a$.

249. 1) Пусть $x_n > 0$, $n \in N$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{1/x_1 + 1/x_2 + \ldots + 1/x_n} = a$$

2) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, где $y \neq 0$ и $y_1 + y_2 + \ldots + y_n \neq 0$ для любого $n \in N$ Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{y_1 + y_2 + \ldots + y_n} = \frac{x}{y}$$

(здесь y — число, x — число, $+\infty$ или $-\infty$)

250. 1) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, $x_n > 0$, $n \in N$ Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} = 1$$

2) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $x_n > 0$, $n \in N$, $x \neq 0$ Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} = x$$

3) Привести пример расходящейся последовательности $\{x_n\}$, для которой существует

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

251. Пусть $x_n > 0$, $n \in N$, и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = x$ Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = x$$

252. Найти

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$, 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[p]{n}}{\sqrt[n]{n!}}$, 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}$,

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4^n n!}{(3n)^n}$, 5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n n!}{n^n}$

253. (*Теорема Штольца*) Пусть последовательность $\{x_n\}$ строго монотонна, начиная с некоторого номера, и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ Последовательность $\{y_n\}$ такова, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} = a$$

Доказать, что и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_n}{x_n} = a$, где a — число, $+\infty$, $-\infty$ или ∞

254. Пусть $\{x_n\}$ — строго монотонная, начиная с некоторого номера, последовательность, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} = a$$

Доказать, что и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_n}{x_n} = a$, где a — число, $+\infty$, $-\infty$ или ∞

255. Пусть $p \in N$ Найти

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p+1}}(1^p + 2^p + \ldots + n^p)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^p}(1^p + 2^p + \ldots + n^p) - \frac{n}{p+1}\right)$.

256. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \ldots + x_{n-1} y_2 + x_n y_1}{n} = ab.$$

257. Функция f неограниченна сверху (снизу) на множестве X. Доказать, что существует последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in X$, $n \in N$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$ (соответственно $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$).

258. Доказать, что если функция неограниченна на отрезке, то существует точка этого отрезка, в каждой окрестности которой функция неограниченна. Верно ли это утверждение для интервала?

259. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, $n \in N$.

Может ли последовательность $\{S_n\}$ иметь только два частичных предела, если:

1) x_n — действительные числа; 2) x_n — комплексные числа?

260. Последовательность x_n такова, что для любого $k > 1$, $k \in N$, ее подпоследовательность $\{x_{pk}\}$ имеет предел, равный 1. Следует ли отсюда, что и последовательность $\{x_n\}$ сходится к 1?

261. Доказать, что всякую ограниченную последовательность можно разбить на счетное множество последовательностей, имеющих один и тот же предел.

262. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — ограниченные последовательности с общим множеством частичных пределов. Доказать, что найдется такая перестановка $\{z_n\}$ последовательности $\{y_n\}$ (см. задачу 33), что

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - z_n) = 0.$$

263. Дано счетное множество последовательностей $\{x_n^{(k)}\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ таких, что $x_n^{(k)} > 0$ для любых $n, k \in N$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{(k)} = +\infty$ для любого $k \in N$. Доказать, что существует последовательность $\{b_n\}$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{x_n^{(k)}} = 0 \quad \text{для любого} \quad k \in N.$$

264. Привести пример возрастающей ограниченной последовательности $\{x_n\}$ такой, что последовательность $\{(n + l)(x_{n+1} - x_n)\}$ неограниченна.

265. 1) Последовательность $\{x_n\}$ ограниченна. Доказать, что последовательность $\{n(x_{n+1} - x_n)\}$ не может иметь пределом $+\infty$.

2) Привести пример сходящейся последовательности $\{x_n\}$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} n(x_{n+1} - x_n) = \infty$.

266. Доказать сходимость ограниченной сверху последовательности, удовлетворяющей условию:

1) $x_{n+1} - x_n \geqslant -1/2^n$, $n \in N$; 2) $x_{n+1} - x_n \geqslant -1/n^2$, $n \in N$;

3) $x_{n+1} - x_n \geqslant \alpha_n$, $n \in N$, где α_n таковы, что последовательность $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k\right\}$ сходится.

267. Последовательность $\{x_n\}$ такова, что для любых $m, n \in N$

$$0 \leqslant x_{m+n} \leqslant x_m + x_n.$$

Доказать, что последовательность $\{x_n/n\}$ сходится.

268. Пусть $\{x_n\}$ — возрастающая неограниченная последовательность, $x_n \neq 0$, $n \in N$. Пусть K_n — число членов этой последовательности, не превосходящих n $(n \in N)$. Доказать, что если существует один из пределов

$$\lim_{n\to\infty} \frac{K_n}{n} \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{x_n},$$

то существует и другой, и эти пределы равны.

269. (*Признак Лейбница.*) Последовательность $\{a_n\}$ такова, что

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0,$$

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leqslant |a_{n+1} - a_n|, \quad (a_{n+2} - a_{n+1})(a_{n+1} - a_n) \leqslant 0, \quad n \in N.$$

Доказать, что последовательность $\{a_n\}$ сходится.

270. Последовательность $\{x_n\}$ имеет *ограниченную вариацию*, если ограниченна последовательность

$$\sigma_n = |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \ldots + |x_{n+1} - x_n|, \quad n \in N.$$

Доказать, что:

1) монотонная ограниченная последовательность имеет ограниченную вариацию;

2) последовательность с ограниченной вариацией сходится;

3) для всякой последовательности с ограниченной вариацией существуют возрастающие ограниченные последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ такие, что $x_n = a_n - b_n$, $n \in N$.

271. Пусть $x_n \neq 0$, $n \in N$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} < 1$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

272. Пусть все члены последовательности $\{x_n\}$ различны. Доказать, что множество подпоследовательностей последовательности $\{x_n\}$ несчетно.

273. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a > 0$, $a_n > 0$, $n \in N$, и пусть $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $b \in R$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b.$$

274. Найти:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} n(e^{1/n}-1)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} C_n^\alpha$, где $C_n^\alpha = \dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1))}{n!}$, $\alpha \in R$.

275. 1) Доказать, что последовательность

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \ln n, \quad n \in N,$$

имеет предел (его называют *постоянной Эйлера*).

2) Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2.$$

276. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE и CF. На стороне AC взята точка M_0, $M_0 \neq A$, $M_0 \neq C$, и по ней найдена на AC точка M_1 следующим образом: проведены отрезки $[M_0N_0] \| [CF]$ $(N_0 \in AB)$, затем $[N_0P_0] \| [AD]$ $(P_0 \in BC)$ и, наконец, $[P_0M_1] \| [BE]$. Отправляясь от точки M_1, аналогично находится точка M_2 и т. д.

Доказать, что последовательность точек $\{M_n\}$ сходится, и найти ее предел.

277. Точка движется в круге равномерно и прямолинейно, отскакивая от его границы по закону отражения. Центральный угол, под которым видны две первые точки встречи с границей круга, равен 1 рад. Доказать, что в любом секторе будут находиться точки встречи с границей.

278. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} n((n+1)^\alpha - n^\alpha) = +\infty$, $0 < \alpha$.

279. Найти:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a n!}{n^\alpha}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}|\ln(\sqrt{n^2+1}-n)|^p$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b})^n}{2^n}$, где $a > 0$, $b > 0$.

280. Доказать, что из всякого бесконечного множества интервалов, объединение которых покрывает отрезок $[a; b]$, можно выделить конечное подмножество интервалов, объединение которых также покрывает $[a; b]$.

ОТВЕТЫ

26. 1) 3; 2) 1/2; 3) 1/2; 4) 1; 5) 1; 6) 0; 7) 1/2; 8) −1; 9) 1; 10) 2/3; 11) 1/3.

34. 1) 5; 2) 0,6; 3) 1/3; 4) −1; 5) 1; 6) 0; 7) 1; 8) −1/6; 9) −1; 10) 0; 11) −0,5.

35. 1) −1; 2) 1/2; 3) 3; 4) −1/2.

36. 1) 27; 2) −15/2; 3) 0; 4) 1/6;

5) 1, если $|a| > 1$; $1/2$, если $a = 1$; 0, если $|a| < 1$;
6) 0, если $|a| \neq 1$; $1/2$, если $a = 1$; не существует при $a = -1$;
7) 1, если $|a| > 1$; 0, если $|a| = 1$; -1, если $|a| < 1$.
38. $a/2$.
39. 1) $+\infty$; 2) $2/3$; 3) -1; 4) -1; 5) 19800; 6) 1; 7) $1/5$; 8) 2; 9) $pq(q-p)/2$.
40. 1) $d/2$; 2) $1/(2d)$; **42.** 1) $1/9$; 2) $5/11$; 3) $26/111$.
44. 1) $1/2$; 2) $1/\sqrt{2}$; 3) $1/4$. **45.** 1) $3/4$; 2) 6; 3) -1; 4) m/k.
47. 1) Не следует; 2) не следует.
53. 1) 0; 2) 0; 3) 2; 4) $1/3$; 5) $-1/4$; 6) $1/3$.
54. $a = 1$; $b/2$.
55. 1) $(a_1 + a_2)/2$; 2) $(a_1 + a_2 + a_3)/3$; 3) $(a_1 + a_2 + \ldots + a_p)/p$.
57. 1) -2; 2) 0; 3) $1/6$; 4) 0; 5) $+\infty$; 6) $-\infty$; 7) 0.
58. 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0. **59.** 1.
61. 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) $-1/2$; 5) 1; 6) 1; 7) 1; 8) 3; 9) $1/2$; 10) 3; 11) 4; 12) 11; 13) 1.
62. 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) 1; 5) 1; 6) 1; 7) 1; 8) $1/2$; 9) 1; 10) 1; 11) 1.
64. 1) $1/3$; 2) 0; 3) 3; 4) $4/5$; 5) 1.
66. 1) 0; 2) 5; 3) 0; 4) 0; 5) $1/2$.
68. 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0; 5) 0; 6) 0; 7) 1.
71. 1)–4) и 7)–9) 0; 5)–6) 1. **73.** 0. **74.** 1) 3; 2) 1; 3) $\max\{a; b\}$.
75. 1) 1; 2) 1; 3) 1.
77. 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) 1; 5) 1; 6) 1; 7) 2; 8) 1; 9) -8; 10) 1; 11) 4.
95. 1) $a < 5$; 2) $a > 5$; 3) $a = 5$.
96. 1) $p \leqslant q$; 2) $p > q$.
99. 1) $\alpha > 1$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1/2$ при $\alpha = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ при $\alpha < 1$.
113. 1) 0; 2) $+\infty$; 3) $-\infty$; 4) 1, -1; 5) 0, $+\infty$; 6) 0, $\pm 1/\sqrt{2}$, ± 1; 7) 0, $\pm\infty$.
116. 1) $\pm 1/2$, ± 1; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -1$;
2) ± 2; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 2$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -2$;
3) 0, $+\infty$; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$;
4) $[0; 1]$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.
117. 1) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$; $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$; $\sup x_n = 1{,}5$; $\inf x_n = -1$;
2) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \sup x_n = 3$; $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \inf x_n = -3$;
3) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \sup x_n = +\infty$; $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \inf x_n = -\infty$;
4) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$; $\sup x_n = 3/2$; $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \inf x_n = -\infty$;
5) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \sup x_n = +\infty$; $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 1$; $\inf x_n = 0$.

123. 1) 0, ± 1; $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 1$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = -1$, $\sup x_n = 1$, $\inf x_n = -1$;
2) ± 1; $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 1$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = -1$ $\sup x_n = 3/2$, $\inf x_n = -1$;
3) $-\infty$; 0; 1; $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 1$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = -\infty$, $\sup x_n = 1$, $\inf x_n = -\infty$;
4) 0, $\pm\sqrt{3}/2$; $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \sqrt{3}/2$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = -\sqrt{3}/2$, $\sup x_n = (2 + \sqrt{3})/2$, $\inf x_n = -\sqrt{3}/2$;
5) 0, 2; $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 2$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 0$, $\sup x_n = 2$, $\inf x_n = 0$;
6) 1; $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 1$, $\sup x_n = \sqrt{6}$, $\inf x_n = 1$;
7) 0, $+\infty$; $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = +\infty$; $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 0$, $\sup x_n = +\infty$, $\inf x_n = 0$;
8) 0, 1; $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 1$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 0$, $\sup x_n = 1$, $\inf x_n = 0$.

124. 1) $[0;1]$; 2) $[0;+\infty)$ и $+\infty$. **125.** $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 2$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 1$.

137. $M \in [AC]$ и $N \in [AC]$, где $AM = \dfrac{1}{3}AC$, $AN = \dfrac{2}{3}AC$.

162. 1) 0; 2) 0; 3) 0.

164. 1) 4; 2) $\sqrt[k-1]{5}$; 3) $\sqrt[k-1]{a}$; 4) а)–в) 1/3; 5) $(1+\sqrt{5})/2$.

166. 1) e; 2) e; 3) e^{-1}; 4) e^2; 5) $\sqrt{e}$; 6) e^{-1}.

170. 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0; 5) 0, если $\alpha > 1$; $+\infty$, если $\alpha \leqslant 1$; 6) $+\infty$, если $a > 1$; $-\infty$, если $0 < a < 1$.

175. 1) 1; 2) 1; 3) e^3; 4) $1/e$; 5) $1/e^2$.

177. 1) $+\infty$, если $a > 1$; $-\infty$, если $a < 1$; 2) 1.

183. 1) e^2; 2) e^{-1}. **184.** 1) $1/a_1 d$; 2) $1/\sqrt{d}$. **185.** $10a/81$.

186. $\max\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$.

188. 1) 2; 2) 0; 3) -1; 4) 1/3; 5) 1/3; 6) 1/2; 7) 4/3; 8) $a^2 + a + 1/3$.

189. 1/6. **190.** 1) 1/3; 2) 1/2. **191.** $k(k+1)/2$.

192. 0. **194.** $\max\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. **198.** 1) 0; 2) 0.

199. $q/(1-q)^2$. **200.** 0. **212.** 1) $d/(1-q)$.

213. 1) $d/(1-q)$, если $|q| < 1$ или $q = -1$; ∞, если $|q| > 1$; 2) $a - d/(1-q)$, если $|q| < 1$; ∞, если $|q| \geqslant 1$.

214. $(\pi - \alpha)/3$. **215.** $\pi/3$. **216.** а) и б) $a/3$.

217. $(1 + \sqrt{1+4a})/2$. **218.** 1) Сходится; 2) расходится.

219. $q \in [0; 1/4]$. **220.** $\sqrt{a}$. **221.** 5.

223. 1) $(\sqrt{5}-1)/2$; **224.** 1)–4) Сходится.

225. $(b + \sqrt{b^2 + 4a})/2$.

226. $1 - \sqrt{1-a}$ при $-3 \leqslant a \leqslant 1$; 4 при $a = -8$.

227. 1) б) Сходится при $x_1 = 0$, $x_1 \in [1;2]$; расходится при $x_1 < 0$, $x_1 > 2$.

228. 2) $\sqrt{ab}$.

229. 1) Сходится при $a = b$; расходится при $a \neq b$;

2) сходится при $a = b$; расходится при $a \neq b$;
3) сходится при $a = b = 0$; расходится при $a \neq 0$ или $b \neq 0$;
4) сходится при $a = b = 0$; расходится при $a \neq 0$ или $b \neq 0$.
230. 1) 0; 2) 0. **231.** 1) 3; 2) 2; 3) 4. **232.** 1)–3) 0.
234. 1) -1; 2) $+\infty$; 3) -1; 4) $+\infty$. **235.** 1. **236.** 1)–3) 1/2.
238. 1) Сходится к $-1/2$; 2) сходится к -2.
239. Сходится к p, если $0 \leqslant p - a \leqslant 1$.
240. 0 при $a = 0$ или $|b| < |c|$; $(b - c)/d$ при $|b| > |c|$.
241. $(1 + \sqrt{1 + 4b})/2$ при $a \neq (1 - \sqrt{1 + 4b})/2$ и $a \neq 0$; a при $a = (1 - \sqrt{1 + 4b})/2$.
242. $+\infty$ при $a \geqslant 1$; $\sqrt{b/(1 - a)}$ при $0 < a < 1$. **243.** 0.
244. $x_2 = a(5 - \sqrt{41})/4$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. **247.** 0.
252. 1) $1/e$; 2) 0; 3) $4/e$; 4) 0; 5) $+\infty$.
255. 1) $1/(p + 1)$; 2) 1/2.
274. 1) 1;
2) 0 при $\alpha > -1$; ∞ при $\alpha < -1$; не существует при $\alpha = -1$.
276. $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M$, где $AM = \dfrac{2}{3} AC$.
279. 1) ∞ при $\alpha \leqslant 1$; 0 при $\alpha > 1$; 2) 0; 3) $\sqrt{ab}$.

§ 9. Предел функции

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Определение предела функции. Пусть функция $f(x)$ определена *в проколотой* δ_0*-окрестности точки* x_0, т. е. на множестве

$$\dot{U}_{\delta_0}(x_0) = \{x\colon\ 0 < |x - x_0| < \delta_0\}.$$

1) Число a называется *пределом (по Коши) функции* $f(x)$ *в точке* x_0 (или при $x \to x_0$), если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Если число a является пределом функции $f(x)$ в точке x_0, то пишут

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \ \text{ или } \ f(x) \to a \ \text{ при } \ x \to x_0.$$

Используя логические символы, определение Коши можно записать следующим образом:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \quad (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon).$$

Утверждение $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq a$ записывается так:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \neq a \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x \quad (0 < |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - a| \geqslant \varepsilon).$$

Из определения следует, что функция не может иметь двух разных пределов в одной точке. Из определения следует также, что значения функции $f(x)$ в точках x, лежащих вне некоторой окрестности точки x_0, и значение функции $f(x)$ в точке x_0 не влияют ни на существование, ни на величину предела функции $f(x)$ в точке x_0.

2) Число a называется *пределом* (*по Гейне*) *функции* $f(x)$ *в точке* x_0, если для любой последовательности $\{x_n\}$, $x_n \in \dot{U}_{\delta_0}(x_0)$, сходящейся к x_0, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к a.

Для того чтобы доказать, что функция $f(x)$ не имеет предела в точке x_0, достаточно указать какую-нибудь последовательность $\{f(x_n)\}$, не имеющую предела, или указать две последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{f(x'_n)\}$, имеющие разные пределы.

3) Определения предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.

4) Если функция $f(x)$ определена в точке x_0, существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ и $a = f(x_0)$, то функцию $f(x)$ называют *непрерывной в точке* x_0 (см. § 10).

Отметим, что основные элементарные функции (§ 7) непрерывны во всех точках их области определения.

2. Бесконечно малые функции.

1) Если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, то функцию $\alpha(x)$ *называют бесконечно малой при* $x \to x_0$.

2) Сумма конечного числа бесконечно малых при $x \to x_0$ функций есть бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

3) Если $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$ функция, а $\beta(x)$ — функция, ограниченная в некоторой проколотой окрестности точки x_0, то $\alpha(x)\beta(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

В частности, произведения двух (или конечного числа) бесконечно малых при $x \to x_0$ функций есть бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

3. Теоремы о пределах.

Теорема 1 (о пределе “зажатой” функции). *Если в некоторой проколотой окрестности точки x_0 выполняются неравенства $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, и если*

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = a,$$

то

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

Теорема 2 (о пределе суммы и произведения). *Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$, то*

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b, \quad \lim_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = ab.$$

Теорема 3 (о пределе частного). *Если* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=$ $=b$, *где* $b\neq 0$, *то*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{b}.$$

Теорема 4 (о пределе сложной функции). *Если существуют* $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$, $\lim\limits_{y\to a} f(y)$, *причем в некоторой проколотой окрестности точки* x_0 *выполняется условие* $\varphi(x)\neq a$, *то сложная функция* $f(\varphi(x))$ *имеет предел в точке* x_0 *и справедливо равенство*

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x))=\lim_{y\to a} f(y). \tag{1}$$

В случае непрерывности функции $f(y)$ в точке a равенство (1) можно записать в виде

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x))=f(\lim_{x\to x_0}\varphi(x)).$$

4. Различные типы пределов.

1) *Предел функции при* $x\to\infty$. Число a называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x\to\infty$, если для каждого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x|>\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-a|<\varepsilon$.

Если число a является пределом функции $f(x)$ при $x\to\infty$, то пишут

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=a.$$

Теоремы о пределах справедливы и для пределов функций при $x\to\infty$.

2) *Бесконечный предел.* Говорят, что *предел функции* $f(x)$ *в точке* x_0 *равен бесконечности*, и пишут

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty,$$

если для каждого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0<|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)|>\varepsilon$.

Аналогично,

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty,$$

если для каждого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x|>\delta$, выполняется неравенство $|f(x)|>\varepsilon$.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой при* $x\to x_0$, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty.$$

3) *Односторонние пределы.* Пусть область определения функции $f(x)$ содержит интервал $(\alpha;x_0)$. Число a называется *пределом слева функции* $f(x)$ *в точке* x_0 (или при $x\to x_0-0$), если для каждого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенствам $x_0-\delta<x<x_0$, выполняется неравенство $|f(x)-a|<\varepsilon$.

Предел слева функции $f(x)$ в точке $x_0 \neq 0$ обозначают $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ или $f(x_0 - 0)$. Если $x_0 = 0$, то пишут $\lim\limits_{x \to -0} f(x)$ или $f(-0)$.

Аналогично, в случае, когда область определения функции $f(x)$ содержит интервал $(x_0; \beta)$, вводится понятие *предела справа.* Предел справа обозначают так: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ или $f(x_0 + 0)$, если $x_0 \neq 0$, и $\lim\limits_{x \to +0} f(x)$ или $f(+0)$, если $x_0 = 0$.

Функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0 тогда и только тогда, когда существуют предел слева и предел справа и они равны; при этом

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0).$$

Для функций, область определения которых содержит интервал $(\alpha; +\infty)$ или интервал $(-\infty; \beta)$, вводятся понятия *предела при* $x \to$ $\to +\infty$ и соответственно *при* $x \to -\infty$. Эти пределы обозначают $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Например, число a называют пределом функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $x > \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Для односторонних пределов справедливы теоремы о пределе суммы (разности), произведения, частного и о пределе композиции функций.

По аналогии с конечными односторонними пределами определяются и односторонние бесконечные пределы:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{и т. д.}$$

Например, запись $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = -\infty$ означает, что для каждого числа ε существует такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $x_0 < x < x_0 + \delta$, выполняется неравенство $f(x) < \varepsilon$.

5. Некоторые замечательные пределы. Вычисление пределов во многих случаях производится с помощью двух важных формул:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \tag{2}$$

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e. \tag{3}$$

Часто используются также следующие формулы, являющиеся следствием формулы (3):

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \tag{4}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1 + x)}{x} = \frac{1}{\ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \tag{5}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad a > 0. \tag{6}$$

В частности, при $a = e$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \tag{7}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1. \tag{8}$$
Приведем еще одну формулу:
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \quad \alpha \in R. \tag{9}$$

5. Сравнение функций.

1) *Эквивалентные функции. Символы* $O(f)$ *и* $o(f)$. Пусть функция $g(x)$ не обращается в нуль в некоторой проколотой окрестности точки x_0. Тогда:

а) если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, то говорят, что *функция* $f(x)$ *эквивалентна функции* $g(x)$ при $x \to x_0$, и пишут $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$;

б) если существует число $C > 0$ такое, что в некоторой проколотой окрестности точки x_0 справедливо неравенство $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant C$, то говорят, что $f(x)$ есть O большое от $g(x)$ при $x \to x_0$, и пишут $f(x) = O(g(x))$;

в) если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, то говорят, что $f(x)$ есть o малое от $g(x)$ при $x \to x_0$, и пишут
$$f(x) = o(g(x)), \quad x \to x_0. \tag{10}$$

Равенство вида (10) следует читать только слева направо, так как его правая часть обозначает класс функций, бесконечно малых по сравнению с $g(x)$ при $x \to x_0$.

Приведем примеры таких равенств:
$$x^2 = o(x), \quad \cos x \sin^2 x = o(x), \quad \operatorname{tg}^3 x \sin\frac{1}{x} = o(x), \quad x \to 0.$$

В частном случае, когда $g(x) = 1$, запись $f(x) = o(1)$ при $x \to x_0$ означает, что функция $f(x)$ является бесконечно малой при $x \to x_0$.

Если $f(x) = o(g(x))$, $x \to x_0$, где $g(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to x_0$, то функцию $f(x)$ называют *бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с* $g(x)$ *при* $x \to x_0$.

Запись $f(x) = O(1)$ при $x \to x_0$ означает, что функция $f(x)$ ограниченна в некоторой проколотой окрестности точки x_0.

2) *Замена функций эквивалентными при вычислении пределов.* Пусть функции $g(x)$ и $g_1(x)$ не обращаются в нуль в некоторой проколотой окрестности точки x_0, $f(x) \sim g(x)$ и $f_1(x) \sim g_1(x)$ при $x \to x_0$, существует $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$. Тогда существует $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и справедливо равенство
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

3) *Критерий эквивалентности функций.* Для того чтобы функция $f(x)$ была эквивалентна функции $g(x)$ при $x \to x_0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$f(x) = g(x) + o(g(x)), \quad x \to x_0.$$

При вычислении пределов часто используется следующая таблица эквивалентных функций:

Эквивалентность при $x \to 0$	Равенство при $x \to 0$
$\sin x \sim x$	$\sin x = x + o(x)$
$\operatorname{sh} x \sim x$	$\operatorname{sh} x = x + o(x)$
$\operatorname{tg} x \sim x$	$\operatorname{tg} x = x + o(x)$
$\arcsin x \sim x$	$\arcsin x = x + o(x)$
$\operatorname{arctg} x \sim x$	$\operatorname{arctg} x = x + o(x)$
$1 - \cos x \sim x^2/2$	$1 - \cos x = x^2/2 + o(x^2)$
$\operatorname{ch} x - 1 \sim x^2/2$	$\operatorname{ch} x - 1 = x^2/2 + o(x^2)$
$e^x - 1 \sim x$	$e^x - 1 = x + o(x)$
$\ln(1 + x) \sim x$	$\ln(1 + x) = x + o(x)$
$(1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$	$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$
$a^x - 1 \sim x \ln a$	$a^x = 1 + x \ln a + o(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$

7. **Частичный предел функции.** Число a называется *частичным пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$*, если существует последовательность $\{x_n\}$, $x_n \neq x_0$, такая, что $x_n \to x_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$.

Аналогично определяются бесконечные и односторонние частичные пределы.

Наименьший и наибольший частичные пределы функции $f(x)$ при $x \to x_0$ называют соответственно *нижним и верхним пределом* функции и обозначают $\varliminf\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\varlimsup\limits_{x\to x_0} f(x)$.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Доказать, используя определение Коши предела функции, что $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} = 2$.

▲ Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$ в некоторой окрестности точки $x = 4$, например на интервале $(2; 5)$.

Возьмем произвольное положительное число ε и преобразуем $|f(x) - 2|$ при $x \neq 4$ следующим образом:

$$\left|\frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} - 2\right| = \left|\frac{x + 4}{x} - 2\right| = \frac{|x - 4|}{x}.$$

Учитывая, что $x \in (2; 5)$, получаем неравенство

$$\left|\frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} - 2\right| < \frac{|x - 4|}{2},$$

из которого видно, что если взять $\delta = 2\varepsilon$, то для всех $x \in (2;5)$ и удовлетворяющих неравенствам $0 < |x-4| < \delta$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{x^2-16}{x^2-4x} - 2\right| < \frac{\delta}{2} = \varepsilon.$$

Согласно определению Коши число $a = 2$ является пределом функции $f(x) = \dfrac{x^2-16}{x^2-4x}$ в точке $x = 4$. ▲

Пример 2. Доказать, что функция $f(x) = \sin(\pi/x)$ не имеет предела в точке $x = 0$.

▲ Возьмем две последовательности $x_n = 1/n$ и $x'_n = 2/(4n+1)$, сходящиеся к точке $x = 0$.

Рассмотрим соответствующие последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{f(x'_n)\}$ значений функции. Так как последовательность $f(x_n) = \sin n\pi$ сходится к нулю, а последовательность $f(x'_n) = \sin(\pi(4n+1)/2)$ — к единице, то предел функции $f(x) = \sin(\pi/x)$ в точке $x = 0$ не существует. ▲

Пример 3. Найти:

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$; 3) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$;

4) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$.

▲ 1) Применяя теоремы о пределе разности и произведения, находим предел знаменателя:

$$\lim_{x\to 1}(x^2-x-2) = (\lim_{x\to 1} x)(\lim_{x\to 1} x) - \lim_{x\to 1} x - \lim_{x\to 1} 2 = -2.$$

Предел знаменателя не равен нулю, поэтому по теореме о пределе частного получаем

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-4}{x^2-x-2} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-4)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-x-2)} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}.$$

2) Так как числитель x^2-4 и знаменатель x^2-x-2 дроби имеют предел в точке $x = 2$, равный нулю $\left(\text{имеет место неопределенность вида } \dfrac{0}{0}\right)$, то теорема о пределе частного непосредственно неприменима. Для "раскрытия неопределенности" преобразуем данную функцию. Разделив числитель и знаменатель на $x-2$, получим при $x \neq 2$ равенство

$$\frac{x^2-4}{x^2-x-2} = \frac{x+2}{x+1}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 2}(x+1) \neq 0$, то по теореме о пределе частного найдем

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x+1} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)}{\lim\limits_{x\to 2}(x+1)} = \frac{4}{3}.$$

3) Числитель и знаменатель при $x \to \infty$ являются бесконечно большими функциями. Поэтому теорема о пределе частного непосредственно неприменима. Разделим числитель и знаменатель на x^2 и к полученной функции применим теорему о пределе частного:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{x^2-x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-4/x^2}{1-1/x-2/x^2} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1-4/x^2)}{\lim\limits_{x\to\infty}(1-1/x-2/x^2)} = 1.$$

4) Данная функция представима в виде произведения двух функций $f(x) = 1/(x+1)$ и $g(x) = (x^2-4)/(x-2)$. Функция $f(x) = 1/(x+1)$ при $x \to -1$ является бесконечно большой, функция $g(x) = (x^2-4)/(x-2)$ в окрестности $(-3/2; -1/2)$ точки $x = -1$ удовлетворяет условию

$$\left|\frac{x^2-4}{x-2}\right| = |x+2| > \frac{1}{2}.$$

Отсюда следует, что функция $f(x)g(x)$ является бесконечно большой при $x \to -1$, т. е.

$$\lim_{x\to-1} \frac{x^2-4}{x^2-x-2} = \infty. \ \blacktriangle$$

Пример 4. Найти:

1) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$, $a > 0$; 2) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x+11}-2\sqrt{x-1}}{x^2-25}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{32+x}-2}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+8x^2+3}-\sqrt{x^4+x^2}\right)$.

▲ 1) Здесь имеет место неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Преобразуем данную функцию, разложив ее числитель на множители:

$$\frac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} = \sqrt{x}+\sqrt{a}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to a} \frac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} = \lim_{x\to a}(\sqrt{x}+\sqrt{a}) = \lim_{x\to a}\sqrt{x}+\sqrt{a}.$$

Используя непрерывность функции $\sqrt{x}$ в точке a, получаем

$$\lim_{x\to a}\sqrt{x} = \sqrt{\lim_{x\to a} x} = \sqrt{a}$$

и, следовательно,

$$\lim_{x\to a} \frac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} = 2\sqrt{a}.$$

2) Для “раскрытия неопределенности” вида $\dfrac{0}{0}$ умножим и разделим данную функцию на $\sqrt{x+11}+2\sqrt{x-1}$. Тогда при $x \neq 5$ будем иметь

$$\frac{\sqrt{x+11}-2\sqrt{x-1}}{x^2-25} = \frac{x+11-4(x-1)}{(x^2-25)(\sqrt{x+11}+2\sqrt{x-1})} =$$

$$= -\frac{3}{(x+5)(\sqrt{x+11}+2\sqrt{x-1})}.$$

К полученной функции применима теорема о пределе частного, поэтому

$$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x+11}-2\sqrt{x-1}}{x^2-25}=-\frac{3}{\lim\limits_{x\to5}(x+5)(\sqrt{x+11}+2\sqrt{x-1})}=-\frac{3}{80}.$$

При вычислении последнего предела мы воспользовались непрерывностью функции $\sqrt{x}$ в точках $x=16$ и $x=4$.

3) Здесь удобно ввести новую переменную. Положим $y=\sqrt[5]{32+x}$, тогда получим

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[5]{32+x}-2}{x}=\lim_{y\to2}\frac{y-2}{y^5-32}=\lim_{y\to2}\frac{1}{y^4+2y^3+4y^2+8y+16}=\frac{1}{80}.$$

4) В этом случае имеет место неопределенность вида $\infty-\infty$. Преобразуем данную функцию следующим образом:

$$\sqrt{x^4+8x^2+3}-\sqrt{x^4+x^2}=$$
$$=\frac{x^4+8x^2+3-(x^4+x^2)}{\sqrt{x^4+8x^2+3}+\sqrt{x^4+x^2}}=\frac{7+3/x^2}{\sqrt{1+8/x^2+3/x^4}+\sqrt{1+1/x^2}}.$$

Так как

$$\lim_{x\to\infty}\left(7+3/x^2\right)=7,$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+8/x^2+3/x^4}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(1+8/x^2+3/x^4\right)}=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+1/x^2}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(1+1/x^2\right)}=1,$$

то

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^4+8x^2+3}-\sqrt{x^4+x^2})=7/2. \ \blacktriangle$$

Пример 5. Найти:

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\alpha x}{x}$, $\alpha\neq0$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos3x-\cos7x}{x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}$;

4) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\operatorname{ctg}2x\cdot\operatorname{ctg}(\pi/4-x)$.

▲ 1) Положив $\alpha x=y$, согласно формуле (2) получим

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\alpha x}{x}=\alpha\lim_{x\to0}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}=\alpha\lim_{y\to0}\frac{\sin y}{y}=\alpha.$$

2) Так как

$$\frac{\cos3x-\cos7x}{x^2}=2\,\frac{\sin5x}{x}\,\frac{\sin2x}{x}$$

и

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{x}=5,\quad \lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{x}=2,$$

то по теореме о пределе произведения находим

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos3x-\cos7x}{x^2}=20.$$

3) Перейдем к новой переменной $y = \operatorname{arctg} x$, тогда получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\operatorname{tg} y} = \lim_{y\to 0} \frac{\cos y}{\frac{\sin y}{y}}.$$

Так как функция $\cos y$ непрерывна в точке $y=0$, то $\lim\limits_{y\to 0} \cos y = 1$. Согласно формуле (2) $\lim\limits_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$. Поэтому по теореме о пределе частного получаем

$$\lim_{y\to 0} \frac{\cos y}{\frac{\sin y}{y}} = \frac{\lim\limits_{y\to 0} \cos y}{\lim\limits_{y\to 0} \frac{\sin y}{y}} = 1.$$

4) Данная функция является произведением бесконечно малой при $x \to \pi/4$ функции $\operatorname{ctg} 2x$ на бесконечно большую функцию $\operatorname{ctg}(\pi/4 - x)$.

В таких случаях говорят, что имеет место неопределенность вида $0 \cdot \infty$. Для вычисления предела перейдем к новой переменной $y = \pi/4 - x$. Получим

$$\lim_{x\to\pi/4} \operatorname{ctg} 2x \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \lim_{y\to 0} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - 2y\right) \operatorname{ctg} y = \lim_{y\to 0} \frac{\sin 2y}{\sin y} \cdot \frac{\cos y}{\cos 2y}.$$

Так как $\lim\limits_{y\to 0} \frac{\sin 2y}{\sin y} = 2$, а $\lim\limits_{y\to 0} \frac{\cos y}{\cos 2y} = 1$, то

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sin 2y}{\sin y} \frac{\cos y}{\cos 2y} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin 2y}{\sin y} \cdot \lim_{y\to 0} \frac{\cos y}{\cos 2y} = 2. \ \blacktriangle$$

Пример 6. Доказать формулы ($a > 0$, $a \neq 1$):

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$.

▲ 1) Запишем данную функцию в виде $\log_a(1+x)^{1/x}$. В силу непрерывности логарифмической функции

$$\lim_{x\to 0} \log_a(1+x)^{1/x} = \log_a \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x},$$

и так как согласно формуле (3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}.$$

2) Для доказательства перейдем к новой переменной $y = a^x - 1$. Тогда $x = \log_a(1+y)$, и если $x \to 0$, то и $y \to 0$; поэтому

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\log_a(1+y)} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0} \frac{\log_a(1+y)}{y}} = \ln a. \ \blacktriangle$$

Пример 7. Пусть функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ таковы, что $\alpha(x) \neq 0$ и $\beta(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки x_0, $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) =$

$= \lim\limits_{x\to x_0} \beta(x) = 0,$
$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A. \tag{11}$$

Доказать, что
$$\lim_{x\to x_0} (1+\alpha(x))^{1/\beta(x)} = e^A. \tag{12}$$

▲ Воспользуемся равенством
$$f(x) = (1+\alpha(x))^{1/\beta(x)} = e^{\alpha(x)/\beta(x)\,\ln(1+\alpha(x))/\alpha(x)}. \tag{13}$$

Используя формулу (7) и теорему о замене переменного при вычислении предела, получаем
$$\lim_{x\to x_0} \frac{\ln(1+\alpha(x))}{\alpha(x)} = \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1 \tag{14}$$
(см. пример 6.1).

Так как e^u — непрерывная функция, то из (13) в силу (11) и (14) следует равенство (12). ▲

Пример 8. Найти:

1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\operatorname{tg}^2 x)^{1/\sin^2 2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ch} x\right)^{1/(1-\cos x)}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2-1}\right)^{x^2}$;

5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^x-x^2}{x-2}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{1/x}+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

▲ 1) Так как $\operatorname{tg} x \sim x$, $\sin 2x \sim 2x$ при $x\to 0$, то, используя результат примера 7, получаем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\operatorname{tg}^2 x}{\sin^2 2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^2}{4x^2} = -\dfrac{1}{4} = A$. Поэтому искомый предел равен $e^A = e^{-1/4}$.

2) Используя равенство $(\cos x)^{1/x^2} = (1+\cos x-1)^{1/x^2}$ и учитывая, что $\cos x - 1 = -2\sin^2\dfrac{x}{2} \sim -\dfrac{x^2}{2}$, получаем $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = e^{-1/2}$ (пример 7).

3) Так как $\operatorname{ch} x - 1 = 2\operatorname{sh}^2\dfrac{x}{2}$, а $\operatorname{sh} t = \dfrac{e^t-e^{-t}}{2} = \dfrac{e^{2t}-1}{2e^t} \sim t$ при $t\to 0$, то $\operatorname{ch} x - 1 \sim \dfrac{x^2}{2}$, $x\to 0$. Кроме того, $1-\cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2} \sim \dfrac{x^2}{2}$, $x\to 0$. Используя результат примера 7, получаем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch} x-1}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2/2}{x^2/2} = 1$. Следовательно, искомый предел равен e.

4) Используя равенство
$$\left(\frac{2x^2+3}{2x^2-1}\right)^{x^2} = \left(\frac{1+\dfrac{3}{2x^2}}{1-\dfrac{1}{2x^2}}\right)^{x^2} = \frac{\left(1+\dfrac{3}{2}t\right)^{1/t}}{\left(1-\dfrac{1}{2}t\right)^{1/t}},$$

где $t = 1/x^2 \to 0$ при $x \to \infty$, находим, что искомый предел равен $e^{3/2}/e^{-1/2} = e^2$ (пример 7).

5) Представим данную функцию в виде

$$\frac{2^x - x^2}{x-2} = \frac{2^x - 2^2 - (x^2 - 2^2)}{x-2} = 4\,\frac{2^{x-2}-1}{x-2} - \frac{x^2-4}{x-2} = 4\,\frac{2^t - 1}{t} - (x+2),$$

где $t = x - 2 \to 0$ при $x \to 2$.

Применив формулу (6) (см. также пример 6.2), находим, что искомый предел равен $4(\ln 2 - 1)$.

6) Так как $\left(e^{1/x} + \dfrac{1}{x}\right)^x = (e^t + t)^{1/t} = (1 + t + e^t - 1)^{1/t}$, где $t = \dfrac{1}{x} \to 0$ при $x \to \infty$, а $t + e^t - 1 \sim 2t$, $t \to 0$, то искомый предел равен e^2 (пример 7). ▲

Пример 9. Доказать формулы:

1) $\lim\limits_{x\to -0} a^{1/x} = 0$, $a > 1$; 2) $\lim\limits_{x\to +0} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$.

▲ 1) Возьмем $\varepsilon > 0$ и для $x < 0$ решим неравенство $a^{1/x} < \varepsilon$. Если $\varepsilon \geqslant 1$, то неравенство справедливо при всех $x < 0$. Поэтому для каждого $\varepsilon \geqslant 1$ в качестве δ можно взять любое положительное число, например $\delta = 1$. Если $\varepsilon < 1$, то, логарифмируя обе части неравенства, получаем $\dfrac{1}{x}\ln a < \ln\varepsilon$, откуда $x > \dfrac{\ln a}{\ln\varepsilon}$. Таким образом, и для $\varepsilon < 1$ существует δ, а именно $\delta = -\dfrac{\ln a}{\ln\varepsilon} > 0$, такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенствам $-\delta < x < 0$, выполняется неравенство $a^{1/x} < \varepsilon$. Следовательно, предел слева функции $a^{1/x}$, $a > 1$, в точке $x = 0$ равен нулю.

2) Возьмем положительное число ε и для $x > 0$ решим неравенство

$$\left|\operatorname{arctg}\frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}\right| < \varepsilon. \tag{16}$$

Если $\varepsilon \geqslant \pi/2$, то неравенство верно при всех $x > 0$. Поэтому в качестве δ для всех $\varepsilon \geqslant \pi/2$ можно взять любое положительное число, например $\delta = 1$.

Если $\varepsilon < \pi/2$, то, решая неравенство (16), получаем

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{x} < \varepsilon, \quad \operatorname{arctg}\frac{1}{x} > \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \quad \frac{1}{x} > \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right), \quad x < \operatorname{tg}\varepsilon,$$

т. е. для каждого $\varepsilon < \pi/2$ в качестве δ можно взять $\delta = \operatorname{tg}\varepsilon$. Таким образом, для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число δ, что для всех x, удовлетворяющих неравенствам $0 < x < \delta$, выполняется неравенство $\left|\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} - \dfrac{\pi}{2}\right| < \varepsilon$. Это означает, что предел справа функции $\operatorname{arctg}(1/x)$ в точке $x = 0$ равен $\pi/2$. ▲

Пример 10. Найти:

1) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+14}+x}{\sqrt{x^2-2}+x}$; 2) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+14}+x}{\sqrt{x^2-2}+x}$;

3) $\lim\limits_{x\to+0} \operatorname{th}(1/x)$; 4) $\lim\limits_{x\to-0} \operatorname{th}(1/x)$.

▲ 1) Данная функция при $x \to +\infty$ является отношением двух бесконечно больших функций $\left(\text{неопределенность вида } \dfrac{+\infty}{+\infty}\right)$. Разделив числитель и знаменатель на x, получим

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+14}+x}{\sqrt{x^2-2}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+14/x^2}+1}{\sqrt{1-2/x^2}+1} = 1.$$

2) При $x \to -\infty$ функции $\sqrt{x^2+14}+x$ и $\sqrt{x^2-2}+x$ представляют собой неопределенности вида $\infty - \infty$. Для вычисления предела переходим к новой переменной $t = -x$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+14}+x}{\sqrt{x^2-2}+x} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{\sqrt{t^2+14}-t}{\sqrt{t^2-2}-t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{(\sqrt{t^2+14}-t)(\sqrt{t^2+14}+t)(\sqrt{t^2-2}+t)}{(\sqrt{t^2-2}-t)(\sqrt{t^2-2}+t)(\sqrt{t^2+14}+t)} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{14\left(\sqrt{1-2/t^2}+1\right)}{-2\left(\sqrt{1+14/t^2}+1\right)} = -7.$$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{th}\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{e^{1/x}-e^{-1/x}}{e^{1/x}+e^{-1/x}} = \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{1-e^{-2/x}}{1+e^{-2/x}} = 1$, так как $\lim\limits_{x\to+0} e^{-2/x} = \lim\limits_{x\to-0} e^{1/t} = 0$ (пример 9, 1)).

4) $\lim\limits_{x\to-0} \operatorname{th}\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to-0} \dfrac{e^{1/x}-e^{-1/x}}{e^{1/x}+e^{-1/x}} = \lim\limits_{x\to-0} \dfrac{e^{2/x}-1}{e^{2/x}+1} = -1$, так как $\lim\limits_{x\to-0} e^{2/x} = 0$ (пример 9, 1)). ▲

Пример 11. Пусть $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$. Доказать, что $f(x) \sim \sqrt[4]{x}$ при $x \to +0$ и $f(x) \sim \sqrt{x}$ при $x \to +\infty$.

▲ 1) Так как $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{f(x)}{\sqrt[4]{x}} = \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x}} = \lim\limits_{x\to+0} \sqrt{1+\sqrt{x}} = 1$, то $f(x) \sim \sqrt[4]{x}$ при $x \to +0$.

2) Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}} = 1$, то $f(x) \sim \sqrt{x}$ при $x \to +\infty$.

Пример 12. Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin 2x + 2\operatorname{arctg} 3x + 3x^2}{\ln(1+3x+\sin^2 x)+xe^x}$;

2) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt[5]{1+10x}-\sqrt[3]{1+3x}}{\arcsin(3x+x^2)-\operatorname{sh}(2x+x^3)}$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right)-\ln\dfrac{x}{2}\right)$.

▲ 1) При $x \to 0$ имеем

$$\sin 2x \sim 2x, \quad \operatorname{arctg} 3x \sim 3x, \quad xe^x \sim x.$$

Так как $\ln(1+u) \sim u$ при $u \to 0$, то

$$\ln(1+3x+\sin^2 x) \sim 3x+\sin^2 x \sim 3x \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

Следовательно,

$$\sin 2x = 2x + o(2x), \quad \operatorname{arctg} 3x = 3x + o(3x),$$
$$\ln(1+3x+\sin^2 x) = 3x + o(3x), \quad xe^x = x + o(x),$$

и поэтому

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x + 2\operatorname{arctg} 3x + 3x^2}{\ln(1+3x+\sin^2 x) + xe^x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x + o(2x) + 6x + 2\cdot o(3x) + 3x^2}{3x + o(3x) + x + o(x)} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{8x + o(x)}{4x + o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{8 + o(x)/x}{4 + o(x)/x} = \frac{8 + \lim\limits_{x\to 0} o(x)/x}{4 + \lim\limits_{x\to 0} o(x)/x} = 2.$$

2) Так как $(1+t)^\alpha \sim 1 + \alpha t$ при $t \to 0$, то $\sqrt[5]{1+10x} \sim 1 + \frac{1}{5}\,10x = 1 + 2x$, $\sqrt[3]{1+3x} \sim 1 + x$ при $x \to 0$, откуда получаем $\sqrt[5]{1+10x} = 1 + 2x + o(x)$, $\sqrt[3]{1+3x} = 1 + x + o(x)$ при $x \to 0$.

Аналогично, учитывая, что $\arcsin t \sim t$, $\operatorname{sh} t \sim t$ при $t \to 0$, находим $\arcsin(3x+x^2) = 3x + o(x)$, $\operatorname{sh}(2x+x^3) = 2x + o(x)$ при $x \to 0$.

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{1+10x} - \sqrt[3]{1+3x}}{\arcsin(3x+x^2) - \operatorname{sh}(2x+x^3)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+o(x)}{x+o(x)} = 1.$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right) - \ln\dfrac{x}{2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{2}{x} + o\left(\dfrac{2}{x}\right)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}(2+o(1)) = 2.$ ▲

ЗАДАЧИ

1. Определить, при каких положительных значениях δ из неравенства $0 < |x - x_0| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$, если:

1) $f(x) = x^2$; $x_0 = 2$; $a = 4$; $\varepsilon = 0{,}001$;

2) $f(x) = \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}$; $x_0 = 3$; $a = \dfrac{1}{2}$; $\varepsilon = 0{,}01$;

3) $f(x) = \sin x$; $x_0 = \pi/2$; $a = 1$; $\varepsilon = 0{,}01$;

4) $f(x) = \operatorname{sign} x$; $x_0 = 0$; $a = 1$; $\varepsilon = 1{,}5$.

2. Определить, при каких положительных значениях δ из неравенства $|x - 1| < \delta$ следует неравенство:

1) $|\lg x| < 2$; 2) $|\lg x| < 1$; 3) $|\lg x| < 0{,}1$; 4) $|\lg x| < 0{,}01$.

3. Для каждого числа $\varepsilon > 0$ найти такое число $\delta > 0$, при котором из неравенств $0 < |x - 1| < \delta$ следует неравенство

$$\left|\frac{3x^2-4x+1}{x-1} - 2\right| < \varepsilon.$$

4. Для каждого числа $\varepsilon > 0$ найти такое число $\delta > 0$, при котором из неравенств $0 < |x-3| < \delta$ следует неравенство

$$\left|\frac{x^3-3x^2}{x-3} - 9\right| < \varepsilon.$$

5. При каких δ из неравенства $|x| > \delta$ следует неравенство $1/(1 + x^2) < \varepsilon$, где ε — некоторое положительное число?

6. При каких δ из неравенства $x < \delta$ следует неравенство $\operatorname{arctg} x + \pi/2 < \varepsilon$, где ε — некоторое положительное число? Чему равен $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x$?

7. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ не существует, если:

1) $f(x) = \operatorname{arcctg}(1/x)$; 2) $f(x) = \operatorname{sign}\sin(1/x)$.

8. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ не существует, если:

1) $f(x) = \cos x$; 2) $f(x) = x - E(x)$.

9. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ не имеют предела в точке x_0. Следует ли отсюда, что $f(x) + g(x)$ и $f(x)g(x)$ также не имеют предела в этой точке?

10. Доказать, что если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к точке x_0, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ существует.

11. Доказать, что если из любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к точке x_0, можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, для которой $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = a$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$.

12. Доказать, что если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет конечный предел, то $f(x) = O(1)$ при $x \to x_0$.

13. Доказать, что если функция $f(x)$ удовлетворяет неравенству $f(x) \geqslant C$, $x \in (\alpha;\beta)$, $x \neq x_0 \in (\alpha;\beta)$, C — постоянная, и существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то справедливо неравенство

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \geqslant C.$$

14. Доказать, что если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет конечный положительный предел, равный числу a, то существует такой интервал $(\alpha;\beta)$, содержащий точку x_0, что

$$f(x) > a/2, \quad x \in (\alpha;\beta), \quad x \neq x_0.$$

15. Доказать, что если на интервале $(\alpha;\beta)$, содержащем точку x_0, справедливы неравенства

$$g_1(x) \leqslant f(x) \leqslant g_2(x), \quad x \neq x_0,$$

и функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ в точке x_0 имеют один и тот же конечный предел, равный a, то

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a.$$

16. Сформулировать утверждения:

1) $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = a$; 2) $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \infty$; 3) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

17. Используя логические символы, записать утверждения:

1) $\lim\limits_{x\to -0} f(x) = 0$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 4$; 3) $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = -\infty$;

4) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \infty$.

18. Используя логические символы, записать утверждения:

1) $\lim\limits_{x\to -0} f(x) \neq 0$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \neq 4$; 3) $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) \neq -\infty$;

4) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) \neq \infty$.

19. Используя логические символы, записать утверждения:

1) функция $f(x)$ в точке x_0 имеет конечный предел;

2) функция $f(x)$ не имеет конечного предела в точке x_0.

Найти предел функции (20–38).

20. 1) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{2x^2-x-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$; 5) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^3-3x-2}$;

6) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^3-2x^2+x-1}{x^3-x^2+3x-3}$; 7) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$;

8) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-5x^2+3x+9}{x^3-8x^2+21x-18}$.

21. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^7+5x^6+4x^3}{x^7+2x^3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2x^2-11x-21}{x^2-9x+14}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-x^3+x^2-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-2x+1}{x^8-2x+1}$;

5) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{101}-101x+100}{x^2-2x+1}$; 6) $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{(x^2+2x)^2-14(x^2+2x)-15}{x^4-29x^2+100}$;

7) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{3}{1-x^3}+\dfrac{1}{x-1}\right)$; 8) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{2}{2x-x^2}+\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$;

9) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x^2-4x+6}{x^2-5x+4}+\dfrac{x-4}{3x^2-9x+6}\right)$.

22. 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+5)^5+(x+6)^5+(x+7)^5}{x^5+5^5}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^2(3-7x)^2}{(2x-1)^4}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x^3+7x-1)^6}{(2x^6-13x^2+x)^3}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(1+x^{11}+7x^{13})^3}{(1+x^4)^{10}}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3+3x^2}{x^2+1}-x\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2}{2x+1}+\dfrac{x^3+4x^2-2}{1-2x^2}\right)$.

23. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{P_n(x)}{Q_k(x)}$, $P_n(x) = a_0x^n + \ldots + a_n$, $Q_k(x) = b_0x^k + \ldots + b_k$ —

многочлены $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$.

24. 1) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^n-1}{x^k-1}$, $n,k \in N$;

2) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^{n+1}-x^{k+1}+x^k-nx+n-1}{(x-1)^2}$, $n,k\in N$;

3) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{(x^n-1)(x^{n-1}-1)\ldots(x^{n-k+1}-1)}{(x-1)(x^2-1)\ldots(x^k-1)}$, $n,k\in N$, $k\leqslant n$;

4) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{n}{1-x^n}-\dfrac{k}{1-x^k}\right)$, $n,k\in N$.

25. 1) $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}$;

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sqrt{x^2+x+1}-2-x}{x^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$;

6) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{7+2x-x^2}-\sqrt{1+x+x^2}}{2x-x^2}$;

7) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$; 8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{x+8}-2}{\sqrt{1+2x}-1}$;

9) $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt[3]{9+x}+x+7}{\sqrt[3]{15+2x}+1}$; 10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[5]{2x^2+10x+1}-\sqrt[7]{x^2+10x+1}}{x}$.

26. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+14x}{2x+\sqrt[3]{x^2}}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^6-1}{\sqrt{x^{12}+5x^5-1}}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+\sqrt{x^3+x^4}}}{\sqrt{x^2+4}}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4-1}}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+6}+|x|}{\sqrt[6]{x^4+2}-|x|}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+4/x}-\sqrt[4]{1+3/x}}{1-\sqrt[5]{1-5/x}}$.

27. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1})$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^4+2x^2-1}-\sqrt{x^4-2x^2-1})$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^4+13x^2-7}-2x^2)$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2+4x}-\sqrt[3]{x^3-3x^2+4})$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+\sqrt{x^2}}}-\sqrt{x^2}\right)$;

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+x^2\sqrt{x^4+1}}-\sqrt{2x^4}\right)$.

28. 1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[k]{x}-1}$, $n,k\in N$;

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{a+x}-\sqrt[n]{a-x}}{x}$, $n\in N$, $a>0$;

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-\sqrt[k]{1+bx}}{x}$, $n,k\in N$;

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt[n]{1+ax}\,\sqrt[k]{1+bx}-1}$, $n,k\in N$;

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n-(\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}$, $n\in N$;

6) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[n]{(1+x^2)(2+x^2)...(n+x^2)}-x^2)$, $n\in N$.

29. 1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}4x}{\sin x}$; 3) $\lim\limits_{x\to0}x\operatorname{ctg}5x$;

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$, $\beta\neq0$; 5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{\sin 6x-\sin 7x}$;

6) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2}{\sin 2x\sin x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$; 7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 3x^3-1}{\sin^6 2x}$;

8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4\sin(\pi/6+x)\sin(\pi/6+2x)-1}{\sin x}$;

9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}(1+x)\operatorname{tg}(1-x)-\operatorname{tg}^2 1}{\operatorname{tg}^2 x}$.

30. 1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi^2-x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{\pi}{x}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\cos\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{3}{x}\right)$; 5) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{2}\cos x-1}$;

6) $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{\cos(2\pi/3-x)}{\sqrt{3}-2\cos x}$; 7) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\dfrac{\pi}{\cos x}-2x\operatorname{tg}x\right)$;

8) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1+\cos x}$.

31. 1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$;

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin 3x}-\sqrt{1-4\sin 5x}}{\sin 6x}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\operatorname{tg}3x}{\sqrt{1+\sin^2 2x}-\sqrt{1+\sin^2 x}}$;

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos 4x}-\sqrt[3]{\cos 5x}}{1-\cos 3x}$; 6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}x^2}$;

7) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\sqrt[4]{\sin x}-\sqrt[3]{\sin x}}{\cos^2 x}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x^2+1}-\sin\sqrt{x^2-1})$.

32. 1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 2x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}2x-3\arcsin 4x}{\sin 5x-6\operatorname{arctg}7x}$;

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\pi-4\operatorname{arctg}1/(1+x)}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\arcsin x}-\sqrt[3]{1+\operatorname{arctg}2x}}{\sqrt{1+\operatorname{arctg}3x}-\sqrt{1-\arcsin 4x}}$.

33. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)^{x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{x/(2x+1)}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)^{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x}$.

34. 1) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\lg x-1}{x-10}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x+x^2)+\ln(1-3x+x^2)}{x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty} x\log_2\dfrac{10+x}{5+x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1-\sin x}{\ln(1+x)}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\operatorname{tg}(\pi/4+4x)}{x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 5x}{\ln\cos 4x}$; 7) $\lim\limits_{x\to 1/4}\dfrac{1-\operatorname{ctg}\pi x}{\ln\operatorname{tg}\pi x}$;

8) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\ln\cos\dfrac{\pi}{x}$.

35. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10^x-1}{2^x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty} x(3^{1/x}-1)$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2(4^{1/x}-4^{1/(x+1)})$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-e^{2x}}{\operatorname{tg} x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 5x}-e^{\sin x}}{\ln(1+2x)}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\sqrt{1+\sin x^2}-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{\sin^2 x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt[5]{1+2x}}{\sqrt{1+5x}-\sqrt[4]{1+2x}}$.

36. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2-4}\right)^{x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+x}-x)^{1/x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x^4)^{1/\sin^2 x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(1+\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{-1/x^2}$; 6) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 6x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(e+x))^{\operatorname{ctg} x}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{xe^x+1}{x\pi^x+1}\right)^{1/x^2}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\operatorname{arctg}^2 x)^{1/\operatorname{arctg} x^2}$.

37. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh} x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch} 2x-1}{\cos x-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\operatorname{ch} 5x}{x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{sh} 3x}-e^{\operatorname{sh} x}}{\operatorname{tg} x}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-\ln\operatorname{ch} x^2)$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{ch} 2x}{\operatorname{ch} x}\right)^{1/x^2}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x\operatorname{arctg} x}{\operatorname{ch} x}\right)^{1/\operatorname{tg}^2 x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x\ln(1+x)}{1-x\arcsin x}\right)^{1/\sin^2 x}$.

38. 1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-x^a}$, $a>0$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a^x-b^x)^2}{a^{x^2}-b^{x^2}}$, $a>0,\ b>0,\ a\neq b$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^2}{2}\right)^{1/x^2}$, $a>0,\ b>0$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}}{a+b}\right)^{1/x}$, $a>0,\ b>0$.

39. Найти: а) $f(-0)$; б) $f(+0)$; если:

1) $f(x)=\dfrac{x-|x|}{2x}$; 2) $f(x)=\arccos(x-1)$; 3) $f(x)=e^{-1/x^2}$;

4) $f(x)=2^{\operatorname{ctg} x}$.

40. Найти: а) $f(x_0-0)$; б) $f(x_0+0)$; если:

1) $f(x)=\dfrac{2(1-x^2)+|1-x^2|}{3(1-x^2)-|1-x^2|}$, $x_0=1$;

2) $f(x)=\operatorname{sign}\cos x$, $x_0=\pi/2$; 3) $f(x)=\operatorname{arctg}\operatorname{tg}x$, $x_0=\pi/2$;

4) $f(x)=\dfrac{1}{x+3^{1/(3-x)}}$, $x_0=3$.

41. Найти: а) $f(x_0-0)$; б) $f(x_0+0)$; если:

1) $f(x)=\dfrac{1}{x-[x]}$, $x_0=-1$; 2) $f(x)=x+[x^2]$, $x_0=10$;

3) $f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}$, $x_0=1$; 4) $f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^n-3}{x^n-1}$, $x_0=1$.

42. Найти: а) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$; если:

1) $f(x)=\operatorname{arctg}x$; 2) $f(x)=\operatorname{arcctg}x$; 3) $f(x)=e^x$;

4) $f(x)=\arcsin\dfrac{1+x}{1-x}$; 5) $f(x)=\left(\dfrac{1+x}{1+2x}\right)^x$; 6) $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{|x|}\right)^x$;

7) $f(x)=\sqrt{1+7x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$; 8) $f(x)=\dfrac{\ln(1+4^x)}{x}$.

43. Вычислить предел:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3})$;

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{\dfrac{x^3+2x^2}{x+1}}\right)$; 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-\sqrt{4x^2-7x+4})$;

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\arcsin(\sqrt{x^2+x}+x)$; 5) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x-x\cos\sqrt{x}}$;

6) $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin 4x-\cos 4x}\right)^{1/x}$; 7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2+\sqrt{x})}{\ln(6+\sqrt[6]{x})}$;

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(4+5e^{6x})}{\ln(1+2e^{3x})}$; 9) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$;

10) $\lim\limits_{x\to-1+0}\dfrac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}$.

44. Выяснить, какие из следующих функций являются бесконечно малыми:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$, $x\to1$;

2) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$: а) $x\to+\infty$, б) $x\to-\infty$;

3) $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$, $x\to+0$;

4) $f(x)=\dfrac{1}{1+2^x}$: а) $x\to+\infty$, б) $x\to-\infty$;

5) $f(x)=\sin\ln(x^2+1)-\sin\ln(x^2-1)$, $x\to\infty$;

6) $f(x) = \dfrac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^4 + x + 1)}$, $x \to \infty$.

45. Выяснить, какие из следующих функций являются бесконечно большими:

1) $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - 4x^2 + 4x} - \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$, $x \to 2$;

2) $f(x) = x(\sqrt{x^2+1} - x)$: а) $x \to +\infty$, б) $x \to -\infty$;

3) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{(1 - \sin x)^2}}$, $x \to \dfrac{\pi}{2}$;

4) $f(x) = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$: а) $x \to +\infty$, б) $x \to -\infty$;

5) $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^x$: а) $x \to +\infty$, б) $x \to -\infty$;

6) $f(x) = (1-x)^{1/x^2}$: а) $x \to +0$, б) $x \to -0$.

46. Найти значения α и β, при которых функция $f(x)$ является бесконечно малой:

1) $f(x) = \dfrac{x^2(x-1)}{(x+1)^2} - \alpha x - \beta$, $x \to \infty$;

2) $f(x) = \sqrt{4x^2 + x + 1} - \alpha x - \beta$: а) $x \to +\infty$, б) $x \to -\infty$;

3) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x^3} - \alpha x - \beta$, $x \to \infty$;

4) $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x - 1} - \alpha x - \beta$: а) $x \to +\infty$, б) $x \to -\infty$;

5) $f(x) = (x+4)e^{1/x} - \alpha x - \beta$: а) $x \to \infty$, б) $x \to -0$;

6) $f(x) = \ln(1 + e^{3x}) - \alpha x - \beta$: а) $x \to +\infty$, б) $x \to -\infty$;

7) $f(x) = x \operatorname{arctg} x - \alpha x - \beta$: а) $x \to +\infty$, б) $x \to -\infty$.

47. Найти значения α и β, при которых функция $f(x)$ является бесконечно малой при $x \to +0$:

1) $f(x) = x^\alpha \sin \dfrac{1}{x^\beta}$; 2) $f(x) = \dfrac{\ln(1 + x^\alpha)}{x^\beta}$;

3) $f(x) = x^\alpha \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x^\beta}$; 4) $f(x) = (1 - x^\alpha)^{x^\beta}$.

48. Показать, что $f(x)$ бесконечно малая функция при $x \to 0$, и найти функцию $g(x)$ вида Ax^n такую, что $f(x) \sim g(x)$ при $x \to 0$:

1) $f(x) = 3\sin^2 x^2 - 5x^5$; 2) $f(x) = \sqrt{4 - x^4} + x^2 - 2$;

3) $f(x) = 1 - x^4 - \cos x^2$; 4) $f(x) = 2\sin x - \operatorname{tg} 2x$;

5) $f(x) = \sin(\sqrt{x^2+9} - 3)$; 6) $f(x) = 2^{x^2} - 1$.

49. Показать что $f(x)$ бесконечно большая функция при $x \to x_0$ и найти функцию $g(x)$ вида Ax^n такую, что $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$:

1) $f(x) = \dfrac{x^5}{2x^2 + x + 1}$, $x_0 = \infty$; 2) $f(x) = \sqrt{x^4 + x + 1}$, $x_0 = \infty$;

3) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}}$, $x_0 = +\infty$;

4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$, $x_0 = +\infty$;

5) $f(x) = (\sqrt{1+2x} - 1)\operatorname{ctg}^2 x^3$, $x_0 = 0$;

6) $f(x) = \dfrac{1 - \cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^5}$, $x_0 = 0$.

50. Установить, какие из следующих утверждений верны:

1) $x^2 = o(x)$ при: а) $x \to 0$, б) $x \to \infty$;

2) $x = o(x^2)$ при: а) $x \to 0$, б) $x \to \infty$;

3) $\sqrt{x^2+x} - x = o(1)$ при: а) $x \to +\infty$, б) $x \to -\infty$;

4) $\ln(1+e^x) = o(1)$ при: а) $x \to +\infty$, б) $x \to -\infty$.

51. Пусть $x \to 0$, $n \in N$, $k \in N$, $n \geqslant k$. Показать, что:

1) $o(x^n) + o(x^k) = o(x^k)$; 2) $o(x^n) \cdot o(x^k) = o(x^{n+k})$.

52. Найти функцию $g(x)$ вида Ax^n такую, что $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$:

1) $f(x) = \dfrac{x^2 \operatorname{arctg} x}{x^5 + x^2 + 1}$, $x_0 = 0$, $x_0 = +\infty$;

2) $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$, $x_0 = +\infty$, $x_0 = -\infty$;

3) $f(x) = \sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[3]{1-x^2}$, $x_0 = 0$, $x_0 = \infty$;

4) $f(x) = \dfrac{\sin(1/(x+1))}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}$, $x_0 = 0$, $x_0 = \infty$.

53. Установить, какие из следующих утверждений верны при $x \to \infty$:

1) $100x + x\sin x = O(x)$; 2) $x = O(100x + x\sin x)$;

3) $x + x\sin x = O(x)$; 4) $x = O(x + x\sin x)$;

5) $\sqrt{x^2+1} - |x| = O(1/x)$; 6) $1/x = O(\sqrt{x^2+1} - |x|)$.

54. Доказать, что при $x \to x_0$:

1) $O(O(f)) = O(f)$; 2) $o(O(f)) = o(f)$; 3) $O(o(f)) = o(f)$;

4) $o(f) + O(f) = O(f)$; 5) $o(f) \cdot O(f) = o(f^2)$.

55. Пусть $x \to 0$, $n \in N$, $k \in N$, $n > k$. Показать, что:

1) $O(x^n) + O(x^k) = O(x^k)$; 2) $O(x^n) \cdot O(x^k) = O(x^{n+k})$.

56. Пусть $x \to \infty$, $n \in N$, $k \in N$, $n > k$. Показать, что:

1) $O(x^n) + O(x^k) = O(x^n)$; 2) $O(x^n) \cdot O(x^k) = O(x^{n+k})$.

57. Определить, при каких значениях α и β функции $f(x)$ и $g(x) = \alpha x^\beta$ эквивалентны:

1) $f(x) = \sqrt{2x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$: а) $x \to +0$, б) $x \to +\infty$;

2) $f(x) = \sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}$, $x \to 0$;

3) $f(x) = 2e^{x^4} + (\cos x - 1)^2 + x^5 - 2$, $x \to 0$;

4) $f(x) = \sin^2 2x + \arcsin^2 x + 2\operatorname{arctg} x^2$, $x \to 0$;

5) $f(x) = 1 - \cos(1 - \cos(1/x))$, $x \to \infty$;

6) $f(x) = E(1/x)$, $x \to \infty$.

58. Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{arctg}(2-x)+\sin(x-2)^2}{x^2-4}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[4]{1+x^2}+x^3-1}{\ln\cos x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2(\sqrt[3]{1+3x}-1)+\sin^3 x}{1-\sqrt{1+x^3}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sin 2x - 2\operatorname{tg} x)^2+(1-\cos 2x)^3}{\operatorname{tg}^7 6x+\sin^6 x}$.

59. Пусть $\lim\limits_{t\to t_0} \varphi(t) = a$, причем $\varphi(t) \neq a$ при $t \neq t_0$ в некоторой окрестности точки t_0. Доказать, что:

1) если $f(x) = o(g(x))$ при $x \to x_0$, то $f(\varphi(t)) = o(g(\varphi(t)))$ при $t \to t_0$;

2) если $f(x) = O(g(x))$ при $x \to x_0$, то $f(\varphi(t)) = O(g(\varphi(t)))$ при $t \to t_0$.

60. Найти $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $x \in R$, если

$$f(x) = \begin{cases} 1/q & \text{при } x = p/q, \\ 0 & \text{при } x \text{ иррациональном,} \end{cases}$$

где p и q — взаимно простые целые числа.

61. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ и $\lim\limits_{t\to t_0} g(t) = x_0$. Следует ли отсюда, что $\lim\limits_{t\to t_0} f(g(t)) = a$?

62. Доказать, что если функция $f(x)$, $x \in (x_0; +\infty)$, ограниченна в каждом интервале $(x_0; x_1)$ и существует конечный или бесконечный

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)-f(x)}{x^n} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

то

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^{n+1}} = \frac{1}{n+1} \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}.$$

63. Найти $\varlimsup\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\varliminf\limits_{x\to x_0} f(x)$, если:

1) $f(x) = e^{\cos(1/x^2)}$; 2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} \sin^2 \dfrac{1}{x}$; 3) $f(x) = \operatorname{arcctg} \dfrac{1}{x}$;

4) $f(x) = \sqrt{1/x^2 - 1/x} - 1/x$.

64. Найти $\varlimsup\limits_{n\to\infty} f(x)$ и $\varliminf\limits_{n\to\infty} f(x)$, если:

1) $f(x) = \dfrac{\pi}{2} \cos^2 x + \operatorname{arctg} x$; 2) $f(x) = \dfrac{1+x+6x^2}{1-x+2x^2} \sin x^2$;

3) $f(x) = (\sqrt{4x^2+x+1} - \sqrt{4x^2-x+1})(1+\cos 2x)$;

4) $f(x) = (1+\cos^2 x)^{1/\cos^2 x}$.

65. Доказать, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} (\cos x + \sin\sqrt{2}x) = 2.$$

ОТВЕТЫ

1. 1) $\delta \leqslant \sqrt{4{,}001} - 2 \approx 0{,}00025$; 2) $\delta \leqslant 4/51$;
3) $\delta \leqslant \pi/2 - \arcsin 0{,}99 \approx 0{,}14$; 4) δ не существует.

2. 1) $\delta \leqslant 0{,}99$; 2) $\delta \leqslant 0{,}90$; 3) $\delta \leqslant 1 - 1/\sqrt[10]{10} \approx 0{,}21$;
4) $\delta \leqslant 1 - 1/\sqrt[100]{10} \approx 0{,}023$.

3. $\delta \leqslant \varepsilon/3$. **4.** $\delta \leqslant \sqrt{9+\varepsilon} - 3$.

5. Если $\varepsilon > 1$, то δ — любое число; если $\varepsilon \leqslant 1$, то $\delta \geqslant \sqrt{(1-\varepsilon)/\varepsilon}$.

6. Если $\varepsilon \geqslant \pi$, то δ — любое число; если $\varepsilon < \pi$, то $\delta \leqslant -\operatorname{ctg}\varepsilon$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\pi/2$.

9. Не следует.

17. 1) $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \quad (-\delta < x < 0 \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)$;
2) $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \quad (|x| > \delta \Rightarrow |f(x) - 4| < \varepsilon)$;
3) $\forall\varepsilon\ \exists\delta > 0\ \forall x \quad (1 < x < 1 + \delta \Rightarrow f(x) < \varepsilon)$;
4) $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta\ \forall x \quad (x < \delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon)$.

18. 1) $\exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x \quad (-\delta < x < 0 \wedge |f(x)| \geqslant \varepsilon)$;
2) $\exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x \quad (|x| > \delta \wedge |f(x) - 4| \geqslant \varepsilon)$;
3) $\exists\varepsilon\ \forall\delta > 0\ \exists x \quad (1 < x < 1 + \delta \wedge f(x) \geqslant \varepsilon)$;
4) $\exists\varepsilon > 0\ \forall\delta\ \exists x \quad (x < \delta \wedge f(x) \leqslant \varepsilon)$.

19. 1) $\exists a\ \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \quad (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)$;
2) $\forall a\ \exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x \quad (0 < |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - a| \geqslant \varepsilon)$.

20. 1) $7/3$; 2) 3; 3) 1; 4) $-2/5$; 5) $4/3$; 6) $3/4$; 7) $3/2$; 8) 4.

21. 1) 2; 2) $17/5$; 3) 2; 4) $1/3$; 5) 5050; 6) $64/105$; 7) 1;
8) $-1/2$; 9) 1.

22. 1) 3; 2) $49/16$; 3) 8; 4) 0; 5) 3; 6) $-9/4$.

23. 0, если $n < k$; a_0/b_0, если $n = k$; ∞, если $n > k$.

24. 1) n/k; 2) $(n^2 - 2k + n)/2$; 3) C_n^k; 4) $(n-k)/2$.

25. 1) $1/4$; 2) 3; 3) $5/3$; 4) $3/4$; 5) 3; 6) $\sqrt{7}/4$; 7) $-1/3$;
8) $1/12$; 9) 2; 10) $4/7$.

26. 1) 7; 2) 5; 3) $\sqrt{5}$; 4) 3; 5) -2; 6) $7/12$.

27. 1) 0; 2) 2; 3) $13/4$; 4) 2; 5) $1/2$; 6) $\sqrt{2}/8$.

28. 1) k/n; 2) $2\sqrt[n]{a}/(na)$; 3) $(ak - bn)/(nk)$; 4) $nk/(ka + nb)$;
5) $2n$; 6) $(n+1)/2$.

29. 1) 3; 2) 4; 3) $1/5$; 4) α/β; 5) -1; 6) $1/2$; 7) $-9/128$;
8) $3\sqrt{3}$; 9) $\operatorname{tg}^4 1 - 1 = -(\cos 2)/\cos^4 1$.

30. 1) $-7/2$; 2) $1/(2\pi)$; 3) π; 4) 4; 5) 4; 6) 1; 7) 2; 8) 14.

31. 1) $4\sqrt{2}$; 2) $1/4$; 3) $13/6$; 4) 2; 5) $1/3$; 6) $3/2$;
7) $1/24$; 8) 0.

32. 1) 2; 2) $10/37$; 3) 2; 4) $-2/21$.

33. 1) 0; 2) 0; 3) не существует; 4) $1/e$.

34. 1) $1/(10\ln 10)$; 2) -7; 3) $5/\ln 2$; 4) $-2/3$; 5) 8; 6) $25/16$.
7) 1; 8) $-\pi^2/2$.

35. 1) $(\ln 10)/\ln 2$; 2) $\ln 3$; 3) $\ln 4$; 4) 5; 5) 2; 6) 2; 7) $3/2$;
8) $3/10$.

36. 1) e^8; 2) $1/\sqrt{e}$; 3) e^3; 4) e; 5) $\sqrt{e}$; 6) $1/\sqrt{e}$; 7) e^{-18}; 8) $e^{1/e}$; 9) e/π; 10) $\sqrt{e}$.

37. 1) 1; 2) -4; 3) $25/2$; 4) 2; 5) $\ln 2$; 6) $e^{3/2}$; 7) $e^{1/2}$; 8) e^2.

38. 1) $a^{a^a}\ln a$; 2) $\ln(a/b)$; 3) $\sqrt{ab}$; 4) $a^{a/(a+b)}b^{b/(a+b)}$.

39. 1) а) 1; б) 0; 2) а) Не существует, б) π; 3) а) 0, б) 0; 4) а) 0, б) $+\infty$.

40. 1) а) $3/2$, б) $1/4$; 2) а) 1, б) -1; 3) а) $\pi/2$, б) $-\pi/2$; 4) а) 0, б) $1/3$.

41. 1) а) 1, б) $+\infty$; 2) а) 109, б) 110; 3) а) 0, б) 1; 4) а) 3, б) 2.

42. 1) а) $-\pi/2$, б) $\pi/2$; 2) а) π, б) 0; 3) а) 0; б) $+\infty$; 4) а) $-\pi/2$, б) Не существует; 5) а) $+\infty$; б) 0; 6) а) $1/e$; б) e; 7) а) -4, б) 4; 8) а) 0, б) $\ln 4$.

43. 1) -2; 2) $-1/2$; 3) $7/4$; 4) $-\pi/6$; 5) $1/2$; 6) 0; 7) 3; 8) 2; 9) $\sqrt{2}$; 10) $1/\sqrt{2\pi}$.

44. 1); 2) а); 3); 4) а); 5).

45. 1); 2) б); 3); 4) б); 5) б); 6) б).

46. 1) $\alpha=1$, $\beta=-3$; 2) а) $\alpha=2$, $\beta=1/4$, б) $\alpha=-2$, $\beta=-1/4$; 3) $\alpha=-1$, $\beta=1/3$; 4) а) $\alpha=1$, $\beta=0$, б) $\alpha=\beta=0$; 5) а) $\alpha=1$, $\beta=5$; б) $\alpha=\beta=0$; 6) а) $\alpha=3$, $\beta=0$; б) $\alpha=\beta=0$; 7) а) $\alpha=\pi/2$, $\beta=-1$; б) $\alpha=-\pi/2$, $\beta=-1$.

47. 1) $\alpha>0$, β любое, $\alpha\leqslant 0$, $\beta<0$, $\alpha>\beta$; 2) $\alpha>\beta$; 3) $\alpha>0$, β любое, $\alpha\leqslant 0$, $\beta<0$, $\alpha>\beta$; 4) $\alpha+\beta>0$.

48. 1) $3x^4$; 2) x^2; 3) $-x^4/2$; 4) $-3x^3$; 5) $x^2/6$; 6) $\ln 2\cdot x^2$.

49. 1) $x^3/2$; 2) x^2; 3) $2x^{1/2}$; 4) $-4x^2$; 5) x^{-5}; 6) $3x^{-3}/2$.

50. 1) а); 2) б); 3) а); 4) б).

52. 1) x^3 и $\pi x^{-3}/2$; 2) $2x^2/3$ и $2x^{2/3}$; 3) x^{-1}/x и $-2x$; 4) $\sin 1\cdot x^{-1/6}$ и $x^{-4/3}$.

53. 1), 2), 3), 5), 6).

57. 1) а) $\alpha=1$, $\beta=1/8$, б) $\alpha=\sqrt{2}$, $\beta=1/2$; 2) $\alpha=1/2$, $\beta=2$; 3) $\alpha=9/4$, $\beta=4$; 4) $\alpha=7$, $\beta=2$; 5) $\alpha=1/8$, $\beta=-4$; 6) $\alpha=1$, $\beta=-1$.

58. 1) $-1/4$; 2) $-1/2$; 3) -4; 4) 12. **60.** 0.

61. Не следует. Рассмотреть при $t\to 0$ функцию $f(g(t))$, где

$$f(x)=\begin{cases}1/q & \text{при } x=p/q,\\ 0 & \text{при } x \text{ иррациональном},\end{cases}$$

где p и q — взаимно простые числа,

$$g(t)=\begin{cases}1 & \text{при } x\neq 0\\ 0 & \text{при } x=0.\end{cases}$$

63. 1) e и e^{-1}; 2) $+\infty$ и 0; 3) π и 0; 4) $+\infty$ и $-1/2$.

64. 1) π и $-\pi/2$; 2) 3 и -3; 3) 1 и -1; 4) e и 2.

§ 10. Непрерывность функции

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Непрерывность функции в точке. Функцию f, определенную в окрестности точки x_0, называют *непрерывной в точке* x_0, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

На "языке $\varepsilon - \delta$" это означает: функция f, определенная в окрестности точки x_0, непрерывна в этой точке, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для любого $x \in D(f)$, удовлетворяющего условию $|x - x_0| < \delta$, верно неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$; короче,

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in D(f)\quad (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Разность $x - x_0$ называют *приращением аргумента* и обозначают Δx, так что $x = x_0 + \Delta x$. Разность $f(x) - f(x_0)$ называют *приращением функции*, соответствующим приращению аргумента Δx, и обозначают Δf или Δy, так что $f(x) = f(x_0) + \Delta f = f(x_0) + \Delta y$. В этих обозначениях: функция f, определенная в окрестности точки x_0, *непрерывна в этой точке*, если

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f = 0.$$

Функцию f, определенную на промежутке $(a; x_0]$, называют *непрерывной слева в точке* x_0, если

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0).$$

Функцию f, определенную на промежутке $[x_0; b)$, называют *непрерывной справа в точке* x_0, если

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0).$$

2. Точки разрыва функции. Пусть функция f определена в окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой x_0. Точку x_0 называют *точкой разрыва функции* f в следующих случаях:

1) функция f не определена в этой точке;

2) функция f определена в точке x_0, но:

а) не существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$,

б) существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, но $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, но или f не определена в точке x_0, или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, то x_0 называют *точкой устранимого разрыва.*

Если в точке разрыва x_0 существуют оба односторонних предела

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0), \qquad \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0 + 0),$$

то x_0 называют *точкой разрыва 1-го рода*, а разность

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + 0) - f(x_0 + 0)$$

— *скачком функции* f к точке x_0. Его обозначают также $\Delta_{x_0} f$.

Если в точке разрыва x_0 не существует хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, то x_0 называют *точкой разрыва 2-го рода*.

Если x_0 — точка разрыва функции, то эту функцию называют *разрывной в точке* x_0.

Употребляют термины: *непрерывная на множестве* X *функция*, *разрывная на множестве* X *функция*. Непрерывной функцией называют функцию, которая непрерывна *в каждой точке множества* X (если функция определена в концах промежутка, то имеют в виду непрерывность соответственно слева или справа). Разрывной функцией называют функцию, имеющую *хотя бы одну точку разрыва, принадлежащую множеству* X. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ непрерывна на множестве $X = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, но разрывна на множестве $X = (-\infty; +\infty)$, поскольку оно содержит точку разрыва этой функции $x_0 = 0$. Та же функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ непрерывна на множестве $x = (0; +\infty)$, но разрывна на множестве $X = [0; +\infty)$, поскольку в точке $x_0 = 0$ эта функция разрывна справа. Термины *непрерывная* или *разрывная функция* без указания множества требуют уточнения.

Все основные элементарные функции: постоянная, показательная, логарифмическая, степенная, тригонометрические, обратные тригонометрические, непрерывны на своих областях определения.

3. Свойства функций, непрерывных в точке. Если функции f и g непрерывны в точке x_0, то в некоторой окрестности этой точки определены функции cf (c — число), $f + g$, $f \cdot g$, и они непрерывны в точке x_0. Если, кроме того, $g(x_0) \neq 0$, то в некоторой окрестности точки x_0 определена функция f/g, и она непрерывна в точке x_0.

Если функция $y = g(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $f(y)$ непрерывна в точке $y_0 = g(x_0)$, то в некоторой окрестности точки x_0 определена композиция $f(g(x))$, и она непрерывна в точке x_0.

Из этих свойств следует, что знак предела можно переставлять со знаком непрерывной функции, а также следует правило замены переменной при вычислении предела (см. § 9).

4. Свойства функций, непрерывных на отрезке. Функцию называют *непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если она непрерывна в каждой точке интервала $(a; b)$ и непрерывна в точке a справа и в точке b слева.

Пусть функция определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$. Тогда эта функция:

1) ограниченна на $[a; b]$;

2) достигает на $[a; b]$ своих верхней и нижней граней, т. е. существуют $x_1, x_2 \in [a; b]$ такие, что

$$f(x_1) = \sup_{[a;b]} f(x), \quad f(x_2) = \inf_{[a,b]} f(x)$$

(*теоремы Вейерштрасса*).

Пусть функция определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$. Тогда для любого числа C, заключенного между $f(a)$ и $f(b)$, найдется точка $\xi \in [a; b]$ такая, что $f(\xi) = C$ (*теорема о промежуточных значениях*).

Пусть функция f определена, строго возрастает (убывает) и непрерывна на отрезке $[a; b]$. Тогда она имеет обратную функцию, которая определена, строго возрастает (убывает) и непрерывна на отрезке $[f(a); f(b)]$ (соответственно $[f(b); f(a)]$) (*теорема о непрерывности обратной функции*).

Пусть функция f определена, строго возрастает (убывает) и непрерывна на интервале $(a; b)$, и пусть

$$c = \lim_{x \to a+0} f(x), \quad d = \lim_{x \to b-0} f(x).$$

Тогда она имеет обратную функцию, которая определена, строго возрастает (убывает) и непрерывна на интервале $(c; d)$ (соответственно на $(d; c)$).

При этом, если $a = -\infty$, то под пределом $\lim\limits_{x \to -\infty+0} f(x)$ понимают $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, а если $b = +\infty$, то под пределом $\lim\limits_{x \to +\infty-0} f(x)$ предел $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

5. Непрерывность функции, заданной параметрически. Пусть функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определены и непрерывны на интервале $(\alpha; \beta)$ и функция $\varphi(t)$ строго монотонна на $(\alpha; \beta)$. Тогда система уравнений

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

определяет единственную и непрерывную функцию

$$y(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$$

на интервале $(a; b)$, где

$$a = \lim_{t \to \alpha+0} \varphi(t), \quad b = \lim_{t \to \beta-0} \varphi(t).$$

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Доказать, что функция $\sqrt{x}$ непрерывна в каждой точке $x_0 > 0$ и непрерывна справа в точке $x_0 = 0$.

▲ Докажем непрерывность $\sqrt{x}$ в точке $x_0 > 0$. Преобразуем и оценим модуль разности:

$$0 \leqslant |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \leqslant \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to x_0}|x-x_0|=0$, а $1/\sqrt{x_0}$ — постоянная, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}}=0.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{x\to x_0}|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|=0,$$

и поэтому

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}.$$

Значит, функция $\sqrt{x}$ непрерывна в каждой точке $x_0>0$.

Докажем, что функция $\sqrt{x}$ непрерывна в точке $x_0=0$ справа. Пусть ε — произвольное положительное число. Неравенство $|\sqrt{x}-0|<\varepsilon$ равносильно неравенству $0\leqslant x<\varepsilon^2$. Возьмем $\delta=\varepsilon^2$, тогда из неравенства $0\leqslant x<\delta$ следует неравенство $\sqrt{x}<\varepsilon$. Значит, $\lim\limits_{x\to+0}\sqrt{x}=0$, и поэтому функция $\sqrt{x}$ непрерывна справа в точке $x_0=0$. ▲

Пример 2. Доказать, что функция $y=x^4$ непрерывна в каждой точке $x_0\in R$.

▲ Для любой точки $x_0\in R$ и любого Δx имеем

$$\Delta y=(x_0+\Delta x)^4-x_0^4=4x_0^3\Delta x+6x_0^2(\Delta x)^2+4x_0(\Delta x)^3+(\Delta x)^4.$$

Используя теоремы о пределе суммы и произведения функций, получаем

$$\lim_{x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}(4x_0^3\Delta x+6x_0^2(\Delta x)^2+4x_0(\Delta x)^3+(\Delta x)^4)=0,$$

следовательно, функция $y=x^4$ непрерывна в каждой точке $x_0\in R$. ▲

Пример 3. Найти точки разрыва функции, установить их род, вычислить скачки в точках разрыва 1-го рода, построить график:

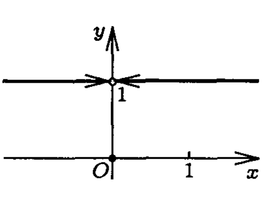

Рис. 10.1

1) $y=(\operatorname{sign}x)^2$; 2) $y=E(x)$; 3) $y=\dfrac{|x|-x}{x^2}$.

▲ 1) Из определения функции $\operatorname{sign}x$ следует, что

$$(\operatorname{sign}x)^2=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

График этой функции изображен на рис. 10.1. Функция $y=(\operatorname{sign}x)^2$ непрерывна во всех точках, кроме $x=0$. В этой же точке $y(-0)=y(+0)\neq y(0)$. Значит, $x=0$ — точка устранимого разрыва. Скачок функции в этой точке равен 0.

2) Пусть $n\in Z$. Если $n-1\leqslant x<n$, то $E(x)=n-1$, а если $n\leqslant x<n+1$, то $E(x)=n$. График показан на рис. 10.2. Если x_0 — нецелое число, то существует окрестность точки x_0 (не содержащая целых чисел), в которой функция постоянна, а потому и непрерывна в точке x_0. Если же $x_0=n$ — целое число, то $E(n-0)=n-1$,

$E(n+0) = n$, и, значит, $x_0 = n$ — точка разрыва 1-го рода, причем $\Delta E(n) = 1$.

3) Функция $y = (|x| - x)/x^2$ определена для всех $x \in R$, кроме $x = 0$. Следовательно, $x = 0$ — точка разрыва этой функции. Так как

$$y = \frac{|x| - x}{x^2} = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ -2/x, & x < 0, \end{cases}$$

то $\lim\limits_{x\to+0} y = 0$, $\lim\limits_{x\to-0} y = +\infty$; это означает, что $x = 0$ — точка разры-

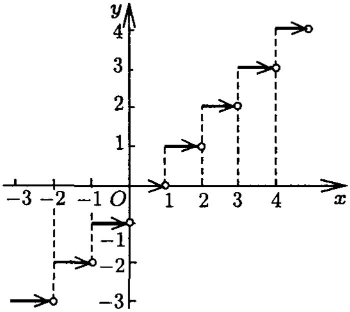

Рис. 10.2

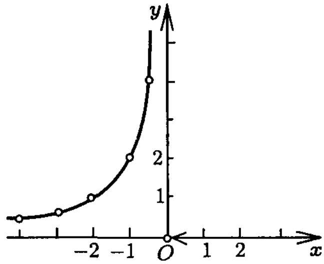

Рис. 10.3

ва 2-го рода. График этой функции изображен на рис. 10.3.

Пример 4. Пусть функция f определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$, $m = \inf\limits_{[a,b]} f$, $M = \sup\limits_{[a,b]} f$. Доказать, что для любого $C \in [m; M]$ найдется $\xi \in [a; b]$ такое, что $f(\xi) = C$.

▲ По первой теореме Вейерштрасса функция f ограничена на $[a; b]$, поэтому ее верхняя и нижняя грани — числа, и имеет смысл говорить об отрезке $[m; M]$. По второй теореме Вейерштрасса, существуют $x_1, x_2 \in [a; b]$ такие, что $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$. Допустим, что $x_1 < x_2$. По теореме о промежуточных значениях, на отрезке $[x_1; x_2]$ найдется число ξ такое, что $f(\xi) = C$. Если $x_1 > x_2$, то теорему о промежуточных значениях следует применить к отрезку $[x_2; x_1]$. Если же $x_1 = x_2$, то $m = M$, а f — постоянная, и в этом случае утверждение очевидно. ▲

Пример 5. Пусть $a > 1$, $b > 1$. Доказать, что уравнение

$$a^y + b^y = x \tag{1}$$

задает единственную непрерывную функцию $y(x)$, определенную на $(0; +\infty)$.

▲ Функции a^y и b^y строго возрастают и непрерывны на R. Значит, и их сумма строго возрастает и непрерывна на R. Кроме того,

$$\lim_{y\to-\infty} (a^y + b^y) = 0, \qquad \lim_{y\to+\infty} (a^y + b^y) = +\infty.$$

В силу этого по второй из указанных теорем о непрерывности обратной функции существует функция, обратная к функции $a^y + b^y$,

$y \in R$, определенная, строго возрастающая и непрерывная на $(0; +\infty)$. Этот результат можно выразить и иначе: уравнение (1) для любого $x > 0$ имеет и притом единственное решение y, непрерывно зависящее от x и строго возрастающее с ростом x. ▲

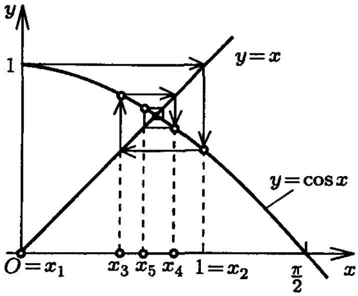

Рис. 10.4

Пример 6. Доказать, что последовательность, заданная рекуррентным способом:

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = \cos x_n, \quad n \in N,$$

сходится и ее предел является решением уравнения $x = \cos x$.

▲ Очевидно, x_2 и все члены с большими номерами удовлетворяют условию $0 < x_n \leqslant 1$, $n \in N$, т. е. данная последовательность ограниченна (рис. 10.4). При $n \geqslant 3$ преобразуем разность:

$$x_{n+1} - x_{n-1} = \cos x_n - \cos x_{n-2} = -2 \sin \frac{x_n - x_{n-2}}{2} \sin \frac{x_n + x_{n-2}}{2}.$$

Поскольку

$$0 < \frac{x_n + x_{n-2}}{2} \leqslant 1, \quad -1 \leqslant \frac{x_n - x_{n-2}}{2} \leqslant 1,$$

имеем

$$\sin \frac{x_n + x_{n-2}}{2} > 0, \quad \operatorname{sign}\left(\sin \frac{x_n - x_{n-2}}{2}\right) = \operatorname{sign}(x_n - x_{n-2}).$$

Следовательно,

$$\operatorname{sign}(x_{n+1} - x_{n-1}) = -\operatorname{sign}(x_n - x_{n-2})$$

при $n \geqslant 3$, а при $n \geqslant 4$

$$\operatorname{sign}(x_{n+1} - x_{n-1}) = \\ = -(-\operatorname{sign}(x_{n-1} - x_{n-3})) = \operatorname{sign}(x_{n-1} - x_{n-3}). \quad (2)$$

Рассмотрим подпоследовательность $\{x_{2k-1}\}$ с нечетными номерами. Имеем

$$x_3 = \cos x_2 = \cos\cos 0 = \cos 1 > 0,$$

т. е. $x_3 > x_1$. Отсюда и из (2) по принципу математической индукции следует, что $\{x_{2k-1}\}$ — возрастающая последовательность: $x_{2k+1} > x_{2k-1}$, $k \in N$. Для подпоследовательности с четными номерами $\{x_{2k}\}$ имеем

$$x_4 = \cos x_3 = \cos\cos 1 < 1,$$

т. е. $x_4 < x_2$; отсюда и из (2) заключаем, что $\{x_{2k}\}$ — убывающая последовательность. Таким образом, подпоследовательности $\{x_{2k-1}\}$ и $\{x_{2k}\}$ ограниченны и монотонны, следовательно, они сходятся. Обозначим

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = a, \quad \lim_{k\to\infty} x_{2k} = b.$$

Из равенства $x_{2k} = \cos x_{2k-1}$, $k \in N$, в силу непрерывности функции $\cos x$ следует, что

$$b = \lim_{k\to\infty} x_{2k} = \lim_{k\to\infty} \cos x_{2k-1} = \cos\big(\lim_{k\to\infty} x_{2k-1}\big) = \cos a,$$

а из равенства $x_{2k+1} = \cos x_{2k}$, $k \in N$, следует, что

$$a = \lim_{k\to\infty} \cos x_{2k} = \cos\big(\lim_{k\to\infty} x_{2k}\big) = \cos b,$$

т. е.

$$b = \cos a, \quad a = \cos b. \tag{3}$$

Заметим, что поскольку $0 \leqslant x_n \leqslant 1$, $n \in N$, то и $0 \leqslant a \leqslant 1$, $0 \leqslant b \leqslant 1$. Из соотношений (3) для разности $a - b$ имеем

$$a - b = \cos b - \cos a = 2\sin\frac{a-b}{2}\,\sin\frac{a+b}{2}.$$

Учитывая, что $0 \leqslant (a+b)/2 \leqslant 1$, а следовательно,

$$0 \leqslant \sin\frac{a+b}{2} \leqslant \sin 1$$

и что

$$\left|\sin\frac{a-b}{2}\right| \leqslant \left|\frac{a-b}{2}\right|,$$

получаем

$$|a-b| \leqslant |a-b|\cdot\sin 1.$$

Это возможно лишь, когда $|a-b| = 0$, т. е. $a = b$. Итак, обе подпоследовательности $\{x_{2k}\}$ и $\{x_{2k-1}\}$ сходятся к одному и тому же пределу a, значит, и вся последовательность $\{x_n\}$ сходится к этому пределу. Из (3) и того, что $a = b$, вытекает, что этот предел является решением уравнения $a = \cos a$. ▲

ЗАДАЧИ

1. Пусть функция f определена в окрестности точки x_0. Ее приращение Δf является бесконечно малой функцией приращения аргумента Δx при $\Delta x \to 0$. Верно ли, что функция f непрерывна в точке x_0? Верно ли обратное?

2. Пусть функция f определена в окрестности точки x_0. Сформулировать на "языке ε–δ" отрицание того, что:

а) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$; б) $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta f = 0$.

3. а) Пусть функция f определена на промежутке $(a; x_0]$. Сформулировать на "языке ε–δ" отрицание того, что f *непрерывна слева в точке* x_0.

б) Пусть функция f определена на промежутке $[x_0; b)$. Сформулировать на "языке ε–δ" отрицание того, что f *непрерывна справа в точке* x_0.

4. Пусть функция f определена в окрестности точки x_0. Может ли функция быть непрерывной в точке x_0 справа и быть не непрерывной в ней слева?

5. Доказать, что функция $y(x)$ непрерывна в каждой точке своей области определения, если:

1) $y = 2x - 1$; 2) $y = x^2$; 3) $y = \sqrt{x}$; 4) $y = 1/x$;
5) $y = ax + b$, $a \neq 0$; 6) $y = |x|$; 7) $y = x^3$; 8) $y = \sqrt[3]{x}$;
9) $y = 1/x^2$.

6. Доказать, пользуясь неравенством $|\sin x| \leqslant |x|$, непрерывность функции y в каждой точке области определения, если:

1) $y = \sin x$; 2) $y = \cos x$; 3) $y = \sin(ax + b)$.

7. Сформулировать на “языке ε–δ” определение непрерывной:

1) слева; 2) справа в точке x_0 функции;
и записать его, используя символы $\exists$, $\forall$.

8. Доказать, что:

1) функция $\sqrt[4]{1-x}$ непрерывна в каждой точке $x_0 < 1$ и непрерывна слева в точке $x_0 = 1$;

2) функция $xE(x)$ непрерывна справа в каждой точке $x_0 = n$, $n \in Z$.

9. Доказать, пользуясь свойствами предела и результатами задач 5, 6, непрерывность функции $y(x)$ в каждой точке области определения, если:

1) $y = \dfrac{2x-1}{x^2+2}$; 2) $y = \operatorname{tg} x$; 3) $y = x^2 + 2\sin x$;
4) $y = \sqrt{x}\sin 2x$; 5) $y = x^n$, $n \in N$; 6) $y = 1/x^n$, $n \in N$.

10. Доказать, пользуясь монотонностью функции $y = a^x$, $x \in R$, и тем, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$ (см. § 8, пример 9 и задачу 60), непрерывность в каждой точке $x \in R$ функции $y = a^x$, $x \in R$.

11. Функция f определена в окрестности точки x_0, кроме самой точки x_0. Доопределить функцию f, задав $f(x_0)$ так, чтобы получившаяся функция была непрерывна в точке x_0, если:

1) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$, $x_0 = -1$; 2) $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$, $x_0 = 1$;
3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$, $x_0 = 0$; 4) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $x_0 = 0$;
5) $f(x) = x\operatorname{ctg} x$, $x_0 = 0$; 6) $y = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$, $x_0 = 0$.

12. Сформулировать определение непрерывной в точке функции, используя определение предела функции по Гейне (т. е. на языке последовательностей).

13. Доказать, что если функция непрерывна в точке, то она ограниченна в некоторой окрестности этой точки.

14. Пусть функция f непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$. Доказать, что существуют число $C > 0$ и окрестность точки x_0 такие, что для любого x из этой окрестности верно неравенство $|f(x)| \geqslant C$.

15. Функция f непрерывна в точке x_0, и в любой окрестности этой точки имеются как значения x, в которых функция положительна, так и значения x, в которых функция отрицательна. Найти $f(x_0)$.

16. Пусть функция определена в окрестности точки x_0. Сформулировать, используя символы $\exists$, $\forall$, утверждение, что функция не является непрерывной в точке x_0.

17. Доказать, что функция f не является непрерывной в точке x_0; построить график этой функции, если:

1) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 0, \\ x^2, & x \leqslant 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$;

2) $f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$;

3) $f(x) = \operatorname{sign}(x+1)$, $x_0 = -1$;

4) $f(x) = \begin{cases} 1/x^2, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$; 5) $f(x) = E(x)$, $x_0 = 2$.

18. Найти точки разрыва функции, установить их род, найти скачки функции в точках разрыва 1-го рода, построить график функции:

1) $f(x) = \begin{cases} 1/(x-1), & x < 0, \\ (x+1)^2, & 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 1-x, & 2 < x; \end{cases}$ 2) $y = \dfrac{|x+2|}{x+2}$;

3) $y = \dfrac{1}{x^2-4}$; 4) $y = \dfrac{|x-1|}{x^2-x^3}$; 5) $y = x - E(x)$;

6) $y = \dfrac{1}{x - E(x)}$; 7) $y = \dfrac{(x+1)^2-(x-1)^2}{x^2-x}$;

8) $y = \dfrac{2\operatorname{sign}(1-x)}{(\operatorname{sign}(x+1))^2(x+1+(x-1)\operatorname{sign}x)}$; 9) $y = \dfrac{1}{\cos x}$;

10) $y = \dfrac{x}{\sin x}$.

19. Установить, существует или не существует значение a, при котором функция f непрерывна в точке x_0, если:

1) $f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x), & x \neq 0, \\ a, & x = 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$;

2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+x}{1+x^3}, & x \neq -1, \\ a, & x = -1, \end{cases}$ $x_0 = -1$;

3) $f(x) = \begin{cases} ax^2+1, & x \neq 0, \\ -x, & x \leqslant 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$;

4) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leqslant 0, \\ a(x-1), & x > 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$.

20. Установить, существуют или не существуют значения a и b, при которых функция f непрерывна на своей области определения, если:

1) $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & x \leqslant 0, \\ ax+b, & 0 < x < 1, \\ \sqrt{x}, & x \geqslant 1; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leqslant 0, \\ x^2+ax+b, & |x| > 1; \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{x^2-1}, & |x| \neq 1, \\ a, & x=-1, \\ b, & x=1; \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\cos(x/2)}{\sin x}, & x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right], \quad x \neq 0, \quad x \neq \pi, \\ a, & x = 0, \\ b, & x = \pi. \end{cases}$

21. Доказать, что если функция монотонна, то всякая ее точка разрыва является точкой разрыва 1-го рода.

22. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \text{ — рациональное число}, \\ 0, & \text{если} \quad x \text{ — иррациональное число}, \end{cases}$$

разрывна в каждой точке.

23. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \text{ — рациональное число}, \\ 0, & \text{если} \quad x \text{ — иррациональное число}, \end{cases}$$

непрерывна в точке $x = 0$ и разрывна в остальных точках.

24. Доказать непрерывность функции в каждой точке ее области определения:

1) $y = 3x^5 + 1/x^3$; 2) $y = \operatorname{sh} x$; 3) $y = \sqrt[3]{x^2 - 6x^3}$;

4) $y = \dfrac{\sin x^2}{x^4 + 2x^2}$; 5) $y = \cos(x - \sqrt{1-x^2})$; 6) $y = xe^{(\sin x)/x}$.

25. Исследовать на непрерывность функции $f(g(x))$ и $g(f(x))$ в точках, где определены эти композиции, если:

1) $f(x) = \operatorname{sign} x$, $g(x) = 1 + x^2$; 2) $f(x) = \operatorname{sign} x$, $g(x) = x^3 - x$;

3) $f(x) = \operatorname{sign}(x-1)$, $g(x) = \operatorname{sign}(x+1)$;

4) $f(x) = \operatorname{sign} x$, $g(x) = 1 + x - E(x)$.

26. Доказать, что многочлен — непрерывная в каждой точке функция.

27. Доказать, что функция $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где P и Q — ненулевые многочлены, непрерывна в каждой точке x_0, где $Q(x_0) \neq 0$.

28. 1) Функция f непрерывна в точке x_0, а функция g разрывна в точке x_0. Доказать, что функция $f + g$ разрывна в этой точке.

2) Привести пример разрывных в точке x_0 функций f и g, сумма которых: а) разрывна в точке x_0; б) непрерывна в точке x_0.

29. 1) Привести пример непрерывной в точке x_0 функции f и разрывной в точке x_0 функции g, произведение которых:

а) разрывно в точке x_0; б) непрерывно в точке x_0.

2) Привести пример разрывных в точке x_0 функции f и g, произведение которых:

а) разрывно в точке x_0, б) непрерывно в точке x_0.

30. Привести пример непрерывных в точке x_0 функций f и g, частное f/g которых разрывно в точке x_0.

31. Доказать правило замены переменной для пределов непрерывных функций: пусть функция $y = g(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $f(y)$ непрерывна в точке $y_0 = g(x_0)$, тогда

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{y\to y_0} f(y).$$

32. Доказать перестановочность знака предела и знака непрерывной функции: пусть для функции $y = g(x)$ существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y_0$, а функция $f(y)$ непрерывна в точке y_0; тогда в некоторой окрестности точки x_0, исключая, быть может, саму эту точку, определена композиция $f(g(x))$ и существует

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x\to x_0} g(x)) = f(y_0).$$

33. Исходя из непрерывности показательной функции доказать непрерывность гиперболических функций:

1) $y = \operatorname{ch} x$; 2) $y = \operatorname{th} x$; 3) $y = \operatorname{cth} x$.

34. Исходя из непрерывности показательной функции доказать непрерывность логарифмической функции $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

35. Исходя из непрерывности тригонометрических функций доказать непрерывность обратных тригонометрических функций:

1) $y = \arcsin x$; 2) $y = \arccos x$; 3) $y = \operatorname{arctg} x$; 4) $y = \operatorname{arcctg} x$.

36. Исходя из непрерывности показательной функции доказать непрерывность степенной функции $y = x^\mu$ $(x > 0,\ \mu \in R)$.

37. Доказать, что если $y = f(x)$ — непрерывная функция, то непрерывны и функции $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$.

38. Пусть f — непрерывная на промежутке X функция. Доказать, что функции

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) > 0, \\ 0, & \text{если } f(x) \leqslant 0, \end{cases} \qquad f_-(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } f(x) \geqslant 0, \\ f(x), & \text{если } f(x) < 0, \end{cases}$$

непрерывны на промежутке X.

39. Привести пример функции, непрерывной на каждом из промежутков X_1 и X_2, но не являющейся непрерывной на множестве $X_1 \cup X_2$.

40. Привести пример непрерывной на интервале функции:

1) неограниченной на этом интервале;

2) ограниченной на этом интервале, но не достигающей ни своей верхней, ни нижней грани.

41. 1) Функция f определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$, и все ее значения положительны. Доказать, что существует число $\mu > 0$ такое, что $f(x) \geqslant \mu$ для любого $x \in [a; b]$.

2) Привести пример функции f, непрерывной на интервале $(a; b)$, принимающей лишь положительные значения и такой, что для любого $\mu > 0$ найдется значение $f(x) < \mu$, $x \in (a; b)$.

3) Привести пример функции f, определенной на отрезке $[a; b]$, принимающей лишь положительные значения и такой, что для любого $\mu > 0$ найдется значение функции $f(x) < \mu$, $x \in (a; b)$.

42. Функция f непрерывна на интервале $(a; b)$,

$$m = \inf_{(a,b)} f, \quad M = \sup_{(a,b)} f.$$

Доказать, что для любого $y \in (m; M)$ существует $x \in (a; b)$, такое, что $f(x) = y$.

43. Доказать, что если функция определена и непрерывна на отрезке, то множество ее значений — отрезок.

44. Привести пример разрывной функции, определенной на отрезке и имеющей в качестве множества значений отрезок.

45. Привести пример непрерывной функции, которая принимает значения, равные 1 и 3, но не принимает значения 2.

46. Пусть функция определена и монотонна на промежутке и множество ее значений — промежуток. Доказать, что эта функция непрерывна.

47. Доказать, что уравнение $x^5 - 3x = 1$:

1) имеет хотя бы один корень на $(1; 2)$;

2) имеет не менее трех корней на R.

48. Доказать, что:

1) любой многочлен нечетной степени имеет хотя бы один действительный корень;

2) если многочлен четной степени принимает хотя бы одно значение, противоположное по знаку коэффициенту старшего члена, то он имеет не менее двух действительных корней.

49. Доказать, что уравнение $x = y - \varepsilon \sin y$, где $0 < \varepsilon \leqslant 1$, задает одну непрерывную функцию $y = f(x)$.

50. Доказать, что разрывная функция $y = e^{|x|} \operatorname{sign} x$ имеет непрерывную обратную.

51. Доказать, что данная система уравнений определяет непрерывную функцию $y(x)$ или $x(y)$; построить график этой функции:

1) $x = \operatorname{arctg} t,\ y = \dfrac{1}{1+t^2}$; 2) $x = \operatorname{ch} t,\ y = \operatorname{sh} t$;

3) $x = \ln(1+e^{-t}),\ y = \ln(1+e^{t})$.

52. Доказать, что система уравнений

$$x = (t^2+1)/2t, \quad y = (t^2-1)/2t$$

определяет две непрерывные на R функции $x(y)$ и четыре непрерывные на множестве $\{x\colon |x| \geqslant 1\}$ функции $y(x)$.

53. Пусть функция f определена в окрестности точки x_0. Будет ли функция f непрерывной в точке x_0, если:

1) $\exists\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \quad (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$;
2) $\forall\delta > 0\ \exists\varepsilon > 0\ \forall x \quad (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$;
3) $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \quad (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow |x - x_0| < \delta)$;
4) $\forall\delta > 0\ \exists\varepsilon > 0\ \forall x \quad (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow |x - x_0| < \delta)$;
5) $\exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \forall x \quad (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$?

54. Функция f определена в окрестности точки x_0, и существует последовательность $\{\varepsilon_n\}$ такая, что $\varepsilon_n > 0,\ n \in N,\ \lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ и для каждого ε_n существует $\delta_n > 0$ такое, что если $x \in D(f)$ и $|x - x_0| < \delta_n$, то $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_n$. Доказать, что функция f непрерывна в точке x_0.

55. Функция f непрерывна в точке x_0. Пусть

$$S(\delta) = \sup_{(x_0-\delta, x_0+\delta)} f, \qquad s(\delta) = \inf_{(x_0-\delta, x_0+\delta)} f.$$

Доказать, что $\lim\limits_{\delta\to 0}(S(\delta) - s(\delta)) = 0$.

56. Указать множество точек, в которых непрерывна функция, найти ее точки разрыва, установить их род, нарисовать график функции:

1) $y = \begin{cases} x^2+2, & x \leqslant 0, \\ x-1, & x > 0; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} 1-x^3, & x < 0, \\ (x-1)^3, & 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 4-x, & 2 < x; \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} -1/x, & x < 0, \\ 5x - x^2, & x \geqslant 0; \end{cases}$ 4) $y = \begin{cases} -x, & x \leqslant -1, \\ 2/(x-1), & x > -1; \end{cases}$

5) $y = \begin{cases} 2^x, & -1 \leqslant x < 1, \\ 1, & x = 1, \\ x-1, & 1 < x \leqslant \infty; \end{cases}$

6) $y = \begin{cases} \cos x, & -\pi/2 \leqslant x < \pi/4, \\ 1, & x = \pi/4, \\ x^2 - \pi^2/16, & \pi/4 < x \leqslant \pi. \end{cases}$

Найти точки разрыва функции, установить их род, доопределить функцию по непрерывности в точках устранимого разрыва (57–59).

57. 1) $y = \dfrac{x}{x^2+x-6}$; 2) $y = \dfrac{1}{x^3-3x^2-4x}$; 3) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$;
4) $y = \dfrac{1+x}{1+x^3}$; 5) $y = \dfrac{1/x - 1/(x+1)}{1/(x-1) - 1/x}$; 6) $y = \dfrac{2x-1}{2x^2+3x-2}$;
7) $y = \dfrac{1-\sqrt{x}}{x^2-1}$.

58. 1) $y = \dfrac{x}{\cos x}$; 2) $y = (\sin x)\sin\dfrac{1}{x}$; 3) $y = \dfrac{\arcsin x}{\sin 2x}$;
4) $y = \dfrac{\cos(\pi x/2)}{x^3-x^2}$; 5) $y = \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

59. 1) $y = \dfrac{2}{1-2^x}$; 2) $y = \dfrac{1}{\lg x}$; 3) $y = \lg(x^2+3x)$;
4) $y = \lg(x-1)^2$; 5) $y = 2^{1/x}$; 6) $y = \dfrac{1}{\ln|x-1|}$;
7) $y = 3^{x/(1-x^2)}$; 8) $y = e^{-1/|x|}$; 9) $y = \ln\ln(1+x^2)$.

60. Найти точки разрыва функции, установить их род, найти скачки в точках разрыва 1-го рода:
1) $y = \operatorname{sign}(x^2-2x-3)$; 2) $y = \operatorname{sign}\cos x$; 3) $y = (-1)^{E(x)}$;
4) $y = (-1)^{E(1/x)}$; 5) $y = \arcsin(1/x)$; 6) $y = \operatorname{arctg}(1/x)$;
7) $y = \operatorname{arcctg}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$; 8) $y = \dfrac{x+1}{\operatorname{arctg}(1/x)}$; 9) $y = \dfrac{|x|}{\operatorname{arctg} x}$;
10) $y = \dfrac{1}{1+2^{1/(x-1)}}$; 11) $y = \dfrac{3^{1/x}+2^{1/x}}{3^{1/x}-2^{1/x}}$; 12) $y = \dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

61. Доказать, что функция непрерывна в каждой точке своей области определения:
1) $y = \sin(x - \lg(\sqrt{x}-1))$; 2) $y = \sqrt[3]{x^2 - 4\operatorname{ctg} x}\, 2^{\operatorname{tg}(\pi/x)}$;
3) $y = \dfrac{x^{-5/3} - \cos\sqrt{x}}{\operatorname{tg}\arcsin|x|}$.

62. Найти значение a, при котором функция $y(x)$ будет непрерывна, если:

1) $y = \begin{cases} \dfrac{(1+x)^n - 1}{x}, & x \neq 0, \quad n \in N, \\ a, & x = 0; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} x\operatorname{ctg} 2x, & x \neq 0, \quad |x| < \pi/2, \\ a, & x = 0; \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} (\pi + 2x)\operatorname{tg} x, & -\pi < x < \pi/2, \quad x \neq -\pi/2, \\ a, & x = -\pi/2; \end{cases}$

4) $y = \begin{cases} (\arcsin x)\operatorname{ctg} x, & x \neq 0, \\ a, & x = 0, \end{cases}$

5) $y = \begin{cases} \dfrac{c^x - 1}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0, \quad c > 0; \end{cases}$ 6) $y = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln(1+2x)}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0; \end{cases}$

7) $y = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} x}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0; \end{cases}$ 8) $y = \begin{cases} x \ln x^2, & x \neq 0, \\ a, & x = 0; \end{cases}$

9) $y = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0; \end{cases}$ 10) $y = \begin{cases} (1+x)^{1/x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$

63. Выяснить, можно ли доопределить функцию в точке разрыва x_0 так, чтобы она стала непрерывной в этой точке, если:

1) $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{|x|}$, $x_0 = 0$; 2) $y = 2^{-2^{1/(1-x)}}$, $x_0 = 1$;

3) $y = \dfrac{1}{x}\, e^{-1/x^2}$, $x_0 = 0$; 4) $y = \dfrac{\operatorname{th}(\sqrt{x} - 1)}{x^2 - 1}$, $x_0 = 1$;

5) $y = 2^{-E(1/x)}$, $x_0 = 0$.

64. Исследовать на непрерывность и построить график функции f, если:

1) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$; 2) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1 + x^{2n+1}}$;

3) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \cos^n x$; 4) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x}{1 + (2\sin x)^{2n}}$;

5) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}$; 6) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x + e^{nx}}{1 + xe^{nx}}$;

7) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + x^{2n}}$; 8) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (x \operatorname{arctg}(n \operatorname{ctg} x))$;

9) $f(x) = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln(1 + e^{xt})}{\ln(1 + e^t)}$; 10) $f(x) = \lim\limits_{t\to+\infty} (1 + x) \operatorname{tg} xt$.

65. В каких точках непрерывна функция

$$y(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \text{ — иррациональное число}, \\ 0, & x \text{ — рациональное число?} \end{cases}$$

66. Пусть

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ — иррациональное число}, \\ 1/q, & x = p/q, \quad p \in Z, \quad q \in N, \end{cases}$$

где p/q — несократимая дробь (эту функцию называют *функцией Римана*).

Доказать, что:

1) эта функция непрерывна в каждой иррациональной точке;

2) каждая рациональная точка является для данной функции точкой разрыва 1-го рода.

67. Исследовать на непрерывность функцию

$$y(x) = \begin{cases} |x|, & x \text{ — иррациональное число}, \\ qx/(q+1), & x = p/q, \quad p \in Z, \quad q \in N, \end{cases}$$

где p/q — несократимая дробь.

68. Исследовать на непрерывность композиции $f \circ g$ и $g \circ f$, если

$$y(x) = \begin{cases} x, & x \text{ — рациональное число,} \\ 2 - x, & x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$$

69. Функция f возрастает на отрезке $[a; b]$ и разрывна в точке $x_0 \in [a; b]$. Функция $g(x)$ монотонна на отрезке $[f(a); f(b)]$.

1) Привести пример таких функции f и g, что $g(f(x))$ непрерывна в x_0.

2) Доказать, что если $g(x)$ строго монотонна в окрестности точки $f(x_0)$, то $g(f(x))$ разрывна в точке x_0.

70. Функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$. Доказать, что:

1) $\inf\limits_{(a;b)} f = \inf\limits_{[a;b]} f$; 2) $\sup\limits_{(a;b)} f = \sup\limits_{[a,b]} f$.

71. Функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$. Доказать, что функции $m(x)$ и $M(x)$ непрерывны на $[a; b]$, если:

1) $m(x) = \min\limits_{[a;x]} f$; 2) $M(x) = \max\limits_{[a;x]} f$.

72. Функция f непрерывна на промежутке $[a; b)$. Доказать, что функции $m(x)$ и $M(x)$ непрерывны на (a, b), если:

1) $m(x) = \inf\limits_{[a;x)} f$; 2) $M(x) = \sup\limits_{[a;x)} f$.

73. Функция f определена и ограниченна на отрезке $[a; b]$. Доказать, что функции

$$m(x) = \inf_{[a;x)} f \quad \text{и} \quad M(x) = \sup_{[a,x)} f$$

непрерывны слева в каждой точке $x \in (a; b]$.

74. Пусть f и g — непрерывные на X функции. Доказать, что функции $M(x)$ и $m(x)$ также непрерывны на X, если:

1) $M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$; 2) $m(x) = \min\{f(x), g(x)\}$.

75. 1) Пусть f — непрерывная на X функция, $a, b \in R$, $a < b$. Доказать, что функция

$$f(a; b; x) = \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad a \leqslant f(x) \leqslant b, \\ a, & \text{если} \quad f(x) < a, \\ b, & \text{если} \quad f(x) > b, \end{cases}$$

также непрерывна на X.

2) Пусть функция f определена на R. Доказать, что для того, чтобы f была непрерывна на R, необходимо и достаточно, чтобы для любого $a > 0$ функция $f(-a; a; x)$, определенная в 1), была непрерывна на R.

76. Функция f непрерывна на $[a; +\infty)$, и существует конечный $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Доказать, что f ограниченна на $[a; +\infty)$.

77. Функция f непрерывна на интервале $(a;b)$ (конечном или бесконечном), и существуют конечные $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$. Доказать, что функция f ограниченна на $(a;b)$.

78. 1) Доказать, что функция

$$y = \begin{cases} (x+1)2^{-(1/|x|+1/x)}, & x \neq 0, \quad |x| \leqslant 2, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

принимает все значения между $f(-2)$ и $f(2)$, но разрывна. Построить график этой функции.

2) Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0, \\ -1, & x = 0, \end{cases}$$

принимает на любом отрезке $[0;a]$ все промежуточные значения между $f(0)$ и $f(a)$, но не является непрерывной на $[0;a]$.

79. Функция f определена на отрезке $[a;b]$ и обладает следующим свойством: для любых $x_1, x_2 \in [a;b]$ и для любого числа C, лежащего между $f(x_1)$ и $f(x_2)$, существует точка $\xi \in (x_1;x_2)$ такая, что $f(\xi) = C$.

1) Указать функцию, обладающую таким свойством, но не являющуюся непрерывной на $[a;b]$.

2) Доказать, что функция, обладающая указанным свойством, не может иметь точек разрыва 1-го рода.

80. Доказать, что если функция определена и непрерывна на промежутке, то множество ее значений — промежуток (т. е. отрезок, или интервал, или полуинтервал).

81. Привести пример функции, непрерывной на интервале, множеством значений которой является:

1) отрезок; 2) интервал; 3) полуинтервал.

82. Пусть функция, определенная на отрезке $[a;b]$, непрерывна и обратима. Доказать, что эта функция строго монотонна на $[a;b]$.

83. Доказать, что если функция определена и строго монотонна на промежутке, то ее обратная функция непрерывна.

84. Привести пример функции f, непрерывной в точке x_0, имеющей обратную функцию, разрывную в точке $y_0 = f(x_0)$.

85. Привести пример непрерывной, строго возрастающей функции, обратная к которой разрывна.

86. Доказать, что ограниченная, выпуклая (см. задачу 237, § 7) на интервале функция непрерывна на этом интервале.

87. Доказать, что данная система уравнений определяет непрерывную функцию $y(x)$ или $x(y)$:

1) $x = \dfrac{t-1}{\sqrt{t}}$, $y = \dfrac{t+1}{\sqrt{t}}$; 2) $x = \dfrac{1}{4}(t-4)e^t$, $y = \sqrt{t}\,e^t$;

3) $x = \dfrac{t^3}{t^2+1}$, $y = \dfrac{t}{t^4+1}$.

88. Привести пример такой системы уравнений

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

в которой функции φ и ψ необратимы, но которая определяет единственную непрерывную функцию $y(x)$.

89. Функция f непрерывна на интервале $(a; b)$. Доказать, что для любых чисел $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ из $(a; b)$ и любых чисел

$$\alpha_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,$$

найдется число ξ, $x_1 \leqslant \xi \leqslant x_n$, такое, что $f(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$.

90. Функция f определена на отрезке $[a; b]$. Для любого отрезка $[c; d]$, $a < c < d < b$, множество значений $f(x)$, $x \in [c; d]$, является отрезком. Следует ли отсюда непрерывность функции f на $[a; b]$?

91. Функция f непрерывна и ограниченна на интервале $(a; +\infty)$ и не имеет предела при x, стремящемся к $+\infty$. Доказать, что найдется число a, для которого уравнение $f(x) = a$ имеет бесконечно много решений.

92. Функция f непрерывна на интервале $(a; b)$, $l = \varliminf\limits_{x\to b} f(x)$, $L = \varlimsup\limits_{x\to b} f(x)$, $L > l$. Доказать, что для любого числа C, $l < C < L$, уравнение

$$f(x) = C$$

в любой окрестности b имеет бесконечно много решений.

93. Функция f непрерывна и ограничена на промежутке $[a; +\infty)$. Доказать, что для любого числа T найдется последовательность $\{x_n\}$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ и

$$\lim_{n\to\infty} (f(x_n + T) - f(x_n)) = 0.$$

94. Множество $A \in R$ называют *открытым*, если каждая точка из A имеет окрестность, принадлежащую A. Точку x_0 называют *точкой прикосновения* множества A, если в любой окрестности x_0 имеется хотя бы одна точка из A. Множество называют *замкнутым*, если оно содержит все свои точки прикосновения. Множество всех точек прикосновения множества A называют *замыканием* A и обозначают $\overline{A}$.

Функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, число C заключено между $f(a)$ и $f(b)$, $f(a) \neq f(b)$.

Доказать, что:

1) открыто каждое из множеств:

а) $A = \{x \in (a;b)\colon f(x) < C\}$, б) $B = \{x \in (a;b)\colon f(x) > C\}$;

2) множество $\{x \in [a;b]\colon f(x) = C\}$ имеет и наибольший, и наименьший элементы.

95. Пусть функция f непрерывна на R, $A \subset E(f)$, $f^{-1}(A) = \{x \in \in R | f(x) \in A\}$. Доказать, что:

1) если A замкнуто, то и $f^{-1}(A)$ замкнуто;

2) если A открыто, то и $f^{-1}(A)$ открыто.

96. Множество B называют *плотным в множестве* A, если замыкание B содержит A, т. е. $\overline{B} \supset A$. Пусть функция f непрерывна на X, множество A плотно в X, $f(X)$ — множество всех значений функции $f(x)$ при $x \in X$, $f(A)$ — множество всех значений функции при $x \in A$. Доказать, что $f(A)$ плотно в $f(X)$.

97. 1) Существует ли непрерывное отображение:

а) отрезка на интервал; б) интервала на отрезок?

2) Построить взаимно однозначное отображение отрезка на интервал.

98. 1) Доказать, что функция, определенная на R, не может быть непрерывной во всех рациональных точках и разрывной во всех иррациональных.

2) Существует ли функция, непрерывная во всех рациональных точках отрезка $[0;1]$ и разрывная во всех его иррациональных точках?

99. Доказать, что уравнение $x^3 - 3x^2 + 6x - 1$ имеет единственный корень; найти этот корень с точностью до 0,1.

100. Доказать, что уравнение $x^4 + 3x^2 - x - 2 = 0$ имеет два (и не более) действительных корня.

101. Доказать, что уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^{2k+1} + c = 0,$$

где $a_k \geqslant 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, $a_n > 0$, имеет лишь один действительный корень.

102. Доказать, что уравнение $x^n = P_{n-1}(x)$, где $P_{n-1}(x)$ — многочлен $(n-1)$-й степени с положительными коэффициентами, имеет единственный положительный корень.

103. Доказать, что:

1) уравнение

$$\frac{a_1}{x-\lambda_1} + \frac{a_2}{x-\lambda_2} + \frac{a_3}{x-\lambda_3} = 0,$$

где $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, имеет по одному действительному корню в интервалах $(\lambda_1;\lambda_2)$ и $(\lambda_2;\lambda_3)$;

2) уравнение
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{x-\lambda_j} = 0,$$
где $a_j > 0$ $(j = 1, 2, ..., n)$, $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n$, имеет по одному действительному корню в интервалах $(\lambda_j; \lambda_{j+1})$ $(j = 1, 2, ..., n-1)$.

104. Доказать, что уравнение имеет и притом единственное решение:

1) $x \cdot 2^x = 1$; 2) $xe^x = 2$; 3) $x = \varepsilon \sin x + a$, $0 < \varepsilon < 1$;
4) $x^2 \operatorname{arctg} x = a$, $a \neq 0$.

105. Доказать, что уравнение $x = a \sin x + b$, где $0 < a < 1$, $b > 0$, имеет по крайней мере один корень на $[0; a+b]$.

106. Доказать, что уравнение $10^{x-1} = x$ имеет только один корень $x_0 \neq 1$.

107. Доказать, что уравнение $2^x = 4x$ имеет по крайней мере два действительных корня.

108. Доказать, что уравнение $x \sin x - 0{,}5 = 0$ имеет бесконечно много решений.

109. 1) Доказать, что существует бесконечно много функций, определенных на $(a; b)$ и удовлетворяющих уравнению
$$y^2 = 1.$$

2) Пусть f — непрерывная и положительная на $(a; b)$ функция. Доказать, что существует единственная непрерывная на $(a; b)$ функция $y = \varphi(x)$, удовлетворяющая уравнению
$$y^2 = f(x)$$
и условию, что $\varphi(x_0) > 0$ в некоторой точке $x_0 \in (a; b)$.

3) Сколько существует непрерывных на R функций, удовлетворяющих уравнению
$$y^2 = (x^2 - 1)^2?$$

4) Сколько существует непрерывных на отрезке $[0; n]$, $n \in N$, функций, удовлетворяющих уравнению
$$y^2 + 2y + \cos^2 \pi x = 0?$$

110. Доказать, что существует единственная непрерывная функция $y(x)$, удовлетворяющая уравнению
$$y = \operatorname{arcctg} xy, \quad x \in R.$$

111. Найти все непрерывные на R функции f, удовлетворяющие условию: для любого $x \in R$ верно равенство:

1) $f(x/3) + f(2x/3) = x$; 2) $f(x) + f(3x) = x$;
3) $f(\alpha x) + f(\beta x) = ax + b$, $\alpha\beta \neq 0$; 4) $f(3x) - f(2x) = x$;
5) $f(x^2) + f(x) = x^2 + x$; 6) $f(x^2) - f(x) = x^2 - x$.

112. Найти все непрерывные на R функции f такие, что для любого $x \in R$ верно равенство

$$Af(\alpha x) + Bf(\beta x) = ax + b,$$

где $a\alpha\beta AB \neq 0$, $A\alpha + B\beta \neq 0$, $A + B \neq 0$.

113. При каких a существуют непрерывные на R функции f, отличные от постоянной, такие, что для любого $x \in R$:

1) $f(x^2 + a) = f(x)$; 2) $f(ax^2 + 1) = f(x)$?

114. При каких a, b, c существует непрерывная на R функция f, отличная от постоянной, такая, что для любого $x \in R$

$$f(ax^2 + bx + c) = f(x)?$$

115. 1) Найти все непрерывные на R функции f, удовлетворяющие для любых $x, y \in R$ равенству $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

2) Привести пример разрывной функции f, удовлетворяющей для любых $x, y \in R$ равенству $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

116. Найти все непрерывные на R функции, удовлетворяющие для любых $x, y \in R$ равенству $f(x + y) = f(x)f(y)$.

117. Найти все непрерывные на $(0; +\infty)$ функции, удовлетворяющие для любых $x, y \in (0; +\infty)$ равенству:

1) $f(xy) = f(x) + f(y)$; 2) $f(xy) = f(x)f(y)$.

118. Найти все непрерывные на R функции, удовлетворяющие для любых x, $y \in R$ равенству

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y)$$

и условию: 1) $f(x) \leqslant 1$; 2) $f(x) \geqslant 1$.

119. Найти все непрерывные на R решения функционального уравнения

$$f(x + f(x)) = f(x), \quad x \in R.$$

120. Функция f определена и непрерывна на R, и для любых $x, y \in R$ верно равенство

$$f\left(\frac{x + y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y)).$$

Доказать, что f — линейная функция, т. е. существуют a и b такие, что $f(x) = ax + b$.

121. Доказать, что периодическая, непрерывная на всей числовой оси функция, отличная от постоянной, имеет наименьший положительный период. Привести пример периодической функции, определенной на всей числовой оси и отличной от постоянной, которая не имеет наименьшего положительного периода.

122. Пусть f и g — непрерывные, периодические с периодом T функции и $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - g(x)) = 0$. Доказать, что $f = g$.

123. Непрерывная функция f имеет два несоизмеримых периода, T_1 и T_2 (т. е. T_1/T_2 — иррациональное число). Доказать, что $f = \text{const}$.

124. Построить непрерывные на R функции f и g такие, что для любого $T > 0$ функции $f(x+T)$ и $g(x)$ различны, но для каждого $\varepsilon > 0$ существует $T_\varepsilon > 0$ такое, что для любого $x \in R$ верно неравенство
$$|f(x+T_\varepsilon) - g(x)| < \varepsilon.$$

125. Пусть функция f непрерывна на $[-1;1]$ и $|f(x)| < 1$, $x \in [-1;1]$. Доказать, что функция
$$f(x) - \cos(n \arccos x), \quad n \in N$$
(см. задачу 227, § 7), не менее n раз обращается в нуль на отрезке $[-1;1]$.

126. Пусть $P(x) = 2^{n-1}x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$. Доказать, что найдется $\xi \in [-1;1]$ такое, что $|P(\xi)| \geqslant 1$.

127. Функция f непрерывна на $[0;1]$ и $f(0) = f(1) = 0$. Доказать, что существует непрерывная, выпуклая вверх (задача 237, § 7) функция g такая, что $g(0) = g(1) = 0$ и $g(x) \geqslant f(x)$ на $[0;1]$.

128. Функция f непрерывна и периодична с периодом T. Доказать, что есть такая точка x_0, что
$$f(x_0 + T/2) = f(x_0).$$

129. Функция f непрерывна, монотонна на $[0;1]$, и $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Доказать, что если для некоторого $n \in N$ при любом $x \in [0;1]$
$$\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ раз}}(x) = x,$$
то и $f(x) = x$ на $[0;1]$.

130. Пусть функция f непрерывна на $[0;1]$ и множество ее значений содержится в $[0;1]$. Доказать, что существует точка $c \in [0;1]$ такая, что $f(c) = c$ (всякое непрерывное отображение отрезка в себя имеет неподвижную точку).

131. Пусть f и g определены и непрерывны на отрезке $[a;b]$ и $f(a) < g(a)$ и $f(b) > g(b)$. Доказать, что имеется точка $c \in (a;b)$ такая, что $f(c) = g(c)$.

132. Функции f и g определены и непрерывны на $[0;1]$ и $f \circ g = g \circ f$. Доказать, что существует точка $c \in [0;1]$ такая, что $f(c) = g(c)$.

133. Непрерывные функции f и g отображают отрезок $[0;1]$ на самого себя. Доказать, что существует точка $c \in [0;1]$ такая, что $f(g(c)) = g(f(c))$.

134. Функция f непрерывна на R и $f(f(x)) = x$ для любого $x \in R$. Доказать, что существует точка c, в которой $f(c) = c$.

135. Привести пример функции:

1) непрерывной на интервале $(0;1)$;

2) непрерывной на R, для которой уравнение $f(x) = x$: не имеет решений.

136. Функция f монотонна, непрерывна на $[0;1]$ и $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ для любого $x \in [0;1]$. Доказать, что для любого $a_1 \in [0;1]$ последовательность a_1, $a_{n+1} = f(a_n)$, $n \in N$, сходится к одному из решений уравнения $f(x) = x$.

137. Пусть функция f непрерывна на $[a;b]$, и пусть определена последовательность $\{x_n\}$: $x_0 \in [a;b]$, $x_n = f(x_{n-1})$, $n \in N$ (т. е. для любого $n \in N$ $f(x_{n-1} \in [a;b])$.

Доказать, что:

1) если f возрастает, то $\{x_n\}$ — монотонная последовательность и существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$ такой, что $c = f(c)$;

2) если f убывает, то $\{x_{2k}\}$ и $\{x_{2k-1}\}$ — монотонные подпоследовательности, имеющие пределы. Получить уравнения для этих пределов.

138. Функция f строго возрастает, а функция g строго убывает на $[a;b]$ и $E(f) \cap E(g) \neq \varnothing$.

1) Доказать, что уравнение $f(x) = g(x)$ имеет и притом единственное решение.

2) Пусть $x_0 \in [a;b]$ таково, что $f(x_0) \in E(g)$, и для любого $n \in N$ уравнение $g(x_n) = f(x_{n-1})$ имеет решение x_n, т. е. определена последовательность $\{x_n\}$. Доказать, что подпоследовательности $\{x_{2k}\}$ и $\{x_{2k-1}\}$ сходятся, каждая к одному из решений уравнения $g^{-1}(f(x)) = f^{-1}(g(x))$.

139. Для последовательности $\{x_n\}$, заданной рекуррентным способом: $x_1 = 1/2$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in N$, где

$$f(x) = \begin{cases} (2-3x)/5, & x < -1/6, \\ -3x, & |x| \leqslant 1/6, \\ -(2+3x)/5, & x > 1/6, \end{cases}$$

найти пределы подпоследовательностей $\{x_{2k}\}$ и $\{x_{2k-1}\}$. Построить график функции f и показать на рисунке построение пяти первых членов последовательности.

140. Функция f, определенная на R, удовлетворяет условию Липшица: существует $k > 0$ такое, что для любых $x_1, x_2 \in R$ верно неравенство

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant k|x_1 - x_2|.$$

Доказать, что если $k < 1$, то существует и притом только одно решение уравнения $f(x) = x$.

141. Множество значений функции f, определенной на $[a;b]$, со-

держится в $[a;b]$. Для любых $x, y \in [a;b]$, $x \neq y$, верно неравенство
$$|f(x) - f(y)| < |x - y|.$$

1) Доказать, что уравнение $f(x) = x$ имеет и притом единственное решение c.

2) Пусть $x_0 \in [a;b]$, $x_n = f(x_{n-1})$, $n \in N$. Доказать, что:

а) последовательность $\{|x_n - c|\}$ убывает и имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - c| = \Delta$;

б) существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящаяся к d, равному либо $c + \Delta$, либо $c - \Delta$;

в) $|f(d) - c| = \Delta$ и $\Delta = 0$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

142. 1) Доказать, что уравнение $\operatorname{tg} x = a/x$, $a > 0$, имеет на каждом интервале $(-\pi/2 + \pi n;\ \pi/2 + \pi n)$, $n \in N$, одно решение.

2) Пусть x_n — решение уравнения $\operatorname{tg} x = a/x$, $a > 0$, из интервала $(-\pi/2 + \pi n;\ \pi/2 + \pi n)$, $n \in N$. Доказать, что
$$0 < x_n - \pi n < \frac{2a}{\pi n + \sqrt{\pi^2 n^2 + 4a}}, \quad n \in N.$$

143. 1) Доказать, что уравнение $\operatorname{tg} x = ax$, $a > 0$, имеет на каждом интервале $(-\pi/2 + \pi n;\ \pi/2 + \pi n)$, $n \in N$, одно решение x_n.

2) Пусть x_n — решение уравнения $\operatorname{tg} x = ax$, $a > 0$, из интервала $(-\pi/2 + \pi n;\ \pi/2 + \pi n)$, $n \in N$. Доказать, что при всех достаточно больших $n \in N$
$$0 < \frac{\pi}{2} + \pi n - x_n < \frac{2/a}{\pi/2 + \pi n + \sqrt{(\pi/2 + \pi n)^2 - 4/a}}.$$

3) Найти $\lim\limits_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n)$, где последовательность $\{x_n\}$ определена в 1) и 2).

144. Для последовательности, заданной рекуррентным способом, доказать существование предела и найти его:

1) $x_1 \in R$, $x_{n+1} = \sin x_n$, $n \in N$;

2) $x_1 = 0$, $x_{n+1} = x_n - \sin x_n + 1/2$, $n \in N$;

3) $x_1 = \pi/2$, $x_{n+1} = x_n + \cos x_n - 1/2$, $n \in N$;

4) $x_1 \in R$, $x_{n+1} = \operatorname{arctg} x_n$, $n \in N$;

5) $x_1 = 0$, $x_{n+1} = x_n - \operatorname{arctg} x_n + \pi/4$, $n \in N$;

6) $x_1 = 2$, $x_{n+1} = 1 + \ln x_n$, $n \in N$.

145. 1) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$.

2) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $x_n \neq 0$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + x_n)^{1/x_n} = e$.

146. Пусть $a_1, a_2, b_1, b_2 \in R$. Исследовать на сходимость последовательность
$$\left\{ \left(\frac{a_1 n + b_1}{a_2 n + b_2} \right)^n \right\}$$

и найти ее предел, если он существует.

147. Используя непрерывность соответствующих функций, вычислить предел последовательности:

1) $\left\{\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n\right\}$, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in R$;

2) $\left\{\left(\cos\frac{x}{n}+\lambda\sin\frac{x}{n}\right)^n\right\}$, где $x, \lambda \in R$;

3) $\left\{\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n\right\}$, где $a > 0,\ b > 0$;

4) $\left\{\left(\left(1+\frac{a}{n}\right)\left(1+\frac{2a}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{ka}{n}\right)\right)^n\right\}$, где $k \in N,\ a \in R$;

5) $\left\{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)\right\}$; 6) $\left\{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\ldots\cos\frac{x}{2^n}\right\}$;

7) $\{\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})\}$; 8) $\left\{n-\frac{1}{\sin(1/n)}\right\}$; 9) $\left\{n-\operatorname{ctg}\frac{1}{n}\right\}$;

10) $\{(\cos(x/\sqrt{n}))^n\}$.

148. Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ таковы, что $0 < a_n < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, $0 < b_n < \frac{\pi}{2}$, $\cos b_n = a_n$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{\sqrt{1-a_n}}$.

ОТВЕТЫ

11. 1) $f(-1) = -2$; 2) $f(1) = 3/2$; 3) $f(0) = 1/2$; 4) $f(0) = 1$; 5) $f(0) = 1$; 6) $f(0) = 1/2$.

15. $f(x_0) = 0$.

18. 1) $x = 0$, $\Delta f(0) = 2$, $x = 2$, $\Delta f(2) = -10$;
2) $x = -2$, $\Delta f(-2) = 2$;
3) $x = -2$, $x = 2$ — точки разрыва 2-го рода;
4) $x = 0$ — точка разрыва 2-го рода, $x = 1$, $\Delta f(1) = -2$;
5) $x_n = n$, $\Delta f(n) = -1$, $n \in Z$;
6) $x_n = n$, $n \in Z$, — точки разрыва 2-го рода;
7) $x = 0$, $x = 1$ — точка разрыва 2-го рода;
8) $x = -1$, $\Delta f(-1) = 0$, $x = 1$, $\Delta f(1) = -2$, $x = 0$ — точка разрыва 2-го рода;
9) $x_n = \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$, — точки разрыва 2-го рода;
10) $x = 0$, $\Delta f(0) = 0$, $x_n = \pi n$, $n \neq 0$, $n \in Z$, — точки разрыва 2-го рода.

19. 1) $a = 0$; 2) $a = 1/3$; 3) не существует; 4) $a = -1$.

20. 1) $a = 2$, $b = -1$; 2) $a = 1$, $b = -1$; 3) не существуют; 4) $a = 1$, $b = \pi/2$.

25. 1) $f \circ g$ непрерывна, $g \circ f$ разрывна в точке $x = 0$;
2) $f \circ g$ разрывна в точках $x = 0$, $x = \pm 1$, $g \circ f$ непрерывна;
3) $f \circ g$ разрывна в точке $x = -1$, $g \circ f$ разрывна в точке $x = 1$;
4) $f \circ g$ и $g \circ f$ непрерывны.

51. 1) $y = \cos^2 x$, $x \in (-\pi/2; \pi/2)$; 2) $x = \sqrt{1+y^2}$, $y \in R$;

3) $y = -\ln(1 - e^{-x})$, $x > 0$ или $x = -\ln(1 - e^{-y})$, $y > 0$.

52. $x_1(y) = -x_2(y) = \sqrt{y^2+1}$, $y \in R$, $y_1(x) = -y_2(x) = \sqrt{x^2-1}$, $|x| \geqslant 1$, $y_3(x) = -y_4(x) = \sqrt{x^2-1}\,\operatorname{sign} x$, $|x| \geqslant 1$.

53. 1)–5) Не будет.

56. 1) $\{x \in R\colon x \neq 0)$, $x = 0$ — точка разрыва 1-го рода;

2) $\{x \in R\colon x \neq 0, x \neq 2\}$, $x = 0$, $x = 2$ — точки разрыва 1-го рода;

3) $\{x \in R\colon x \neq 0\}$, $x = 0$ — точка разрыва 2-го рода;

4) $\{x \in R\colon x \neq -1, x \neq 1\}$, $x = -1$ — точка разрыва 1-го рода, $x = 1$ — точка разрыва 2-го рода;

5) $\{x \in [-1; 4]\colon x \neq 1\}$, $x = 1$ — точка разрыва 1-го рода;

6) $\{x \in [-\pi/2; \pi]\colon x \neq \pi/4\}$, $x = \pi/4$ — точка разрыва 1-го рода.

57. 1) $x = -3$, $x = 2$ — точки разрыва 2-го рода;

2) $x = -1$, $x = 0$, $x = 4$ — точки разрыва 2-го рода;

3) точек разрыва нет;

4) $x = -1$ — точка устранимого разрыва, $f(-1) = 1/3$;

5) $x = -1$ — точка разрыва 2-го рода, $x = 0$, $x = 1$ — точки устранимого разрыва, $f(0) = -1$, $f(1) = 0$;

6) $x = -2$ — точка разрыва 2-го рода, $x = 1/2$ — точка устранимого разрыва, $f(1/2) = 2/5$;

7) $x = 1$ — точка устранимого разрыва, $f(1) = -1/4$.

58. 1) $x = \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$, — точки разрыва 2-го рода;

2) $x = 0$ — точка устранимого разрыва, $f(0) = 0$;

3) $x = 0$ — точка устранимого разрыва, $f(0) = 1/2$;

4) $x = 0$ — точка разрыва 2-го рода, $x = 1$ — точка устранимого разрыва, $f(1) = -\pi/2$;

5) $x = \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$, — точки разрыва 2-го рода, $x = \pi n$, $n \in Z$, — точки устранимого разрыва, $f(\pi n) = (-1)^n 3/2$.

59. 1) $x = 0$ — точка разрыва 2-го рода;

2) $x = 1$ — точка разрыва 2-го рода; 3) точек разрыва нет;

4) $x = 1$ — точка разрыва 2-го рода;

5) $x = 0$ — точка разрыва 2-го рода;

6) $x = 0$, $x = 2$ — точки разрыва 2-го рода, $x = 1$ — точка устранимого разрыва, $f(1) = 0$;

7) $x = -1$, $x = 1$ — точки разрыва 2-го рода;

8) $x = 0$ — точка устранимого разрыва, $f(0) = 0$;

9) $x = 0$ — точка разрыва 2-го рода.

60. 1) $x = -1$, $x = 3$ — точки разрыва 1-го рода, $\Delta f(-1) = -2$, $\Delta f(3) = 2$;

2) $x_n = \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$, — точки разрыва 1-го рода, $\Delta f(x_n) = 2(-1)^{n+1}$;

3) $x_n = n$, $n \in Z$, — точки разрыва 1-го рода, $\Delta f(x_n) = 2(-1)^n$;

4) $x = 0$ — точка разрыва 2-го рода, $x_n = 1/n$, $n \in Z$, — точки разрыва 1-го рода, $\Delta f(x_n) = 2(-1)^{n-1}$;

5) точек разрыва нет;

6) $x = 0$ — точка разрыва 1-го рода, $\Delta f(0) = \pi$;
7) $x = 0$ — точка разрыва 1-го рода, $\Delta f(0) = 0$;
8) $x = 0$ — точка разрыва 1-го рода, $\Delta f(0) = 4/\pi$;
9) $x = 0$ — точка разрыва 1-го рода, $\Delta f(0) = 2$;
10) $x = 1$ — точка разрыва 1-го рода, $\Delta f(1) = -1$;
11) $x = 0$ — точка разрыва 1-го рода, $\Delta f(0) = 2$;
12) $x = 0$ — точка разрыва 1-го рода, $\Delta f(0) = 0$.

62. 1) $a = n$; 2) $a = 1/2$; 3) $a = -2$; 4) $a = 1$; 5) $a = \ln c$; 6) $a = 1/2$; 7) $a = 1$; 8) $a = 0$; 9) $a = 0$; 10) $a = e$.

63. 1) Нельзя; 2) нельзя; 3) $y(0) = 0$; 4) $y(1) = 1/4$; 5) нельзя.

64. 1) Область определения R, непрерывна на $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ и $(1; +\infty)$; $x = -1$, $x = 1$ — точки разрыва 1-го рода;

2) область определения $x \neq 1$; непрерывна на $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ и $(1, +\infty)$; $x = -1$, $x = 1$ — точки разрыва 1-го рода;

3) область определения $x \neq \pi + 2\pi n$, $n \in Z$; периодична с периодом 2π; непрерывна на $(2\pi n; \pi + 2\pi n)$ и $(\pi + 2\pi n; 2\pi(n + 1))$, $n \in Z$; $x = \pi n$, $n \in Z$, — точки разрыва 1-го рода;

4) область определения R; непрерывна на $(-\pi/6 + \pi n, \pi/6 + \pi n)$ и $(\pi/6 + \pi n; 5\pi/6 + \pi n)$; $n \in Z$; $x = \pm\pi/6 + n\pi$, $n \in Z$, — точки разрыва 1-го рода;

5) область определения R; непрерывна на $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$; $x = 0$ — точка разрыва 1-го рода;

6) область определения R; непрерывна на $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$; $x = 0$ — точка разрыва 2-го рода;

7) область определения R; непрерывна на R;

8) область, определения $x \neq \pi n$, $n \in Z$; непрерывна на $(\pi n; \pi/2 + \pi n)$; $x = 0$ — точка устранимого разрыва, $x = \pi n/2$, $n \neq 0$, $n \in Z$, — точки разрыва 1-го рода;

9) область определения R; непрерывна на R;

10) область определения R; непрерывна на $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$; $x = 0$ — точка разрыва 1-го рода.

65. $x = -1$, $x = 1$.

67. Непрерывна в каждой иррациональной точке, каждая рациональная точка — точка устранимого разрыва.

68. $f \circ g$ непрерывна на R, $g \circ f$ непрерывна в точке $x = 1$, разрывна в остальных точках.

99. 0,2. **109.** 3) 8; 4) 2^n.

111. 1) $f(x) = x$; 2) $f(x) = x/4$;

3) если $\beta \neq -\alpha$, то $f(x) = \dfrac{a}{\alpha + \beta} x + \dfrac{b}{2}$, если $\beta = -\alpha$, то решение существует только при $a = 0$ и $f(x) = \varphi(x) + b/2$, где $\varphi(x)$ — произвольная непрерывная, нечетная функция;

4) $f(x) = x + C$, $C \in R$; 5) $f(x) = x$; 6) $f(x) = x + C$, $C \in R$.

112. $f(x) = \dfrac{a}{A\alpha + B\beta} x + \dfrac{b}{A + B} + \varphi(x)$, где:

если $|\alpha/\beta| = 1$ или $|\alpha/\beta| < 1$ и $|\frac{B}{A}| \geqslant 1$, то $\varphi(x) = 0, \quad x \in R$;

если $|\alpha/\beta| < 1$ и $|B/A| < 1$, то

$$\varphi(x) = x^q\psi_+(\ln x), \quad x > 0; \ \varphi(x) = |x|^q\psi_-(\ln|x|), \quad x < 0; \ \varphi(0) = 0,$$

где $q = \log_{|\alpha/\beta|}|B/A|$, и если $\alpha/\beta > 0$, то $\psi_\pm(t)$ — произвольные непрерывные на R функции, удовлетворяющие условию

$$\psi_\pm(t) = -\psi_\pm(t + \ln(\beta/\alpha))\operatorname{sign} AB, \quad t \in R$$

(периодичность при $AB < 0$, антипериодичность при $AB > 0$), а если $\alpha/\beta < 0$, то $\psi_+(t)$ — произвольная непрерывная на R, периодическая с периодом $2\ln|\beta/\alpha|$ функция,

$$\psi_-(t) = -\psi_+(t + \ln|\alpha/\beta|)\operatorname{sign}(AB).$$

При $|\alpha/\beta| > 1$ в приведенном ответе следует поменять местами α и β, A и B.

113. 1) $a > 1/4$; 2) $a > 1/4$.

114. Если $a \neq 0$, то $(b-1)^2 < 4ac$; если $a = 0$, то $b = 1$.

115. 1) $f(x) = ax$, $a \in R$, $x \in R$.

116. $f(x) = e^{ax}$, $a \in R$, и $f(x) = 0$, $x \in R$.

117. 1) $f(x) = a\ln x$; 2) $f(x) = x^a$, $a \in R$, и $f(x) = 0$, $x \in R$.

118. 1) $f(x) = \cos ax$, $a \in R$, и $f(x) = 0$, $x \in R$;
2) $f(x) = \operatorname{ch} ax$, $a \in R$.

119. $f(x) = \text{const}$, $x \in R$. **137.** $x = f(f(x))$.

139. $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = -1$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = 1$. **143.** 3) π.

144. 1) 0; 2) $\pi/6$; 3) $\pi/3$; 4) 0; 5) 1; 6) 1.

146. 0, если $a_1 < a_2$; $e^{(b_1-b_2)/a}$, если $a_1 = a_2 = a$; $+\infty$, если $a_1 > a_2$.

147. 1) e^x; 2) $e^{\lambda x}$; 3) $\sqrt{ab}$; 4) $e^{k(k+1)a/2}$; 5) $\sqrt{e}$;
6) $(\sin x)/x$ при $x \neq 0$; 1 при $x = 0$; 7) 1; 8) 0; 9) 0; 10) $e^{-x^2/2}$.

148. $\sqrt{2}$.

§ 11. Асимптоты и графики функций

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Использование понятия предела часто позволяет более точно отразить свойства функции при построении ее графика. Перед построением графика следует выяснить, имеет ли функция левые или правые пределы (конечные или бесконечные) в концевых точках своей области определения и в точках разрыва. Если функция имеет предел при $x \to x_0$ ($x \to x_0 + 0$ или $x \to x_0 - 0$), то иногда удается, используя метод выделения главной части, установить "схожесть" ее графика в окрестности точки x_0 с графиком более простой функции. Например, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ и если $g(x)$ — *главная часть функции при* $x \to x_0$, т. е.

$$f(x) = g(x) + o(g(x)), \tag{1}$$

где $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, то график функции $f(x)$ "схож" с графиком функции $g(x)$ в окрестности точки x_0.

Если

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \infty \quad \text{или} \quad \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \infty, \tag{2}$$

то прямую $x = x_0$ называют *вертикальной асимптотой* графика функции $f(x)$. Например, прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой графиков функции $1/x$ и $\ln x$, так как $\lim\limits_{x\to 0}(1/x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to +0} \ln x = -\infty$. График функции $\operatorname{tg} x$ имеет бесконечно много вертикальных асимптот, а именно, каждая прямая $x = \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$, является асимптотой. Выделение главной части бывает полезно и тогда, когда

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \infty \quad \text{или} \quad \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \infty.$$

Если в этих случаях

$$f(x) = g(x) + o(1)$$

при $x \to x_0 - 0$ (или $x \to x_0 + 0$), то график функции $f(x)$ "схож" с графиком функции $g(x)$.

Прямую $y = kx + b$ называют *асимптотой* графика функции $y = f(x)$, $x \in (a; +\infty)$, при $x \to +\infty$, если

$$\lim_{x\to +\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0. \tag{3}$$

Прямую $y = kx + b$ называют асимптотой графика функции $y = f(x)$, $x \in (-\infty; a)$, при $x \to -\infty$, если

$$\lim_{x\to -\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0. \tag{4}$$

Если $k \neq 0$, то асимптоту $y = kx + b$ называют *наклонной*. Если $k = 0$, то асимптоту $y = b$ называют *горизонтальной*.

Для того чтобы прямая $y = kx + b$ была асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$), необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \left(\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = k\right), \tag{5}$$

$$\lim_{x\to +\infty} (f(x) - kx) = b \quad \left(\lim_{x\to -\infty} (f(x) - kx) = b\right). \tag{6}$$

В случае горизонтальной асимптоты ($k = 0$) вместо (5) и (6) имеем: для того чтобы прямая $y = b$ была горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$), необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = b \quad \left(\lim_{x\to -\infty} f(x) = b\right). \tag{7}$$

Примерами функций, графики которых имеют горизонтальные асимптоты, являются функции $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$ (см. рис. 7.6, 7.7).

График функции $\operatorname{arctg} x$ имеет горизонтальную асимптоту $y = \pi/2$ при $x \to +\infty$ (горизонтальную асимптоту $y = -\pi/2$ при $x \to -\infty$).

При построении кривых, заданных параметрически, также используется понятие асимптоты.

Прямую $x = x_0$ называют *вертикальной асимптотой* кривой

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

если существует такое a (число, $+\infty$ или $-\infty$), что

$$\lim_{t\to a} x(t) = x_0, \quad \lim_{t\to a} y(t) = \infty, \tag{8}$$

или

$$\lim_{t\to a+0} x(t) = x_0, \quad \lim_{t\to a+0} y(t) = \infty, \tag{9}$$

или

$$\lim_{t\to a-0} x(t) = x_0, \quad \lim_{t\to a-0} y(t) = \infty. \tag{10}$$

Прямую $y = b$ называют *горизонтальной асимптотой* кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$ при $x \to +\infty$, если существует такое a (число, $+\infty$ или $-\infty$), что

$$\lim_{t\to a} x(t) = +\infty, \quad \lim_{t\to a} y(t) = b, \tag{11}$$

или

$$\lim_{t\to a-0} x(t) = +\infty, \quad \lim_{t\to a-0} y(t) = b, \tag{12}$$

или

$$\lim_{t\to a+0} x(t) = +\infty, \quad \lim_{t\to a+0} y(t) = b. \tag{13}$$

Прямую $y = kx + b$, $k \neq 0$, называют *наклонной асимптотой* кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$ *при* $x \to +\infty$, если существует такое a (число, $+\infty$ или $-\infty$), что

$$\lim_{t\to a} x(t) = +\infty, \quad \lim_{t\to a} y(t) = \infty, \tag{14}$$

$$\lim_{t\to a} \frac{y(t)}{x(t)} = k, \tag{15}$$

$$\lim_{t\to a}(y(t) - kx(t)) = b, \tag{16}$$

или условия (14)–(16) выполнены при $t \to a - 0$, или условия (14)–(16) выполнены при $t \to a + 0$. Аналогично даются определения асимптот при $x \to -\infty$.

В полярных координатах прямая, задаваемая уравнением

$$r = \frac{d}{\sin(\varphi - \varphi_0)}, \quad d \neq 0,$$

является асимптотой графика функции $r = r(\varphi)$, если выполнены условия

$$\lim_{\varphi\to\varphi_0} f(\varphi) = +\infty, \tag{17}$$

$$\lim_{\varphi\to\varphi_0} r(\varphi)\sin(\varphi - \varphi_0) = d. \tag{18}$$

Эта прямая удалена от центра на расстояние $|d|$; перпендикуляр, опущенный из центра на прямую, составляет с полярным лучом угол,

равный
$$\varphi_0 + \frac{\pi}{2}\operatorname{sign} d.$$

Если наряду с условием (17) вместо (18) выполнено условие
$$\lim_{\varphi\to\varphi_0} r(\varphi)\sin(\varphi-\varphi_0) = 0, \tag{19}$$
то асимптотой графика функции $r = r(\varphi)$ является прямая, проходящая через центр и содержащая луч $\varphi = \varphi_0$.

При исследовании и построении кривой, заданной уравнением $F(x, y) = 0$, иногда удается представить кривую или ее часть как график функции $y = f(x)$ (эта функция удовлетворяет равенству $F(x, f(x)) = 0$) или как график функции $r = r(\varphi)$ в полярных координатах (эта функция удовлетворяет равенству $F(r(\varphi)\cos\varphi,\ r(\varphi) \times \sin\varphi) = 0$). Иногда же бывает возможным задать кривую параметрически. В этих случаях для исследования и построения кривой можно применить указанные метод выделения главной части и приемы нахождения асимптот (пример 3, 3), пример 5).

Алгебраической кривой n-й степени называют кривую, которую в декартовой системе координат можно задать уравнением вида
$$\sum a_{kl}x^k y^l = 0, \tag{20}$$
где сумма составлена по всем целым k и l таким, что $0 \leqslant l \leqslant n$, $k + l \leqslant n$, и имеется хотя бы одно ненулевое слагаемое, для которого $k + l = n$. Если прямая $y = kx + b$ — асимптота алгебраической кривой, то коэффициенты k и b можно найти следующим путем. Подставим в уравнение (20) $y = kx + b$ и в получившемся многочлене относительно x приравняем нулю коэффициенты при двух старших степенях x, коэффициенты k и l являются решениями этой системы из двух уравнений.

Если прямая $x = x_0$ — вертикальная асимптота алгебраической кривой, то x_0 — корень многочлена относительно x, являющегося коэффициентом при старшей степени y в уравнении кривой.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Найти вертикальные асимптоты графика функции f и построить его, если:

1) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; 2) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$; 3) $f(x) = \sqrt{x^4 - 1}$.

▲ 1) Функция определена и непрерывна на интервале $(-1; 1)$. Так как
$$\lim_{x\to 1-0}\sqrt{1-x^2} = \lim_{x\to -1+0}\sqrt{1-x^2} = 0,$$

то
$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=+\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x\to -1+0}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=-\infty.$$

Следовательно, прямые $x=-1$ и $x=1$ — вертикальные асимптоты графика.

Данная функция нечетная. Она строго возрастает на интервале $(0;1)$. Действительно, если $0<x<1$, то
$$f(x)=\sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}}=\sqrt{\frac{1}{1-x^2}-1},$$
откуда и видно, что при возрастании x от 0 до 1 функция $1/(1-x^2)$, а вместе с ней и функция $f(x)$ строго возрастают. Отметим еще, что $x/\sqrt{1-x^2}>$ $>x$ при $x>0$. Для того чтобы уточнить вид графика вблизи точки $x=0$, выделим главную часть функции при $x\to 0$. Так как
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1,$$
то $f(x)/x=1+o(1)$, откуда
$$f(x)=x+o(x).$$

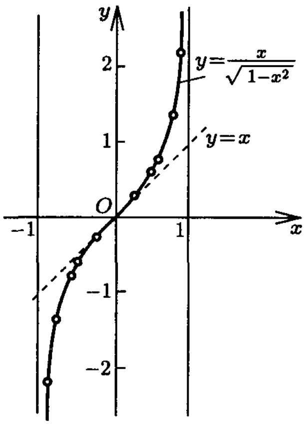

Рис. 11.1

Это означает, что график данной функции вблизи $x=0$ “похож” на график функции $g(x)=x$ (точки этих графиков, соответствующие значению x, сближаются по вертикали быстрее, чем x убывает). График функции изображен на рис. 11.1.

2) Функция определена и непрерывна на промежутке $(0;1]$, Так как
$$\lim_{x\to +0}\sqrt{\frac{1-x}{x}}=+\infty,$$
то прямая $x=0$ — вертикальная асимптота графика. Кроме того,
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{1-x}, \qquad \lim_{x\to 0}\sqrt{1-x}=1.$$

Для разности $f(x)-1/\sqrt{x}$ имеем
$$\sqrt{\frac{1-x}{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{x}}=-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}+1}=o(1) \quad \text{при} \quad x\to 0,$$
поэтому
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+o(1).$$

Таким образом, функция $1/\sqrt{x}$ является главной частью данной функции $f(x)$ при $x\to +0$ и, более того, расстояние по вертикали между точками графиков функций $\sqrt{(1-x)/x}$ и $1/\sqrt{x}$ стремится к нулю при $x \to +0$. Как иногда говорят, график функции $1/\sqrt{x}$ является криволинейной асимптотой графика данной функции (рис. 11.2). Используя равенство

$$\sqrt{\frac{1-x}{x}} = \sqrt{1-x}\,\frac{1}{\sqrt{x}}$$

и учитывая, что $\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 1$, при $x \to 1-0$ получаем

$$f(x)/\sqrt{1-x} = 1/\sqrt{x} = 1 + o(1),$$

откуда

$$f(x) = \sqrt{1-x} + o(\sqrt{1-x}).$$

Следовательно, график данной функции в окрестности точки $x = 1$

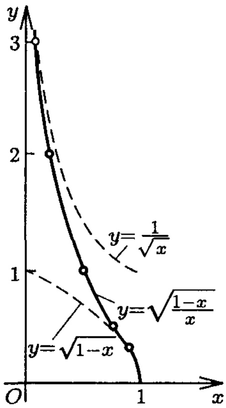

Рис 11 2

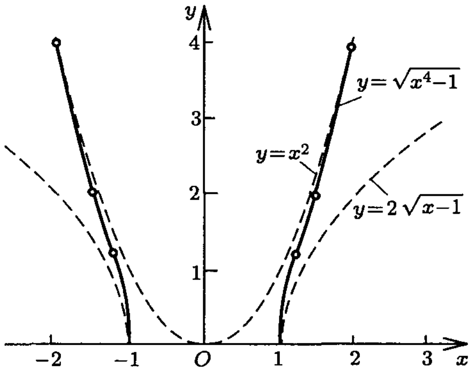

Рис. 11 3

($x < 1$) "схож" с графиком более простой функции $\sqrt{1-x}$ (см. рис. 11.2).

Поскольку $f(x) = \sqrt{1/x - 1}$, данная функция, очевидно, убывает на $(0; 1]$.

3) Функция определена и непрерывна на промежутках $(-\infty; -1]$ и $[1, +\infty)$, значит, вертикальных асимптот ее график не имеет. Функция четная. Рассмотрим ее на промежутке $[1; +\infty)$. Здесь функция x^4, а значит, и функция $\sqrt{x^4 - 1}$, строго возрастает. Используя формулу

$$f(x) = \sqrt{x-1}\sqrt{(x+1)(x^2+1)}$$

и учитывая, что

$$\lim_{x\to 1+0} \sqrt{(x+1)(x^2+1)} = 2,$$

при $x \to 1+0$ получаем

$$f(x) = \sqrt{x-1}(2 + o(1)) = 2\sqrt{x-1} + o(\sqrt{x-1}).$$

Следовательно, график данной функции в окрестности точки $x = 1$ ($x > 1$) "схож" с графиком функции $2\sqrt{x-1}$ (рис. 11.3). Кроме того,

$f(x) > 2\sqrt{x-1}$ при $x > 1$, т. е. при $x \to 1+0$ точки графика данной функции приближаются сверху к графику функции $y = 2\sqrt{x-1}$. Так как

$$f(x) = x^2\sqrt{1-1/x^4}, \qquad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-1/x^4} = 1,$$

то при $x \to +\infty$ получаем

$$f(x) - x^2 =$$
$$= x^2\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}-1\right) = x^2\frac{-1/x^4}{\sqrt{1-1/x^4}+1} = -\frac{1}{x^2}\frac{1}{\sqrt{1-1/x^4}+1} = o(1),$$

откуда

$$f(x) = x^2 + o(1).$$

При этом $f(x) < x^2$, т. е. точки графика данной функции приближаются к параболе $y = x^2$ снизу (рис. 11.3). ▲

Пример 2. Найти асимптоты графика функции f и построить его, если: 1) $f(x) = \dfrac{6(x^2-4)}{3x^2+8}$; 2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

▲ 1) Поскольку $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6(x^2-4)}{3x^2+8} = 2$, прямая $y = 2$ является горизонтальной асимптотой графика и при $x \to +\infty$, и при $x \to -\infty$. Функция непрерывна на R, следовательно, вертикальных асимптот ее график не имеет. Данная функция четная. Из равенства

$$f(x) = 2 - \frac{40}{3x^2+8}$$

следует, что на $(0; +\infty)$ с ростом x значения функции строго возрастают. Из этого же равенства видно, что точки графика функции приближаются при $x \to \infty$ к прямой $y = 2$ снизу ($f(x) < 2$ для любого $x \in R$). При $x = 0$ функция принимает наименьшее значение $f(0) = -3$. Для того чтобы уточнить вид графика вблизи точки $x = 0$, представим функцию в виде

$$f(x) = \frac{3(5x^2-(3x^2+8))}{3x^2+8} = \frac{15x^2}{3x^2+8} - 3$$

и воспользуемся тем, что при $x \to 0$

$$\frac{x^2}{ax^2+b} = \frac{x^2}{b} + o(x^2), \quad a > 0, \quad b > 0. \tag{21}$$

Последнее равенство доказывается легко:

$$\frac{x^2}{ax^2+b} - \frac{x^2}{b} = -\frac{ax^4}{b(ax^2+b)} = -\frac{ax^2}{b(ax^2+b)}x^2,$$

и так как $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-ax^2}{b(ax^2+b)} = 0$, то $\dfrac{-ax^2}{b(ax^2+b)}x^2 = o(x^2)$, откуда и следует (21).

Используя (21) при $a = 3$, $b = 8$, получаем равенство

$$f(x) = \frac{15}{8}x^2 - 3 + o(x^2),$$

которое означает, что при $x \to 0$ график данной функции "схож" с

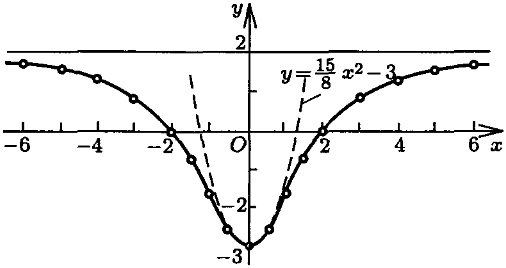

Рис. 11.4

параболой $y = \dfrac{15}{8}x^2 - 3$. График представлен на рис. 11.4.

2) Функция определена всюду, кроме точки $x = 0$. Поскольку

$$\lim_{x\to+0} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to-0} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = -\infty,$$

прямая $x = 0$ — вертикальная асимптота графика. Далее,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = 1, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = -1,$$

поэтому $y = 1$ — горизонтальная асимптота при $x \to +\infty$, а $y = -1$ — горизонтальная асимптота при $x \to -\infty$. Поскольку $|\sqrt{1+x^2}/x| >$ > 1 при $x \neq 0$, точки графика при $x \to +\infty$ приближаются сверху к прямой $y = 1$, а при $x \to -\infty$ — снизу к прямой $y = -1$. Данная функция нечетная. Если $x > 0$, то

$$f(x) = \sqrt{1/x^2 + 1},$$

поэтому с ростом x от 0 до $+\infty$ значения $f(x)$ строго убывают от $+\infty$ до 1. График функции показан на рис. 11.5. ▲

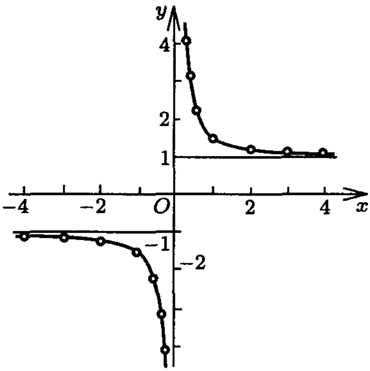

Рис. 11.5

П р и м е р 3. Найти все асимптоты графика функции $f(x)$ и построить его, если:

1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x - 1}$;

2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x^4 + 1}}{|x|}$;

3) $f(x) = 3\sqrt{x^2/4 - 1}$.

▲ 1) Функция определена и непрерывна всюду, кроме $x = 1$, и

$$\lim_{x\to1-0} \frac{x^2 - 2x}{x - 1} = +\infty, \quad \lim_{x\to1+0} \frac{x^2 - 2x}{x - 1} = -\infty,$$

следовательно, график имеет только одну вертикальную асимпто-

ту $x = 1$. Поскольку
$$\frac{x^2 - 2x}{x - 1} = x - 1 - \frac{1}{x - 1}, \tag{22}$$
прямая $y = x - 1$ является, очевидно, наклонной асимптотой графика и при $x \to +\infty$, и при $x \to -\infty$. При $x > 1$ функции $x - 1$ и $-1/(x - 1)$ строго возрастают, значит, и их сумма, т. е. данная функция, строго возрастает. Аналогично, при $x < 1$ данная функция строго возрастает. Из (22) видно, что при $x \to +\infty$ точки графика приближаются к асимптоте снизу ($f(x) < x - 1$), а при $x \to -\infty$ — сверху. График показан на рис. 11.6.

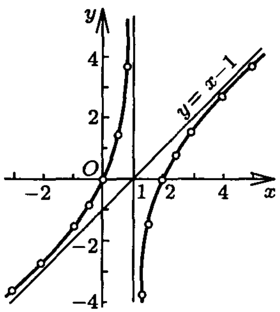

Рис. 11.6

2) Функция определена и непрерывна во всех точках, кроме $x = 0$, и
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{4x^4 + 1}}{|x|} = +\infty,$$
т. е. $x = 0$ — вертикальная асимптота графика. Выясним, есть ли асимптоты при $x \to +\infty$. Находим (см. формулы (5) и (6))
$$\frac{f(x)}{x} = \sqrt{4 + \frac{1}{x^4}} \to 2 \quad \text{при} \quad x \to +\infty,$$
$$f(x) - 2x = \frac{\sqrt{4x^4 + 1} - 2x^2}{x} = \frac{1}{x(\sqrt{4x^4 + 1} + 2x^2)} \to 0 \quad \text{при } x \to +\infty.$$

Значит, $y = 2x$ — наклонная асимптота графика при $x \to +\infty$, причем $f(x) > 2x$, т. е. точки графика при $x \to +\infty$ приближаются к асимптоте сверху. Далее,
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(-\sqrt{4 + \frac{1}{x^4}} \right) = -2,$$
$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) + 2x) =$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{4x^4 + 1} + 2x^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{x(2x^2 + \sqrt{4x^4 + 1})} = 0,$$
значит, $y = -2x$ — наклонная асимптота при $x \to -\infty$. Отметим, что $f(x) > -2x$, т. е. точки графика при $x \to -\infty$ приближаются к асимптоте $y = -2x$ сверху. Теперь исследуем функцию на монотонность. Поскольку
$$f(x) = \frac{\sqrt{4x^4 + 1}}{|x|} = \sqrt{4x^2 + \frac{1}{x^2}} \geqslant \sqrt{2\sqrt{4x^2 \frac{1}{x^2}}} = 2,$$
причем знак равенства имеет место лишь при $4x^2 = 1/x^2$, т. е. при $x = \pm 1/\sqrt{2}$, значение функции $f(1/\sqrt{2}) = 2$ является наименьшим на интервале $(0; +\infty)$. На интервале $(0; 1/\sqrt{2})$ функция строго убывает, так как если $0 < x_1 < x_2 < 1/\sqrt{2}$, то
$$f^2(x_2) - f^2(x_1) = 4\,(x_2^2 - x_1^2) - \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_1^2 x_2^2} = (x_2^2 - x_1^2)\frac{4x_1^2 x_2^2 - 1}{x_1^2 x_2^2} < 0.$$

Аналогично доказывается, что на интервале $(1/\sqrt{2}; +\infty)$ функция строго возрастает. Функция четная. График ее изображен на рис. 11.7.

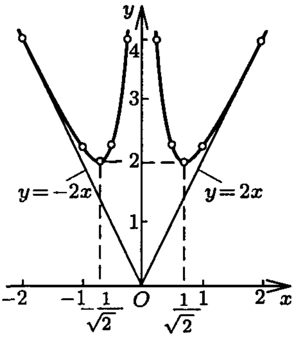

Рис. 11.7

3) Функция определена и непрерывна при $|x| \geqslant 2$, значит, вертикальных асимптот не имеет. Функция четная, рассмотрим ее при $x \geqslant 2$. Здесь функция строго возрастает. Используя равенство

$$f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x+2}\sqrt{x-2}$$

и учитывая, что

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{x+2} = 2,$$

при $x \to 2$ находим

$$f(x) = 3\sqrt{x-2} + o(\sqrt{x-2}),$$

т. е. график данной функции "схож" с графиком функции $y = 3\sqrt{x-2}$ (рис. 11.8). Находим последовательно пределы (формулы (5) и (6)):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3\sqrt{x^2-4}}{2x} = \frac{3}{2},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - \frac{3}{2}x\right) = \frac{3}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x} = 0;$$

отсюда следует, что график имеет наклонную асимптоту $y = 3x/2$. График данной функции, изображенный на рис. 11.8, является частью гиперболы, заданной уравнением

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1;$$

другая часть гиперболы изображена на этом рисунке штрихпунктирной линией. ▲

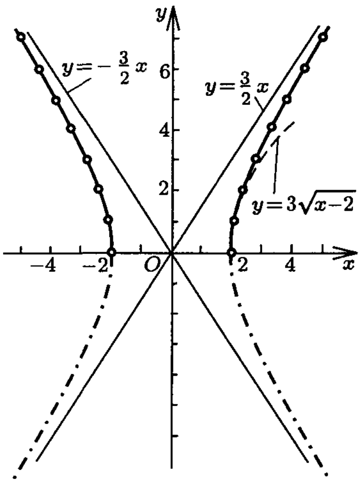

Рис. 11.8

Пример 4. Найти все асимптоты кривой

$$x = \frac{t^2-2t}{t-1}, \quad y = \frac{\sqrt{t^4+1}}{t}$$

и построить эту кривую.

▲ Функции $x(t)$ и $y(t)$ определены для всех значений t, кроме $t = 0$ и $t = 1$. Находим пределы этих функций при $t \to -\infty$, $t \to +\infty$, а также левые и правые пределы в точках $t = 0$ и $t = 1$:

1) $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = -\infty$, $\lim\limits_{t\to-\infty} y(t) = -\infty$;

2) $\lim\limits_{t\to-0} x(t) = -0$, $\lim\limits_{t\to-0} y(t) = -\infty$, $\lim\limits_{t\to+0} x(t) = +0$, $\lim\limits_{t\to+0} y(t) = +\infty$;

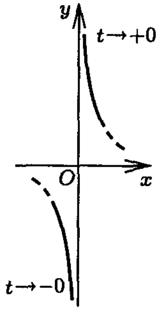

Рис. 11.9

3) $\lim\limits_{t\to 1-0} x(t) = +\infty, \quad \lim\limits_{t\to 1-0} y(t) = \sqrt{2}+0,$

$\lim\limits_{t\to 1+0} x(t) = -\infty, \quad \lim\limits_{t\to 1+0} y(t) = \sqrt{2}+0;$

4) $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = +\infty, \quad \lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = +\infty.$

Из 2) следует, что прямая $x = 0$ — вертикальная асимптота кривой, причем кривая при $y \to -\infty$ приближается к асимптоте слева ($x(t) < 0$), а при $y \to +\infty$ — справа ($x(t) > 0$) (рис. 11.9).

Из 3) заключаем, что прямая $y = \sqrt{2}$ — горизонтальная асимптота кривой и при $x \to -\infty$, и при $x \to +\infty$, причем в обоих случаях кривая приближается к асимптоте сверху (рис. 11.10).

В случаях 1) и 4) исследуем, имеет ли кривая наклонные асимптоты. Находим (см. (15) и (16))

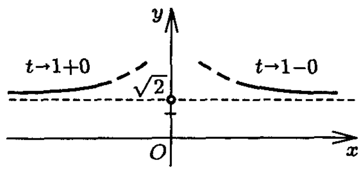

Рис. 11.10

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{\sqrt{t^4+1}\,(t-1)}{t^2(t-2)} = 1,$$

$$\lim_{t\to\pm\infty} (y(t) - x(t)) = \lim_{t\to\pm\infty} \left(\frac{\sqrt{t^4+1}}{t} - \frac{t^2-2t}{t-1}\right) = \lim_{t\to\pm\infty} \left(\frac{\sqrt{t^4+1}}{t} - t + \frac{t}{t-1}\right) =$$

$$= \lim_{t\to\pm\infty} \left(\frac{\sqrt{t^4+1}-t^2}{t} + \frac{t}{t-1}\right) = \lim_{t\to\pm\infty} \left(\frac{1}{t(\sqrt{t^4+1}+t^2)} + \frac{t}{t-1}\right) = 1.$$

Следовательно, кривая имеет асимптоту $y = x+1$ и при $x \to -\infty$, и при $x \to +\infty$. Так как

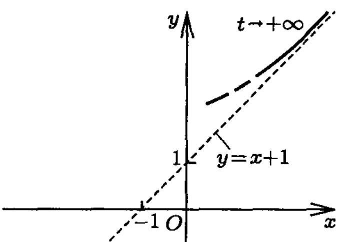

Рис. 11.11

$$y(t) - x(t) - 1 = \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t(\sqrt{t^4+1}+t^2)},$$

то $y(t) - x(t) - 1 \to -0$ при $t \to -\infty$ (соответственно $x(t) \to -\infty$) и $y(t) - x(t) - 1 \to +0$ при $t \to +\infty$ (соответственно $x(t) \to +\infty$). Поэтому при $x \to -\infty$ кривая приближается к асимптоте снизу, а при $x \to +\infty$ — сверху (рис. 11.11).

Таким образом, кривая имеет вертикальную асимптоту $x = 0$, горизонтальную асимптоту $y = \sqrt{2}$ и наклонную асимптоту $y = x+1$ (и при $x \to +\infty$, и при $x \to -\infty$).

Изобразим в одной системе координат графики данных функций $x(t)$ и $y(t)$. Первый из них был построен в примере 3, 1) (см. рис. 11.6), второй строится так же, как в примере 3, 2), отличие лишь в том, что данная функция $y(t)$ нечетная.

На рис. 11.12 первый график изображен сплошной линией, второй — штрихпунктирной. Используя оба эти графика и учитывая предыдущее исследование асимптот, можно представить себе движение точки $(x(t); y(t))$, говоря языком механики, в плоскости xOy при изменении t от $-\infty$ до $+\infty$. Проведем в плоскости xOy асимптоты — прямые $y = x + 1$ и $y = \sqrt{2}$. Рассмотрим три промежутка оси t: $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(1; +\infty)$. При возрастании t от $-\infty$ до 0 значения $x(t)$ (см. рис. 11.12) строго возрастают от $-\infty$ до 0, значения $y(t)$ сначала возрастают от $-\infty$, достигая максимума при $t = -1$ $(y(-1) = -\sqrt{2},\ x(-1) = -1{,}5)$, а затем убывают до $-\infty$. При $t \to -\infty$ точка кривой $(x(t); y(t))$ приближается к асимптоте $y = x + 1$ снизу (см. рис. 11.11), а при $t \to -0$ — к асимптоте $x = 0$ слева (см. рис. 11.9). Найдя несколько промежуточных точек, рисуем эту часть кривой (рис. 11.13).

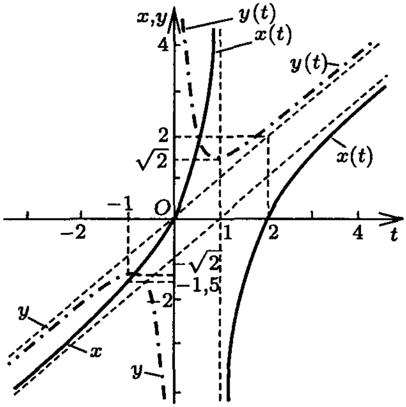

Рис. 11.12

На втором промежутке при возрастании t от 0 до 1 значения $x(t)$ возрастают от 0 до $+\infty$, а значения $y(t)$ убывают от $+\infty$ до $\sqrt{2}$ (при $t = 1$ точка кривой не определена, поэтому можно говорить лишь о пределах $x(t)$ и $y(t)$ при $t \to 1 \pm 0$). Точка кривой движется в первом квадранте, переходя от асимптоты $x = 0$ (при $t \to +0$) к асимптоте $y = \sqrt{2}$ (сверху) при $t \to 1 - 0$. Наконец, при возрастании t от 1 до $+\infty$ значения $x(t)$ возрастают от $-\infty$ до $+\infty$, значения $y(t)$ возрастают от $\sqrt{2}$ до $+\infty$. Эта часть кривой расположена в 1-м и 2-м квадрантах, точка кривой движется, переходя от асимптоты $y = \sqrt{2}$ (при $t \to -1 + 0$) к асимптоте $y = x + 1$ (сверху) при $t \to -\infty$. С учетом всего этого и изображена кривая на

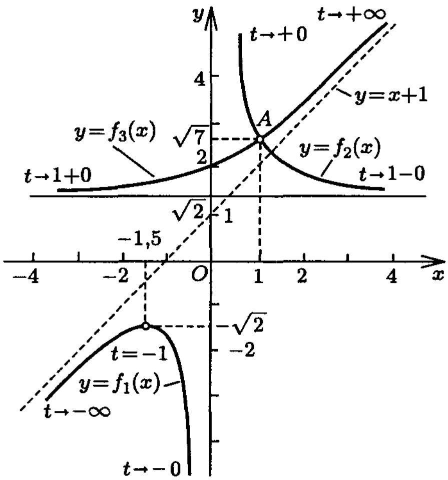

Рис. 11.13

рис. 11.13. Конечно, отдельные детали рисунка (плавность или гладкость, поведение вблизи точки максимума $x = -1{,}5$, $y = -\sqrt{2}$ и т. д.) еще требуют обоснования. Оно может быть дано методами дифференциального исчисления, и соответствующие примеры будут рассмотрены в § 21. Отметим, что интервалы $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(1; +\infty)$ были выбраны так, что на каждом из них определены и непрерывны обе функции $x(t)$ и $y(t)$, причем функция $x(t)$ строго возрастает. Поэтому для функции $x = x(t)$ на интервале $(-\infty; 0)$ существует непрерывная, возрастающая обратная функция $t = t_1(x)$, $x \in (-\infty; 0)$, множеством значений которых является интервал $(-\infty; 0)$. Следовательно, пара функций $x(t)$, $y(t)$, $t \in (-\infty; 0)$, задает параметрически функцию $y = f_1(x) = y(t_1(x))$, $x \in (-\infty; 0)$. График этой функции является частью кривой, соответствующей значениям $t \in (-\infty; 0)$ (см. рис. 11.13). Аналогично, для $x = x(t)$, $t \in (0; 1)$, определена непрерывная, возрастающая обратная функция $t = t_2(x)$, $x \in (0; +\infty)$, со множеством значений $(0; 1)$. Пара функций $x(t)$, $y(t)$, $t \in (0; 1)$, задает параметрически функцию $y = f_2(x) = y(t_2(x))$, $x \in (0; +\infty)$. График этой функции — часть кривой, соответствующая $t \in (0; 1)$ (см. рис. 11.13). Для $x = x(t)$, $t \in (1; +\infty)$, есть обратная функция $t = t_3(x)$, $x \in R$, со множеством значений $(1; +\infty)$. Часть кривой при $t \in (1; +\infty)$ является графиком функции $y = f_3(x) = y(t_3(x))$, $x \in R$ (рис. 11.13). Указанные части кривой иногда называют ее ветвями. Вместо участков монотонности функции $x(t)$ бывает удобно рассматривать участки монотонности функции $y(t)$ и соответственно заданные параметрически функции вида $x = g(y)$. Отметим, что построенная кривая имеет, как говорят, *точку самопересечения* (точка A на рис. 11.13). Для нахождения точек самопересечения нужно найти все решения системы

$$\begin{cases} x(u) = x(v), \\ y(u) = y(v), \\ \quad v > v, \end{cases}$$

относительно u и v. В данном случае эта система имеет единственное решение $u = (3 + \sqrt{5})/2$, $v = (3 - \sqrt{t})/2$, а точка самопересечения имеет координаты $x(u) = 1$, $y(u) = \sqrt{7}$. ▲

Пример 5. Найти асимптоты графика функции

$$r(\varphi) = \frac{3 \sin\varphi \cos\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}$$

и построить этот график в полярных координатах.

▲ Данная функция периодическая с периодом 2π, поэтому достаточно рассмотреть отрезок $[-\pi/2; 3\pi/2]$ длины 2π. Здесь функция определена для

$$\varphi \in [-\pi/2; -\pi/4) \cup [0; \pi/2] \cup (3\pi/4; \pi],$$

причем $\lim\limits_{\varphi\to\pi/4-0} r(\varphi) = +\infty$ и $\lim\limits_{\varphi\to(3\pi)/4+0} r(\varphi) = +\infty$. Соответственно находим

$$\lim_{\varphi\to-\pi/4-0} r(\varphi)\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{\varphi\to-\pi/4-0}\frac{3\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{2}(1-\cos\varphi\sin\varphi)} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\lim_{\varphi\to(3\pi)/4+0} r(\varphi)\sin\left(\varphi-\frac{3\pi}{4}\right) = \lim_{\varphi\to(3\pi)/4+0} r(\varphi)\Big(-\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, при $\varphi\to-\pi/4-0$ асимптотой является прямая

$$r = -\frac{1}{\sqrt{2}\sin(\varphi+(\pi/4))},$$

а при $\varphi\to(3\pi)/4+0$ — прямая

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}\sin(\varphi-(3\pi/4))}.$$

Поскольку $\sin((\varphi-(3\pi/4)) = -\sin((\varphi+(\pi/4))$, то это одна и та же прямая. Строим ее: отрезок OA (рис. 11.14) длины $1/\sqrt{2}$ поворачиваем на угол $-\pi/4 + (-1)\pi/2 = -(3\pi)/4$ и через получившуюся точку A_1 проводим прямую перпендикулярно OA_1, она и является асимптотой. Определим, как расположена кривая относительно своей асимптоты. При $\varphi\to-\pi/4-0$ (см. рис. 11.14) имеем

$$|MQ| = \left|r(\varphi)\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right| = \frac{3}{\sqrt{2}}\left|\frac{1}{1-\cos\varphi\sin\varphi}-1\right| < \frac{3}{\sqrt{2}}\Big(+1-\frac{2}{3}\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

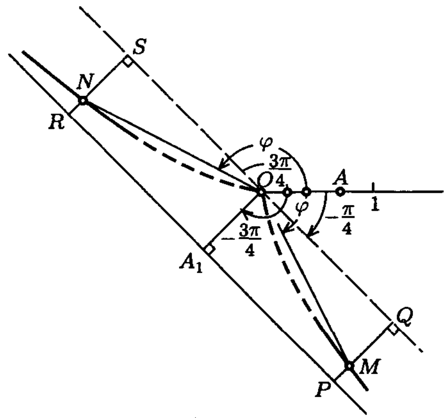

Рис. 11.14

Значит, $|MQ| < |PQ|$, т. е. точки кривой находятся над асимптотой. Если $\varphi\to3\pi/4+0$, то

$$|NS| = r(\varphi)\sin\left(\varphi-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{1-\cos\varphi\sin\varphi}\right) < \frac{3}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

поэтому $|NS| < |RS|$ и здесь точки кривой расположены над асимптотой. Из проведенных вычислений следует, что

$$|PM| = \frac{3}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{2}{2-\sin2\varphi}\right),$$

и видно, что $|PM|$ строго убывает при возрастании φ от $\pi/2$ до $-\pi/4$. Аналогично устанавливаем, что $|RN|$ (см. рис. 11.14) строго убывает при убывании φ от π до $3\pi/4$. Это и показано схематично на рис. 11.14. Кривая проходит дважды через центр O, так как $r = 0$ при $\varphi = -\pi/2$ и $\varphi = \pi$ (т. е. O — точка самопересечения кривой). Исследуем вид кривой вблизи точки O. Если $\varphi \to -\pi/2$, то

$$\cos\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \sim \frac{\pi}{2} + \varphi, \quad \sin\varphi \sim -1;$$

поэтому $\cos^3\varphi + \sin^3\varphi \sim -1$ и

$$r(\varphi) \sim \frac{-3(\pi/2 + \varphi)}{-1} = 3\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right).$$

Переходя к декартовым координатам, получаем

$$x = r(\varphi)\cos\varphi \sim 3\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)^2, \quad y = r(\varphi)\sin\varphi \sim -3\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right),$$

откуда $x \sim y^2/3$, т. е. при $\varphi \to -\pi/2$ кривая "сливается" с параболой $x = y^2/3$ (рис. 11.15). Аналогично, при $\varphi \to \pi$ имеем

$$\sin\varphi = \sin(\pi - \varphi) \sim \pi - \varphi, \quad \cos\varphi \sim -1,$$
$$\sin^3\varphi + \cos^3\varphi \sim -1, \quad r(\varphi) \sim 3(\pi - \varphi),$$

откуда

$$x \sim -3(\pi - \varphi), \quad y \sim 3(\pi - \varphi)^2 \sim x^2/3,$$

т. е. график данной функции $r = r(\varphi)$ "схож" с параболой $y = x^2/3$

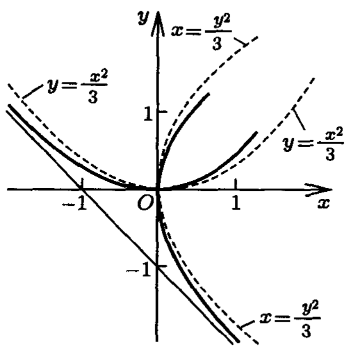

Рис. 11.15

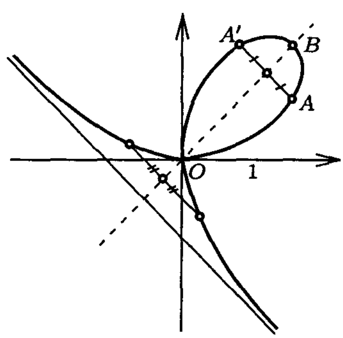

Рис. 11.16

(см. рис. 11.15). Точно так же найдем, что $y \sim x^2/3$ при $\varphi \to 0$ и $x \sim$ $\sim y^2/3$ при $\varphi \to \pi/2$. Оставшуюся часть графика ($\varphi \in [0; \pi/2]$) строим по точкам (рис. 11.16). Отметим, что эта часть, как и весь график, симметрична относительно прямой $\varphi = \pi/4$, так как $r(\pi/2 - \varphi) =$ $= r(\varphi)$, что равносильно равенству $r(\pi/4 + \alpha) = r(\pi/4 - \alpha)$. Более обоснованное построение "петли" $OABA'O$ будет проведено далее с использованием понятия производной.

Построенная кривая называется *декартовым листом*, упоминание о ней впервые встречается в письмах Р. Декарта. В декартовых координатах эта кривая, как легко проверить, задается уравнением $x^3 + y^3 = 3xy$. ▲

Пример 6. Найти асимптоты кривой

$$x^3 - 3xy^2 = R(x^2 + y^2), \quad R > 0, \quad x \neq 0.$$

▲ Коэффициент при старшей степени y (т. е. при y^2) равен $3x + R$. Следовательно, вертикальной асимптотой может быть только прямая $x = -R/3$. Для нахождения наклонных асимптот подставим в данное уравнение $y = kx + b$, получим

$$(3k^2 - 1)x^3 + (6kb + Rk^2 + R)x^2 + (3b^2 + 2Rkb)x + Rb^2 = 0$$

и, приравняв нулю коэффициенты при старших степенях x (т. е. при x^3 и x^2), придем к системе

$$\begin{cases} 3k^2 - 1 = 0, \\ 6kb + Rk^2 + R = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет два решения:

$$k = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad b = \pm\frac{2R}{3\sqrt{3}}.$$

Значит, только прямые

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2R}{3\sqrt{3}} \quad \text{и} \quad y = -\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{2R}{3\sqrt{3}}$$

могут быть наклонными асимптотами данной кривой. Все три найденные прямые действительно являются асимптотами данной кривой. В этом легко убедиться, например, перейдя к полярным координатам, тогда уравнение данной кривой примет вид

$$r = R/\cos 3\varphi.$$

Можно воспользоваться и заданием этой кривой с помощью параметра $t = y/x$. Подставляя $y = tx$ в уравнение кривой, найдем, что

$$x = R\,\frac{1+t^2}{1-3t^2}, \quad y = R\,\frac{t(1+t^2)}{1-3t^2}.$$

Эти функции задают исходную кривую. Рассмотренную кривую называют *трисектрисой Лоншама*. Она может быть использована для деления угла на три равные части. ▲

ЗАДАЧИ

Найти асимптоты графика функции $y = y(x)$ (1–7).

1. 1) $y = \dfrac{1}{1-x^2}$; 2) $y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2}$; 3) $y = \dfrac{x^3}{6x^2 - 8 - x^4}$;
4) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$; 5) $y = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1}$; 6) $y = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}$;

7) $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$; 8) $y=(2-x)^{2/3}-(2+x)^{2/3}$.

2. 1) $y=x+\dfrac{1}{x^2}$; 2) $y=x+\dfrac{x^2}{x^2+1}$; 3) $y=\dfrac{x^2+8x-6}{x}$;
4) $y=\dfrac{x^2}{x+4}$; 5) $y=\dfrac{x^2}{|x|+1}$; 6) $y=\dfrac{2x^4+x^3+1}{x^3}$; 7) $y=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$;
8) $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x+2}$; 9) $y=\dfrac{x^3-3ax^2+a^3}{x^2-3bx+2b^2}$; 10) $y=\dfrac{x^5}{x^4+1}$.

3. 1) $y=\sqrt{x^2-4}$; 2) $y=\sqrt{x^2+3x-1}$; 3) $y=\sqrt[3]{x^3-6x}$;
4) $y=\sqrt[3]{x^3+x^2}$; 5) $y=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$; 6) $y=x\sqrt{\dfrac{x}{x+4}}$;
7) $y=\sqrt{x^4+x^3}-\sqrt{x^4-x^3}$; 8) $y=\sqrt{x^2-1}-x$;
9) $y=x+\sqrt{4x^2+1}$.

4. 1) $y=e^{-1/x}$; 2) $y=0,1^{x^2}$; 3) $y=2^{-1/x^2}$; 4) $y=2^x/x$;
5) $y=x^2e^x$; 6) $y=e^{1/x}-x$; 7) $y=1-xe^{-1/|x|-1/x}$;
8) $y=1+xe^{2/x}$; 9) $y=x2^{1/x^2}$; 10) $y=|e^x-1|$;
11) $y=|x+2|e^{-1/x}$.

5. 1) $y=(1+1/x)^x$; 2) $y=x(1-1/x)^x$; 3) $y=\operatorname{th}x$;
4) $y=\operatorname{cth}x$; 5) $y=\operatorname{th}^2x$; 6) $y=x\operatorname{th}x$; 7) $y=2x+\operatorname{cth}x$;
8) $y=x\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

6. 1) $y=\log_3(4-x^2)$; 2) $y=\log_{0,5}(2x^2-3x+1)$; 3) $y=\lg\sin 2x$;
4) $y=x+\dfrac{\ln x}{x}$; 5) $y=\ln(1+e^x)$; 6) $y=x\lg\left(e+\dfrac{1}{x}\right)$.

7. 1) $y=\dfrac{1}{\cos(x-\pi/6)}$; 2) $y=\operatorname{cosec}2x$; 3) $y=\dfrac{\cos x}{x}$;
4) $y=x+\dfrac{\sin x}{2x}$; 5) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$; 6) $y=2+\cos\dfrac{2}{x}$;
7) $y=\operatorname{arcctg}x$; 8) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$; 9) $y=\arcsin\dfrac{1}{x^2}$;
10) $y=\dfrac{x}{2}+\arccos\dfrac{1}{x+1}$; 11) $y=2x-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$;
12) $y=x\operatorname{arcctg}x$; 13) $y=x\operatorname{arctg}x$; 14) $y=\dfrac{1}{\operatorname{arcctg}(1/x)}$.

8. Найти асимптоты функции, обратной к функции f, если:
1) $f(x)=\dfrac{x(x+2)}{x+1}$, $x>-1$; 2) $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$;
3) $f(x)=1-2\sqrt[3]{x^3+3x}$; 4) $f(x)=\operatorname{th}x$; 5) $f(x)=\operatorname{cth}x$;
6) $f(x)=2x+\operatorname{arctg}x$.

9. 1) Функция f определена на интервале $(a;+\infty)$. Доказать, что для того, чтобы прямая $y=kx+b$ была асимптотой графика функции f при $x \to +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы расстояние $\rho(x)$ от точки $(x; f(x))$ до этой прямой стремилось к нулю при $x \to +\infty$.

2) Доказать, что в случае вертикальной асимптоты необходимость предыдущего утверждения верна, а достаточность неверна.

10. Может ли график функции иметь две разные асимптоты при $x \to +\infty$?

11. Используя метод выделения главной части, построить график функции $y = y(x)$, если:

1) $y = \dfrac{x^{3/2}}{\sqrt{1-x}}$; 2) $y = x\sqrt{4-x^2}$; 3) $y = \sqrt{x^2 - x^4}$;

4) $y = \sqrt[4]{9x^2 - x^4}$; 5) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{1+x^2}}$; 6) $y = \sqrt[4]{\dfrac{x^4}{3+x^4}}$;

7) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$; 8) $y = \sqrt{1 - \dfrac{1}{x}}$; 9) $y = x^{3/2} - 4x^{1/2}$.

12. Функция f определена в окрестности точки x_0 и

$$f(x) = a(x - x_0) + o((x - x_0)), \quad a \neq 0.$$

Доказать, что:

1) $\sqrt{f(x)} = \sqrt{a(x - x_0)} + o(\sqrt{|x - x_0|})$ при $a(x - x_0) \geqslant 0$, т. е. графики функций $\sqrt{f(x)}$ и $\sqrt{a(x - x_0)}$ “сближаются” при $x \to x_0$;

2) если $\alpha > 0$, то

$$(f(x))^\alpha = (a(x - x_0))^\alpha + o(|x - x_0|^\alpha)$$

при $a(x - x_0) > 0$, т. е. графики функций $(f(x))^\alpha$ и $(a(x - x_0))^\alpha$ “сближаются” при $x \to x_0$.

13. 1) Функция f определена в окрестности точки x_0 и

$$f(x) = a(x - x_0) + o((x - x_0)^2), \quad a \neq 0.$$

Доказать, что
$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a(x - x_0)} + o(1),$$

т. е. графики функций $\dfrac{1}{f(x)}$ и $\dfrac{1}{a(x - x_0)}$ “сближаются” при $x \to x_0$.

2) Проверить, что функция $f(x) = x + x^{4/3}$ удовлетворяет условию

$$f(x) = x + o(x) \quad \text{при} \quad x \to 0,$$

но равенство
$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x} + o(1) \quad \text{при} \quad x \to 0$$

неверно.

14. Доказать, что расстояние между точками $(x; f_1(x))$ и $(x; f_2(x))$ графиков функций f_1 и f_2 стремится к нулю, если:

1) $f_1(x) = \sqrt{x^3 + ax^2 + bx + c}$, $f_2(x) = x^{3/2}$, $x \to +\infty$;

2) $f_1(x) = \operatorname{ch} x$, $f_2(x) = e^x/2$, $x \to +\infty$;

3) $f_1(x) = \operatorname{sh} x$, $f_2(x) = -e^{-x}/2$, $x \to -\infty$;

4) $f_1(x) = \operatorname{ctg} x$, $f_2(x) = 1/x$, $x \to 0$;

5) $f_1(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$, $f_2(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2(x-1)}}$, $x \to 1+0$.

15. Выяснить, какие из функций f, g имеют асимптоту при $x \to +\infty$, если:

1) $f(x) = x + \sqrt{x}$, $g(x) = x + \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$;

2) $f(x) = \ln(e^x \cdot x^{1/\sqrt{x}})$, $g(x) = \ln \dfrac{e^x}{x+2}$;

3) $f(x) = \dfrac{(x+1)\ln x + 1}{\ln x + 1}$, $g(x) = \dfrac{(x+1)\ln x + x}{\ln x + 1}$;

4) $f(x) = \sqrt[3]{x^3+x^2}$, $g(x) = \sqrt[4]{x^4+bx}$.

16. Установить, сверху или снизу приближаются точки графика функции $y = y(x)$ к наклонной асимптоте при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$, если:

1) $y = \dfrac{x^2+1}{x}$; 2) $y = \dfrac{x^3+1}{x^2}$; 3) $y = \dfrac{(x+1)^3}{(x+2)^2}$; 4) $y = \dfrac{x^2}{|x+1|}$;

5) $y = \dfrac{\sqrt{x^4+1}}{x}$; 6) $y = \dfrac{x^3+2\sin x}{x^2+1}$.

Найти асимптоты графика функции и построить этот график (17–20).

17. 1) $y = \dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$; 2) $y = \dfrac{x-1}{x^2-2x}$; 3) $y = \dfrac{x^3}{1-x^3}$;

4) $y = \dfrac{(x-3)^2}{4x-4}$; 5) $y = \dfrac{x^3}{1+x^2}$; 6) $y = \sqrt[5]{\dfrac{x}{x-2}}$;

7) $y = \sqrt[3]{1-x^3}$; 8) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{|x^2-1|}}$; 9) $y = 1 - \sqrt{4x^2+1}$;

10) $y = \sqrt{x^2+4x+5} - 2$; 11) $y = \sqrt[3]{x^3-x^2}$.

18. 1) $y = e^{1/(3+x)}$; 2) $y = \ln(4-x^2)$; 3) $y = \dfrac{e^x}{e^x-1}$;

4) $y = \log_{x^2-6x+7} 2$; 5) $y = \ln(1+2e^x)$; 6) $y = \ln\cos x$;

7) $y = \ln \operatorname{arctg} x$; 8) $y = e^{1/\sin x}$.

19. 1) $y = x + \dfrac{\sin x}{x}$; 2) $y = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$; 3) $y = (x+1)^2 \sin \dfrac{2}{x}$;

4) $y = x + \operatorname{arctg} x$; 5) $y = (x+1)\operatorname{arcctg} x$; 6) $y = x \arccos \dfrac{1}{x}$;

7) $y = 3x + \operatorname{arctg} 5x$; 8) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} - x$; 9) $y = x^2 \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$.

20. 1) $y = \dfrac{x - E(x)}{E(x)}$; 2) $y = \dfrac{\sin x}{x^2 - x}$; 3) $y = \dfrac{E(x^3)}{x^2+1}$;

4) $y = \dfrac{\sin x}{E(x/\pi) + 0{,}5}$.

21. Найти асимптоты кривой:

1) $x = \dfrac{3at}{1+t^3}$, $y = \dfrac{3at^2}{1+t^2}$, $a > 0$; 2) $x = \dfrac{t-8}{t^2-4}$, $y = \dfrac{3}{t(t^2-4)}$;

3) $x = \dfrac{at^4}{1-t^3}$, $y = \dfrac{at^3}{1-t^3}$, $a > 0$; 4) $x = \dfrac{t^3}{t^2+1}$, $y = \dfrac{t^3-2t^2}{t^2+1}$;

5) $x = \dfrac{5at^2}{1+t^5}$, $y = \dfrac{5at^3}{1+t^5}$, $a > 0$; 6) $x = t^3 + 3t + 1$, $y = t^3 - 3t + 1$;

7) $x = t^3 - 3\pi$, $y = t^3 - \operatorname{arctg} t$; 8) $x = t + \sin t$, $y = t + \cos t$;

9) $x = te^t$, $y = te^{-t}$; 10) $x = t\ln t$, $y = t\ln(t+1)$;

11) $x = \dfrac{2e^t}{t-1}$, $y = \dfrac{te^t}{t-1}$; 12) $x = t + e^{-t}$, $y = 2t + e^{-t}$.

22. Найти асимптоты кривой и построить эту кривую:

1) $x = \dfrac{1}{t}$, $y = \dfrac{t}{t+1}$; 2) $x = \dfrac{2t}{1-t^2}$, $y = \dfrac{t^2}{1-t^2}$;

3) $x = a\operatorname{ch} t$, $y = b\operatorname{sh} t$; 4) $x = 2\cos t$, $y = \operatorname{tg} 2t$;

5) $x = \dfrac{1}{\sin t}$, $y = \dfrac{1}{\sin 2t}$; 6) $x = \dfrac{t}{t^2+1}$, $y = \dfrac{t^2}{t-1}$;

7) $x = \dfrac{2+t^2}{1+t^2}$, $y = \dfrac{t^3}{1+t^2}$; 8) $x = \dfrac{t^2}{t-1}$, $y = \dfrac{t}{t^2-1}$.

23. Найти асимптоты графика функции, заданной в полярных координатах:

1) $r = \sqrt[4]{\dfrac{24}{\sin 2\varphi(1-\sin 2\varphi)}}$; 2) $r = \sqrt[4]{-\dfrac{4}{\sin 4\varphi}}$; 3) $r = \dfrac{2a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$;

4) $r = \dfrac{4\cos^2\varphi\sin\varphi}{\cos 2\varphi}$ (*скифоида*); 5) $r = \dfrac{3\cos^2\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}$;

6) $r = \dfrac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi(\cos\varphi - 2\sin\varphi)}$.

24. Найти асимптоты графика функции и построить этот график в полярных координатах:

1) $r = \dfrac{\pi}{\varphi - \pi/4}$; 2) $r = \sqrt{\dfrac{\pi}{\varphi}}$ (*жезл*); 3) $\varphi = \dfrac{r}{r-1}$, $r > 1$;

4) $\varphi = \dfrac{r}{r^2+1}$, $r \geqslant 0$; 5) $r = 2\operatorname{tg}\varphi$;

6) $r = \dfrac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$, $p > 0$, $\varepsilon > 1$; 7) $r = -\dfrac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$, $p > 0$, $\varepsilon > 1$;

8) $r = 2|1 - \operatorname{tg}\varphi|$; 9) $r = \dfrac{2}{|\sin 2\varphi|}$; 10) $r = \dfrac{a}{\cos 3\varphi}$, $a > 0$;

11) $r = \dfrac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}}$, $a > 0$; 12) $r = a\dfrac{\operatorname{th}\varphi}{\varphi - 1}$, $a > 0$;

13) $r = 2R\operatorname{tg}\varphi\sin\varphi$, $R > 0$ (*циссоида*);

14) $r = \dfrac{a}{\cos\varphi} \pm a\operatorname{tg}\varphi$, $a > 0$ (*строфоида*); 15) $r = a\dfrac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}$;

16) $r = \sqrt[3]{\dfrac{2\cos\varphi}{\cos^2 2\varphi}}$; 17) $r = \dfrac{\sqrt{2\sin 2\varphi}}{|\cos 2\varphi|}$; 18) $r = \sqrt{-\dfrac{\operatorname{tg} 2\varphi}{2}}$.

25. Найти асимптоты кривой, заданной уравнением:
1) $x^2y^2 + x - 2y = 0$; 2) $x^2y^2 + y = 1$; 3) $(x-1)(x-2)y^2 = x^2$;
4) $x^2y + xy^2 = 1$; 5) $y^3 - x^3 = 6x^2$;
6) $y^2(a - x) = x^2(a + x)$, $a > 0$; 7) $x^3 - 3xy^2 = 2$;
8) $(x^2-1)^3 - x^4y^2 = 0$; 9) $x^4 - y^4 = x^2 - 2y^2$;
10) $xy(x - y) + x + y = 0$; 11) $xy(x + y) + x^2 = 2y^2$;
12) $(x^2 - 1)y^2 = x^2(x^2 - 4)$; 13) $y^3 - x^3 + y - 2x = 0$;
14) $x^4 - y^4 = 4x^2y$; 15) $x^4 - 2x^2y^2 + y^3 = 0$;
16) $\left(x + \dfrac{a}{3}\right)\left(y^2 - \dfrac{x^2}{3}\right) + \dfrac{4}{9}\,ax^2 = 0$, $a > 0$; 17) $x^y = y^x$.

26. Найти асимптоты кривой и построить эту кривую:
1) $x^2/9 - y^2/16 = 1$; 2) $(y + x + 1)^2 = x^2 + 1$;
3) $2x^2 - 5xy + 2y^2 + x + y - 3 = 0$; 4) $4x^2 + 9y^2 = x^2y^2$;
5) $y^3 + x^3 = 8$; 6) $y^2(x^2 + 1) = x^2(x^2 - 1)$;
7) $y^2(4 - x) = x^3$ (*циссоида*); 8) $4x^{4/3} - y^{4/3} = 1$;
9) $x^2y^2 + y^4 = 4x^2$; 10) $xy(x^2 - y^2) + 1 = 0$;
11) $(x^2 - y^2)^2 + 4xy = 0$;
12) $(x^2 + y^2)(y - 1)^2 - y^2 = 0$ (*конхоида*).

ОТВЕТЫ

1. 1) $x = 1$, $x = -1$, $y = 0$; 2) $x = 0$, $x = -1$, $x = -2$, $y = 0$;
3) $x = -2$, $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$, $x = 2$, $y = 0$; 4) $y = 0$; 5) $y = 1$;
6) $x = -2$, $y = 1$; 7) $y = 0$; 8) $y = 0$.

2. 1) $x = 0$, $y = x$; 2) $y = x + 1$; 3) $x = 0$, $y = x + 8$;
4) $x = -4$, $y = x - 4$; 5) $y = -x - 1$, $y = x - 1$; 6) $x = 0$, $y = 2x + 1$;
7) $x = -1$, $y = x - 2$; 8) $x = -2$, $y = x - 4$;
9) $x = b$, $x = 2b$, $y = x - 3(a - b)$; 10) $y = x$.

3. 1) $y = -x$, $y = x$; 2) $y = -x - 3/2$; $y = x + 3/2$; 3) $y = x$;
4) $y = x + 1/3$; 5) $x = 2$, $y = -x - 1$, $y = x + 1$;
6) $x = -4$, $y = x - 2$; 7) $y = x$; 8) $y = -2x$, $y = 0$;
9) $y = -x$, $y = 3x$.

4. 1) $x = 0$, $y = 1$; 2) $y = 0$; 3) $y = 1$; 4) $x = 0$, $y = 0$; 5) $y = 0$;
6) $x = 0$, $y = 1 - x$; 7) $y = 1 - x$, $y = 3 - x$; 8) $x = 0$, $y = 3 + x$;
9) $x = 0$, $y = x$; 10) $y = 1$; 11) $x = 0$, $y = -x - 1$, $y = x + 1$.

5. 1) $y = e$; 2) $y = x/e - 1/(2e)$; 3) $y = -1$, $y = 1$;
4) $x = 0$, $y = -1$, $y = 1$; 5) $y = 1$; 6) $y = -x$, $y = x$;
7) $x = 0$, $y = 2x - 1$, $y = 2x + 1$; 8) $y = -x$, $y = x$.

6. 1) $x = -2$, $x = 2$; 2) $x = 1/2$, $x = 1$; 3) $x = \pi n/2$, $n \in Z$;
4) $x = 0$, $y = x$; 5) $y = 0$; $y = x$; 6) $x = -1/e$, $y = x\lg e + (\lg e)/e$.

7. 1) $x = (3n+2)\pi/3$, $n \in Z$; 2) $x = \pi n/2$, $n \in Z$; 3) $x = 0$, $y = 0$; 4) $y = x$; 5) $y = 1$; 6) $y = 3$; 7) $y = \pi$, $y = 0$; 8) $y = 0$; 9) $y = 0$; 10) $y = (x+\pi)/2$; 11) $y = (4x+\pi)/2$, $y = (4x-\pi)/2$; 12) $y = \pi x + 1$, $y = 1$; 13) $y = -(\pi x + 2)/2$, $y = (\pi x - 2)/2$; 14) $x = 0$, $y = 2/\pi$.

8. 1) $y = -1$, $y = x - 1$; 2) $y = x/2$; 3) $y = (1-x)/2$; 4) $x = -1$, $x = 1$; 5) $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$; 6) $y = (2x+\pi)/4$, $y = (2x-\pi)/4$.

10. Не может.

11. 1) Область определения $0 \leqslant x < 1$; $y \sim x^{3/2}$ при $x \to +0$, $y \sim 1/\sqrt{1-x}$ при $x \to 1-0$; $x = 1$ — асимптота;

2) область определения $|x| \leqslant 2$; начало координат — центр симметрии графика, $y \sim 2x$ при $x \to 0$, $y \sim 4\sqrt{2-x}$ при $x \to 2-0$; максимум $y = y(\sqrt{2}) = 2$;

3) область определения $|x| \leqslant 1$; ось ординат — ось симметрии графика, $y \sim x$ при $x \to +0$, $y \sim \sqrt{2}\sqrt{1-x}$ при $x \to 1-0$; максимум $y = y(1/\sqrt{2}) = 1/2$;

4) область определения $|x| \leqslant 3$; ось ординат — ось симметрии графика, $y \sim \sqrt{3}\,x$ при $x \to +0$, $y \sim \sqrt[4]{54}\,\sqrt[4]{3-x}$ при $x \to 3-0$; максимум $y = y(3/\sqrt{2}) = 3/\sqrt{2}$;

5) ось ординат — ось симметрии графика, $y \sim x^{2/3}$ при $x \to 0$; $y = 1$ — асимптота при $x \to \pm\infty$;

6) ось ординат — ось симметрии графика, $y \sim x/\sqrt[4]{3}$ при $x \to +0$; $y = 1$ — асимптота при $x \to \pm\infty$;

7) область определения $|x| > 1$; начало координат — центр симметрии графика, $y \sim 1/(\sqrt{2}\sqrt{x-1})$ при $x \to 1+0$; $x = 1$, $x = -1$, $y = 1$, $y = -1$ — асимптоты графика;

8) область определения $x < 0$, $x \geqslant 1$, $y \sim 1/\sqrt{-x}$ при $x \to -0$, $y \sim \sqrt{x-1}$ при $x \to 1+0$; $x = 0$ и $y = 1$ — асимптоты;

9) область определения $x \geqslant 0$; $y \sim -4\sqrt{x}$ при $x \to +0$, $y \sim x^{3/2}$ при $x \to +\infty$, $y \sim 2(x-4)$ при $x \to -4$; минимум $y = -16/(3\sqrt{3})$ при $x = 4/3$ (для исследования можно сделать замену $x = (16/3)\cos^2 t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$).

15. 1) $g(x)$; 2) $f(x)$; 3) $g(x)$; 4) $f(x)$ и $g(x)$.

16. 1) Сверху при $x \to +\infty$, снизу при $x \to -\infty$;
2) сверху и при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$;
3) сверху при $x \to +\infty$, снизу при $x \to -\infty$;
4) сверху и при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$;
5) сверху при $x \to +\infty$, снизу при $x \to -\infty$;
6) снизу при $x \to +\infty$, сверху при $x \to -\infty$.

17. 1) Асимптоты $x = \pm 1/2$, $y = 1$; область определения $x \neq \pm 1/2$; ось симметрии — ось ординат; функция возрастает на $[0; 1/2)$ и $(1/2; +\infty)$; $y \sim 4x^2 + 2$ при $x \to 0$, $y \sim 1/(2(1-2x))$ при $x \to 1/2$;

2) асимптоты $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$; область определения $x \neq 0$, $x \neq 2$; $(1; 0)$ — центр симметрии, функция убывает на $[1; 2)$, $(2; +\infty)$; $y \sim 1 - x$ при $x \to 1$, $y \sim 1/(2(x-2))$ при $x \to -2$, $y \sim 1/2x$ при $x \to 0$;

3) асимптоты $x = 1$, $y = -1$; область определения $x \neq 1$; функция возрастает на $(-\infty; 1)$ и $(1; +\infty)$; $y \sim x^2$ при $x \to 0$, $y \sim 1/(3(1-x))$ при $x \to 1$;

4) асимптоты $x = 1$, $y = (x-5)/4$; область определения $x \neq 1$; $(1; -1)$ — центр симметрии; функция убывает на $(1; 3]$, возрастает на $[3; +\infty)$; $y \sim 1/(x-1)$ при $x \to 1$, $y \sim (x-3)^2/8$ при $x \to 3$, $y \sim -2 - (x+1)^2/8$ при $x \to -1$;

5) асимптота $y = x$; $(0; 0)$ — центр симметрии; функция возрастает на R, $y \sim x^3$ при $x \to 0$;

6) асимптоты $x = 2$, $y = 1$; область определения $x \neq 2$; функция убывает на $(-\infty; -2)$ и $(-2; +\infty)$; $y \sim -\sqrt[5]{x/2}$ при $x \to 0$, $y \sim \sqrt[5]{2/(x-2)}$ при $x \to 2$;

7) асимптота $y = -x$; ось симметрии — прямая $y = x$; функция убывает на R; $y \sim 1 - x^3/3$ при $x \to 0$, $y \sim \sqrt[3]{3(1-x)}$ при $x \to -1$;

8) асимптоты $x = 1$, $x = -1$; $y = x$ при $x \to +\infty$ и $y = -x$ при $x \to -\infty$; область определения $x \neq \pm 1$; ось симметрии — ось ординат; функция возрастает на $[0; 1)$ и $[\sqrt{2}; +\infty)$, убывает на $(1; \sqrt{2}]$; $y \sim x^2$ при $x \to 0$, $y \sim 1/\sqrt{2|x-1|}$ при $x \to 1$, $y \sim 2 + 2(x - \sqrt{2})^2$ при $x \to \sqrt{2}$;

9) асимптоты $y = 1 - 2x$ при $x \to +\infty$ и $y = 1 + 2x$ при $x \to -\infty$; ось симметрии — ось ординат; функция убывает на $[0; +\infty)$; $y \sim -2x^2$ при $x \to 0$;

10) асимптоты $y = x$ при $x \to +\infty$ и $y = -x - 4$ при $x \to -\infty$; ось симметрии — прямая $x = -2$; функция возрастает на $[-2; +\infty)$; $y \sim -1 + (x+2)^2/2$ при $x \to -2$;

11) асимптота $y = x - 1/3$; функция возрастает на $(-\infty; 0)$ и $[2/3; +\infty)$, убывает на $[0; 2/3]$; $y \sim -x^{2/3}$ при $x \to 0$, $y \sim \sqrt[3]{x-1}$ при $x \to 1$, $y \sim -\sqrt[3]{4}/3 - 3\sqrt[3]{4}(x - 2/3)^2/4$ при $x \to 2/3$.

18. 1) Асимптоты $x = -3$, $y = 1$; область определения $x \neq -3$; функция убывает на $(-\infty; -3)$ и $(-3; +\infty)$;

2) асимптоты $x = -2$ и $x = 2$; область определения $|x| < 2$; ось симметрии — ось ординат; функция убывает на $[0; 2)$, $y \sim \ln 4 - x^2/4$ при $x \to 0$;

3) асимптоты $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$; функция убывает на $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$;

4) асимптоты $x = 3 - \sqrt{3}$, $x = 3 + \sqrt{3}$, $y = 0$; область определения $|x - 3| > \sqrt{2}$, $x \neq 3 \pm \sqrt{3}$; ось симметрии — прямая $x = 3$; функция убывает на $(3 + \sqrt{2}; 3 + \sqrt{3})$ и на $(3 + \sqrt{3}; +\infty)$;

5) асимптоты $y = 0$ при $x \to -\infty$, $y = x + \ln 2$ при $x \to +\infty$; функция возрастает на R;

6) асимптоты $x = \pi(1 + 2n)/2$, $n \in Z$; функция периодична с пе-

риодом 2π; функция определена на $(-\pi/2+2\pi n; \pi/2+2\pi n)$, $n \in Z$; ось симметрии — ось ординат, функция убывает на $[0; \pi/2)$;

7) асимптоты $x=0$, $y=\ln(\pi/2)$; область определения $x>0$; функция возрастает на $(0; +\infty)$;

8) асимптоты $x = \pi n$, $n \in Z$; функция периодична с периодом 2π; область определения $x \neq \pi n$, $n \in Z$; оси симметрии — прямые $x = \pi(1+2n)/2$, $n \in Z$; функция убывает на $[-\pi/2; 0)$ и $(0, \pi/2]$.

19. Асимптота $y = x$; область определения $x \neq 0$;

2) асимптота $y = x$; область определения $x \neq 0$; центр симметрии — начало координат;

3) асимптота $y = 2x + 4$; область определения $x \neq 0$;

4) асимптоты $y = (2x - \pi)/2$ при $x \to -\infty$, $y = (2x+\pi)/2$ при $x \to +\infty$; функция возрастает на R; $y \sim 2x$ при $x \to 0$;

5) асимптоты $y = \pi x + \pi + 1$ при $x \to -\infty$, $y = 1$ при $x \to +\infty$;

6) асимптота $y = (\pi x - 2)/2$ при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$; область определения $|x| \geqslant 1$;

7) асимптоты $y = (6x - \pi)/2$ при $x \to -\infty$, $y = (6x + \pi)/2$ при $x \to +\infty$; центр симметрии — начало координат, функция возрастает на R;

8) асимптота $y = -x$; область определения $x \neq 0$, центр симметрии — начало координат, функция убывает на $(0; +\infty)$, $y \sim (\pi - 4x)/2$ при $x \to +0$;

9) асимптота $y = x$ при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$; область определения $x \neq 0$, центр симметрии — начало координат; функция возрастает на $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$; $y \sim 0{,}5\pi x^2 \operatorname{sign} x$ при $x \to 0$.

20. 1) Асимптота $y = 0$; область определения $x < 0$, $x \geqslant 1$;

2) асимптоты $y = 0$, $x = 1$; область определения $x \neq 0$, $x \neq 1$; $y \sim 1/(x-1)$ при $x \to 0$;

3) асимптота $y = x$;

4) асимптота $y = 0$; ось симметрии — ось ординат.

21. 1) $y = -x - a$; 2) $x = 2$, $y = 3(2x+3)/40$, $y = -(2x+1)/8$;
3) $y = -a$, $y = x + a/3$; 4) $y = x - 2$; 5) $y = -x + a$;
6) нет асимптот; 7) $y = x + 6\pi$ при $x \to -\infty$, $y = x$ при $x \to +\infty$;
8) нет асимптот; 9) $x = 0$ при $y \to -\infty$, $y = 0$ при $x \to +\infty$;
10) $y = x + 1$ при $x \to +\infty$; 11) $y = (x + 2e)/2$, при $x \to +\infty$;
12) $y = 2x$ при $x \to +\infty$.

22. 1) $x = -1$, $y = 0$; 2) $y = -(x+1)/2$, $y = (x-1)/2$;
3) $y = -bx/a$, $y = bx/a$ при $x \to +\infty$; 4) $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$;
5) $x = -1$, $x = 1$, $y = x/2$, $y = -x/2$; 6) $x = 0$, $x = 1/2$;
7) $x = 1$; 8) $x = -1/2$, $y = 0$, $y = (2x-3)/4$.

23. 1) $\varphi = \pi k/4$ $(k = 0, 1, 2, 4, 5, 6)$;
2) $\varphi = \pi/4$ $(k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$; 3) $r = 2a/\cos\varphi$;
4) $r = -1/(\sqrt{2}\sin(\varphi - \pi/4))$, $r = 1/(\sqrt{2}(\sin(\varphi - 3\pi/4))$;

5) $r = 3/(\sqrt{2}\sin(\varphi + \pi/4))$;

6) $r = -1/(4\sqrt{5}\sin(\varphi - \varphi_0))$, где $\varphi_0 = \operatorname{arctg}(1/2)$.

24. 1) $r = \pi/\sin(\varphi - \pi/4)$; 2) $\varphi = 0$; 3) $r = 1/\sin(\varphi - 1)$;

4) $r = 1/\sin\varphi$; 5) $r = 2/\cos\varphi$, $r = -2/\cos\varphi$;

6) $r = \dfrac{p}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}\sin(\varphi - \arccos(1/\varepsilon))}$, $r = -\dfrac{p}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}\sin(\varphi + \arccos(1/\varepsilon))}$;

7) см. 6); 8) $r = 2/\cos\varphi$, $r = -2/\cos\varphi$;

9) $r = 1/\sin\varphi$, $r = -1/\sin\varphi$, $r = 1/\cos\varphi$, $r = -1/\cos\varphi$;

10) $r = \dfrac{a}{3\sin(\pi/6 - \varphi)}$, $r = \dfrac{a}{3\sin(\varphi + \pi/6)}$, $r = -\dfrac{a}{3\cos\varphi}$;

11) $\varphi = (\pi + 2\pi k)/6$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$; 12) $r = a\operatorname{th} 1/\sin(\varphi - 1)$;

13) $r = 2R/\cos\varphi$; 14) $r = 2a/\cos\varphi$; 15) $r = -a/\cos\varphi$;

16) $\varphi = (\pi + 2\pi n)/4$ $(n = 0, 1, 2, 3)$;

17) $r = \sqrt{2}/\sin(\varphi - \pi/4)$, $r = -\sqrt{2}/\sin(\varphi - \pi/4)$;

18) $\varphi = (\pi + 2\pi n)/4$ $(n = 0, 1, 2, 3)$.

25. 1) $y = 0$, $x = 0$; 2) $y = 0$, $x = 0$;

3) $y = -1$, $y = 1$, $x = 1$, $x = 2$;

4) $y = 0$, $x = 0$, $y = -x$; 5) $y = x + 2$; 6) $x = a$;

7) $y = x/\sqrt{3}$, $y = -x/\sqrt{3}$, $x = 0$; 8) $y = x$, $y = -x$;

9) $y = x$, $y = -x$; 10) $y = 0$, $x = 0$, $y = x$;

11) $y = -1$, $x = 2$, $y = -x - 1$; 12) $x = 1$, $x = -1$, $y = x$, $y = -x$;

13) $y = x$; 14) $y = x - 1$, $y = -x - 1$;

15) $y = x/\sqrt{2} + 1/8$, $y = -x/\sqrt{2} + 1/8$;

16) $y = x/\sqrt{3} - 2a/(3\sqrt{3})$, $y = -x/\sqrt{3} + 2a/(3\sqrt{3})$, $x = -a/3$;

17) $y = 1$, $x = 1$, $y = x$.

26. 1) $y = 4x/3$, $y = -4x/3$; 2) $y = -1$, $y = -2x - 1$;

3) $y = 2x - 1$, $y = x/2 + 1$; 4) $x = 3$, $x = -3$, $y = 2$, $y = -2$;

5) $y = -x$; 6) $y = x$, $y = -x$; 7) $x = 4$; 8) $y = 2\sqrt{2}x$, $y = -2\sqrt{2}x$;

9) $y = 2$, $y = -2$; 10) $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$;

11) $y = -x + 1$, $y = -x - 1$; 12) $y = 1$.

§ 12. Равномерная непрерывность функции

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1) Функцию f называют *равномерно непрерывной на множестве* $X \subset D(f)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $x', x'' \in X$, удовлетворяющих условию $|x' - x''| < \delta$, верно неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon;$$

короче,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x' \in X\ \forall x'' \in X\ \ (|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon).$$

2) *Отрицание* определения равномерной непрерывности функции f на множестве X выглядит так:

$$\exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x' \in X\ \exists x'' \in X\ \ (|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \geqslant \varepsilon).$$

3) Теорема. *Непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна.*

Например, любой многочлен непрерывен на произвольно взятом отрезке и, следовательно, равномерно непрерывен на этом отрезке.

Справедлива более общая

4) Теорема (Г. Кантор). *Функция, непрерывная на компакте, равномерно непрерывна на нем.*

Компакт в R — это ограниченное, замкнутое (см. задачу 94, § 10) множество.

5) Пусть δ — произвольное положительное число. *Модулем непрерывности* функции f на множестве $X \subset D(f)$ называют

$$\omega(\delta; f; X) = \sup_{|x'-x''|\leqslant\delta} (f(x') - f(x'')), \quad x' \in X, \quad x'' \in X,$$

где верхняя грань берется по всем парам точек x' и x'' из X, расстояние между которыми не больше δ.

Этому определению равносильно следующее определение:

$$\omega(\delta; f; X) = \sup_{|x'-x''|\leqslant\delta} |f(x') - f(x'')|, \quad x' \in X, \quad x'' \in X.$$

Модуль непрерывности для краткости обозначают также $\omega(\delta; f)$ или $\omega(\delta)$, если ясно, о каких X и f идет речь.

Модуль непрерывности для каждого δ может быть как числом, так и $+\infty$. В этом смысле модуль непрерывности определен для любого $\delta > 0$.

Теорема. *Для того чтобы функция f была равномерно непрерывна на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого $\delta_0 > 0$ ее модуль непрерывности $\omega(\delta)$ был числом для каждого $\delta \in (0; \delta_0)$ и чтобы*

$$\lim_{\delta\to 0} \omega(\delta) = 0.$$

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Доказать, что функция $y = \sin x$ равномерно непрерывна на R.

▲ Пусть x', x'' — произвольные числа; оценим модуль разности:

$$|\sin x' - \sin x''| = \left|2\sin\frac{x' - x''}{2}\cos\frac{x' + x''}{2}\right| \leqslant |x' - x''|, \qquad (1)$$

так как

$$\left|\sin\frac{x' - x''}{2}\right| \leqslant \frac{|x' - x''|}{2}, \qquad \left|\cos\frac{x' + x''}{2}\right| \leqslant 1.$$

Пусть ε — произвольное положительное число. Возьмем $\delta = \varepsilon$, тогда для любых $x' \in R$, $x'' \in R$ из неравенства $|x' - x''| < \delta$ в силу (1) следует неравенство

$$|\sin x' - \sin x''| < \delta = \varepsilon.$$

Таким образом, функция $y = \sin x$ равномерно непрерывна R. ▲

Пример 2. Доказать, что функция $y = 1/x$: 1) равномерно непрерывна на любом промежутке $[a; +\infty)$, где $a > 0$; 2) не является равномерно непрерывной на любом промежутке $(0; a]$.

▲ 1) Пусть $x', x'' \in [a; +\infty)$, $a > 0$; тогда

$$\left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right| = \frac{|x' - x''|}{x' \cdot x''} \leqslant \frac{1}{a^2}\,|x' - x''|,$$

так как $x' \geqslant a > 0$, $x'' \geqslant a > 0$. Пусть ε — произвольное положительное число; возьмем $\delta = a^2\varepsilon$, тогда для любых x', x'' из $[a; +\infty)$ из неравенства $|x' - x''| < \delta$ следует, что

$$\left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right| < \frac{1}{a^2}\,\delta = \varepsilon.$$

Это и означает равномерную непрерывность функции $1/x$ на промежутке $[a; +\infty)$, $a > 0$.

2) Пусть $x', x'' \in (0; a]$, где $a > 0$. Из равенства

$$\left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right| = \frac{|x' - x''|}{x'x''}$$

видно, что величина $|1/x' - 1/x''|$ будет расти, если при сколь угодно малой, но фиксированной разнице $|x' - x''|$ приближать меньшее из чисел x' или x'' к нулю.

Возьмем $x'' = x'/2$; тогда $|x' - x''| = x'/2$,

$$\left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right| = \frac{1}{x'}.$$

Так как $0 < x' < a$, то

$$\left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right| > a.$$

Чтобы удовлетворить неравенствам $x' < a$ и $|x' - x''| = x'/2 < \delta$, достаточно взять $x' = \delta a/(\delta + a)$. Итак, возьмем $\varepsilon = a$ и для произвольного положительного числа δ возьмем $x' = \delta a/(\delta + a)$, $x'' = \delta a/2(\delta + a)$. Тогда

$$|x' - x''| = \frac{\delta a}{2(\delta + a)} < \delta, \quad \text{а} \quad \left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right| > a = \varepsilon.$$

Следовательно, функция $y = 1/x$ не является равномерно непрерывной на $(0; a]$. ▲

Пример 3. Доказать, что функция $y = \sqrt{x}$ равномерно непрерывна на $[0; +\infty)$.

▲ Функция $y = \sqrt{x}$ непрерывна на $[0; +\infty)$, в том числе и на $[0; 2]$. Значит, по теореме Кантора, она равномерно непрерывна на $[0; 2]$.

Докажем, что данная функция равномерно непрерывна на $[1; +\infty)$. Пусть $x', x'' \in [1; +\infty)$; тогда

$$|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| = \frac{|x' - x''|}{\sqrt{x'} + \sqrt{x''}} \leqslant \frac{1}{2}\,|x' - x''|.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ возьмем $\delta = 2\varepsilon$, тогда для любых $x', x'' \in [1; +\infty)$ из неравенства $|x' - x''| < \delta$ следует неравенство $|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| < 0{,}5\delta = \varepsilon$. Значит, функция $y = \sqrt{x}$ равномерно непрерывна на $[1; +\infty)$.

Докажем, что эта функция равномерно непрерывна на всем промежутке $[0; +\infty)$. Пусть ε — произвольное положительное число. В силу равномерной непрерывности на $[0; 2]$

$$\exists\delta_1 > 0\ \forall x' \in [0; 2]\ \forall x'' \in [0; 2]\ (|x' - x''| < \delta_1 \Rightarrow |\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| < \varepsilon), \quad (2)$$

а в силу равномерной непрерывности на $[1; +\infty)$

$$\exists\delta_2 > 0\ \forall x' \in [1; +\infty]\ \forall x'' \in [1; +\infty]\ (|x' - x''| < \delta_2 \Rightarrow |\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| < \varepsilon). \quad (3)$$

Возьмем за δ наименьшее из трех чисел δ_1, δ_2 и 1, т. е. $\delta = \min\{\delta_1; \delta_2; 1\}$. Тогда для любых $x', x'' \in [0; +\infty)$ из неравенства $|x' - x''| < \delta$ будет, во-первых, следовать (так как $\delta < 1$), что x' и x'' оба принадлежат либо $[0; 2]$, либо $[1; +\infty)$, а во-вторых, отсюда в силу либо (2), либо (3) будет следовать, что $|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| < \varepsilon$. Значит, функция $y = \sqrt{x}$ равномерно непрерывна на $[0; +\infty)$. ▲

Пример 4. Найти на $(0; +\infty)$ модули непрерывности функций и исследовать с их помощью заданные функции на равномерную непрерывность:

1) $y = \sqrt{x}$; 2) $y = \sin(1/x)$; 3) $y = 1/\sqrt{x}$.

▲ 1) Пусть $\delta > 0$, $x', x'' \in (0; +\infty)$, $|x' - x''| \leqslant \delta$. Положим для определенности $x' > x''$, т. е. $x' = x'' + \Delta x$, где $0 < \Delta x \leqslant \delta$. Тогда при любом $x'' > 0$ имеем

$$|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| = \sqrt{x'' + \Delta x} - \sqrt{x''} \leqslant \sqrt{x'' + \delta} - \sqrt{x''},$$

а

$$\sqrt{x'' + \delta} - \sqrt{x''} = \frac{\delta}{\sqrt{x'' + \delta} + \sqrt{x''}} < \frac{\delta}{\sqrt{\delta}} = \sqrt{\delta},$$

так как $\sqrt{x'' + \delta} + \sqrt{x''} > \sqrt{\delta}$. Итак, $|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| \leqslant \sqrt{\delta}$ при $|x' - x''| \leqslant \delta$, значит, и

$$\omega(\delta) = \sup_{|x' - x''| \leqslant \delta} |\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| \leqslant \sqrt{\delta}.$$

В то же время при $x' = x'' + \delta$

$$\lim_{x'' \to 0} (\sqrt{x'' + \delta} - \sqrt{x''}) = \sqrt{\delta},$$

поэтому $\omega(\delta) \geqslant \sqrt{\delta}$. Отсюда и из предыдущего следует, что $\omega(\delta) = \sqrt{\delta}$, $\delta > 0$. Поскольку

$$\lim_{\delta \to +0} \omega(\delta) = \lim_{\delta \to +0} \sqrt{\delta} = 0,$$

функция $y = \sqrt{x}$ равномерно непрерывна на $(0; +\infty)$.

2) Пусть $\delta > 0$, $x', x'' \in (0; +\infty)$, $|x' - x''| \leqslant \delta$. Очевидно,

$$\left| \sin \frac{1}{x'} - \sin \frac{1}{x''} \right| \leqslant 2, \quad x', x'' \in (0; +\infty),$$

значит, и $\omega(\delta) \leqslant 2$.

Рассмотрим точки $x'_n = \dfrac{1}{-(\pi/2) + 2\pi n}$ и $x''_n = \dfrac{1}{(\pi/2) + 2\pi n}$, где $\sin(1/x)$ равен соответственно -1 и 1. Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} x'_n = \lim_{n\to\infty} x''_n = 0,$$

найдется такое $n \in N$, что $0 < x'_n < \delta$, $0 < x''_n < \delta$. Тогда $|x'_n - x''_n| < < \delta$, а

$$\left| \sin \frac{1}{x'_n} - \frac{1}{x''_n} \right| = 2.$$

Значит, $\omega(\delta) = 2$ для любого $\delta > 0$. Отсюда следует, что

$$\lim_{\delta\to+0} \omega(\delta) = 2 \neq 0,$$

и поэтому функция $y = \sin(1/x)$ не является равномерно непрерывной на $(0; +\infty)$.

3) Пусть $\delta > 0$, $x' > 0$, $x'' = x' + \delta$; тогда

$$\frac{1}{\sqrt{x'}} - \frac{1}{\sqrt{x''}} = \frac{1}{\sqrt{x'}} - \frac{1}{\sqrt{x' + \delta}}.$$

Так как

$$\lim_{x'\to+0} \frac{1}{\sqrt{x'}} = +\infty, \quad \lim_{x'\to+0} \frac{1}{\sqrt{x' + \delta}} = \frac{1}{\sqrt{\delta}},$$

то

$$\lim_{x'\to+0} \left(\frac{1}{\sqrt{x'}} - \frac{1}{\sqrt{x' + \delta}} \right) = +\infty.$$

Следовательно,

$$\sup_{x'>0} \left(\frac{1}{\sqrt{x'}} - \frac{1}{\sqrt{x' + \delta}} \right) = +\infty,$$

а поскольку

$$\omega(\delta) \geqslant \sup_{x'>0} \left(\frac{1}{\sqrt{x'}} - \frac{1}{\sqrt{x' + \delta}} \right),$$

то и $\omega(\delta) = +\infty$ для любого $\delta > 0$. Отсюда следует, что функция $1/\sqrt{x}$ не является равномерно непрерывной на $(0; +\infty)$. ▲

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что функция f равномерно непрерывна на множестве X, если:

1) $f(x) = 2x - 1$, $X = R$; 2) $f(x) = x^2$, $X = (-1; 1)$;
3) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $X = [0; 2]$; 4) $f(x) = \sin x^2$, $X = (-3; 3]$;
5) $f(x) = x \sin(1/x)$, $X = (0; \pi]$.

2. Доказать, что функция не является равномерно непрерывной на множестве X:

1) $y = \cos(1/x)$, $X = (0;1)$; 2) $y = \sin x^2$, $x = R$;

3) $y = x^2$, $X = R$; 4) $y = \ln x$, $X = (0;1)$.

Исследовать функцию на равномерную непрерывность на множестве X (3, 4).

3. 1) $y = e^{-\arcsin x}$, $X = [-1;1]$;

2) $y = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x^2+1}+|\sin x|}\right)$, $X = [0;10]$; 3) $y = \sqrt[3]{x}$, $X = R$;

4) $y = e^x$, $X = R$; 5) $y = \operatorname{ctg} x$, $X = (0;1)$;

6) $y = \dfrac{x^6-1}{\sqrt{1-x^4}}$, $X = (-1;1)$; 7) $y = \sin\sqrt{x}$, $X = [1;+\infty)$;

8) $y = \begin{cases} 1-x^2, & -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 1+x, & 0 < x \leqslant 1, \end{cases}$ $X = [-1;1]$;

9) $y = x\sin(1/x)$, $X = (0;+\infty)$.

4. 1) $y = \begin{cases} x+1, & x \leqslant 0, \\ e^{-x}, & x > 0, \end{cases}$ $X = R$;

2) $y = \cos x \cos\dfrac{\pi}{x}$, $X = (0;1)$; 3) $y = \dfrac{\sin x}{x}$, $X = (0;\pi)$;

4) $y = x + \sin x$, $X = R$; 5) $y = x\cos x$, $X = R$;

6) $y = \sin(1/x)$, $X = [0{,}01;+\infty)$;

7) $y = n^2$ при $2n \leqslant x \leqslant 2n+1$, $n \in N$, X — это объединение всех отрезков $[2n;2n+1]$, $n \in N$;

8) $y = \dfrac{|\sin x|}{x}$, $X = (-\pi;0) \cup (0;\pi)$.

5. Функция f удовлетворяет на множестве X следующему условию: существуют числа $k > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что для любых x_1 и x_2 из X верно неравенство

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant k|x_1 - x_2|^\alpha$$

(при $\alpha = 1$ это условие называют *условием Липшица*, при $\alpha < 1$ — *условием Гельдера порядка* α). Доказать, что функция, удовлетворяющая этому условию, равномерно непрерывна на множестве X.

6. Доказать, что если функция равномерно непрерывна на промежутке, то она и непрерывна на этом промежутке.

7. Доказать, что если функция неограниченна на ограниченном интервале, то она не является равномерно непрерывной на этом интервале.

8. Привести пример функции:

1) ограниченной и непрерывной на ограниченном интервале, но не являющейся равномерно непрерывной на нем;

2) непрерывной на замкнутом (см. задачу 94, § 10) множестве и

не являющейся равномерно непрерывной на нем.

9. 1) Доказать, что если функция f равномерно непрерывна на ограниченном множестве, то она ограниченна на этом множестве.

2) Привести пример функции, равномерно непрерывной на множестве и неограниченной на этом множестве.

10. Нарисовать график модуля непрерывности $\omega(\delta)$ функции f на множестве X, если:

1) $f(x) = 1 - 2x,\ X = R$; 2) $f(x) = |x|,\ X = R$;

3) $f(x) = x,\ X = [-2; -1] \cup [1; 2]$;

4) $f(x) = \dfrac{1}{2a}(|x+a| - |x-a|),\ a > 0,\ X = R$;

5) $f(x) = x^3,\ X = [0; 1]$; 6) $f(x) = E(x),\ x \in R$.

11. Найти модуль непрерывности функции f на мнюжестве X и, используя его, установить равномерную непрерывность функции, если:

1) $f(x) = 2x - 1,\ X = R$; 2) $f(x) = x^2,\ X = [-a; a],\ a > 0$;

3) $f(x) = 1/x,\ X = [a; +\infty),\ a > 0$; 4) $f(x) = \cos x,\ X = R$;

5) $f(x) = \ln x,\ X = [1; +\infty)$.

12. Доказать, что для любого $\delta > 0$ $\omega(\delta; f; X) = +\infty$, если:

1) $f(x) = x^3,\ X = R$; 2) $f(x) = 1/x^2,\ X = (0; 1)$.

13. 1) Привести пример функции, модуль непрерывности $\omega(\delta)$ которой удовлетворяет условию $\omega(+0) = \varepsilon > 0$, где ε — данное число.

2) Привести пример неограниченной на промежутке функции, у которой модуль непрерывности $\omega(\delta)$ на этом промежутке удовлетворяет условию $\omega(\delta) < +\infty$ для любого $\delta > 0$.

14. Пусть $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности функции f на множестве X.

1) Доказать, что если $\delta_1 < \delta_2$, то $\omega(\delta_1) \leqslant \omega(\delta_2)$.

2) Доказать, что если f ограниченна на X, то $\omega(\delta) < +\infty$ для любого $\delta > 0$.

3) Доказать, что если множество X ограниченно, а функция f неограниченна на X, то $\omega(\delta) = +\infty$ для любого $\delta > 0$.

4) Доказать, что если $\omega(\delta_0)$ — число для некоторого δ_0, то и для каждого δ, $0 < \delta < \delta_0$, $\omega(\delta)$ — число, т. е. $\omega(\delta)$ — функция на $(0; \delta_0)$, и существует
$$\lim_{\delta \to +0} \omega(\delta) = \omega(+0).$$

5) Доказать, что если X — промежуток, то для любых $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$
$$\omega(\delta_1 + \delta_2) \leqslant \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2).$$

6) Доказать, что если X — промежуток и $\omega(\delta_0) = +\infty$ для некоторого δ_0, то $\omega(\delta) = +\infty$ для любого $\delta > 0$.

7) Привести пример функции, у которой $\omega(\delta) = \delta$ при $0 < \delta < 1$; $\omega(\delta) = +\infty$ при $\delta \geqslant 1$.

15. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует δ такое, что для любых $x_1, x_2 \in D(f)$ из неравенства $|x_1 - x_2| < \delta$ следует неравенство

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \omega(+0) + \varepsilon.$$

16. Доказать, что если функция f равномерно непрерывна на множестве X, а $Y \in X$, то f равномерно непрерывна и на множестве Y.

17. Функция f равномерно непрерывна на отрезках $[a; b]$ и $[b; c]$. Доказать, что она равномерно непрерывна и на отрезке $[a; c]$.

18. Привести пример функции, равномерно непрерывной на отрезке $[a; b]$ и на полуинтервале $(b; c]$ и не являющейся равномерно непрерывной на отрезке $[a; c]$.

19. Доказать, что если функции f и g равномерно непрерывны на множестве X, то для любых $\alpha, \beta \in R$ функция $\alpha f + \beta g$ равномерно непрерывна на X.

20. 1) Доказать, что если функции f и g ограниченны и равномерно непрерывны на $[a; +\infty)$, то и их произведение fg — равномерно непрерывная функция на $[a; +\infty)$.

2) Привести пример равномерно непрерывных на $[a; +\infty)$ функций, произведение которых не является равномерно непрерывной на $[a; +\infty)$ функцией.

3) Доказать, что если функции f и g равномерно непрерывны на ограниченном множестве, то их произведение fg — равномерно непрерывная функция на этом множестве.

21. Доказать, что непрерывная периодическая функция равномерно непрерывна.

22. Функция f равномерно непрерывна на $[a; +\infty)$. Доказать, что выполнено одно из трех условий: либо $f(x)$ ограниченна на $[a; +\infty)$, либо $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, либо $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

23. Функция f непрерывна на $[a; +\infty)$ и существует (конечный) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$. Доказать, что f равномерно непрерывна на $[a; +\infty)$.

24. Доказать, что ограниченная, монотонная, непрерывная на интервале функция равномерно непрерывна на этом интервале (конечном или бесконечном).

25. Доказать, что для равномерной непрерывности функции f на ограниченном интервале $(a; b)$ необходимо и достаточно, чтобы функция была непрерывна на $(a; b)$ и чтобы существовали пределы $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to b-0} f(x)$.

26. Доказать, что для того, чтобы функцию f, определенную и непрерывную на интервале $(a; b)$, можно было продолжить как непрерывную функцию на отрезок $[a; b]$, необходимо и достаточно, чтобы функция f была равномерно непрерывна на интервале $(a; b)$.

27. Доказать, что если функция f равномерно непрерывна на интервале $(a; b)$, то ее можно продолжить как непрерывную функцию на всю числовую прямую R, т. е. существует непрерывная функция $F(x)$, определенная на R, такая, что $F(x) = f(x)$ для любого $x \in (a; b)$.

28. Функция f равномерно непрерывна на R Доказать, что существуют числа $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ такие, что $|f(x)| \leqslant a|x| + b$ для любого $x \in R$.

29. Непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция f называется *кусочно линейной*, если существует разбиение отрезка $[a; b]$ точками $x_0, x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$ такое, что

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

и функция f линейна на каждом отрезке $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (т. е. $f(x) = a_i x + b_i$). Доказать, что всякая непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция F может быть с любой точностью аппроксимирована кусочно линейной функцией, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такая кусочно линейная функция f, что для всех $x \in [a; b]$ верно неравенство

$$|f(x) - F(x)| < \varepsilon.$$

30. Для функции F подобрать кусочно линейную функцию f так, чтобы для всех $x \in [a; b]$ было выполнено неравенство $|F(x) - f(x)| <$ $< 0{,}1$:

1) $F(x) = x^2$, $[a; b] = [-1; 1]$;

2) $F(x) = 1/x$, $[a; b] = [2/3; 2]$.

31. Найти такую кусочно линейную на отрезке $[0; 100]$ функцию f, что для всех $x \in [0; 100]$ верно неравенство

$$|2^{-x} - f(x)| < 1/4.$$

32. Функцию f, непрерывную на R, называют *кусочно линейной на R*, если существуют такие числа a и b, $a < b$, что функция f линейна на промежутках $(-\infty; a]$, $[b; +\infty)$ и кусочно линейна на $[a; b]$. Доказать, что, каково бы ни было число ε, не существует кусочно линейной на R функции f, для которой $|x^2 - f(x)| < 1$ для всех $x \in R$.

33. Доказать, что всякая кусочно линейная функция может быть задана формулой

$$f(x) = a + \sum_{i=0}^{n} a_i |x - x_i|.$$

34. Найти формулу, указанную в предыдущей задаче, для кусочно линейной на отрезке функции f, если:

1) $f(x) = \begin{cases} x+4, & -3 \leqslant x \leqslant -1, \\ 2-x, & -1 < x < 1, \\ x, & 1 \leqslant x \leqslant 3; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ 3-x, & 0 < x \leqslant 1, \\ x+1, & 1 < x \leqslant 3, \\ 4, & 3 \leqslant x \leqslant 5; \end{cases}$

3) $f(0) = 1$, $f(1) = -1$, $f(3) = 2$, $f(4) = -4$, $f(6) = 0$, где $\{0, 1, 3, 4, 6\}$ — разбиение отрезка $[0; 6]$.

35. Доказать, что кусочно линейная на R функция равномерно непрерывна на R.

36. Пусть
$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0, \quad |x| \leqslant 1/\pi, \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

Доказать, что ни при каком a не существует кусочно линейной на $[-1/\pi; 1/\pi]$ функции g такой, что $|f(x) - g(x)| < 1/2$ для любого $x \in [-1/\pi; 1/\pi]$.

37. Сформулировать в позитивной форме утверждение, что функция, определенная на отрезке, не может быть аппроксимирована с любой точностью кусочно линейной функцией.

38. Доказать, что если функция f определена, но разрывна на отрезке $[a; b]$, то ее нельзя аппроксимировать с любой точностью кусочно линейной функцией.

39. Доказать, что если функцию f на промежутке можно аппроксимировать с любой точностью кусочно линейной функцией, то f равномерно непрерывна на этом промежутке.

40. Доказать, что если функцию f на промежутке $[c; +\infty)$ можно аппроксимировать с любой степенью точности кусочно линейной функцией, то f имеет асимптоту при $x \to +\infty$ (функция кусочно линейна на $[c; +\infty)$, если она непрерывна на $[c; +\infty)$, линейна на $[d; +\infty)$ при некотором $d > c$ и кусочно линейна на $[c; d]$).

ОТВЕТЫ

3. Равномерно непрерывными являются функции: 1), 2), 3), 6), 7), 8), 9).

4. Равномерно непрерывными являются функции: 1), 3), 4), 6), 7).

10. 1) $\omega(\delta) = 2\delta$; 2) $\omega(\delta) = \delta$;

3) если $0 < \delta \leqslant 1$ или $2 \leqslant \delta \leqslant 4$, то $\omega(\delta) = \delta$, если $1 < \delta < 2$, то $\omega(\delta) = 1$, если $\delta > 4$, то $\omega(\delta) = 4$;

4) если $0 < \delta \leqslant 2a$, то $\omega(\delta) = \delta/a$, если $2a < \delta$, то $\omega(\delta) = 2$;

5) $\omega(\delta) = \delta(\delta^2 - 3\delta + 3)$; 6) $\omega(\delta) = -E(-\delta)$.

11. 1) $\omega(\delta) = 2\delta$;

2) если $\delta \geqslant a$, то $\omega(\delta) = a^2$, если $0 < \delta < a$, то $\omega(\delta) = \delta(2a - \delta)$;

3) $\omega(\delta) = \delta/a(a + \delta)$;

4) если $\delta \geqslant \pi$, то $\omega(\delta) = 2$, если $\delta < \pi$, то $\omega(\delta) = 2\sin(\delta/2)$;

5) $\omega(\delta) = \ln(1 + \delta)$.

30. 1) Например, $y = -(9{,}1\,x + 3{,}1)/6$, если $-1 \leqslant x \leqslant -0{,}4$; $y = 0{,}09$, если $|x| < 0{,}4$, $y = (9{,}1\,x - 3{,}1)/6$, если $0{,}4 \leqslant x \leqslant 1$;

2) Например, $y = 2{,}45 - 1{,}5\,x$, если $2/3 \leqslant x \leqslant 1$, $y = 1{,}45 - 0{,}5\,x$, если $1 \leqslant x \leqslant 2$.

31. Например, $y = (8 - 3\,x)/8$, если $0 \leqslant x \leqslant 2$; $y = (100 - x)/392$, если $2 \leqslant x \leqslant 100$.

34. 1) $f(x) = -1 + |x + 3| - |x + 1| + |x - 1|$;

2) $f(x) = 3/2 + |x + 2| - (3/2)|x| + |x - 1| - |x - 3|/2$;

3) $f(x) = -11/2 + (7|x - 1|)/4 - (15|x - 3|)/4 + 4|x - 4|$.

ГЛАВА 3

ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

§ 13. Производная. Формулы и правила вычисления производных. Дифференциал функции

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Определение производной. Предел отношения

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

при $\Delta x \to 0$ называется *производной функции* $f(x)$ *в точке* x_0. Этот предел обозначают одним из следующих символов:

$$f'(x_0), \qquad \frac{df(x_0)}{dx}, \qquad f'\big|_{x=x_0}.$$

Таким образом,

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если в каждой точке $x \in (a;b)$ существует

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

т. е. если производная $f'(x)$ существует для всех $x \in (a;b)$, то функция f называется *дифференцируемой на интервале* $(a;b)$. Вычисление производной называют *дифференцированием.*

2. Правила вычисления производных, связанные с арифметическими действиями над функциями. Если функции f_1, $f_2, ..., f_n$ имеют производные в некоторой точке, то функция

$$f=c_1f_1+c_2f_2+...+c_nf_n \quad (c_1, c_2, ..., c_n \text{ — постоянные})$$

также имеет в этой точке производную, причем

$$f'=c_1f_1'+c_2f_2'+...+c_nf_n'.$$

Если функции f_1 и f_2 имеют производные в некоторой точке, то и функция $f=f_1f_2$ имеет производную в этой точке, причем

$$f'=f_1f_2'+f_1'f_2.$$

Если функции f_1 и f_2 имеют производные в некоторой точке и $f_2\neq 0$ в ней, то функция $f=f_1/f_2$ также имеет производную в этой точке, причем

$$f'=\frac{f_2f_1'-f_1f_2'}{f_2^2}.$$

3. Формулы для производных основных элементарных функций.

1) *Степенная функция:*

$$c' = 0, \quad c = \text{const},$$
$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad x > 0, \quad \alpha \in R.$$

Область существования производной функции x^α может быть и шире. Например, если $\alpha \in N$, то

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad x \in R.$$

2) *Показательная функция.* Если $a > 0$ и $a \neq 1$, то

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad x \in R;$$

в частности,

$$(e^x)' = e^x, \quad x \in R.$$

3) *Логарифмическая функция.* Если $a > 0$ и $a \neq 1$, то

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad x > 0; \quad (\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad x \neq 0;$$

в частности,

$$(\ln x)' = 1/x, \quad x > 0; \quad (\ln |x|)' = 1/x, \quad x \neq 0.$$

4) *Тригонометрические функции:*

$$(\sin x)' = \cos x, \quad x \in R; \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad x \in R;$$
$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n \in Z;$$
$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi n, \quad n \in Z.$$

5) *Обратные тригонометрические функции:*

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ |x| < 1; \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ |x| < 1;$$
$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \ x \in R; \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \ x \in R.$$

6) *Гиперболические функции:*

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad x \in R; \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad x \in R;$$
$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad x \in R; \quad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \quad x \neq 0.$$

4. Вычисление производной сложной функции. Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $z = g(y)$ — в точке $y_0 = f(x_0)$, то сложная функция (композиция f и g) $z = \varphi(x) = g(f(x))$ также имеет производную в точке x_0, причем

$$\varphi'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0). \tag{1}$$

Опуская аргумент и используя другое обозначение для производных, формулу (1) можно переписать в виде

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}. \tag{2}$$

Правило вычисления производной сложной функции распространяется на композицию любого конечного числа функций. Например, для сложной функции вида $z(y(x(t)))$ в случае дифференцируемости функций $x(t)$, $y(x)$, $z(y)$ соответственно в точках t_0, $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(x_0)$ в точке t_0 имеет место равенство

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

5. Понятия бесконечной и односторонней производных. Если

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = +\infty,$$

то говорят, что функция f в точке x_0 имеет *бесконечную положительную производную.* Аналогично, функция f в точке x_0 имеет *бесконечную отрицательную производную,* если

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = -\infty.$$

Односторонние пределы

$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

называют соответственно *правой* и *левой производными* функции f в точке x_0 и обозначают $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$.

Для существования производной функции f в точке необходимо и достаточно существования в этой точке правой и левой производных и их равенство.

Функция f называется *дифференцируемой* на отрезке $[a;b]$, если она дифференцируема на интервале $(a;b)$ и существуют конечные односторонние производные $f'_+(a)$ и $f'_-(b)$.

6. Производная обратной функции. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна в некоторой окрестности точки x_0, и пусть в этой точке существует производная $\dfrac{df(x_0)}{dx} \neq 0$; тогда обратная функция $f^{-1}(y)$ в точке $y_0 = f(x_0)$ имеет производную, которая может быть найдена по формуле

$$\frac{df^{-1}(y_0)}{dy} = \frac{1}{\dfrac{df(x_0)}{dx}}.$$

7. Производная функции, заданной параметрически. Пусть функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ определены в некоторой окрестности точки t_0 и параметрически задают в окрестности точки $x = x(t_0)$ функцию $y = f(x)$. Тогда, если $x(t)$ и $y(t)$ имеют в точке t_0 производные и если $\dfrac{dx(t_0)}{dt} \neq 0$, то функция $y = f(x)$ в точке x_0 также имеет производную, которая может быть найдена по формуле

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \frac{\dfrac{dy(t_0)}{dt}}{\dfrac{dx(t_0)}{dt}}.$$

Эту формулу обычно записывают короче:

$$y'_x(x_0) = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}. \qquad (3)$$

8. Производная функции, заданной неявно. Если дифференцируемая на некотором интервале функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $F(x; y) = 0$, то ее производную $y'(x)$ можно найти из уравнения

$$\frac{d}{dx}F(x; y) = 0. \qquad (4)$$

9. Дифференциал функции. Если приращение

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$

функции $y = f(x)$ в точке x_0 представимо в виде

$$\Delta y = A(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \qquad (5)$$

где $A(x_0)$ не зависит от Δx и $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x_0, а произведение $A(x_0)\Delta x$ называется ее *дифференциалом* в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$ или $dy|_{x=x_0}$.

Таким образом, если равенство (5) верно, то

$$dy|_{x=x_0} = A(x_0)\Delta x.$$

Дифференциалом dx независимой переменной x называется ее приращение Δx, т. е. по определению полагают $dx = \Delta x$.

Для дифференцируемости функции в точке (т. е. для существования дифференциала) необходимо и достаточно, чтобы функция имела в этой точке конечную производную.

Дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 выражается через производную $f'(x_0)$ следующим образом:

$$df(x_0) = f'(x_0)dx. \qquad (6)$$

Эта формула позволяет вычислять дифференциалы функций, если известны их производные.

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в каждой точке интервала $(a; b)$, то

$$dy = f'(x)dx \qquad (7)$$

для всех $x \in (a; b)$.

Равенство (5) может быть записано в виде

$$y(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + dy(x_0) + \alpha(\Delta x)\Delta x.$$

Если $dy(x_0) \neq 0$, то для приближенного вычисления значения функции в точке $x_0 + \Delta x$ можно пользоваться формулой

$$y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + dy(x_0), \qquad (8)$$

так как абсолютная и относительная погрешности при таком приближении сколь угодно малы при достаточно малом Δx.

10. Свойства дифференциала.

1°. Для любых дифференцируемых функций u и v справедливы равенства

$$d(\alpha u + \beta v) = \alpha\, du + \beta\, dv,$$

где α и β — произвольные постоянные,

$$d(uv) = u\, dv + v\, du, \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\, du - u\, dv}{v^2}, \quad v \neq 0.$$

2°. Формула для дифференциала $dy = f'(x)dx$ справедлива и в том случае, когда x является не независимой переменной, а функцией. Это свойство называют *свойством инвариантности формы дифференциала.*

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Вычислить производную функции

$$f = \sqrt[3]{x} \arccos x + 2\log_2 x + e^x/x^2, \quad x \in (0;1).$$

▲ $f' = (\sqrt[3]{x} \arccos x)' + 2(\log_2 x)' + \left(\dfrac{e^x}{x^2}\right)' =$

$$= \sqrt[3]{x}(\arccos x)' + \arccos x(\sqrt[3]{x})' + 2\frac{1}{x\ln 2} +$$

$$+ \frac{x^2(e^x)' - e^x(x^2)'}{x^4} = -\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arccos x}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2}{x\ln 2} + \frac{(x-2)e^x}{x^3}. \ ▲$$

Пример 2. Вычислить производную функции $z = \ln\sin x$ в точке $x_0 = \pi/3$.

▲ Функция $z = \varphi(x) = \ln\sin x$ является композицией двух функций: $y = f(x) = \sin x$ и $z = g(y) = \ln y$. Функция $f(x) = \sin x$ в точке $x_0 = \pi/3$ имеет производную, причем $f'(\pi/3) = \cos(\pi/3) = 1/2$. Функция $g(y) = \ln y$ в точке $y_0 = \sin x_0 = \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ также имеет производную, причем $g'(\sqrt{3}/2) = 2/\sqrt{3}$. По формуле (1) получаем

$$\varphi'(\pi/3) = g'(\sqrt{3}/2)f'(\pi/3) = (2/\sqrt{3})(1/2) = 1/\sqrt{3}. \ ▲$$

Пример 3. Вычислить производную функции

$$z = \sqrt{1+x^2}, \quad x \in R.$$

▲ Данная функция является композицией функций $y = 1 + x^2$ и $z = \sqrt{y}$, причем

$$\frac{dy}{dx} = 2x \quad \text{и} \quad \frac{dz}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

По формуле (2) получаем

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{y}}2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}. \ ▲$$

Пример 4. Найти производную функции:

1) $y = 2^{\operatorname{ctg}^2 x}$, $x \neq \pi k$, $k \in Z$; 2) $y = \ln \cos \operatorname{arctg} \operatorname{sh} 2x$, $x \in R$.

▲ 1) Применив дважды правило дифференцирования сложной функции, получим

$$y' = 2^{\operatorname{ctg}^2 x} \ln 2\, (\operatorname{ctg}^2 x)' = 2^{\operatorname{ctg}^2 x} \ln 2 \cdot 2 \operatorname{ctg} x\, (\operatorname{ctg} x)'.$$

Следовательно,

$$y' = -2 \ln 2 \cdot 2^{\operatorname{ctg}^2 x} \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi k, \quad k \in Z.$$

2) Применяем правило дифференцирования сложной функции четыре раза:

$$y' = \frac{1}{\cos \operatorname{arctg} \operatorname{sh} 2x} (\cos \operatorname{arctg} \operatorname{sh} 2x)' = \frac{-\sin \operatorname{arctg} \operatorname{sh} 2x}{\cos \operatorname{arctg} \operatorname{sh} 2x} (\operatorname{arctg} \operatorname{sh} 2x)' =$$

$$= -\operatorname{tg} \operatorname{arctg} \operatorname{sh} 2x \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{sh}^2 2x} (\operatorname{sh} 2x)' = -\frac{\operatorname{sh} 2x}{1 + \operatorname{sh}^2 2x} \operatorname{ch} 2x \cdot (2x)'.$$

Следовательно,

$$y' = -\frac{2 \operatorname{sh} 2x \operatorname{ch} 2x}{1 + \operatorname{sh}^2 2x} = -2 \operatorname{th} 2x, \quad x \in R. \ ▲$$

Пример 5. Найти производную функции

$$y = \ln \sqrt[3]{\frac{e^x}{1 + \cos x}}, \quad x \neq \pi(2n + 1), \quad n \in N.$$

▲ Здесь выгодно предварительно упростить формулу, с помощью которой задана функция:

$$y = \frac{1}{3} \ln e^x - \frac{1}{3} \ln(1 + \cos x) = \frac{x}{3} - \frac{1}{3} \ln(1 + \cos x).$$

Дифференцируя, получаем

$$y' = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \frac{(\cos x)'}{1 + \cos x} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 + \operatorname{tg}(x/2)}{3}. \ ▲$$

Пример 6. Найти производную функции

$$y = \frac{1 + x^2}{\sqrt[3]{x^4} \sin^7 x}, \quad x \neq \pi n, \quad n \in N.$$

▲ Здесь удобно рассмотреть функцию $z = \ln |y|$. По формуле дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx},$$

т. е.

$$\frac{dy}{dx} = y \frac{dz}{dx}. \tag{9}$$

Записав функцию z в виде

$$z = \ln |y| = \ln(1 + x^2) - \frac{4}{3} \ln |x| - 7 \ln |\sin x|,$$

продифференцируем ее:
$$\frac{dz}{dx} = \frac{2x}{1+x^2} - \frac{4}{3x} - 7\,\frac{\cos x}{\sin x}.$$
Подставив найденное выражение для $\dfrac{dz}{dx}$ в формулу (9), получим
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+x^2}{\sqrt[3]{x^4}\sin^7 x}\left(\frac{2x}{1+x^2} - \frac{4}{3x} - 7\,\frac{\cos x}{\sin x}\right). \ \blacktriangle$$

Пример 7. Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — дифференцируемые функции, причем $u(x) > 0$. Доказать, что
$$(u^v)' = u^v \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1}u'. \tag{10}$$

▲ Пусть $y = u^v$; тогда $\ln y = v \ln u$, $y'/y = v' \ln u + v\,u'/u$, откуда получаем формулу (10).

Согласно формуле (10) производная функции u^v равна сумме двух слагаемых: первое слагаемое — производная показательной функции $a^{v(x)}$ ($a = \text{const}$), второе слагаемое — производная степенной функции $(u(x))^b$ ($b = \text{const}$). Формулу (10) можно записать в виде
$$(u^v)' = u^v(\ln u \cdot v' + \frac{v}{u} \cdot u'). \ \blacktriangle \tag{11}$$

Пример 8. Найти производную функции:

1) $y = (2+\cos x)^x$, $x \in R$; 2) $y = x^{2^x}$, $x > 0$.

▲ 1) По формуле (11) находим
$$y' = (2+\cos x)^x\left(\ln(2+\cos x) - \frac{x \sin x}{2+\cos x}\right), \quad x \in R.$$

2) $y' = 2^{2^x}(\ln x \cdot 2^x \ln 2 + 2^x/x) = 2^x x^{2^x}(\ln 2 \cdot \ln x + 1/x)$. ▲

Пример 9. Доказать, что функции:

1) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; 2) $g(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$

в точке $x = 0$ имеют бесконечную положительную производную.

▲ 1) $f'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}} = +\infty$;

2) $g'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{g(\Delta x) - g(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1/\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\Delta x^2} = +\infty$. ▲

Пример 10. Найти $f'_+(0)$ и $f'_-(0)$, если:

1) $f(x) = |\sin 2x|$; 2) $f(x) = \begin{cases} e^{1/x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$

▲ 1) $f'_+(0) = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{|\sin 2\Delta x|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{\sin 2\Delta x}{\Delta x} = 2,$
$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|\sin 2\Delta x|}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to -0} \frac{\sin 2\Delta x}{\Delta x} = -2;$$

2) $f'_+(0) = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{e^{1/\Delta x}}{\Delta x} = +\infty$, $f'_-(0) = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \dfrac{e^{1/\Delta x}}{\Delta x} = 0$. ▲

Пример 11. Найти производную функции, обратной к функции
$$y = x + x^3, \quad x \in R.$$

▲ Данная функция всюду непрерывна и строго монотонна, ее производная $\dfrac{dy}{dx} = 1 + 3x^2$ не обращается в нуль ни в одной точке, поэтому
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1+3x^2}. \ ▲$$

Пример 12. Найти $y'(x)$, если $x = \operatorname{sh} y$.

▲ Функция $x = \operatorname{sh} y$ непрерывна и строго монотонна при всех $y \in R$. Производная $x' = \operatorname{ch} y$ не обращается в нуль ни в одной точке. Следовательно,
$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\operatorname{ch} y} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Функция $y(x)$, т. е. функция, обратная для гиперболического синуса, обозначается $\operatorname{arsh} x$. Таким образом,
$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in R. \ ▲$$

Пример 13. Функция $y = f(x)$ задана параметрически формулами $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$, $t \in (0;\pi/2)$. Найти y'_x.

▲ Функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы при всех t, и $x'_t = -3a\cos^2 t \sin t \neq 0$ на интервале $(0;\pi/2)$. По формуле (3) находим
$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3b\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{tg} t, \quad t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right). \ ▲$$

Пример 14. Функция $y = f(x)$ задана уравнением
$$r = a(1+\cos\varphi), \quad \varphi \in (0; 2\pi/3),$$
где r и φ — полярные координаты точки (x, y). Найти y'_x.

▲ Перейдем к параметрическому заданию функции
$$x = r\cos\varphi = a(1+\cos\varphi)\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi = a(1+\cos\varphi)\sin\varphi$$
и воспользуемся формулой (3):
$$y'_x = \frac{y'_\varphi}{x'_\varphi} = -\frac{a(1+\cos\varphi)\cos\varphi - a\sin^2\varphi}{a(1+\cos\varphi)\sin\varphi + a\cos\varphi\sin\varphi} = -\frac{\cos\varphi + \cos 2\varphi}{\sin\varphi + \sin 2\varphi} =$$
$$= -\frac{\cos(3\varphi/2)\cos(\varphi/2)}{\sin(3\varphi/2)\cos(\varphi/2)} = -\operatorname{ctg}\frac{3\varphi}{2}, \quad \varphi \in \left(0; \frac{2\pi}{3}\right). \ ▲$$

Пример 15. Пусть $y = y(x)$, $x \in (-a; a)$, — положительная функция, заданная неявно уравнением $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Найти $y'(x)$.

▲ Уравнение (4) в данном случае имеет вид
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = 0.$$

Дифференцируя, получим

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \cdot y' = 0.$$

Из этого уравнения находим

$$y'(x) = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}, \quad x \in (-a; a), \quad y > 0. \ \blacktriangle$$

Пример 16. Найти дифференциал функции $y = x - 3x^2$ в точке $x = 2$.

▲ 1-й способ. Найдем приращение функции в точке $x = 2$:

$$\Delta y = y(2 + \Delta x) - y(2) =$$
$$= 2 + \Delta x - 3(2 + \Delta x)^2 - 2 + 12 = -11\Delta x - 3\Delta x^2.$$

Приращение функции представлено в виде (5), в данном случае оказалось, что $A = -11$ и $\alpha(\Delta x) = -3\Delta x \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Следовательно,

$$dy|_{x=2} = -11dx.$$

2-й способ. Вычислим производную функции в точке $x = 2$:

$$y'(x) = 1 - 6x, \quad y'(2) = -11.$$

По формуле (6) находим

$$dy(2) = y'(2)dx = -11dx. \ \blacktriangle$$

Пример 17. Найти дифференциал функции $y = \operatorname{ctg} 3x$.

▲ По формуле (7) находим

$$dy = y'(x)dx = -\frac{3}{\sin^2 3x}dx, \quad x \neq \frac{\pi k}{3}, \quad k \in Z. \ \blacktriangle$$

Пример 18. Найти приближенное значение функции $y = \sqrt{x}$ в точке $x = 3{,}98$.

▲ Положив в формуле (8) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$, $\Delta x = -0{,}02$, получим

$$\sqrt{3{,}98} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(-0{,}002), \quad \sqrt{3{,}98} \approx 1{,}995. \ \blacktriangle$$

Пример 19. Вычислить дифференциал функции

$$y = x\sqrt{64 - x^2} + 64\arcsin(x/8).$$

▲ Используя свойства дифференциала, получаем

$$dy = d(x\sqrt{64 - x^2}) + d(64\arcsin(x/8)) =$$
$$= x\,d\sqrt{64 - x^2} + \sqrt{64 - x^2}\,dx + 64d\arcsin(x/8) =$$
$$= x\,\frac{d(64 - x^2)}{2\sqrt{64 - x^2}} + \sqrt{64 - x^2}\,dx + 64\,\frac{d(x/8)}{\sqrt{1 - x^2/64}} =$$
$$= \frac{-x^2dx}{\sqrt{64 - x^2}} + \sqrt{64 - x^2}\,dx + 64\,\frac{dx}{\sqrt{64 - x^2}} = 2\sqrt{64 - x^2}\,dx, \quad |x| < 8. \ \blacktriangle$$

Пример 20. Пусть u и v — дифференцируемые функции и их дифференциалы du и dv известны. Найти dy, если

$$y = \operatorname{arctg}(u/v) + \ln\sqrt{u^2+v^2}.$$

▲ $$dy = d\operatorname{arctg}\frac{u}{v} + \frac{1}{2}d\ln(u^2+v^2) = \frac{d(u/v)}{1+u^2/v^2} + \frac{1}{2}\frac{d(u^2+v^2)}{u^2+v^2} =$$

$$= \frac{v\,du - u\,dv}{u^2+v^2} + \frac{u\,du + v\,dv}{u^2+v^2} = \frac{(v+u)du + (v-u)dv}{u^2+v^2}, \quad u^2+v^2>0.$$ ▲

ЗАДАЧИ

1. Найти $f'(x_0)$, если:
1) $f = x^2$, $x_0 = 0{,}1$; 2) $f = 2\sin 3x$, $x_0 = \pi/6$;
3) $f = 1 + \ln 2x$, $x_0 = 1$; 4) $f = x + \operatorname{ctg} x$, $x_0 = \pi/4$.

2. Найти $f'(x)$ и указать область существования производной, если:
1) $f = x^3 + 2x$; 2) $f = 1/x$; 3) $f = \sqrt{x}$; 4) $f = x\sqrt[3]{x}$;
5) $f = 1/(1+x^2)$; 6) $f = 2^{x+1}$; 7) $f = \ln x$; 8) $f = \sin 2x$;
9) $f = \operatorname{ctg} x + 2$; 10) $f = \arcsin x$; 11) $f = \arccos 3x$;
12) $f = 7\operatorname{arctg}(x+1)$.

Вычислить производную функции $y = f(x)$. Указать область существования производной (3–38).

3. $y = x^3 + x^2 + x + 1$. **4.** $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

5. $y = 7x^{13} + 13x^{-7}$. **6.** $y = \dfrac{\ln 3}{x} + e^2$. **7.** $y = \dfrac{a}{x^2} + \dfrac{b}{x^3} + \dfrac{c}{x^4}$.

8. $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$. **9.** $y = \dfrac{3}{5}x^{5/3} + x^{-2} + \dfrac{2}{x}$.

10. $y = x^3\sqrt[3]{x^2} + x^7\sqrt[3]{x}$. **11.** $y = x^{\sqrt{5}} - x^{-\sqrt{5}}$.

12. $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0$. **13.** $y = \dfrac{x^2-5x+6}{x^2+x+7}$. **14.** $y = \dfrac{\sqrt{x}}{2+\sqrt[3]{x^2}}$.

15. $y = 5x\cos x$. **16.** $y = (x+1)\operatorname{tg} x$. **17.** $y = x^2\operatorname{ctg} x + 2$.

18. $y = \begin{cases} \sin x/x, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$ **19.** $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\operatorname{tg} x}$. **20.** $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}$.

21. $y = \operatorname{arctg} x + x + \operatorname{arcctg} x$. **22.** $y = x\arcsin x$.

23. $y = \operatorname{arctg}^2 x$. **24.** $y = \dfrac{\arccos x}{\arcsin x}$. **25.** $y = \ln x^3 - \dfrac{9}{x} - \dfrac{27}{2x^2}$.

26. $y = (\sqrt{2})^x + (\sqrt{5})^{-x}$. **27.** $y = (x^2 - 7x + 8)e^x$.

28. $y = 2^x \ln|x|$. **29.** $y = e^x \log_2 x$. **30.** $y = \log_2 x \cdot \ln x \cdot \log_3 x$.

31. $y = \log_x 2$. **32.** $y = \log_x 2^x$. **33.** $y = \dfrac{\arcsin x}{e^x}$.

34. $y = e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)$. **35.** $y = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x$.

36. $y = \operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x$. **37.** $y = \dfrac{\operatorname{th} x}{\operatorname{ch}^2 x}$. **38.** $y = \dfrac{\ln x}{\operatorname{cth} x}$.

Вычислить производную функции $y = f(x)$ в точке x_0 (39–51).

39. $y = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$, $x_0 = -3$.

40. $y = (x-a)(x-b)(x-c)$, $x_0 = a$. **41.** $y = \dfrac{x-a}{x-b}$, $a \neq b$, $x_0 = a$.

42. $y = (1 + ax^b)(1 + bx^a)$, $x_0 = 1$.

43. $y = x(x-1)(x-2)\ldots(x-1984)(x-1985)$, $x_0 = 0$, $x_0 = 1985$.

44. $y = (2 - x^2)\cos x + 2x\sin x$, $x_0 = 0$.

45. $y = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

46. $y = (ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x$, $x_0 = 0$.

47. $y = \operatorname{arctg} x \cdot \arccos x$, $x_0 = 0$. **48.** $y = \log_2 x \ln 2x$, $x_0 = 1$.

49. $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$, $x_0 = e$. **50.** $y = x^5 e^{-x}$, $x_0 = 5$.

51. $y = x \operatorname{sh} 2x$, $x_0 = 1$.

Найти производную функции (52–152).

52. $y = (3x-7)^{10}$.

53. $y = \dfrac{1}{99}(1-x)^{-99} - \dfrac{1}{49}(1-x)^{-98} + \dfrac{1}{97}(1-x)^{-97}$.

54. $y = (a+bx)^\alpha$. **55.** $y = (0{,}4\cos(8x+5) - 0{,}6\sin 0{,}8x)^2$.

56. $y = \dfrac{\cos 3}{2}x - \dfrac{1}{4}\sin(2x+3)$. **57.** $y = (a\cos x + b\sin x)^\alpha$.

58. $y = Ae^{-k^2 x}\sin(\omega x + \alpha)$. **59.** $y = \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$.

60. $y = \sqrt{2x^2 + \sqrt{x^2+1}}$. **61.** $y = \sqrt[13]{9 + 7\sqrt[5]{2x}}$. **62.** $y = \sqrt[3]{\dfrac{1-x^3}{1+x^3}}$.

63. $y = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$. **64.** $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}(x^2 + \sqrt{1+x^4})}$.

65. $y = \dfrac{x^2+4}{x\sqrt{4 + ((x^2-4)/(2x))^2}}$. **66.** $y = \dfrac{\sqrt{x^3} + \sqrt{xa^2} - \sqrt{x^2 a} - \sqrt{a^3}}{\sqrt[4]{a^5} + \sqrt[4]{ax^4} - \sqrt[4]{a^4 x} - \sqrt[4]{x^5}}$.

67. $y = \cos(1/x)$. **68.** $y = \operatorname{ctg} x^2 - (1/3)\operatorname{tg}^3 2x$.

69. $y = \dfrac{1 - \cos(8x - 3\pi)}{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 2x}$. **70.** $y = e^{-x^2/2}$. **71.** $y = 2^{\sin 2x}$.

72. $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{3}$. **73.** $y = \dfrac{\sin^2 x}{1 + \operatorname{ctg} x} + \dfrac{\cos^2 x}{1 + \operatorname{tg} x}$.

74. $y = \sqrt{1 + \operatorname{tg}(x^2 + x^{-2})}$. **75.** $y = \dfrac{1 + x^2 \operatorname{arctg} x^2}{\sqrt{1+x^4}}$.

76. $y = \ln\ln(x/2)$. **77.** $y = \log_2^3(2x+3)^2$. **78.** $y = \ln|\sin x|$.

79. $y = \sin\ln|x|$. **80.** $y = \cos\dfrac{1}{\log_2 x}$. **81.** $y = 3^{\operatorname{arctg}(2x+\pi)}$.

82. $y = \operatorname{arcctg} 2^x$. **83.** $y = 10^{x/\log_3 x}$. **84.** $y = \dfrac{2}{\sqrt{31}} \operatorname{arctg}\dfrac{4x-5}{\sqrt{31}}$.

85. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{2}x}$. **86.** $y = \sqrt{\operatorname{ch} x}$. **87.** $y = \operatorname{arctg}\operatorname{th} x$.

88. $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{th} x + \dfrac{\sqrt{2}}{8}\ln\dfrac{1+\sqrt{2}\operatorname{th} x}{1-\sqrt{2}\operatorname{th} x}$. **89.** $y = \sin\cos^2 x \cdot \cos\sin^2 x$.

90. $y = \operatorname{tg}^2 x/(\operatorname{tg} x^2)$. **91.** $y = \ln\operatorname{tg}(x/2) - \cos x \cdot \ln\operatorname{tg} x$.

92. $y = \dfrac{x}{2}(\sin\ln x + \cos\ln x)$. **93.** $y = \cos^n x \cdot \cos nx$.

94. $y = \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) - \dfrac{1}{4}\ln(1+x^4) - \dfrac{1}{2(1+x^2)}$.

95. $y = \ln(x^2 + \sqrt{x^4+1})$.

96. $y = 2x\ln(2x + \sqrt{4x^2+1}) - \sqrt{4x^2+1}$. **97.** $y = \sin(\arcsin x)$.

98. $y = \cos(2\arccos x)$. **99.** $y = \cos(3\arccos x)$.

100. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\sin x\right)$. **101.** $y = \arccos\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$.

102. $y = \ln\left(\dfrac{x+3}{x+2}\right)^2 - \dfrac{2x+5}{(x+2)(x+3)}$.

103. $y = \dfrac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left(\dfrac{\sqrt{2}+x\sqrt{3}}{\sqrt{2}-x\sqrt{3}}\right)^2$.

104. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\dfrac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right)^2 - \dfrac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{3}}$. **105.** $y = 2^{\sin x^2}$.

106. $y = 3^{\cos^2 x}$. **107.** $y = e^{\sqrt{(1-x)/(1+x)}}$. **108.** $y = \operatorname{arctg}\operatorname{tg}^2 x$.

109. $y = \log_2\log_3\log_5 x$. **110.** $y = \ln\ln\ln x^2$.

111. $y = \sqrt{x^2+1} - \ln(1/x + \sqrt{1+1/x^2})$.

112. $y = \dfrac{2}{7}\ln(\sqrt{x^7} + \sqrt{1+x^7})$. **113.** $y = \operatorname{tg}^2 x + \ln\cos^2 x$.

114. $y = \ln(\sqrt{2}\cos x + \sqrt{\cos 2x})$. **115** $y = e^{\sqrt{\ln(x^2+x+1)}}$.

116. $y = \ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$. **117.** $y = \dfrac{x}{\sqrt{e^{2x}-1}} - \operatorname{arctg}\sqrt{e^{2x}-1}$.

118. $y = \dfrac{\operatorname{ch} x^2}{\operatorname{sh}^2 x^2} - \ln\operatorname{cth}\dfrac{x^2}{2}$. **119.** $y = \ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\sin x}{2}\right)$.

120. $y = \arccos(\sin x^4 - \cos x^4)$.

121. $y = \dfrac{1}{\sin^4 x + 1} + \ln\dfrac{\sin^4 x}{\sin^4 x + 1}$. **122.** $y = \ln\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}\cos x}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\cos x}$.

123. $y = \dfrac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\dfrac{b + a\cos x + \sqrt{b^2-a^2}\sin x}{a + b\cos x}$.

124. $y = x/2 + \sqrt{3}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(x/2))/\sqrt{3}$.

125. $y = \operatorname{arctg} e^{x/2} - \ln\sqrt{e^x/(e^x+1)}$.

126. $y = \arcsin \dfrac{\sin\alpha \cdot \sin x}{1-\cos\alpha\cdot\cos x}$.

127. $y = \dfrac{1}{\sin\alpha} \ln\dfrac{1+x}{1-x} - \operatorname{ctg}\alpha \cdot \ln\dfrac{1+x\cos\alpha}{1-x\cos\alpha}$.

128. $y = \ln\sqrt{x^2-2x\cos\alpha+1} + \operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

129. $y = x^2\sqrt{a^2+x^4} + a^2\ln(x^2+\sqrt{a^2+x^4})$.

130. $y = \operatorname{th} x + \dfrac{\sqrt{2}}{4}\ln\dfrac{1+\sqrt{2}\operatorname{th}x}{1-\sqrt{2}\operatorname{th}x}$.

131. $y = \ln\dfrac{x^2+a}{\sqrt{x^4+b^2}} + \dfrac{a}{b}\operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{b}$.

132. $y = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\dfrac{x}{|a|}$.

133. $y = x + \operatorname{ctg}x\cdot\ln(1+\sin x) - \ln\operatorname{tg}(x/2)$.

134. $y = x - \ln\sqrt{1+e^{2x}} + e^{-x}\operatorname{arcctg}e^x$.

135. $y = \ln\dfrac{1-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x^4}}} + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\dfrac{1+2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{3}}$.

136. $y = \ln\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^4+1}-\sqrt{2}x}{\sqrt{x^4+1}+\sqrt{2}x}} - \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^4+1}}$.

137. $y = \ln\dfrac{2x^2+4x+4}{2x^2+2x+1} + 4\operatorname{arctg}(x+1) - \operatorname{arctg}(2x+1)$.

138. $y = \dfrac{5x+2}{x^2+x+1} + \ln\sqrt[3]{\dfrac{(x-1)^2}{x^2+x+1}} + \dfrac{8}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

139. $y = \dfrac{3-\sin x}{2}\sqrt{\cos^2 x - 2\sin x} + 2\arcsin\dfrac{1+\sin x}{\sqrt{2}}$.

140. $y = e^x\arcsin\sqrt{e^x/(e^x+1)} + \operatorname{arctg}\sqrt{e^x} - \sqrt{e^x}$. **141.** $y = x^x$.

142. $y = x^{7/\ln x}$. **143.** $y = \log_x 7$.

144. $y = \log_2 x\cdot\log_x e + \log_2 x\cdot\ln 2$.

145. $y = x^{2/\ln x} - 2x^{\log_x e}e^{1+\ln x} + e^{1+2/\log_x e}$. **146.** $y = x^{x^2}$.

147. $y = x^{e^x}$. **148.** $y = 2^{x^x}$. **149.** $y = x^{x^x}$. **150.** $y = |\sin x|^{\cos x}$.

151. $y = (\arcsin\sin^2 x)^{\operatorname{arctg} x}$. **152.** $y = (\operatorname{ch} x)^{e^x}$.

Вычислить производную функции в указанных точках (153–166).

153. $y = \dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$, $x=0$, $x=1$.

154. $y = (1+x)\sqrt{2+x^2}\,\sqrt[3]{3+x^3}$, $x=0$.

155. $y = 2^{\operatorname{tg}(1/x)}$, $x = 1/\pi$.

156. $y = 3\cos 2x - \sqrt{1-\sin 2x}(\sin x+\cos x)$, $x=\pi/6$.

157. $y = \log_{1/2}(x-1/2)^2 + \log_2\sqrt{4x^2-4x+1}$, $x=0$.

158. $y = \sqrt{\ln x}(\ln x - \log_{ex} x)\sqrt{\ln x + \log_x e + 2}$, $x = e$.

159. $y = \ln(1+\sin^2 x) - 2\sin x \cdot \operatorname{arctg}\sin x$, $x = \pi/2$.

160. $y = \arcsin(2x/(1+x^2))$, $x=0$, $x=2$.

161. $y = \arcsin((1-x^2)/(1+x^2))$, $x=-1$, $x=1$, $x=0$.

162. $y = \ln\dfrac{x^4-x^2+1}{x^4+2x^2+1} + 2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{1-2x^2}$, $x=1$.

163. $y = \sqrt[3]{\operatorname{arctg}\sqrt[5]{\cos\ln^3 x}}$, $x=1$. **164.** $y = (\operatorname{ch} x)^{\operatorname{sh} x}$, $x=0$.

165. $y = (\sqrt{1+3^x})^{\ln x^2}$, $x=1$. **166.** $y = ((\sin x)/x)^x$, $x = \pi/2$.

167. Решить уравнение $y'(x) = 0$, если:

1) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 12$; 2) $y = \dfrac{x^2+x-6}{x^2-10x+25}$;

3) $y = \dfrac{1}{1+\sin^2 x}$; 4) $y = x(x-1)^2(x-2)^3$;

5) $y = e^{-|x-1|}/(1+x)$; 6) $y = \max(7x-6x^2, |x|^3)$.

168. Пусть $f(x)$, $x \in R$,— всюду дифференцируемая функция. Найти $y'(x)$, если:

1) $y = \sqrt{f(x)}$, $f(x) > 0$; 2) $y = \ln|f(x)|$, $f(x) \neq 0$; 3) $y = f(x^3)$;
4) $y = f(\arcsin f(x))$, $|f(x)| < 1$.

169. Пусть $f(x)$, $x \in R$, и $g(x)$, $x \in R$, — всюду дифференцируемые функции. Найти $y'(x)$, если:

1) $y = \sqrt[n]{f^2(x) + g^2(x)}$, $f^2(x) + g^2(x) > 0$;

2) $y = \ln|f(x)/g(x)|$, $f(x)g(x) \neq 0$; 3) $y = f(\sin^2 x) + g(\cos^2 x)$;

4) $y = (f(x))^{g(x)}$, $f(x) > 0$.

170. Пусть функции f_{ij} $(1 \leqslant i,\ j \leqslant n)$ дифференцируемы в некоторой точке. Доказать, что в этой точке справедливо равенство

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{i1} & f_{i2} & \ldots & f_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n1} & f_{n2} & \ldots & f_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f'_{i1} & f'_{i2} & \ldots & f'_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n1} & f_{n2} & \ldots & f_{nn} \end{vmatrix}.$$

171. С помощью формулы, приведенной в предыдущей задаче, найти $\Delta'(x)$, если:

1) $\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & 1 & 2 \\ x & x & 1 \end{vmatrix}$; 2) $\Delta(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 3 \\ 4 & x-5 & 6 \\ 7 & 8 & x-9 \end{vmatrix}$;

3) $\Delta(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 2 \\ x^3 & 3x^2 & 6x \end{vmatrix}.$

172. Доказать или опровергнуть следующие утверждения:

1) если функция имеет производную в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке;

2) если функция непрерывна в некоторой точке, то она имеет производную в этой точке.

173. При каких значениях α функция

$$y = \begin{cases} |x|^\alpha \sin(1/x), & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0, \end{cases}$$

в точке $x = 0$: 1) непрерывна; 2) имеет производную; 3) имеет непрерывную производную?

174. При каких значениях α и β ($\beta > 0$) функция

$$y = \begin{cases} |x|^\alpha \sin(1/|x|^\beta), & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0, \end{cases}$$

в точке $x = 0$: 1) непрерывна; 2) имеет производную; 3) имеет непрерывную производную?

175. Построить пример функции, имеющей производную всюду, за исключением точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

176. Определить значения α и β, при которых:

а) всюду непрерывны; б) всюду дифференцируемы следующие функции:

1) $y = \begin{cases} \alpha x + \beta, & \text{если} \quad x \leqslant 1, \\ x^2, & \text{если} \quad x > 1; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} \alpha + \beta x^2, & \text{если} \quad |x| \leqslant 1, \\ 1/|x|, & \text{если} \quad |x| > 1; \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} \alpha x^3 + \beta x, & |x| \leqslant 2, \\ (1/\pi)\arcsin(1/x), & |x| > 2; \end{cases}$

4) $y = \begin{cases} 2x - 2, & \text{если} \quad x \leqslant 1, \\ \alpha(x-1)(x-2)(x-\beta), & \text{если} \quad 1 < x < 2, \\ x/2 - 1, & \text{если} \quad x \geqslant 2. \end{cases}$

177. Определить значения α и β, при которых функции всюду дифференцируемы:

1) $y = \begin{cases} (x+\alpha)e^{-\beta x}, & \text{если} \quad x < 0, \\ \alpha x^2 + \beta x + 1, & \text{если} \quad x \geqslant 0; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} \alpha x + \beta, & \text{если} \quad x < 0, \\ \alpha \cos x + \beta \sin x, & \text{если} \quad x \geqslant 0. \end{cases}$

178. Определить значения α и β, при которых функция

$$y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \alpha x, & \text{если} \quad |x| \leqslant 1, \\ \beta \operatorname{sign} x + \dfrac{x-1}{2}, & \text{если} \quad |x| > 1, \end{cases}$$

имеет производную: 1) в точке $x = 1$; 2) в точке $x = -1$.

179. Исследовать на дифференцируемость следующие функции:

1) $y = |x^3(x+1)^2(x+2)|$; 2) $y = |\sin x|$; 3) $y = x|x|$;

4) $y = |\pi - x|\sin x$; 5) $y = \arccos(\cos x)$;

6) $y = \begin{cases} x^3, & \text{если} \quad x \leqslant 0, \\ e^{-1/x}, & \text{если} \quad x > 0; \end{cases}$

7) $y = \begin{cases} x^2|\cos(\pi/x)|, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0; \end{cases}$

8) $y = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \text{ — рациональное число}, \\ 0, & \text{если} \quad x \text{ — иррациональное число}. \end{cases}$

180. Вычислить значения производной для функции во всех точках, где производная существует:

1) $y = \begin{cases} x^2, & \text{если} \quad x \text{ — рациональное число}, \\ 0, & \text{если} \quad x \text{ — иррациональное число}. \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} x^2, & \text{если} \quad x \text{ — рациональное число}, \\ 2|x| - 1, & \text{если} \quad x \text{ — иррациональное число}. \end{cases}$

181. Верно ли утверждение: если функция имеет производную в точке, то она дифференцируема в некоторой окрестности этой точки?

182. Доказать или опровергнуть следующие утверждения:

1) если функция f имеет, а функция g не имеет производной в некоторой точке, то функция $f + g$ не имеет производной в этой точке;

2) если функции f и g не имеют производной в некоторой точке, то и функция $f + g$ не имеет производной в этой точке;

3) если функция f имеет, а функция g не имеет производной в некоторой точке, то и функция fg не имеет производной в этой точке;

4) если функции f и g не имеют производной в некоторой точке, то и функция fg не имеет производной в этой точке.

183. Привести пример функции $f(x)$ такой, что $f(x)$ и $(f(x))^3$ дифференцируемы в точке x_0, а функция $(f(x))^2$ не имеет производной в точке x_0.

184. Привести пример функции, не имеющей производной ни в одной точке $x \in R$, квадрат которой имеет производную в каждой точке $x \in R$.

185. Привести пример сложной функции $f(g(x))$, имеющей производную в точке x_0 и такой, что:

1) $f'(g(x_0))$ существует, $g'(x_0)$ не существует;

2) $f'(g(x_0))$ не существует, $g'(x_0)$ существует;

3) $f'(g(x_0))$ и $g'(x_0)$ не существуют.

186. Доказать или опровергнуть следующие утверждения:

1) если для дифференцируемых на интервале $(a;b)$ функций f и g верно неравенство $f < g$, то $f' \leqslant g'$ на $(a;b)$;

2) если на интервале $(a;b)$ верно неравенство $f' < g'$, то $f < g$ на $(a;b)$;

3) если $f(a) = g(a)$ и $f'(x) < g'(x)$ на интервале $(a;b)$, то $f(x) < g(x)$ на $(a;b)$.

187. Доказать или опровергнуть следующие утверждения:

1) для того чтобы дифференцируемая функция $y(x)$, $x \in (a;b)$, имела монотонную на интервале $(a;b)$ производную, необходимо, чтобы $y(x)$ была монотонна на $(a;b)$;

2) для того чтобы дифференцируемая функция $y(x)$, $x \in (a;b)$, имела монотонную на интервале $(a;b)$ производную, достаточно, чтобы $y(x)$ была монотонна на интервале $(a;b)$;

3) для того чтобы дифференцируемая функция имела периодическую производную, необходимо, чтобы функция была периодической;

4) для того чтобы дифференцируемая функция имела периодическую производную, достаточно, чтобы функция была периодической.

188. Доказать или опровергнуть следующие утверждения:

1) для того чтобы производная дифференцируемой функции была четной функцией, достаточно, чтобы функция была нечетной;

2) для того чтобы производная дифференцируемой функции была четной функцией, необходимо, чтобы функция была нечетной;

3) для того чтобы производная дифференцируемой функции была нечетной функцией, необходимо, чтобы функция была четной;

4) для того чтобы производная дифференцируемой функции была нечетной функцией, достаточно, чтобы функция была четной.

189. Верно ли утверждение: если функция f имеет производную в точке x_0, то последовательность $\{n(f(x_0 + 1/n) - f(x_0))\}$ сходится? Верно ли обратное утверждение?

190. Верны ли следующие утверждения:

1) если функция $y(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} y'(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to a+0} y(x) = \infty$;

2) если функция $y(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} y(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to a+0} y'(x) = \infty$;

3) если функция $y(x)$ дифференцируема на интервале $(a;+\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$ существует, то существует и $\lim\limits_{x\to+\infty} y'(x)$;

4) если функция $y(x)$ дифференцируема на интервале $(a;+\infty)$ и существует $\lim\limits_{x\to+\infty} y'(x)$, то существует конечный или бесконечный $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$?

191. Найти правую и левую производные в указанных точках для функции $f(x)$, если:

1) $f(x) = |x|$, $x = 0$; 2) $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$, $x = 2$, $x = 3$;
3) $f(x) = |2^x - 2|$, $x = 1$; 4) $f(x) = \sqrt[3]{\sin \pi x}$, $x = k$, $k \in Z$;
5) $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$, $x = 0$, $x = \sqrt{\pi}$;
6) $f(x) = \sin x|\cos x| + \cos x|\sin x|$, $x = \pi k/2$, $k \in Z$;
7) $f(x) = x|\cos(\pi/x)|$, $x = 2/(2k+1)$, $k \in Z$;
8) $f(x) = \arccos(1/x)$, $x = -1$, $x = 1$;
9) $f(x) = \arcsin \sin x$, $x = (2k+1)\pi/2$, $k \in Z$.

192. Найти $f'_-(0)$ и $f'_+(0)$ для функции $f(x)$, если:

1) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \leqslant 0, \\ \sqrt[3]{x^4}\ln x, & \text{если} \quad x > 0; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{если} \quad x < 0, \\ \ln(1 + \sqrt[5]{x^7}), & \text{если} \quad x \geqslant 0; \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} 1 + e^{1/x}, & \text{если} \quad x < 0, \\ \sqrt{1 + \sqrt[3]{x^4}}, & \text{если} \quad x \geqslant 0. \end{cases}$

193. Найти правую и левую производные в точках разрыва функции $f(x)$, если:

1) $f(x) = \begin{cases} x(1 - x^2)/|x|, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 1, & \text{если} \quad x = 0; \end{cases}$

2) $f(x) = (1 - x^2)\operatorname{sign} x$;

3) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0; \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}((1 + x)/(1 - x)), & \text{если} \quad x \neq 0, \\ \pi/2, & \text{если} \quad x = 1; \end{cases}$

5) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(1/x), & \text{если} \quad x \neq 0, \\ -\pi/2, & \text{если} \quad x = 0. \end{cases}$

194. Найти $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$ для функции $f(x) = |x - x_0|\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — заданная функция, непрерывная в точке x_0.

195. Привести пример функции, имеющей в точке разрыва бесконечную отрицательную производную.

196. Привести пример функции, непрерывной в некоторой точке и не имеющей в этой точке ни левой, ни правой производной.

197. Найти производную обратной функции в указанных точках:

1) $y = x + x^5/5$, $y = 0$, $y = 6/5$; 2) $y = 2x - \cos x/2$, $y = -1/2$;
3) $y = 0{,}1x + e^{0{,}1x}$, $y = 1$; 4) $y = 2x^2 - x^4$, $x > 1$, $y = 0$;
5) $y = 2x^2 - x^4$, $0 < x < 1$, $y = 3/4$.

198. Найти производную обратной функции. Указать область существования производной:

1) $y = x + \ln x,\ x > 0$; 2) $y = x + e^x$; 3) $y = x^2/(1+x^2),\ x < 0$;
4) $y = \operatorname{ch} x,\ x > 0$.

199. Найти производную функции, обратной для гиперболического тангенса.

200. Дана функция $y = x + \sin x,\ x \in R$. В каких точках обратная функция имеет бесконечную положительную производную?

201. Найти y'_x для функции $y = y(x)$, заданной параметрически:
1) $x = \sin^2 t,\ y = \cos^2 t,\ 0 < t < \pi/2$;
2) $x = e^{-t},\ y = t^3,\ -\infty < t < +\infty$;
3) $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ 0 < t < \pi$;
4) $x = a \operatorname{ch} t,\ y = b \operatorname{sh} t,\ -\infty < t < 0$;
5) $x = t^2 + 6t + 5,\ y = (t^3 - 54)/t,\ 0 < t < +\infty$;
6) $x = (t-1)^2(t-2),\ y = (t-1)^2(t-3),\ 5/3 < t < +\infty$;
7) $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ -\infty < t < +\infty$;
8) $x = \ln\sin(t/2),\ y = \ln\sin t,\ 0 < t < \pi$.

202. Найти x'_y для функции $x = x(y)$, заданной параметрически:
1) $x = t + 2t^2 + t^3,\ y = -2 + 3t - t^3,\ 1 < t < +\infty$;
2) $x = (t^3 - 2t^2 + 3t - 4)e^t,\ y = (t^3 - 2t^2 + 4t - 4)e^t,\ 1 < t < +\infty$;
3) $x = \operatorname{ctg} 2t,\ y = (2\cos 2t - 1)/(2\cos t),\ 0 < t < \pi/2$.

203. Для функции $y = y(x)$, заданной параметрически $x = 2t + |t|$, $y = 5t^2 + 4t|t|,\ -\infty < t < \infty$, вычислить производную в точке $x = 0$.

204. Найти y'_x для функции $y = y(x)$, заданной параметрически:

$$x = \begin{cases} t, & \text{если } t \text{ — рациональное число}, \\ -t, & \text{если } t \text{ — иррациональное число}, \end{cases} \qquad y = t^2.$$

205. Вычислить $y'(x_0)$ для функции $y = y(x)$, заданной уравнением $r = r(\varphi)$, где r и φ — полярные координаты точки $(x; y)$:
1) $r = a\varphi,\ 4\pi/3 < \varphi < 2\pi,\ x_0 = 0$;
2) $r = e^{\varphi},\ -\pi/6 < \varphi < \pi/6,\ x_0 = 1$;
3) $r = a\sqrt{\cos 2\varphi},\ 0 < \varphi < \pi/4,\ x_0 = a\sqrt{6}/4$.

206. Для функции $y = y(x)$, заданной уравнением $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4$, вычислить $y'_+(0)$ и $y'_-(a)$.

207. Найти y' для дифференцируемой функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением:
1) $y^5 + y^3 + y - x = 0$; 2) $y - x = \varepsilon \sin y,\ |\varepsilon| < 1$;
3) $y^2 = 2px,\ y > 0$; 4) $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1,\ y > 0$;
5) $(2a - x)y^2 = x^3,\ y < 0$; 6) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$;
7) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3},\ y > 0$;
8) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0,\ y < -1$;
9) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0;\ x < 2y - 1$.

208. Для дифференцируемой функции $y = y(x)$, заданных неявно, вычислить $y'(x_0)$:

1) $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 2 = 0,\ y > -5,\ x_0 = 0$;
2) $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0,\ y < 2,\ x_0 = 11/12$;
3) $e^y + xy = e,\ y > 0,\ x_0 = 0$; 4) $xy + \ln y = 1,\ y < e^2,\ x_0 = 0$.

209. Найти $A(x_0)$ и $\alpha(\Delta x)$ в формуле (5), если:

1) $y = x^3 - 2x,\ x_0 = 1$; 2) $y = x^{10},\ x_0 = 0$.

210. Найти разность между приращением и дифференциалом функции $y = (x-1)^3$.

211. При каких значениях x дифференциал функции $y = \cos x$ не эквивалентен при $\Delta x \to 0$ ее приращению?

212. Какой порядок при $\Delta x \to 0$ имеет бесконечно малая $\Delta y - dy$, если $y = x^3 - 3x$?

213. Найти дифференциал:

1) $d(e^{-x} + \ln x)$; 2) $d(\sqrt{x} + 2\sqrt{x + \sqrt{x}})$; 3) $d(2\sqrt{x^3}(3\ln x - 2))$;
4) $d(\arccos e^x)$; 5) $d\ln(\sqrt{1 + 2\sin x} + \sqrt{2\sin x - 1})$;
6) $d\left(5\,\mathrm{sh}^7\left(\dfrac{x}{35}\right) + 7\,\mathrm{sh}^5\left(\dfrac{x}{35}\right)\right)$; 7) $d\left(\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$;
8) $d\left(\ln\dfrac{1 + \sqrt{\sin x}}{1 - \sqrt{\sin x}} + 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\sin x}\right)$; 9) $d(x^{x^2})$.

214. Найти дифференциал в указанных точках:

1) $d\left(\dfrac{1}{x} + \ln\dfrac{x-1}{x}\right),\ x = -1$; 2) $d\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{\ln x}{x},\ x_1 = \dfrac{1}{e},\ x_2 = e$;
3) $d\left(\dfrac{(2x-1)^3\sqrt{2+3x}}{(5x+4)^2\sqrt[3]{1-x}}\right),\ x = 0$; 4) $d\left(\dfrac{x^2 2^x}{x^x}\right),\ x_1 = 1,\ x_2 = 2$.

215. В указанных точках найти дифференциал функции $y = y(x)$, заданной неявным или параметрическими уравнениями:

1) $y^3 - y = 6x^2,\ (1;2)$; 2) $x^4 + y^4 - 8x^2 - 10y^2 + 16 = 0,\ (1;3)$;
3) $y^5 + x^4 = xy^2,\ (x_0;y_0)$; 4) $x + y\ln y = 0,\ (x_0;y_0)$;
5) $xy - \sqrt[3]{xy^2 + 6} = 0,\ (2;1)$; 6) $xe^{(x/y^2 - 1)} - 2y = 0,\ (4;2)$;
7) $3^{\sin yx^2} - 3x(y - \pi) - 1 = 0,\ (1;\pi)$;
8) $4xy^3 + \ln\sqrt[3]{x/(x+y)} = 0,\ (1;0)$;
9) $x = (t-1)^2(t-2),\ y = (t-1)^2(t-3),\ (4;0)$;
10) $x = e^t/t,\ y = (t-1)^2e^t,\ (-2/\sqrt{e};\ 9/(4\sqrt{e}))$.

216. В точке $(0;a)$ найти дифференциал функции $y = y(x)$, заданной в полярной системе координат уравнением $r = a(1 + \cos\varphi)$, $0 < \varphi < \pi$.

217. Найти дифференциал функции y, считая известными дифференциалы функций u и v:

1) $y = u^2v$; 2) $y = u^2/v$; 3) $y = uv/(u^2 + v^2)$; 4) $y = e^{uv}$;

5) $y = \sqrt{u^2 + v^2}$; 6) $y = \ln \operatorname{tg}(v/u)$; 7) $y = u^v$.

218. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенное значение функции $y = y(x)$ в указанных точках:

1) $y = \sqrt[3]{x}$, а) $x = 65$, б) $x = 125{,}1324$;

2) $y = \sqrt[4]{x}$, а) $x = 90$, б) $x = 15{,}8$;

3) $y = \sin x$, а) $x = 29°$, б) $x = 359°$; 4) $y = \operatorname{tg} x$, $x = 44°50'$;

5) $y = \arcsin x$, $x = 0{,}51$; 6) $y = \operatorname{arctg} x$, $x = 1{,}05$;

7) $y = \ln \operatorname{tg} x$, $x = 47°15'$; 8) $y = \sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$, $x = 0{,}15$.

219. Доказать, что для всех малых по сравнению с x_0 значений Δx верна приближенная формула

$$\sqrt[n]{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt[n]{x_0} + \frac{\sqrt[n]{x_0}}{nx_0}\Delta x, \quad x_0 > 0.$$

С помощью этой формулы приближенно вычислить:

1) $\sqrt{640}$; 2) $\sqrt[3]{200}$; 3) $\sqrt[5]{243{,}45}$; 4) $\sqrt[10]{1000}$.

220. Определить, на сколько приблизительно увеличится объем шара, если его радиус $R = 15$ см увеличить на 0,2 см.

221. Определить приблизительно относительную погрешность при вычислении поверхности сферы, если при определении ее радиуса относительная погрешность составила 1%.

222. На сколько приблизительно изменится (в процентах) сила тока в проводнике, если его сопротивление увеличится на 1%?

223. На сколько приблизительно следует изменить длину маятника $l = 20$ см, чтобы период колебаний маятника увеличился на 0,05 с? Период T определяется формулой $T = 2\pi\sqrt{l/g}$.

ОТВЕТЫ

1. 1) 0,2; 2) 0; 3) 1; 4) -1.

2. 1) $3x^2 + 2x$, $x \in R$; 2) $-1/x^2$, $x \neq 0$; 3) $1/(2\sqrt{x})$, $x > 0$;
4) $(4/3)\sqrt[3]{x}$, $x \in R$; 5) $-2x/(1+x^2)^2$, $x \in R$; 6) $2^{x+1}\ln 2$, $x \in R$;
7) $1/x$, $x > 0$; 8) $2\cos 2x$, $x \in R$; 9) $-1/\sin^2 x$, $x \neq \pi k$, $k \in Z$;
10) $1/\sqrt{1-x^2}$, $|x| < 1$; 11) $-3/\sqrt{1-9x^2}$, $|x| < 1/3$;
12) $7/(x^2 + 2x + 2)$, $x \in R$.

3. $3x^2 + 2x + 1$, $x \in R$. **4.** $3ax^2 + 2bx + c$, $x \in R$.

5. $91(x^{12} - x^{-8})$, $x \neq 0$. **6.** $-\ln 3/x^2$, $x \neq 0$.

7. $-2ax^{-3} - 3bx^{-4} - 4cx^{-5}$, $x \neq 0$.

8. $1/(2\sqrt{x}) + 1/(3\sqrt[3]{x^2}) + 1/(4\sqrt[4]{x^3})$, $x > 0$.

9. $\sqrt[3]{x^2} - 2x^{-3} - 2x^{-2}$, $x \neq 0$. **10.** $(11x^2\sqrt[3]{x^2} + 22x^6\sqrt[3]{x})/3$, $x \in R$.

11. $\sqrt{5}(x^{\sqrt{5}} + x^{-\sqrt{5}})/x$, $x > 0$. **12.** $(ad - bc)/(cx+d)^2$, $x \neq -d/c$.

13. $(6x^2 + 2x - 41)/(x^2 + x + 7)^2$, $x \in R$.

14. $(6 - \sqrt[3]{x^2})/(6\sqrt{x}(2 + \sqrt[3]{x^2})^2)$, $x > 0$.

15. $5(\cos x - x\sin x)$, $x \in R$.
16. $\operatorname{tg} x + (x+1)/(\cos^2 x)$, $x \neq (\pi/2)(2k+1)$, $k \in Z$.
17. $2x\operatorname{ctg} x - x^2/\sin^2 x$, $x \neq \pi k$, $k \in Z$.
18. $(x\cos x - \sin x)/x^2$, если $x \neq 0$; $y'(0) = 0$.
19. $\cos x/(2\sqrt{x}\sin x) - \sqrt{x}/\sin^2 x$, $x > 0$, $x \neq \pi k$, $k \in N$.
20. $2(\cos x - \sin x)^{-2}$, $x \neq \pi/4 + \pi k$, $k \in Z$. **21.** 1.
22. $\arcsin x + x/\sqrt{1-x^2}$, $|x| < 1$. **23.** $2\operatorname{arctg} x/(1+x^2)$, $x \in R$.
24. $-\pi/(2\sqrt{1-x^2}\arcsin^2 x)$, $|x| < 1$, $x \neq 0$.
25. $(3/x) + (3/x)^2 + (3/x)^3$, $x > 0$.
26. $\dfrac{\ln 2}{2}(\sqrt{2})^x - \dfrac{\ln 5}{2}(\sqrt{5})^{-x}$, $x \in R$. **27.** $(x^2 - 5x + 1)e^x$, $x \in R$.
28. $\left(\ln 2 \cdot \ln|x| + \dfrac{1}{x}\right)2^x$, $x \neq 0$. **29.** $\left(\log_2 x + \dfrac{1}{x\ln 2}\right)e^x$, $x > 0$.
30. $\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{\ln x \log_3 x}{\ln 2} + \log_2 x \log_3 x + \dfrac{\ln x \log_2 x}{\ln 3}\right)$, $x > 0$.
31. $-\dfrac{1}{x\ln x \log_2 x}$, $x > 0$, $x \neq 1$. **32.** $\dfrac{\ln x - 1}{\ln x \cdot \log_2 x}$, $x > 0$, $x \neq 1$.
33. $(1/\sqrt{1-x^2} - \arcsin x)e^{-x}$, $|x| < 1$.
34. $(a^2 + b^2)e^{ax}\sin bx$, $x \in R$.
35. $\operatorname{ch} 2x$, $x \in R$. **36.** 0. **37.** $(1 - 3\operatorname{th}^2 x)/\operatorname{ch}^2 x$, $x \in R$.
38. $\dfrac{1}{x\operatorname{cth} x} + \dfrac{\ln x}{\operatorname{ch}^2 x}$, $x > 0$. **39.** 2. **40.** $(a-b)(a-c)$.
41. $1/(a-b)$. **42.** $ab(a+b+2)$.
43. $y'(0) = -1985!$, $y'(1985) = 1985!$. **44.** 0. **45.** 1.
46. $a + d$. **47.** $\pi/2$. **48.** 1. **49.** e. **50.** 0. **51.** $(3e^2 + e^{-2})/2$.
52. $30(3x-7)^9$. **53.** $x^2/(1-x)^{100}$. **54.** $ab(a+bx)^{\alpha-1}$.
55. $-0{,}64(2\cos(8x+5) - 3\sin 0{,}8x)(2\sin(8x+5) + 0{,}3\cos 0{,}8x)$.
56. $\sin x \sin(x+3)$. **57.** $\alpha(a\cos x + b\sin x)^{\alpha-1}(-a\sin x + b\cos x)$.
58. $Ae^{-k^2 x}(\omega\cos(\omega x + \alpha) - k^2\sin(\omega x + \alpha))$.
59. $\dfrac{6(x-1)}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{11}$. **60.** $\dfrac{1 + 4\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{2x^2 + \sqrt{x^2+1}}} \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
61. $\dfrac{14}{65\sqrt[5]{(2x)^4}\,\sqrt[13]{(9 + 7\sqrt[5]{2x})^{12}}}$. **62.** $\dfrac{2x^2}{x^6 - 1}\sqrt[3]{\dfrac{1-x^3}{1+x^3}}$.
63. $\dfrac{ad - bc}{n(ax+b)(cx+d)}\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$. **64.** $-\dfrac{2x}{\sqrt{(1+x^4)^3}}$. **65.** 0, $x \neq 0$.
66. $-\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$, $x \neq a$. **67.** $\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$. **68.** $-2\left(\dfrac{x}{\sin^2 x} + \dfrac{\operatorname{tg}^2 2x}{\cos^2 2x}\right)$.
69. $-4\cos 8x$, $x \neq \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi}{4}k$, $x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}k$, $x \neq \dfrac{\pi}{2}k$, $k \in Z$.
70. $-xe^{-x^2/2}$. **71.** $2\ln 2 \cdot \cos 2x \cdot 2^{\sin 2x}$. **72.** $5/(x^4 + 13x^2 + 36)$.
73. $-\cos 2x$. **74.** $\dfrac{x^4 - 1}{x^3\cos^2(x^2 + x^{-2})\sqrt{1 + \operatorname{tg}(x^2 + x^{-2})}}$.

75. $\dfrac{2x\operatorname{arctg} x^2}{\sqrt{(1+x^4)^3}}$. **76.** $\dfrac{1}{x\ln(x/2)}$, $x > 2$. **77.** $\dfrac{12}{\ln 2}\,\dfrac{\log_2^2(2x+3)^2}{2x+3}$.

78. $\operatorname{ctg} x$. **79.** $\dfrac{\cos\ln|x|}{x}$. **80.** $\dfrac{\sin(1/\log_2 x)}{(x\log_2^2 x)\ln 2}$.

81. $\dfrac{2\ln 3}{1+(2x+\pi)^2}3^{\operatorname{arctg}(2x+3)}$. **82.** $-\dfrac{2^x\ln 2}{2^{2x}+1}$.

83. $\dfrac{(\ln x-1)\ln 10}{\ln x\cdot\log_3 x}10^{x/\log_3 x}$. **84.** $\dfrac{1}{2x^2-5x+7}$. **85.** $\dfrac{x^2+1}{x^4+1}$.

86. $\dfrac{\operatorname{sh} x}{2\sqrt{\operatorname{ch} x}}$. **87.** $\dfrac{1}{\operatorname{ch} 2x}$. **88.** $\dfrac{1}{1-\operatorname{sh}^4 x}$.

89. $-\sin 2x\cdot\cos(\cos 2x)$. **90.** $4\,\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x^2}\left(\dfrac{1}{\sin 2x}-\dfrac{1}{\sin 2x^2}\right)$.

91. $\sin x\cdot\ln\operatorname{tg} x$. **92.** $\cos\ln x$. **93.** $-n\cos^{n-1}x\cdot\sin(n+1)x$.

94. $\dfrac{2x}{(1+x^2)^2(1+x^4)}$. **95.** $\dfrac{2x}{\sqrt{x^4+1}}$. **96.** $2\ln(2x+\sqrt{4x^2+1})$.

97. 1, $|x|<1$. **98.** $4x$, $|x|<1$. **99.** $12x^2-3$, $|x|<1$.

100. $\dfrac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}}$. **101.** $-\dfrac{2n|x|^n}{x(x^{2n}+1)}$. **102.** $\dfrac{1}{(x^2+5x+6)^2}$.

103. $2/(2-3x^2)$. **104.** $20/(x^4+x^2-6)$.

105. $2(\ln 2)x\cos x^2\cdot 2^{\sin x^2}$. **106.** $-(\ln 3)\sin 2x\cdot 3^{\cos^2 x}$.

107. $-\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\,e^{\sqrt{(1-x)/(1+x)}}$. **108.** $\dfrac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

109. $\dfrac{1}{(\ln 2)x\ln x\ln\log_5 x}$, $x>5$. **110.** $\dfrac{2}{x(\ln x^2)\ln\ln x^2}$, $x>e$.

111. $\sqrt{x^2+1}/x$. **112.** $\sqrt{x^5/(1+x^7)}$, $x>0$. **113.** $2\operatorname{tg}^3 x$.

114. $-\dfrac{\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}$. **115.** $\dfrac{(2x+1)e^{\sqrt{\ln(x^2+x+1)}}}{2(x^2+x+1)\sqrt{\ln(x^2+x+1)}}$.

116. $-1/\cos x$. **117.** $-xe^{2x}/\sqrt{(e^{2x}-1)^3}$. **118.** $-4x/\operatorname{sh}^3 x^2$.

119. $\cos x/\cos\sin x$. **120.** $-4x^3(\cos x^4+\sin x^4)/\sqrt{\sin 2x^4}$.

121. $4\operatorname{ctg} x/(\sin^4 x+1)^2$. **122.** $2\sqrt{6}\sin x/(3-2\cos^2 x)$.

123. $\dfrac{1}{a+b\cos x}$. **124.** $\dfrac{2+\operatorname{ch} x}{1+2\operatorname{ch} x}$. **125.** $\dfrac{1}{2}\,\dfrac{e^{x/2}-1}{e^x+1}$.

126. $\dfrac{\cos x-\cos\alpha}{|\cos x-\cos\alpha|}\cdot\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha\cdot\cos x}$.

127. $\dfrac{2\sin\alpha}{(1-x^2)(1-x^2\cos^2\alpha)}$, $|x|<1$. **128.** $\dfrac{x}{x^2-2x\cos\alpha+1}$.

129. $4x\sqrt{a^2+x^4}$. **130.** $\dfrac{2}{1-\operatorname{sh}^4 x}$. **131.** $\dfrac{2(a^2+b^2)x}{(x^2+a)(x^4+b^2)}$.

132. $2\sqrt{a^2-x^2}$. **133.** $-\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin^2 x}$. **134.** $-\dfrac{\operatorname{arcctg} e^x}{e^x}$.

135. $-\dfrac{2\sqrt[3]{x}}{1-x^2}$. **136.** $\dfrac{\sqrt{8x^4+8}}{x^4-1}$. **137.** $\dfrac{5x^2}{2x^4+6x^3+9x^2+6x+2}$.

138. $3\dfrac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}$. **139.** $\dfrac{\sin^2 x\cdot\cos x}{\sqrt{\cos^2 x-2\sin x}}$.

140. $e^x \cdot \arcsin\sqrt{e^x/(1+e^x)}$. **141.** $x^x(1+\ln x)$.

142. 0, $x>0$, $x\neq 1$. **143.** $-\dfrac{1}{x\ln x\log_7 x}$. **144.** $\dfrac{1}{x}$, $x>0$, $x\neq 1$.

145. $2e(x-e)$, $x>0$, $x\neq 1$. **146.** $x^{1+x^2}(1+2\ln x)$.

147. $e^x\cdot x^{e^x}(1/x+\ln x)$. **148.** $(\ln 2)2^{x^x}\cdot x^x(1+\ln x)$.

149. $x^{x^x}\cdot x^{x-1}(x\ln^2 x+x\ln x+1)$.

150. $|\sin x|^{\cos x}(\cos x\cdot \operatorname{ctg} x-\sin x\ln|\sin x|)$.

151. $(\arcsin\sin^2 x)^{\operatorname{arctg} x}\left(\dfrac{\ln\arcsin\sin^2 x}{1+x^2}+\dfrac{\sin 2x\cdot\operatorname{arctg} x}{\arcsin\sin^2 x\sqrt{1-\sin^4 x}}\right)$.

152. $(\operatorname{ch} x)^{e^x}\cdot e^x(\ln\operatorname{ch} x+\operatorname{tg} x)$. **153.** $y'(0)=2$, $y'(1)=-2$.

154. $\sqrt[6]{72}$. **155.** $-\pi^2\ln 2$. **156.** $-2\sqrt{3}$. **157.** $2/\ln 2$.

158. $2/e$. **159.** 0. **160.** $y'(0)=2$, $y'(2)=-2/5$.

161. $y'(-1)=1$, $y'(1)=-1$, $y'(0)$ не существует. **162.** 6.

163. 0. **164.** 0. **165.** $2\ln 2$. **166.** $-(\pi/2)^{-\pi/2}(1+\ln(\pi/2))$.

167. 1) 1; 3; 2) 7/11; 3) $\pi n/2$, $n\in Z$;
4) 1; 2; $(5\pm\sqrt{13})/6$; 5) 0; 6) 7/12.

168. 1) $\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$; 2) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$; 3) $3x^2f'(x^3)$; 4) $\dfrac{f'(\arcsin f(x))\cdot f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$.

169. 1) $\dfrac{2}{n}\,\dfrac{f(x)f'(x)+g(x)g'(x)}{\sqrt[n]{(f^2(x)+g^2(x))^{n-1}}}$; 2) $\dfrac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{f(x)g(x)}$;
3) $\sin 2x(f'(\sin^2 x)-g'(\cos^2 x))$;
4) $(g'(x)\ln f(x)+g(x)f'(x)/f(x))(f(x))^{g(x)}$.

171. 1) $6x-3$; 2) $3x^2-30x-18$; 3) $6x^2$.

173. 1) $\alpha>0$; 2) $\alpha>1$; 3) $\alpha>2$.

174. 1) $\alpha>0$, β произвольно; 2) $\alpha>1$, β произвольно;
3) $\alpha>1$, $\beta<\alpha-1$.

176. 1) а) $\alpha+\beta=1$, б) $\alpha=2$, $\beta=-1$;
2) а) $\alpha+\beta=1$, б) $\alpha=3/2$, $\beta=-1/2$;
3) а) $4\alpha+\beta=1/12$, б) $\alpha=-(\pi+2\sqrt{3})/96\pi$, $\beta=(3\pi+2\sqrt{3})/24\pi$;
4) а) α, β — произвольные числа, б) $\alpha=5/2$, $\beta=9/5$.

177. 1) $\alpha=1$, $\beta=1/2$; 2) $\alpha=\beta$.

178. 1) $\alpha=1$, $\beta=\pi/4$; 2) $\alpha=1$, $\beta=(\pi-4)/4$.

179. 1) Дифференцируема всюду, кроме точки $x=-2$;
2) дифференцируема всюду, кроме точек $x=\pi k$, k целое;
3) дифференцируема всюду; 4) дифференцируема всюду;
5) дифференцируема всюду, кроме точек $x=\pi k$, k целое;
6) дифференцируема всюду;
7) дифференцируема всюду, кроме точек $x=2/(2k+1)$, k целое;
8) нигде не дифференцируема.

180. 1) Дифференцируема в точке $x=0$, причем $y'(0)=0$;
2) $y'(1)=2$, $y'(-1)=-2$.

181. Утверждение неверно. См., например, задачу 179, 7) и 8).

182. 1) Утверждение верно;
2) неверно (контрпример: $f = |x|,\ g = -|x|,\ x = 0$);
3) неверно (контрпример: $f \equiv 0,\ g = |x|,\ x = 0$);
4) неверно (контрпример: $f = |x|,\ g = |x|,\ x = 0$).
187. 1) Утверждение неверно (контрпример: $y = x^2,\ x \in (-1;1)$);
2) неверно (контрпример: $y = x + \sin x,\ x \in R$);
3) неверно (контрпример: $y = x,\ x \in R$);
4) утверждение верно.
188. 1) Утверждение верно; 2) неверно (контрпример: $y = x + 1$);
3) верно; 4) верно.
189. Утверждение верно. Обратное утверждение неверно (контрпример: функция задачи 179, 8), x_0 произвольно).
190. 1) Утверждение неверно (контрпример: $y = \sqrt{x},\ x \in (0;1)$);
2) неверно (контрпример: $y = 1/x + \sin(1/x),\ x \in (0;1)$);
3) неверно (контрпример: $y = \cos x^2/x,\ x \in (1;+\infty)$);
4) неверно (контрпример: $y = \sin\ln x,\ x \in (2;+\infty)$).
191. 1) $f'_+(0) = 1,\ f'_-(0) = -1$;
2) $f'_-(2) = f'_-(3) = -1,\ f'_+(2) = f'_+(3) = 1$;
3) $f'_+(1) = \ln 4,\ f'_-(1) = -\ln 4$; 4) $f'(2k) = +\infty,\ f'(2k-1) = -\infty$;
5) $f'_+(0) = 1,\ f'_-(0) = -1,\ f'_-(\sqrt{\pi}) = -\infty,\ f'_+(\sqrt{\pi})$ не существует;
6) $f'_-(2\pi k) = f'_+\left(\dfrac{4k-1}{2}\pi\right) = f'_-((2k+1)\pi) = f'_+\left(\dfrac{4k+1}{2}\pi\right) = 0,$
$f'_+(2\pi k) = f'_-\left(\dfrac{4k-1}{2}\pi\right) = 2,\ f'_+((2k+1)\pi) = f'_-\left(\dfrac{4k+1}{2}\pi\right) = -2;$
7) $f'_-\left(\dfrac{2}{2k+1}\right) = -(2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ f'_+\left(\dfrac{2}{2k+1}\right) = (2k+1)\dfrac{\pi}{2};$
8) $f'_-(-1) = f'_+(1) = +\infty,\ f'_+(-1)$ и $f'_-(1)$ не существуют;
9) $f'_-\left(\dfrac{4k+1}{2}\pi\right) = f'_+\left(\dfrac{2k+1}{2}\pi\right) = 1,$
$$f'_+\left(\frac{4k+1}{2}\pi\right) = f'_-\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right) = -1.$$
192. 1) $f'_-(0) = 1,\ f'_+(0) = 0$; 2) $f'_-(0) = 2,\ f'_+(0) = 0$; 3) $f'(0) = 0$.
193. 1) $f'_+(0) = 0,\ f'_-(0) = +\infty$; 2) $f'_+(0) = +\infty,\ f'_-(0) = +\infty$;
3) $f'_-(0) = -\infty,\ f'_+(0) = 0$; 4) $f'_-(0) = 0,\ f'_+(0) = -\infty$;
5) $f'_-(0) = -1,\ f'_+(0) = +\infty$.
194. $f'_-(x_0) = -\varphi(x_0),\ f'_+(x_0) = \varphi(x_0)$. **195.** $y = -\operatorname{sign} x$.
196. $y = \begin{cases} x\sin(1/x), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$
197. 1) $x'(0) = 1,\ x'(6/5) = 1/2$; 2) $x'(-1/2) = 1/2$;
3) $x'(1) = 5$; 4) $x'(0) = -\sqrt{2}/8$; 5) $x'(3/4) = \sqrt{2}/2$.
198. 1) $x'(y) = x/(x+1),\ y \in R$; 2) $x'(y) = 1/(1+y-x),\ y \in R$;
3) $x'(y) = x^3/(2y^2),\ y \in (0;1)$; 4) $x'(y) = 1/\sqrt{y^2-1},\ y \in (1;+\infty)$.
199. $(\operatorname{arth} x)' = 1/(1-x^2),\ x \in (-1;1)$. **200.** $y = \pi(2k+1),\ k \in Z$.
201. 1) $y'_x = -1,\ 0 < x < 1$; 2) $y'_x = -3t^2e^t$; 3) $y'_x = -(b/a)\operatorname{ctg} t$;
4) $y'_x = (b/a)\operatorname{cth} t$; 5) $y'_x = 1 - 3/t + 9/t^2$; 6) $y'_x = (3t-7)/(3t-5)$;

7) $y'_x = \operatorname{ctg}(t/2)$, $x \neq 2\pi ka$, $y'_x(2\pi ka)$ не существует, $k \in Z$;
8) $y'_x = 2\cos t/(1+\cos t)$.

202. 1) $x'_y = \dfrac{3t+1}{3-3t}$; 2) $x'_y = 1 - \dfrac{1}{t^2}$; 3) $x'_y = \dfrac{1}{\sin^3 t(3+4\cos^2 t)}$.

203. $y'(0) = 0$. **204.** $y'_x = 2x$. **205.** 1) $-2/(3\pi)$; 2) 1; 3) 0.

206. $y'_+(0) = 1$, $y'_-(a) = -\infty$.

207. 1) $\dfrac{1}{5y^4+3y^2+1}$; 2) $\dfrac{1}{1-\varepsilon\cos y}$; 3) $\dfrac{p}{y}$; 4) $\dfrac{b^2x}{a^2y}$, $|x| > |a|$;
5) $\dfrac{(3a-x)y}{(2a-x)x}$, $0 < x < 2a$; 6) $1 - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$, $0 < x < 4$;
7) $-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$, $|x| < a$, $x \neq 0$; 8) $\dfrac{5}{9}\,\dfrac{3-x}{y+1}$, $|x-3| < 3$;
9) $\dfrac{4y-2x-4}{8y-4x-3}$, $x < 3$.

208. 1) $1/\sqrt{3}$; 2) $-24/41$; 3) $-1/e$; 4) $-e^2$.

209. 1) $A = 1$, $\alpha(\Delta x) = 3\Delta x + \Delta x^2$; 2) $A = 0$, $\alpha(\Delta x) = \Delta x^9$.

210. $3(x-1)\Delta x^2 + \Delta x^3$. **211.** $x = \pi k$, $k \in Z$.

212. Второй, если $x \neq 0$; если $x = 0$, то третий.

213. 1) $\left(\dfrac{1}{x} - e^{-x}\right)dx$; 2) $\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x(x+\sqrt{x})}}\,dx$; 3) $9\sqrt{x}\ln x\,dx$;
4) $-\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$; 5) $\dfrac{\cos x}{\sqrt{4\sin^2 x - 1}}\,dx$; 6) $\operatorname{sh}^4\left(\dfrac{x}{35}\right)\operatorname{ch}^3\left(\dfrac{x}{35}\right)dx$;
7) $\dfrac{x\arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx$; 8) $\dfrac{2}{\cos x\sqrt{\sin x}}\,dx$; 9) $x^{x^2}(1+2\ln x)x\,dx$.

214. 1) $-\dfrac{1}{2}\,dx$; 2) $\dfrac{2e^2}{e^2+1}\,dx$, 0; 3) $-\dfrac{89\sqrt{2}}{192}\,dx$; 4) $(2+\ln 4)\,dx$, 0.

215. 1) $\dfrac{12}{11}\,dx$; 2) $\dfrac{1}{4}\,dx$; 3) $\dfrac{y_0^2 - 4x_0^3}{5y_0^4 - 2x_0y_0}\,dx$; 4) $\dfrac{y_0}{x_0 - y_0}\,dx$;
5) $-\dfrac{11}{20}\,dx$; 6) $\dfrac{1}{3}\,dx$; 7) $-2\pi\dfrac{\ln 3}{3+\ln 3}\,dx$; 8) 0; 9) $\dfrac{1}{2}\,dx$; 10) $\dfrac{1}{8}\,dx$.

216. dx.

217. 1) $u^2\,dv + 2uv\,du$; 2) $2\dfrac{u}{v}\,du - \dfrac{u^2}{v^2}\,dv$;
3) $\dfrac{u^2-v^2}{(u^2+v^2)^2}(u\,dv - v\,du)$; 4) $e^{uv}(u\,dv + v\,du)$; 5) $\dfrac{u\,du + v\,dv}{\sqrt{u^2+v^2}}$;
6) $\dfrac{2}{\sin(2v/u)} \cdot \dfrac{u\,dv - v\,du}{u^2}$; 7) $u^v\left(\dfrac{v}{u}\,du + \ln u\,dv\right)$.

218. 1) а) 4,0208, б) 5,00177; 2) а) 3,083, б) 1,9938;
3) а) 0,485, б) −0,017; 4) 0,9942; 5) 0,512; 6) 0,810; 7) 0,079;
8) 0,925.

219. 1) 25,3; 2) 5,85; 3) 3,001; 4) 1,9953. **220.** 565 см^3.

221. 2%. **222.** Уменьшится на 1%. **223.** Увеличить на 2,23 см.

§ 14. Геометрический и физический смысл производной

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Геометрический смысл производной.

1) Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, то угловой коэффициент касательной TT' (рис. 14.1) к графику функции в точке $M(x_0; f(x_0))$ равен $f'(x_0)$. Следовательно, уравнение касательной в точке $M(x_0; f(x_0))$ имеет вид

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \quad (1)$$

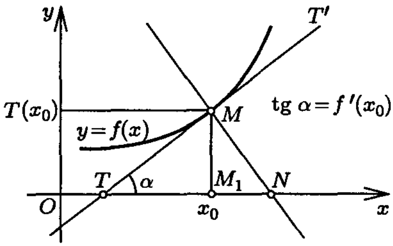

Рис. 14.1

2) Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \infty,$$

то уравнение касательной к графику функции в точке $M(x_0; f(x_0))$ имеет вид $x = x_0$. В этом случае график функции $y = f(x)$ в окрестности точки x_0 имеет вид, схематически изображенный на рис. 14.2–14.5.

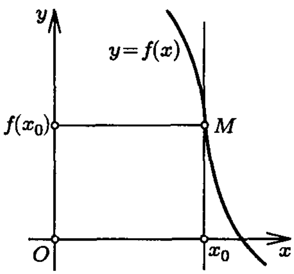

Рис. 14.2

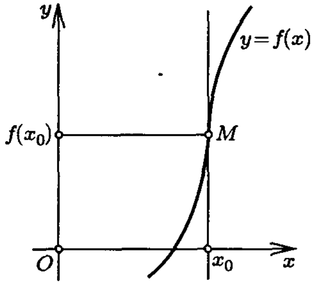

Рис. 14.3

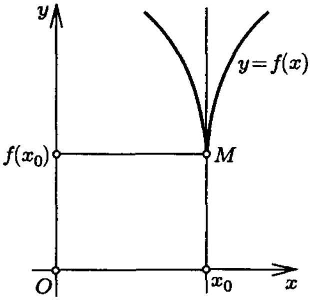

Рис. 14.4

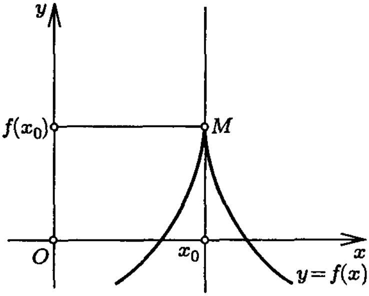

Рис. 14.5

3) Прямая, проходящая через точку $M(x_0; f(x_0))$ перпендикулярно касательной, называется *нормалью* (прямая MN на рис. 14.1). Если $f'(x_0) \neq 0$, то уравнение нормали записывается в виде

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{2}$$

Если $f'(x_0) = 0$, то уравнение нормали имеет вид $x = x_0$.

4) Пусть к графику функции $y = f(x)$ в точке M проведены касательная и нормаль (см. рис. 14.1), которые пересекают ось абсцисс соответственно в точках T и N. В прямоугольном треугольнике TMN катет TM называют *отрезком касательной*, катет NM — *отрезком нормали*. Отрезок TM_1, где M_1 — проекция точки M на ось абсцисс, называют *подкасательной*, отрезок NM_1 — *поднормалью*. Длины этих четырех отрезков выражаются через значения функции и ее производной в точке x_0 следующим образом:

$$|TM| = \left|\frac{f}{f'}\right|\sqrt{1 + (f')^2}, \quad |NM| = |f|\sqrt{1 + (f')^2}, \tag{3}$$

$$|TM_1| = \left|\frac{f}{f'}\right|, \quad |NM_1| = |ff'|. \tag{4}$$

5) Пусть графики функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ пересекаются в точке M (рис. 14.6). За угол φ между графиками этих функций принимается величина угла, образованного касательными, проведенными к графикам в точке M. Угол φ находится с помощью формулы

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{f_1' - f_2'}{1 + f_1' f_2'}\right|, \quad 0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2}. \tag{5}$$

Если $1 + f_1' f_2' = 0$, то $\varphi = \pi/2$.

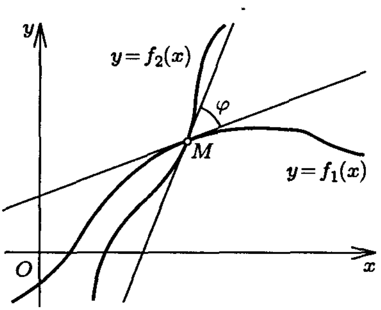

Рис. 14.6

6) Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 правую производную $f'_+(x_0)$, то уравнение правой касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0; f(x_0))$ имеет вид

$$y - f(x_0) = f'_+(x_0)(x - x_0). \tag{6}$$

Аналогично записывается уравнение левой касательной:

$$y - f(x_0) = f'_-(x_0)(x - x_0). \tag{7}$$

2. Физический смысл производной. Средней скоростью изменения функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называют отношение

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{8}$$

Мгновенной скоростью или скоростью изменения в точке x функции $f(x)$ называется

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x). \tag{9}$$

Таким образом, производная есть скорость изменения функции. На интерпретации производной как величины мгновенной скорости изменения функции основано применение производной к изучению разнообразных физических явлений.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Под какими углами синусоида $y=\sin x$ пересекает ось абсцисс?

▲ Синусоида $y=\sin x$ пересекает ось абсцисс в точках $x=\pi k$, $k\in \in Z$. Если $x=2\pi k$, то $y'(2\pi k)=\cos 2\pi k=1$, т. е. угловой коэффициент касательной к синусоиде равен единице. Следовательно, в точках $x= = 2\pi k$ синусоида пересекает ось абсцисс под углом 45°. Если $x= =(2k+1)\pi$, то $y'((2k+1)\pi)=-1$. Поэтому в точках $x=(2k+1)\pi$ синусоида пересекает ось абсцисс под углом 135°. ▲

Пример 2. Написать уравнения касательной и нормали к графику функции $y=2x/(1+x^2)$ в точке с абсциссой $x=\sqrt{2}$.

▲ Находим производную функции

$$y'(x)=2\,\frac{(1+x^2)-2x^2}{(1+x^2)^2}=2\,\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Вычисляем значения функции и ее производной в точке $x=\sqrt{2}$:

$$y(\sqrt{2})=2\sqrt{2}/3,\quad y'(\sqrt{2})=-2/9.$$

Записываем уравнение касательной:

$$y-\frac{2\sqrt{2}}{3}=-\frac{2}{9}(x-\sqrt{2}),$$

и уравнение нормали:

$$y-\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{9}{2}(x-\sqrt{2}).$$

Упрощая уравнения, получаем

$$y=-\frac{2}{9}x+\frac{8\sqrt{2}}{9}\quad \text{(уравнение касательной)},$$

$$y=\frac{9}{2}x-\frac{23\sqrt{2}}{6}\quad \text{(уравнение нормали)}. \ ▲$$

Пример 3. Вычислить длину отрезка нормали к цепной линии $y=a\,\mathrm{ch}\,(x/a)$ в каждой ее точке.

▲ Подставив значения данной функции и ее производной $y'= =\mathrm{sh}\,(x/a)$ в формулу для длины отрезка нормали, получим

$$|NM|=|y|\sqrt{1+(y')^2}=a\,\mathrm{ch}\left(\frac{x}{a}\right)\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\left(\frac{x}{a}\right)}=a\,\mathrm{ch}^2\left(\frac{x}{a}\right). \ ▲$$

Пример 4. В точках пересечения эллипсов

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1, \quad \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$$

найти угол между ними.

▲ Эллипсы расположены симметрично относительно координатных осей. Рассмотрим поэтому только первый квадрант координатной плоскости. Решив систему

$$\begin{cases} x^2/16+y^2/9=1, \\ x^2/9+y^2/16=1, \end{cases}$$

найдем точку пересечения эллипсов $(12/5; 12/5)$. Из уравнения первого эллипса получаем

$$\frac{2x}{16}+\frac{2yy'}{9}=0, \quad \text{т. е.} \quad y'(x)=-\frac{9}{16}\,\frac{x}{y},$$

и, следовательно, $y'(12/5)=-9/16$. Аналогично, для второго эллипса получим $y'(12/5)=-16/9$. Формула (5) в данном случае имеет вид

$$\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{(-9/16)-(-16/9)}{1+(-9/16)(-16/9)}\right|=\frac{175}{288}.$$

Итак, эллипсы пересекаются в четырех точках под углом $\varphi = \operatorname{arctg}(175/288)$, т. е. под углом, равным приблизительно 31°. ▲

Пример 5. Высота h снаряда, вылетевшего с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту, изменяется по закону

$$h=(v_0\sin\alpha)t-\frac{gt^2}{2},$$

где t — время, g — ускорение силы тяжести. В какой момент скорость изменения высоты снаряда над горизонтом равна нулю?

▲ Вычисляем производную функции $h(t)$:

$$h'(t)=v_0\sin\alpha-gt.$$

Следовательно, скорость изменения высоты снаряда над горизонтом равна нулю при

$$t=\frac{v_0\sin\alpha}{g}. \ ▲$$

Пример 6. Количество электричества q (в кулонах), протекающее через поперечное сечение проводника, изменяется по закону $q=3t^2+2t$. Найти силу тока в конце пятой секунды.

▲ Сила тока i в момент времени t равна мгновенной скорости изменения количества электричества, протекающего через поперечное сечение проводника. Поэтому $i(t)=q'(t)=6t+2$ и $i(5)=32$, т. е. сила тока в конце пятой секунды равна 32 амперам. ▲

ЗАДАЧИ

1. Найти углы, под которыми график функции $y = f(x)$ пересекает ось абсцисс:

1) $y = \sin 3x$; 2) $y = \operatorname{tg} x$; 3) $y = \ln|x|$; 4) $y = 1 - e^x$;
5) $y = \operatorname{arctg} \alpha x$, $\alpha > 0$; 6) $y = (x-1)^3(x-2)^2(x-3)$;
7) $y = \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$;
8) $x = (t-1)^2(t-2)$, $y = (t-1)^2(t-3)$, $2 < t < +\infty$;
9) $x = \dfrac{3at}{t^3+1}$, $y = \dfrac{3at^2}{t^3+1}$, $-1 < t < \dfrac{1}{2}$;
10) $x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0$, $y > -1$.

2. Найти точки, в которых касательные к графику функции $y = f(x)$ параллельны оси абсцисс:

1) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$; 2) $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 1$;
3) $y = 3x^4 - 28x^3 - 6x^2 + 84x + 1$; 4) $y = \cos 2x - 5\cos x$;
5) $y = (3 - x^2)e^x$; 6) $y = (2-x)^3/(x-3)^2$;
7) $y = |x-5|(x-3)^3$; 8) $x = t^3/(1+t^2)$, $y = (t^3 - 2t^2)/(1+t^2)$;
9) $x^2 + 2y^2 + 4x - 4y = 0$, $y > 1$.

3. Написать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в указанной точке:

1) $y = \sqrt{5 - x^2}$, $x = 1$; 2) $y = \operatorname{arctg} 2x$, $x = 0$;
3) $y = \ln \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x + 1}$, $x = 0$; 4) $y = 4 \operatorname{ctg} x - \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$, $x = \dfrac{\pi}{2}$;
5) $y = \sqrt[3]{x-1}$, $x = 1$; 6) $y = (x^3 + 2x^2)/(x-1)^2$, $x = -2$;
7) $y = |x-1|\sqrt[3]{x+2}$, $x = 6$;
8) $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$, $y > -3$, $x = 0$;
9) $x = te^t$, $y = te^{-t}$, $t > -1$, $t = t_0 > -1$;
10) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t = t_0 \neq 2\pi k$, $k \in Z$.

4. Написать уравнение касательной к эллипсу $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ в точке $(x_0; y_0)$.

5. Найти точки пересечения с осью абсцисс касательных к эллипсам

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

в точках с абсциссой x_0.

6. Найти угол между касательными к кривой

$$2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0,$$

проходящими через точку $(3; 4)$.

7. Написать уравнение нормали к графику функции $y = f(x)$ в указанной точке:

1) $y = \cos 2x - 2\sin x,\ x = \pi$;
2) $y = \operatorname{arcctg}(1/x),\ x = 1$; 3) $y = x^3/(2-x)^2,\ x = 6$;
4) $y = x/\sqrt[3]{x+1},\ x = -3$; 5) $y^2 = 2px,\ y \geqslant 0,\ x = x_0$;
6) $x = e^{2t}\cos^2 t,\ y = e^{2t}\sin^2 t,\ |t| < \pi/4,\ t = \pi/6$.

8. Написать уравнение нормали к эллипсу $3x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x - 4y = 0$ в точке $(-2;1)$.

9. Написать уравнение нормали к гиперболе $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ в точке $(x_0;y_0)$.

10. Написать уравнение касательной и нормали к кривой в точке M:

1) $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0,\ M(-1;3)$;
2) $4x^3 - 3xy^2 + 6x^2 - 5xy - 8y^2 + 9x + 14 = 0,\ M(-2;3)$;
3) $y^4 - 4x^4 - 6xy = 0,\ M(1;2)$; 4) $x^5 + y^5 - 2xy = 0,\ M(1;1)$;
5) $(4-x)\,y^2 = x^3,\ M(x_0;y_0)$; 6) $\left(\dfrac{x}{a}\right)^n + \left(\dfrac{y}{b}\right)^n = 2,\ n \in N,\ M(a;b)$;
7) $x = t^2,\ y = t^3,\ M(4;8)$; 8) $x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ M\left(\dfrac{\pi\sqrt{2}}{8};\ \dfrac{\pi\sqrt{2}}{8}\right)$;
9) $x = \sqrt{2}\cos^3 t,\ y = \sqrt{2}\sin^3 t,\ M(1/2;1/2)$;
10) $x = (1+t)/t^3,\ y = 3/(2t^2) + 1/(2t),\ M(2;2)$;
11) $x = (2t-1)/t^2,\ y = (3t^2-1)/t^3,\ M(1;2)$.

11. Определить, в каких точках и под каким углом пересекаются графики функций:

1) $f_1(x) = x - x^3,\ f_2(x) = 5x$;
2) $f_1(x) = \sqrt{2}\sin x,\ f_2(x) = \sqrt{2}\cos x$;
3) $f_1(x) = x^2,\ f_2(x) = x^3$; 4) $f_1(x) = 1/x,\ f_2(x) = \sqrt{x}$;
5) $f_1(x) = x^3,\ f_2(x) = 1/x^2$; 6) $f_1(x) = \ln x,\ f_2(x) = x^2/(2e)$;
7) $f_1(x) = x^2 - 4x + 4,\ f_2(x) = -x^2 + 6x - 4$;
8) $f_1(x) = 4x^2 + 2x - 8,\ f_2(x) = x^3 - x + 10$;
9) $f_1(x) = \varphi(x),\ f_2(x) = \varphi(x)\sin \pi x,\ \varphi(x)$ — всюду дифференцируемая функция.

12. Определить, в каких точках и под каким углом пересекаются кривые:

1) $y = x^2$ и $x = y^2$; 2) $y = \dfrac{2}{3}x^5 - \dfrac{1}{9}x^3$ и $x = 1$;
3) $y = e^{x/2}$ и $x = 2$; 4) $x^2 + y^2 = 5$ и $y^2 = 4x$;
5) $y^2 = 2x^3$ и $64x - 48y - 11 = 0$;
6) $x^3 + y^3 - xy - 7 = 0$ и $y = x + 1$;
7) $x = \dfrac{t^3}{1+t^2},\ y = \dfrac{t^3 - 2t^2}{1+t^2}$ и $y + \ln\dfrac{5x}{8} = 0$;
8) $x = \left(1 + \dfrac{1}{t}\right)^t,\ y = \left(1 + \dfrac{1}{t}\right)^{t+1}$ и $y = x$.

13. Доказать, что семейства парабол $y^2 = p^2 - 2px$ и $y^2 = 2qx + q^2$, $p \neq 0$, $q \neq 0$, образуют ортогональную сетку, т. е. кривые этих семейств пересекаются под прямыми углами.

14. Доказать, что семейства гипербол $x^2 - y^2 = a$ и $xy = b$ образуют ортогональную сетку.

15. Доказать, что семейство эллипсов

$$x = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\cos t, \quad y = \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)\sin t, \quad 0 \leqslant t < 2\pi,$$

и семейство гипербол

$$x = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\cos\alpha, \quad y = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\sin\alpha, \quad 0 < t < +\infty$$

(a и α — постоянные, причем $a > 0$, $\alpha \neq \pi k/2$, $k \in Z$), образуют ортогональную сетку.

16. Определить угол между левой и правой касательными в точке M графика функции $y = f(x)$:

1) $y = |x|$, $M(0;0)$; 2) $y = \sqrt[3]{x^2}$, $M(0;0)$;

3) $y = \arccos(\cos x)$, $M(\pi;\pi)$; 4) $y = \sqrt{1 - e^{-3x^2}}$, $M(0;0)$;

5) $y = \sqrt{2x^3 + 9x^2}$, $M(0;0)$; 6) $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$, $M\left(1; \dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}\right)$;

7) $x^3 + y^3 = 3x^2$, $M(0;0)$; 8) $y = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$ $M(0;0)$;

9) $y = \dfrac{\sqrt{1+|x-2|}}{1+x}$, $M\left(2; \dfrac{1}{3}\right)$;

10) $x = t - \dfrac{t}{1+t^2}$, $y = \dfrac{2+t^2}{1+t^2}$, $M(0;2)$.

17. Вычислить в точке $(1;2)$ параболы $y^2 = 4x$ длины отрезков:

1) касательной; 2) нормали; 3) подкасательной; 4) поднормали.

18. Найти длину подкасательной графика функции $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, в каждой его точке.

19. Найти длины подкасательной и поднормали графика функции $y = ax^n$, $n \in N$, $a \neq 0$, в каждой его точке.

20. Найти длины подкасательной и поднормали:

1) параболы $y^2 = 2px$; 2) гиперболы $x^2 - y^2 = a^2$.

21. Доказать, что подкасательные эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ и окружности $x^2 + y^2 = a^2$ в точках с равными абсциссами равны.

22. Доказать, что в точках с равными абсциссами поднормали графиков функций

$$y = f(x) \quad \text{и} \quad y = \sqrt{f^2(x) + a^2},$$

где $f(x)$ — дифференцируемая функция, равны.

23. Найти длины подкасательной и поднормали для кривой:
1) $y^2 = x^3$; 2) $xy^2 = 1$.

24. Найти длины отрезков касательной, нормали, подкасательной и поднормали у циклоиды
$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$
в каждой ее точке, не лежащей на оси абсцисс.

25. Найти длины отрезков касательной и нормали у трактрисы
$$x = a(\ln \operatorname{tg}(t/2) + \cos t), \quad y = a \sin t, \quad 0 < t < \pi, \quad a > 0.$$

26. Доказать, что у кривой
$$x = 2a(\ln \sin t - \sin^2 t), \quad y = a \sin 2t, \quad 0 < t < \pi, \quad a > 0,$$
сумма длин подкасательной и поднормали постоянна и равна $2a$.

27. Доказать, что если $r = f(\varphi)$ — уравнение кривой в полярной системе координат и ω — угол, образованный касательной и полярным радиусом точки касания, то $\operatorname{tg}\omega = r/|r'|$.

28. Найти угол между касательной и полярным радиусом точки касания для следующих кривых:
1) *спирали Архимеда* $r = a\varphi$;
2) *гиперболической спирали* $r = a/\varphi$;
3) *логарифмической спирали* $r = ae^{b\varphi}$;
4) *кардиоиды* $r = a(\cos\varphi + 1)$;
5) *дуги лемнискаты Бернулли* $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$, $0 \leqslant \varphi < \pi/4$.

29. Под каким углом пересекаются кривые $r = \varphi$ и $r = 1/\varphi$ в точке $(1; 1)$?

30. Доказать, что угол между касательной к спирали Архимеда $r = a\varphi$ и полярным радиусом точки касания при $\varphi \to +\infty$ стремится к $\pi/2$.

31. Найти расстояние от полюса до произвольной касательной кривой $r = ae^{b\varphi}$.

32. Записать в декартовых и в полярных координатах уравнение нормали к кардиоиде $r = a(1 + \cos\varphi)$ в точке с полярным углом $\varphi = \pi/6$.

33. Поезд Москва–Тбилиси проходит путь в 2400 км за 44 ч 14 мин. Определить среднюю скорость поезда.

34. Определить среднюю скорость изменения функции $y = \sin(1/x)$ на отрезке $[2/\pi; 6/\pi]$.

35. Тело с массой $m = 1{,}5$ движется прямолинейно по закону $S(t) = t^2 + t + 1$. Найти кинетическую энергию тела через 5 с после начала движения (масса m задана в килограммах, путь S — в метрах).

36. Точка движется по параболе $y = 8x - x^2$ так, что ее абсцисса изменяется по закону $x = \sqrt{t}$ (x измеряется в метрах, t — в секундах). Какова скорость изменения ординаты точки через 9 с после начала движения?

37. Радиус шара возрастает равномерно со скоростью 5 см/с. Какова скорость изменения объема шара в момент, когда его радиус становится равным 50 см?

38. Колесо вращается так, что угол поворота пропорционален квадрату времени. Первый оборот был сделан за 8 с. Найти угловую скорость через 64 с после начала движения.

39. По оси абсцисс движутся две точки, имеющие законы движения

$$x = 100 + 5t \quad \text{и} \quad x = t^2/2.$$

С какой скоростью удаляются они друг от друга в момент встречи (x измеряется в метрах, t — в секундах)?

40. Паром подтягивается к берегу при помощи каната, который наматывается на ворот со скоростью 3 м/мин. Определить скорость движения парома в тот момент, когда он находится в 25 м от берега, если ворот расположен на берегу выше поверхности воды на 4 м.

41. Закон движения материальной точки, брошенной под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0, без учета сопротивления воздуха, имеет вид

$$x = (v_0 \cos\alpha)t, \quad y = (v_0 \sin\alpha)t - (gt^2)/2,$$

где t — время, g — ускорение силы тяжести. Определить координаты вектора скорости и величину скорости.

42. Точка движется по спирали Архимеда $r = a\varphi$ так, что угловая скорость вращения ее полярного радиуса постоянна и равна 6° в секунду. Определить скорость удлинения полярного радиуса r, если $a = 10$ м.

43. Расстояние r спутника Земли от ее центра приближенно может быть выражено формулой

$$r = a\left(1 - \varepsilon \cos \frac{2\pi(t - t_0)}{P} - \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\cos \frac{4\pi(t - t_0)}{P} - 1\right)\right),$$

где t — время, a — большая полуось эллиптической орбиты, ε — ее эксцентриситет, P — период обращения спутника, t_0 — время прохождения через перигей. Найти величину скорости изменения расстояния r (так называемую радиальную скорость спутника).

44. Количество тепла Q Дж, необходимого для нагревания 1 кг воды от $0\,^\circ$C до $t\,^\circ$C, определяется формулой

$$Q = t + 2 \cdot 10^{-5} t^2 + 3 \cdot 10^{-7} t^3.$$

Определить теплоемкость воды при $t = 100\,^\circ$C.

45. Масса $m(t)$ радиоактивного вещества изменяется по закону

$$m = m_0 2^{(t_0-t)/T},$$

где t — время, m_0 — масса в момент времени t_0, T — период полураспада. Доказать, что скорость распада радиоактивного вещества пропорциональна количеству вещества. Найти коэффициент пропорциональности.

ОТВЕТЫ

1. 1) В точках $x=2\pi k/3$ угол $\varphi=\operatorname{arctg}3$, в точках $x=\pi(2k+1)/3$ угол $\varphi=\pi-\operatorname{arctg}3$;

2) $\pi/4$;

3) в точке $x=1$ угол $\varphi=\pi/4$, в точке $x=-1$ угол $\varphi=3\pi/4$;

4) $3\pi/4$; 5) $\operatorname{arctg}\alpha$;

6) в точках $x=1$ и $x=2$ угол $\varphi=0$, в точке $x=3$ угол $\varphi=\operatorname{arctg}8$;

7) в точке $x=1$ угол $\varphi=\pi-\operatorname{arctg}(3/2)$, в точке $x=-2$ угол $\varphi=\pi-\operatorname{arctg}(3/4)$;

8) $\operatorname{arctg}(1/2)$; 9) 0;

10) в точке $x=-3$ угол $\varphi=\operatorname{arctg}3$, в точке $x=3$ угол $\varphi==\pi-\operatorname{arctg}3$.

2. 1) $(-1;14)$, $(2;-13)$; 2) $(0;-1)$; $(1;-6)$; $(-2;-33)$;

3) $(-1;-58)$, $(1;54)$, $(7;-2106)$; 4) $(\pi k; 1-5(-1)^k)$, $k\in Z$;

5) $(1;2e)$, $(-3;-6e^{-3})$; 6) $(2;0)$, $(5;-27/4)$; 7) $(3;0)$, $(9/2;27/16)$;

8) $(1/2;-1/2)$; 9) $(-2;1+\sqrt{3})$.

3. 1) $y=-x/2+5/2$; 2) $y=2x$; 3) $y=-3x$; 4) $y=-3x+3\pi/2$;

5) $x=1$; 6) $4x-9y+8=0$; 7) $29x-12y-54=0$; 8) $x-3y=0$;

9) $(1-t_0)e^{-t_0}x-(1+t_0)e^{t_0}y+2t_0^2=0$;

10) $y=(\operatorname{ctg}(t_0/2))x+2a-at_0\operatorname{ctg}(t_0/2)$.

4. $x_0x/a^2+y_0y/b^2=1$. **5.** $(100/x_0;0)$. **6.** $\pi/2-\operatorname{arctg}(7/2)$.

7. 1) $x+2y-\pi-2=0$; 2) $8x+4y-8-\pi=0$; 3) $x=6$;

4) $y-3/\sqrt[3]{2}=2\sqrt[3]{2}(x+3)$; 5) $\sqrt{2px_0}x+py-\sqrt{2px_0}(p+x_0)=0$;

6) $y-\dfrac{1}{4}e^{\pi/3}=-\sqrt{3}\operatorname{ctg}\dfrac{5\pi}{12}\left(x-\dfrac{3}{4}e^{\pi/3}\right)$.

8. $4x-7y+15=0$. **9.** $a^2y_0x+b^2x_0y-x_0y_0(a^2+b^2)=0$.

10. 1) $5x+6y-13=0$; $6x-5y+21=0$;

2) $9x+2y+12=0$; $2x-9y+31=0$;

3) $14x-13y+12=0$; $13x+14y-41=0$; 4) $x+y-2=0$, $y=x$;

5) $y-y_0=\dfrac{x_0^2(6-x_0)}{y_0(4-x_0)^2}(x-x_0)$, $y-y_0=-\dfrac{y_0(4-x_0)^2}{x_0^2(6-x_0)}(x-x_0)$;

6) $x/a+y/b=2$, $ax-by=a^2-b^2$;

7) $3x-y-4=0$, $x+3y-28=0$;

8) $(\pi+4)x+(\pi-4)y-\dfrac{\pi^2\sqrt{2}}{4}=0$, $(\pi-4)x-(\pi+4)y+\pi\sqrt{2}=0$;

9) $x+y-1=0$, $x-y=0$; 10) $7x-10y+6=0$, $10x+7y-34=0$;

11) $3x - y - 1 = 0$, $x + 3y - 7 = 0$.

11. 1) $(0;0)$, $\varphi = \operatorname{arctg}(2/3)$; 2) $(\pi/4 + \pi k; (-1)^k)$, $\varphi = \pi/2$; 3) $(0;0)$, $\varphi = 0$; $(1;1)$, $\varphi = \operatorname{arctg}(1/7)$; 4) $(1;1)$, $\varphi = \operatorname{arctg} 3$; 5) $(1;1)$, $\varphi = \pi/4$; 6) $(\sqrt{e}; 1/2)$, $\varphi = 0$;
7) $(1;1)$, $(4;4)$, $\varphi = \operatorname{arctg}(6/7)$;
8) $(3;34)$, $\varphi = 0$; $(-2;4)$, $\varphi = \operatorname{arctg}(25/153)$;
9) $(2k + 1/2; \varphi(2k + 1/2))$, $k \in Z$, угол равен нулю.

12. 1) $(0;0)$, $\varphi = \pi/2$; $(1;1)$, $\varphi = \operatorname{arctg}(3/4)$;
2) $(1;5/9)$, $\varphi = \operatorname{arctg}(1/3)$; 3) $(2;e)$, $\varphi = \operatorname{arctg}(2/e)$;
4) $(1;+2)$, $\varphi = \operatorname{arctg} 3$; 5) $(1/8;-1/16)$, $\varphi = \pi/2$;
6) $(1;2)$, $\varphi = \operatorname{arctg}(6/5)$; 7) $(8/5;0)$, $\varphi = \operatorname{arctg}(75/31)$;
8) $(e;e)$, $\varphi = \pi/2$.

16. 1) $\pi/2$; 2) 0; 3) $\pi/2$; 4) $\pi/3$; 5) $\operatorname{arctg}(3/4)$; 6) $2\pi/3$; 7) 0; 8) $3\pi/4$; 9) $\pi - 2\operatorname{arctg}(1/18)$; 10) 0.

17. 1) $2\sqrt{2}$; 2) $2\sqrt{2}$; 3) 2; 4) 2. **18.** $1/\ln a$.

19. $|x|/n$, $na^2|x|^{2n-1}$. **20.** 1) $2|x|$, p; 2) $(x^2 - a^2)/|x|$, $|x|$.

23. 1) $2x/3$, $3x^2/2$, $x \neq 0$; 2) $2x$, $1/(2x^2)$.

24. $2a\sin(t/2)\operatorname{tg}(t/2)$, $2a\sin(t/2)$, $2a\sin^2(t/2)\operatorname{tg}(t/2)$, $a\sin t$.

25. a, $a\sin t/|\cos t|$.

28. 1) $\operatorname{arctg}\varphi$; 2) $\operatorname{arctg}\varphi$; 3) $\operatorname{arctg}(1/b)$;
4) $|\pi - \varphi|/2$, $0 \leqslant \varphi < \pi$, $\pi < \varphi < 2\pi$; 5) $\pi/2 - 2\varphi$.

29. $\pi/2$. **31.** $(a/\sqrt{1+b^2})e^{b\varphi}$.

32. $x - y - \dfrac{1+2\sqrt{3}}{4}a = 0$, $r = \dfrac{(1+2\sqrt{3})a}{4(\cos\varphi - \sin\varphi)}$.

33. $\approx 54{,}3$ км/ч. **34.** $-\pi/8$. **35.** 90,75 Дж. **36.** 1/3 м/с.

37. 0,05 м^3/с. **38.** 4π рад/с. **39.** 15 м/с. **40.** ≈ 3 м/мин.

41. $v = (v_0\cos\alpha, v_0\sin\alpha - gt)$, $|v| = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 gt\sin\alpha + g^2t^2}$.

42. $\pi/3$ м/с. **43.** $\dfrac{2\pi a\varepsilon}{P}\sin\dfrac{2\pi(t-t_0)}{P}\left(2\varepsilon\cos\dfrac{2\pi(t-t_0)}{P} + 1\right)$.

44. 1,013 Дж/К. **45.** $-(\ln 2)/T$.

§ 15. Производные и дифференциалы высших порядков

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Производные высших порядков.

1) Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$. Производную $f'(x)$ называют *производной первого порядка* или *первой производной* функции $f(x)$. Если первая производная $f'(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$, то ее производную называют *второй*

производной или *производной второго порядка* функции $f(x)$. Для производной второго порядка приняты следующие обозначения:

$$f''(x),\ f^{(2)}(x),\ \frac{d^2f(x)}{dx^2},\ f''_{xx},\ f''_{x^2}.$$

2) Аналогично определяется производная

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^nf(x)}{dx^n}$$

порядка $n \in N$: если на интервале $(a;b)$ существует производная порядка $n-1$, то ее первая производная называется *производной порядка* n, т. е. по определению

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))', \quad n \in N;$$

при этом под производной $f^{(0)}(x)$ нулевого порядка подразумевается функция $f(x)$.

3) Если $s = s(t)$ — закон прямолинейного движения материальной точки, то $s''(t)$ есть ускорение этой точки в момент времени t. В этом заключается физический смысл второй производной.

4) При вычислении производных высших порядков часто используются следующие основные формулы:

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a, \tag{1}$$

в частности,

$$(e^x)^{(n)} = e^x; \tag{2}$$

$$(\sin \alpha x)^{(n)} = \alpha^n \sin(\alpha x + (\pi n)/2); \tag{3}$$

$$(\cos \alpha x)^{(n)} = \alpha^n \cos(\alpha x + (\pi n)/2); \tag{4}$$

$$((ax+b)^\alpha)^{(n)} = a^n\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(ax+b)^{\alpha-n}; \tag{5}$$

$$(\log_a |a|)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln a}, \tag{6}$$

в частности,

$$(\ln |x|)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}. \tag{7}$$

5) Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные порядка n, то функции $\alpha u(x) + \beta v(x)$, где α и β — постоянные, и $u(x)v(x)$ также имеют производные порядка n, причем

$$(\alpha u + \beta v)^{(n)} = \alpha u^{(n)} + \beta v^{(n)}, \tag{8}$$

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}. \tag{9}$$

Последняя формула называется *формулой Лейбница*.

2. Дифференциалы высших порядков. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$. Ее дифференциал

$$dy = f'(x)dx,$$

который называют также ее *первым дифференциалом*, зависит от двух переменных x и dx. Пусть производная $f'(x)$ также дифференцируема на интервале $(a; b)$. Тогда при фиксированном dx дифференциал dy является функцией только x, для которой можно в свою очередь вычислить дифференциал, причем в качестве приращения Δx независимой переменной x взять то же самое приращение, которое было выбрано при нахождении первого дифференциала функции $f(x)$, т. е. dx. Вычисленный при этом условии дифференциал от первого дифференциала называется *вторым дифференциалом* или *дифференциалом второго порядка* функции $y = f(x)$ и обозначается d^2y или d^2f.

Таким образом, по определению

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (df'(x))dx = f''(x)dxdx = f''(x)(dx)^2,$$

или

$$d^2y = f''(x)dx^2. \tag{10}$$

Аналогично, в случае, когда функция $y = f(x)$ на интервале $(a; b)$ имеет производную порядка n, определяется n-й дифференциал d^ny как первый дифференциал от $(n-1)$-го дифференциала при условии, что при вычислении первого дифференциала в качестве приращения Δx берется то приращение dx, которое выбиралось при вычислении $(n-1)$-го дифференциала.

Методом индукции для n-го дифференциала получается формула

$$d^ny = f^{(n)}(x)dx^n. \tag{11}$$

Дифференциал n-го порядка независимой переменной x при $n > 1$ по определению считается равным нулю, т. е.

$$d^nx = 0 \quad \text{при} \quad n > 1.$$

Если для функций $u(x)$ и $v(x)$ дифференциалы d^nu и d^nv существуют, то функции $\alpha u(x) + \beta v(x)$, где α и β — постоянные, и $u(x)v(x)$ также имеют дифференциалы n-го порядка. причем

$$d^n(\alpha u + \beta v) = \alpha d^nu + \beta d^nv, \quad d^n(uv) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d^{n-k}u \cdot d^kv.$$

Замечание. Формула (10) и формула (11) при $n > 1$ справедливы только тогда, когда x является независимой переменной. Для сложной функции $y = y(x(t))$ формула (13) обобщается следующим образом:

$$d^2y = d(dy) = d(y'_x dx) = (dy'_x)dx + y'_x d(dx),$$

т. е.

$$d^2y = y''_{xx}dx^2 + y'_x d^2x. \tag{12}$$

В случае, когда x — независимая переменная, $d^2x = 0$ и формула (12) совпадает с формулой (10).

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Найти производную второго порядка функции
$$f(x) = \ln|1+x|.$$

▲ Так как $f'(x) = 1/(1+x)$, то
$$f''(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad x \neq -1. \ ▲$$

Пример 2. Найти производную порядка n функции $f(x) = 2^{3x}$.

▲ Так как
$$f'(x) = 2^{3x} \cdot 3\ln 2,$$
$$f''(x) = (2^{3x} \cdot 3\ln 2)' = 2^{3x} \cdot 3^2 \ln^2 2,$$
$$f'''(x) = (2^{3x} \cdot 3^2 \ln^2 2)' = 2^{3x} \cdot 3^3 \ln^3 2,$$
то естественно предположить, что
$$f^{(n)}(x) = 2^{3x} \cdot 3^n \ln^n 2.$$

Докажем справедливость этой формулы методом математической индукции. При $n = 1$ формула верна. Предположим, что она верна при $n = k$, т. е.
$$f^{(k)}(x) = 2^{3x} \cdot 3^k \ln^k 2.$$
Тогда
$$f^{(k+1)}(x) = (2^{3x} \cdot 3^k \ln^k 2)' = 2^{3x} \cdot 3^{k+1} \ln^{k+1} 2$$
и, следовательно, формула верна и при $n = k+1$. Отсюда вытекает ее справедливость при всех значениях n. ▲

Пример 3. Найти производную порядка n функции $f(x)$, если:
1) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$; 2) $f(x) = x^2 \cos 2x$.

▲ 1) Представим данную функцию в виде (разложим на элементарные дроби; см. §6)
$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right).$$
Согласно формуле (8) имеем
$$\left(\frac{1}{x^2-4}\right)^{(n)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+2}\right)^{(n)}.$$
Положив в формуле (5) $\alpha = -1$, $a = 1$, $b = \pm 2$, получим
$$\left(\frac{1}{x\pm 2}\right)^{(n)} = (-1)(-2)...(-1-n+1)(x\pm 2)^{-1-n} = (-1)^n n!\, \frac{1}{(x\pm 2)^{n+1}}.$$
Следовательно,
$$\left(\frac{1}{x^2-4}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{4}\left(\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x+2)^{n+1}}\right).$$

2) Применим формулу Лейбница (9), положив в ней $u = \cos 2x$, $v = x^2$:
$$(x^2\cos 2x)^{(n)} =$$
$$= C_n^0 x^2 (\cos 2x)^{(n)} + C_n^1 (x^2)'(\cos 2x)^{(n-1)} + C_n^2 (x^2)''(\cos 2x)^{(n-2)}.$$

Остальные слагаемые равны нулю, так как

$$(x^2)^{(k)} = 0 \quad \text{при} \quad k > 2.$$

Для вычисления производных порядка n, $n-1$ и $n-2$ функции $\cos 2x$ используем формулу (4):

$$(\cos 2x)^{(n)} = 2^n \cos\left(2x + \frac{\pi n}{2}\right),$$

$$(\cos 2x)^{(n-1)} = 2^{n-1} \cos\left(2x + \frac{\pi(n-1)}{2}\right) = 2^{n-1} \sin\left(2x + \frac{\pi n}{2}\right),$$

$$(\cos 2x)^{(n-2)} = 2^{n-2} \cos\left(2x + \frac{\pi(n-2)}{2}\right) = -2^{n-2} \cos\left(2x + \frac{\pi n}{2}\right).$$

Следовательно,

$$(x^2 \cos 2x)^{(n)} = $$

$$= 2^n\left(x^2 - \frac{n(n-1)}{4}\right) \cos\left(2x + \frac{\pi n}{2}\right) + 2^n n x \sin\left(2x + \frac{\pi n}{2}\right). \ \blacktriangle$$

Пример 4. Для функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$ вычислить $f^{(n)}(0)$.

▲ Так как $f'(x) = 1/(1+x^2)$, то

$$(1+x^2)f'(x) = 1.$$

Вычислим производные порядка $n-1$ от обеих частей этого равенства. Для вычисления производной от левой части применим формулу Лейбница, положив в ней $u = f'(x)$, $v = 1 + x^2$. Получим

$$(1+x^2)f^{(n)}(x) + 2(n-1)xf^{(n-1)}(x) + (n-1)(n-2)f^{(n-2)}(x) = 0,$$

откуда при $x = 0$ найдем рекуррентное соотношение

$$f^{(n)}(0) = -(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0).$$

При четном n $(n = 2k)$, поскольку $f^{(2)}(0)$, получаем

$$f^{(2k)}(0) = 0.$$

При нечетном n $(n = 2k+1)$, поскольку $f'(0) = 1$, находим

$$f^{(2k+1)}(0) = -(2k)(2k-1)f^{(2k-1)}(0) = \ldots$$

$$\ldots = (-1)^k (2k)! f'(0) = (-1)^k (2k)!. \ \blacktriangle$$

Пример 5. Найти вторую производную функции, обратной к функции

$$y = x + x^5, \quad x \in R.$$

▲ Данная функция всюду непрерывна и строго монотонна, ее производная $y = 1 + 5x^4$ не обращается в нуль ни в одной точке, поэтому

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{1+5x^4}.$$

Дифференцируя это тождество по y, получим

$$x''_{yy} = \left(\frac{1}{1+5x^4}\right)'_x \cdot x'_y = \frac{-20x^3}{(1+5x^4)^3}. \ \blacktriangle$$

Пример 6. Функция $y = f(x)$ задана параметрически формулами

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad t \in (0; 2\pi).$$

Найти y''_{xx}.

▲ По формуле (3) § 13 находим

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{2\sin(t/2)\cos(t/2)}{2\sin^2(t/2)},$$

т. е. $y'_x = \operatorname{ctg}(t/2)$. Дифференцируя обе части полученного равенства по x, получим

$$y''_{xx} = \left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right)'_t \cdot t'_x = \left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} =$$

$$= -\frac{1}{2\sin^2(t/2)} \cdot \frac{1}{1 - \cos t} = -\frac{1}{4\sin^4(t/2)}. \ ▲$$

Пример 7. Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрически формулами

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in (a; b),$$

и пусть $x(t)$ и $y(t)$ дважды дифференцируемы и $x'(t) \neq 0$ при $t \in (a; b)$. Найти y''_{xx}.

▲ По формуле (3) § 13 находим первую производную $f'(x)$:

$$y'_x = y'_t / x'_t.$$

Дифференцируя обе части этого равенства по x, получаем

$$y''_{xx} = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t \cdot t'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t},$$

т. е.

$$y''_{xx} = \frac{x'_t y''_{tt} - y'_t x''_{tt}}{x'^3_t}. \ ▲$$

Пример 8. Пусть $y = y(x)$, $|x| > a$, — положительная функция, заданная неявно уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Найти y''_{xx}.

▲ Для нахождения y'_x воспользуемся уравнением (4) § 13, которое в данном случае имеет вид

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = 0.$$

Дифференцируя, получаем

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2}\, y'_x = 0. \tag{13}$$

Из этого уравнения находим $y'_x = \dfrac{b^2 x}{a^2 y}$, $|x| > a$, $y > 0$. Дифференцируя по x обе части равенства (13), найдем

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}(y'_x)^2 - \frac{y}{b^2}\, y''_{xx} = 0.$$

Следовательно,

$$y''_{xx} = \frac{1}{y}\left(\frac{b^2}{a^2} - (y'_x)^2\right) = \frac{1}{y}\left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{b^4}{a^4}\frac{x^2}{y^2}\right) =$$
$$= -\frac{b^4}{a^2y^3}\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) = -\frac{b^4}{a^2y^3}, \quad y > 0. \ \blacktriangle$$

Пример 9. Определить, какого порядка производными обладает в точке $x = 0$ функция $y = |x|^3$.

▲ Если $x \neq 0$, то

$$y'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{при} \quad x > 0, \\ -3x^2 & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

При $x = 0$ по определению производной находим

$$y'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(0 + \Delta x) - y(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|^3}{\Delta x} = 0.$$

Таким образом, первая производная существует при всех x, причем

$$y'(x) = 3x^2 \operatorname{sign} x.$$

Аналогично, для второй производной получаем

$$y''(x) = \begin{cases} 6x & \text{при} \quad x > 0, \\ -6x & \text{при} \quad x < 0, \end{cases}$$

$$y''(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y'(0 + \Delta x) - y'(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x^2 \operatorname{sign} \Delta x}{\Delta x} = 0,$$

т. е. вторая производная существует при всех x, причем

$$y''(x) = 6|x|.$$

Функция $|x|$ недифференцируема в точке $x = 0$. Следовательно, данная функция $y = |x|^3$ обладает в точке $x = 0$ производными до второго порядка включительно. ▲

Пример 10. Найти второй дифференциал функции $y = xe^{-x}$, считая x независимой переменной.

▲ 1-й способ. По определению второго дифференциала находим

$$d^2y = d(dy) = d(xde^{-x} + e^{-x}dx) = d(-xe^{-x}dx + e^{-x}dx) =$$
$$= -d(xe^{-x})dx + (de^{-x})dx = -(xde^{-x} + e^{-x}dx)dx - e^{-x}dx^2 =$$
$$= xe^{-x}dx^2 - e^{-x}dx^2 - e^{-x}dx^2 = (x-2)e^{-x}dx^2.$$

2-й способ. Вычисляем вторую производную:

$$y'' = (xe^{-x})'' = (e^{-x} - xe^{-x})' = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = (x-2)e^{-x},$$

и по формуле (13) находим

$$d^2y = (x-2)e^{-x}dx^2. \ \blacktriangle$$

Пример 11. Найти второй дифференциал функции $y = \sin x^2$, считая x:

а) функцией некоторой независимой переменной;

б) независимой переменной.

▲ а) 1-й способ. По определению второго дифференциала имеем
$$d^2y = d(d\sin x^2) = d(2x\cos x^2 dx) = (2x\cos x^2)d^2x + \\ + (d(2x\cos x^2))dx = 2x\cos x^2 d^2x + (2\cos x^2 - 4x^2\sin x^2)dx^2.$$

2-й способ. Вычисляем первую и вторую производные данной функции по x:
$$y'_x = 2x\cos x^2, \quad y''_{xx} = 2\cos x^2 - 4x^2\sin x^2.$$
Согласно формуле (18) получаем
$$d^2y = (2\cos x^2 - 4x^2\sin x^2)dx^2 + 2x\cos x^2 d^2x.$$

б) В этом случае $d^2x = 0$ и, следовательно,
$$d^2y = (2\cos x^2 - 4x^2\sin x^2)dx^2. \ ▲$$

Пример 12. Найти d^2y, если $y = u/v$ и du, dv, d^2u, d^2v известны.

▲ При решении используем свойства первого дифференциала (§ 13):
$$d^2\left(\frac{u}{v}\right) = d\left(d\frac{u}{v}\right) = d\left(\frac{v\,du - u\,dv}{v^2}\right) = \frac{v^2d(v\,du - u\,dv) - (v\,du - u\,dv)dv^2}{v^4} = \\ = \frac{v^2(v\,d^2u + dv\,du - u\,d^2v - du\,dv) - 2v(v\,du - u\,dv)dv}{v^4} = \\ = \frac{1}{v}\,d^2u - \frac{u}{v^2}\,d^2v - \frac{2}{v^2}\,du\,dv + \frac{2u}{v^3}\,dv^2. \ ▲$$

ЗАДАЧИ

1. Найти производную второго порядка:

1) $y = x^2 + 13x + 11$; 2) $y = 1 + 10x + \dfrac{1}{x^{98}}$;

3) $y = \dfrac{x(1 + 3\sqrt{1 - x^2})}{\sqrt{1 - x^2}}$; 4) $y = \cos^2 x$; 5) $y = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x$;

6) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$; 7) $y = \operatorname{arctg}(x + \sqrt{x^2 + 1})$;

8) $y = \operatorname{arcctg}\dfrac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}$; 9) $y = \arcsin\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$;

10) $y = 2\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt[4]{x^4 + 1}}{x} - \ln\dfrac{\sqrt[4]{1 + x^4} + x}{\sqrt[4]{1 + x^4} - x}$.

2. Найти вторую производную в указанной точке:

1) $y = e^{\sqrt{x}}$, $x = 4$; 2) $y = \dfrac{x^5}{(x - 1)^4}$, $x = 5$; 3) $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $x = 0$;

4) $y = e^{\sin x}\cos(\sin x)$, $x = 0$.

3. Точка движется по закону $s(t) = 2t^2 + \dfrac{5}{3}t^3$ (s измеряется в метрах, t — в секундах). Найти ее ускорение через 5 с после начала движения.

4. Доказать, что при движении тела по закону $s(t) = ae^t + be^{-t}$ его ускорение численно равно пройденному пути.

5. Доказать, что при движении тела по закону $s(t) = \sqrt{t}$ его ускорение пропорционально кубу скорости.

6. Одна точка движется по закону $s_1(t) = t^3 + \dfrac{t^2}{2} + t + \dfrac{1}{2}$, другая — по закону $s_2(t) = \dfrac{2}{3}\,t^3 + 3t^2 - 5t$ (s_1, s_2 измеряются в метрах, t — в секундах). Найти ускорения точек в тот момент, когда их скорости равны.

7. Найти величину силы, действующей на точку с массой $m = 0{,}1$, движущуюся по закону $s(t) = t^2 - 4t^4$ в момент времени $t = 3$ (m, s, t заданы в системе СИ).

8. По окружности радиуса 5 м движется точка с постоянной угловой скоростью 2 рад/с. Найти величину ускорения точки.

9. Найти второй дифференциал функции;
1) $y = (x^2 + x + 1)e^{-x}$; 2) $y = 2x + \operatorname{ctg} 2x$;
3) $y = x(\cos\ln x + \sin\ln x)$; 4) $y = x^x$.

10. Найти второй дифференциал функции в указанной точке:
1) $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$, $x = 1$; 2) $y = \dfrac{3x + 2}{x^2 - 2x + 5}$, $x = 0$;
3) $y = x\sqrt[3]{(x-5)^2}$, $x = -3$; 4) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{2 + x^2}{2 - x^2}$, $x = 0$.

11. Определить, удовлетворяет ли функция $y = y(x)$ заданному уравнению:
1) $y = A\cos ax + B\sin ax$, $y'' + a^2y = 0$;
2) $y = Ae^{ax} + Be^{-ax}$, $y'' - a^2y = 0$;
3) $y = (A\cos 3x + B\sin 3x)e^{-x}$, $y'' + 2y' + 10y = 0$;
4) $y = Ae^x + Be^{-x} - \dfrac{1}{x}$, $y'' - y = \dfrac{x^2 - 2}{x^3}$;
5) $y = 1 + \cos e^x + \sin e^x$, $y'' - y' + e^{2x}y = 0$;
6) $y = (x + \sqrt{1 + x^2})^{10}$, $(1 + x^2)y'' + xy' - 100y = 0$;
7) $y = e^{10\arcsin x}$, $(1 - x^2)y'' - xy' - 100y = 0$;
8) $y = \cos(10\arccos x)$, $(1 - x^2)y'' - xy' + 100y = 0$.

12. Найти y'', считая известными u', u'', v', v'':
1) $y = (v + 2u)/u$; 2) $y = e^{uv}$; 3) $y = \operatorname{arctg}(v/u)$;
4) $y = \ln\sqrt{u^2 + v^2}$.

13. Найти d^2y, считая известными du, d^2u, dv, d^2v:
1) $y = u(2 + v)$; 2) $y = u\ln v$; 3) $y = \sqrt{u^2 + v^2}$; 4) $y = u^v$.

14. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для функции, заданной параметрически уравнениями:

1) $x = t^3,\ y = t^2$; 2) $x = \dfrac{t^2}{1+t^3},\ y = \dfrac{t^3}{1+t^3}$;

3) $x = \ln\cos t,\ y = \ln\cos 2t$; 4) $x = a\cos t,\ y = b\sin t$;

5) $x = (1+\cos^2 t)\sin t,\ y = \sin^2 t\cos t$;

6) $x = t\,\mathrm{ch}\,t - \mathrm{sh}\,t,\ y = t\,\mathrm{sh}\,t - \mathrm{ch}\,t$;

7) $x = \dfrac{e^t}{1+t},\ y = (t-1)e^t$; 8) $x = \dfrac{1}{\cos t},\ y = \mathrm{tg}\,t - t$;

9) $x = \sin\log_2 t,\ y = \mathrm{tg}\,\log_2 t$; 10) $x = 2^{\cos^2 t},\ y = 2^{\sin^2 t}$.

15. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ в заданной точке:

1) $x = (t^2+1)e^t,\ y = t^2e^{2t},\ (1;0)$; 2) $x = \dfrac{2t-t^2}{t-1},\ y = \dfrac{t^2}{t-1},\ (0;4)$;

3) $x = \ln(1+\sin\varphi),\ y = \ln(1-\cos 2\varphi),\ (\ln(3/2);\ \ln(1/2))$;

4) $x = \mathrm{ch}\,t\sin t + \mathrm{sh}\,t\cos t,\ y = \mathrm{ch}\,t\cos t - \mathrm{sh}\,t\sin t,\ (0;1)$.

16. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для функции, заданной параметрически уравнениями:

1) $x = -2+3t-t^3,\ y = t+2t^2+t^3$; 2) $x = \ln\,\mathrm{tg}\,(t/2),\ y = \ln\,\mathrm{tg}\,t$;

3) $x = \log_5\sin t,\ y = \log_5\cos t$; 4) $x = \arcsin\,\mathrm{tg}\,t,\ y = \sqrt{\cos 2t}$.

17. Доказать, что функция $y = y(x)$, заданная параметрически, удовлетворяет заданному уравнению:

1) $x = t^3+t,\ y = \dfrac{3}{4}t^4 + \dfrac{1}{2}t^2+1,\ y''(1+3y'^2) = 1$;

2) $x = e^t\cos t,\ y = e^t\sin t,\ -\pi/4 < t < \pi/4,\quad (x-y)^2y'' = 2(xy'-y)$;

3) $x = \sin t,\ y = Ae^{\sqrt{2}t} + Be^{-\sqrt{2}t},\ -\pi/2 < t < \pi/2$, A и B — произвольные постоянные, $(1-x^2)y'' - xy' - 2y = 0$;

4) $x = 3At^2 + \ln Bt,\ y = 2At^3 + t$, A и B — произвольные положительные постоянные, $(3y-2y')y'' = y'^2$.

18. Найти $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ для функции, заданной параметрически уравнениями:

1) $x = a\cos t,\ y = a\sin t$; 2) $x = a\,\mathrm{ch}\,t,\ y = a\,\mathrm{sh}\,t$;

3) $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$; 4) $x = a(t-\sin t),\ y = a(1-\cos t)$;

5) $x = e^{-t}\cos t,\ y = e^{-t}\sin t$; 6) $x = \cos t - \ln\,\mathrm{ctg}\,(t/2),\ y = \sin t$.

19. Найти $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ для функции, заданной параметрически уравнениями:

1) $x = a\cos^2 t,\ y = b\sin^2 t$; 2) $x = \cos t,\ y = \cos nt,\ n \in N$;

3) $x = t^2-t+1,\ y = t^2+t+1$; 4) $x = \dfrac{t}{t+1},\ y = \dfrac{2t^2+t}{(t+1)^2}$.

20. Пусть для функции $y = f(x)$ известны $f'(x),\ f''(x),\ f'''(x)$. Найти вторую и третью производные обратной функции $x = f^{-1}(y)$, предполагая, что они существуют.

21. Для функции $y = y(x)$, заданной неявно, найти y'':

1) $x^2 + y^2 = a^2$; 2) $x^2 - y^2 = a^2$; 3) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; 4) $y^2 = 2px$;
5) $e^{x-y} = x + y$; 6) $e^{2y} - 2\ln x - 1 = 0$; 7) $y - x \operatorname{tg} \ln\sqrt{x^2 + y^2} = 0$;
8) $y^2 = e^{x^4 - y^2}$.

22. Найти d^2y в точке $(x_0; y_0)$ для функции $y = y(x)$, заданной неявно:

1) $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$, $(1; 1)$;
2) $2\ln(y - x) + \sin xy = 0$, $(0; 1)$; 3) $x^3 y + \arcsin(y - x) = 1$, $(1; 1)$;
4) $3(y - x + 1) + \operatorname{arctg}(y/x) = 0$, $(1; 0)$.

23. Доказать, что функция $y = y(x)$, заданная неявно, удовлетворяет уравнению:

1) $y = A\ln y + x + B$, $y \cdot y'' = (y')^2 - (y')^3$;
2) $(A + Bx)e^{y/x} = x$, $x^3 y'' = (xy' - y)^2$.

24. Найти $y^{(n)}(x)$ для заданной функции:

1) $y = x^3 + x + e^{3x}$; 2) $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$; 3) $y = \dfrac{1+x}{1-x}$;
4) $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$; 5) $y = \ln(ax + b)$; 6) $y = \sin^2 x$;
7) $y = \sin ax \sin bx$; 8) $y = \operatorname{ch} ax \operatorname{ch} bx$; 9) $y = \sin^2 x \sin 2x$;
10) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$; 11) $y = \cos^4 x$; 12) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$;
13) $y = \dfrac{x}{x^2 - 4x - 12}$; 14) $y = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$; 15) $y = \dfrac{3 - 2x^2}{2x^2 + 3x - 2}$.

25. Найти $y^{(n)}(x)$ для заданной функции:

1) $y = (x - 1)2^{x-1}$; 2) $y = (2x - 1)2^{3x} \cdot 3^{2x}$; 3) $y = (3 - 2x)^2 e^{2-3x}$;
4) $y = x\log_2(1 - 3x)$; 5) $y = \ln(x - 1)^{2x}$; 6) $y = x\ln\dfrac{3+x}{3-x}$;
7) $y = x\ln(x^2 - 3x + 2)$; 8) $y = x\cos x$; 9) $y = 2x\cos^2(x/3)$;
10) $y = (x^2 + x)\cos^2 x$.

26. Найти $y^{(n)}(x)$ для заданной функции:

1) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-5x}}$; 2) $\dfrac{x^2}{\sqrt{1-2x}}$; 3) $y = e^{ax}\cos(bx + c)$;
4) $y = e^{2x}\sin^2 x$; 5) $y = \operatorname{ch} ax \sin bx$; 6) $y = x^{n-1}e^{1/x}$;
7) $y = x^{n-1}\ln x$; 8) $y = \operatorname{arctg} x$.

27. Вычислить в заданной точке производную указанного порядка n:

1) $y = (2x - 7)^2(3x + 7)^3$; а) $n = 5$, $x = x_0$; б) $n = 6$, $x = x_0$;
2) $y = \sqrt{x}$; $n = 10$, $x = 1$; 3) $y = \dfrac{x^2}{1-x}$; $n = 8$, $x = 0$;

4) $y = \dfrac{x+1}{x^2+x-2}$; $n=13$, $x=-\dfrac{1}{2}$; 5) $y=\sqrt{x^2+3x^3}$; $n=5$, $x=1$;
6) $y = \dfrac{1-x^2}{\sqrt[3]{2-3x}}$; $n=6$, $x=-1$; 7) $y=x^2\ln x$; $n=100$, $x=1$;
8) $y=(x^2-2x)\cos 3x$; $n=101$, $x=1$;
9) $y=x\sin x\cos 2x$; $n=100$, $x=\pi/2$;
10) $y=(x-\sin x)^2$; $n=16$, $x=\pi/4$;
11) $y=\operatorname{arctg}^2 x$; а) $n=10$, $x=0$; б) $n=11$, $x=0$.

28. Вычислить в заданной точке дифференциал указанного порядка n:
1) $y=(x+5)^5$; $n=3$, $x=0$; 2) $y=\dfrac{7x+1}{(3x-2)^2}$; $n=10$, $x=1$;
3) $y=(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1})^2$; $n=16$, $x=1$;
4) $y=\sin x\sin 2x\sin 3x$; $n=10$, $x=\pi/6$;
5) $y=(2x^2+1)\operatorname{sh}^2 x$; $n=8$, $x=0$;
6) $y=\arcsin x$; а) $n=19$, $x=0$; б) $n=20$, $x=0$.

29. Определить, какого порядка производными обладает в точке $x=0$ функция $y=y(x)$, и вычислить в этой точке все существующие производные:

1) $y(x)=\begin{cases} 1-\cos x, & \text{если} \quad x<0, \\ \ln(1+x)-x, & \text{если} \quad x\geqslant 0; \end{cases}$

2) $y(x)=\begin{cases} 2x\cos x, & \text{если} \quad x<0, \\ \sin 2x, & \text{если} \quad x\geqslant 0; \end{cases}$

3) $y(x)=\begin{cases} \operatorname{sh} x - x, & \text{если} \quad x<0, \\ x-\sin x, & \text{если} \quad x\geqslant 0; \end{cases}$

4) $y(x)=\begin{cases} \operatorname{sh} x, & \text{если} \quad x<0, \\ \sin x\operatorname{ch} x, & \text{если} \quad x\geqslant 0; \end{cases}$

5) $y(x)=\begin{cases} x^{10}, & \text{если} \quad x \text{ — рациональное число}, \\ -x^{10}, & \text{если} \quad x \text{ — иррациональное число}; \end{cases}$

6) $y(x)=\begin{cases} x^{100}\sin(1/x), & \text{если} \quad x\neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x=0; \end{cases}$

7) $y(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если} \quad x\neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x=0. \end{cases}$

30. Пусть $f(x)\in C^{n-1}[0;+\infty)$. Доказать, что существуют числа a_k $(1\leqslant k\leqslant n)$ такие, что функция

$$\varphi(x)=\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k f(-kx), & \text{если} \quad x<0, \\ f(x), & \text{если} \quad x\geqslant 0, \end{cases}$$

непрерывно дифференцируема на всей оси.

31. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема и удовлетворяет условию $\varphi'(x) = f(\varphi(x))$, где f имеет производные всех порядков. Доказать, что $\varphi(x)$ также имеет производные всех порядков.

32. Доказать, что если $f^{(n)}$ существует, то

$$\left(x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

33. Пусть $P_{n,m}(x) = \dfrac{d^n}{dx^n}(1-x^m)^n$, $m > 0$. Найти $P_{n,m}(1)$.

ОТВЕТЫ

1. 1) 2; 2) $9702/x^{100}$; 3) $3x(1-x^2)^{-5/2}$; 4) $-2\cos 2x$; 5) $4\operatorname{ch} 2x$; 6) $-x(x^2+1)^{-3/2}$; 7) $-x(1+x^2)^{-2}$; 8) $(x-1)(2x-x^2)^{-3/2}$; 9) $-4x \operatorname{sign} x/(l+x^2)^2$, $x \neq 0$; 10) $4x^3(1+x^4)^{-5/4}$.

2. 1) $e^2/32$; 2) $625/1024$; 3) 0; 4) 0. **3.** 54 м/с^2.

6. При $t=2$ с: 13 м/с^2 и 14 м/с^2, при $t=3$ с: 19 м/с^2 и 18 м/с^2.

7. 43 Н. **8.** 20 м/с^2.

9. 1) $(x^2-3x+1)e^{-x}dx^2$; 2) $\dfrac{8\operatorname{ctg} 2x}{\sin^2 2x}dx^2$; 3) $-\dfrac{2\sin\ln x}{x}dx^2$; 4) $(x(1+\ln x)^2+1)x^{x-1}dx^2$.

10. 1) $\dfrac{15}{2}dx^2$; 2) $\dfrac{56}{125}dx^2$; 3) $-\dfrac{5}{8}dx^2$; 4) dx^2.

11. 1)–4) удовлетворяет при произвольных A и B; 5) не удовлетворяет; 6)–8) удовлетворяет.

12. 1) $\dfrac{u^2v''-uvu''-2uu'v'+2v(u')^2}{u^3}$;

2) $(uv''+2u'v'+vu''+(uv'+vu')^2)e^{uv}$;

3) $\dfrac{(u^2+v^2)(uv''-vu'')+2uv(u')^2+2(v^2-u^2)u'v'-2uv(v')^2}{(u^2+v^2)^2}$;

4) $\dfrac{(u^2+v^2)(uu''+vv'')+(v^2-u^2)(u')^2-4uvu'v'+(u^2-v^2)(v')^2}{(u^2+v^2)^2}$.

13. 1) $(v+2)d^2u+2\,du\,dv+u\,d^2v$;

2) $\ln v\,d^2u+\dfrac{2}{v}\,du\,dv+\dfrac{u}{v}d^2v-\dfrac{u}{v^2}dv^2$;

3) $\dfrac{(u^2+v^2)(u\,d^2u+v\,d^2v)+(v\,du-u\,dv)^2}{(u^2+v^2)^{3/2}}$;

4) $u^v\left(\dfrac{v}{u}\,d^2u+\ln u\,d^2v+\dfrac{v(v-1)}{u^2}\,du^2+\dfrac{2(v\ln u+1)}{u}\,du\,dv+\ln^2 u\,dv^2\right)$.

14. 1) $-\dfrac{2}{9t^4}$; 2) $\dfrac{6}{t}\left(\dfrac{1+t^3}{2-t^3}\right)^3$; 3) $-8\dfrac{\cos^2 t}{\cos^2 2t}$; 4) $-\dfrac{b}{a^2\sin^3 t}$; 5) $1/(\cos^3 t(3\cos^3 t-1))$; 6) $-1/(t\operatorname{sh}^3 t)$; 7) $2(1+t)^3/(te^t)$; 8) $\cos^3 t/\sin t$; 9) $(3\sin\log_2 t)/(\cos^5\log_2 t)$; 10) $2^{3\sin^2 t-1}$.

15. 1) 2; 2) 1/2; 3) -12; 4) $-1/2$.

16. 1) $-12(t+1)^{-1}(3t+1)^{-3}$; 2) $-\sin^2 t\cos t$; 3) $-2\ln 5\dfrac{\cos^2 t}{\sin^4 t}$;

4) $2\sqrt{\cos 2t}\,\dfrac{\sin^2 t - \cos 2t}{\sin^3 2t \cos t}$.

18. 1) $-\dfrac{3\cos t}{a^2 \sin^5 t}$; 2) $\dfrac{3\,\mathrm{ch}\, t}{a^2\,\mathrm{sh}^5 t}$; 3) $\dfrac{\cos^2 t - 4\sin^2 t}{9a^2\cos^7 t \sin^3 t}$; 4) $\dfrac{\cos(t/2)}{4a^2\sin^7(t/2)}$;

5) $\dfrac{4e^{2t}(2\sin t - \cos t)}{(\sin t + \cos t)^5}$; 6) $\dfrac{\sin t(1 + 3\sin^2 t)}{\cos^7 t}$.

19. 1) $y' = -b/a$, $y^{(n)} = 0$, $n > 1$; 2) $y^{(n)} = 2^{n-1}n!$;

3) $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}2^n(2n-3)!!}{(2t-1)^{2n-1}}$;

4) $y' = 2x + 1$, $y'' = 2$, $y^{(n)} = 0$, $n > 2$.

20. $x'' = -f''/(f')^3$, $x''' = (3(f'')^2 - f'f''')/(f')^5$.

21. 1) $-a^2/y^3$; 2) $-a^2/y^3$; 3) $-b^4/(a^2y^3)$; 4) $-p^2/y^3$;

5) $4(x+y)/(x+y+1)^3$; 6) $-(3 + 2\ln x)/(x^2(1 + 2\ln x)^2)$;

7) $\dfrac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$; 8) $\dfrac{2x^2y(3y^4 + 2(3 - x^4)y^2 + 3 + 2x^4)}{(y^2+1)^3}$.

22. 1) $-\dfrac{1}{3}\,dx^2$; 2) $-\dfrac{1}{4}\,dx^2$; 3) 0; 4) $\dfrac{3}{8}\,dx^2$.

24. 1) $y^{(n)} = 3^n e^{3x}$, $n > 3$, $y''' = 6 + 27e^{3x}$; $y'' = 6x + 9e^{3x}$,
$y' = 3x^2 + 1 + 3e^{3x}$;

2) $a_0 \cdot n!$; 3) $2 \cdot n!/(1-x)^{n+1}$;

4) $(-1)^{n-1}n!c^{n-1}(ad - bc)(cx + d)^{-n-1}$;

5) $(-1)^{n-1}(n-1)!\,\dfrac{a^n}{(ax+b)^n}$; 6) $-2^{n-1}\cos\left(2x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$;

7) $\dfrac{1}{2}(a-b)^n\cos\left((a-b)x + \dfrac{\pi n}{2}\right) - \dfrac{1}{2}(a+b)^n\cos\left((a+b)x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$;

8) $y^{(2k-1)} = \dfrac{1}{2}(a+b)^{2k-1}\,\mathrm{sh}\,(a+b)x + \dfrac{1}{2}(a-b)^{2k-1}\,\mathrm{sh}\,(a-b)x$,

$y^{(2k)} = \dfrac{1}{2}(a+b)^{2k}\,\mathrm{ch}\,(a+b)x + \dfrac{1}{2}(a-b)^{2k}\,\mathrm{ch}\,(a-b)x$;

9) $2^{n-1}\sin\left(2x + \dfrac{\pi n}{2}\right) + 4^{n-1}\sin\left(4x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$;

10) $4^{n-1}\cos\left(4x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$;

11) $2^{n-1}\cos\left(2x + \dfrac{\pi n}{2}\right) + 2^{2n-3}\cos\left(4x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$;

12) $(2n-1)!!(1-2x)^{-(2n+1)/2}$;

13) $\dfrac{(-1)^n n!}{4}\left(3(x-6)^{-n-1} + (x+2)^{-n-1}\right)$;

14) $n!((1-x)^{-n-1} + (-1)^n(1+x)^{-n-1})$;

15) $(-1)^n n!(2^n(2x-1)^{-n-1} + (x+2)^{-n-1})$.

25. 1) $(\ln^{n-1} 2)2^{x-1}((\ln 2)(x-1) + n)$;

2) $(\ln 72)^{n-1}72^x((\ln 72)(2x-1) + 2n)$;

3) $(-3)^{n-2}(36x^2 - 12(9+2n)x + 81 + 32n + 4n^2)e^{2-3x}$;

4) $\dfrac{(n-2)!3^{n-1}}{\ln 2}(3x-n)(1-3x)^{-n}$, $n > 1$;

5) $(-1)^n 2(n-2)!(x-n)(x-1)^{-n}$, $n>1$;
6) $(n-2)!((3n-x)(3-x)^{-n}+(-1)^n(3n+x)(3+x)^{-n})$, $n>1$;
7) $(-1)^n(n-2)!((x-n)(x-1)^{-n}+(x-2n)(x-2)^{-n})$, $n>1$;
8) $x\cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)+n\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)$;
9) $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(n\sin\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi n}{2}\right)+\frac{2}{3}x\cos\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi n}{2}\right)\right)$, $n>1$;
10) $2^{n-3}\Big((4x^2+4x-n^2+n)\cos\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right)+$
$$+2n(2x+1)\sin\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right)\Big),\quad n>2.$$

26. 1) $\dfrac{5^{n-1}(2n-3)!!}{2^n}(2n-5x)(1-5x)^{-(2n+1)/2}$, $n>1$;
2) $(2n-5)!!(3x^2-2nx+n^2-n)(1-2x)^{-(2n+1)/2}$, $n>2$;
3) $e^{ax}(a^2+b^2)^{n/2}\cos(bx+c+n\varphi)$, $\cos\varphi=a/\sqrt{a^2+b^2}$,
$$\sin\varphi=b/\sqrt{a^2+b^2};$$
4) $2^{n-1}e^{2x}(1-2^{n/2}\cos(2x+\pi n/4))$;
5) $(a^2+b^2)^{n/2}(\operatorname{ch}ax\cos(n\varphi-\pi n/2)\sin(bx+\pi n/2)+$
$$+\operatorname{sh}ax\sin(n\varphi-\pi n/2)\cos(bx+\pi n/2)),$$
$$\cos\varphi=a/\sqrt{a^2+b^2},\quad \sin\varphi=b/\sqrt{a^2+b^2};$$
6) $(-1)^n x^{-n-1}e^{1/x}$; 7) $(n-1)!/x$;
8) $(-1)^{n-1}(n-1)!(1+x^2)^{-n/2}\sin(n\operatorname{arcctg}x)$.

27. 1) а) 12960, б) 0; 2) $-17!!/2^{10}$; 3) $8!$; 4) $-13!(2/3)^{14}$;
5) $-2^{-14}\cdot3^5\cdot5\cdot19$; 6) $336/(625\sqrt[3]{5})$; 7) $-2(97!)$;
8) $10109(3^{99})\sin 3$; 9) $-\frac{\pi}{2}(1+3^{100})$; 10) $\left(16-\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{2}$;
11) а) $2^9\cdot3^2\cdot7\cdot37$, б) 0.

28. 1) $1500dx^3$; 2) $194\cdot10!\,3^9dx^{10}$; 3) $\dfrac{27!!\sqrt{2}}{2^{25}}dx^{16}$;
4) $-2^7\cdot1025\sqrt{3}dx^{10}$; 5) $2^9\cdot29dx^8$; 6) а) $(17!!)^2dx^{19}$, б) 0.

29. 1) $y'(0)=0$, $y''(0)$ не существует;
2) $y'(0)=2$, $y''(0)=0$, $y'''(0)$ не существует;
3) $y'(0)=0$, $y''(0)=0$, $y'''(0)=1$, $y^{(IV)}(0)=0$, $y^{(V)}(0)$ не существует;
4) $y'(0)=1$, $y''(0)=0$, $y'''(0)$ не существует;
5) $y'(0)=0$, $y''(0)$ не существует;
6) $y^{(n)}(0)=0$ для $n\leqslant50$, $y^{(51)}(0)$ не существует;
7) $y^{(n)}(0)=0$, $n\in N$.

33. $(-1)^n m^n n!$.

ГЛАВА 4

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

§ 16. Теоремы о среднем для дифференцируемых функций

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Теорема Ролля. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, имеет во всех его внутренних точках конечную или определенного знака бесконечную производную и $f(a) = f(b)$, то существует такая точка $\xi \in (a;b)$, что*

$$f'(\xi) = 0. \tag{1}$$

Условие (1) означает, что в точке $(\xi; f(\xi))$ графика функции f касательная к нему горизонтальна (рис. 16.1). В условиях теоремы

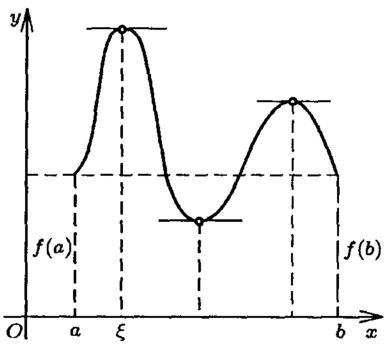

Рис. 16.1

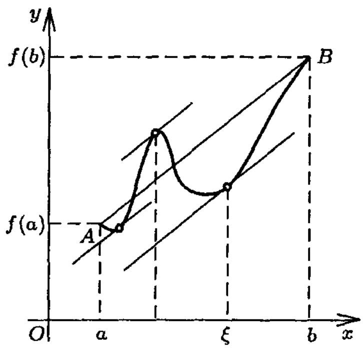

Рис. 16.2

Ролля среди точек ξ, удовлетворяющих условию (1), всегда существует точка, в которой функция f имеет экстремум.

Теорема Лагранжа. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$ и имеет во всех его внутренних точках конечную или определенного знака бесконечную производную, то существует такая точка $\xi \in (a;b)$, что*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \tag{2}$$

Формула (2) называется *формулой конечных приращений Лагранжа*. Ее геометрический смысл состоит в том, что в условиях теоремы на графике функции f найдется точка, $(\xi; f(\xi))$, $a < \xi < b$, в которой касательная к графику параллельна хорде графика (рис. 16.2), соединяющей точки $(a; f(a))$ и $(b; (f(b))$. Действительно, если формулу (2) переписать в виде

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi), \tag{3}$$

то ее левая часть равна тангенсу угла, образованного указанной хордой с осью x, а правая — тангенсу угла, образованного соответствующей касательной с той же осью.

Положив $a = x$, $b - a = h$, формулу (2) можно удобно записать в виде

$$f(x+h) - f(x) = f'(x+\theta h)h, \quad 0 < \theta < 1. \tag{4}$$

Следствие 1. *Пусть функция f непрерывна на некотором промежутке и дифференцируема во всех его точках, кроме конечного их множества. Тогда, если производная функции f равна нулю во всех точках, где производная существует, то функция f постоянна на рассматриваемом промежутке.*

Следствие 2. *Пусть функции f и g непрерывны на некотором промежутке и дифференцируемы во всех его точках, кроме конечного их множества (вообще говоря, своего для каждой из них). Если во всех точках, в которых одновременно существуют производные f' и g', они совпадают: $f'(x) = g'(x)$, то на всем рассматриваемом промежутке функции f и g отличаются на постоянную:*

$$f(x) = g(x) + c, \quad c \text{ — const}.$$

Следствие 3. *Пусть функция f непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируема в проколотой окрестности этой точки. Тогда, если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = A$, то функция f дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) = A$.*

Теорема Коши. *Если функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$ и имеют во всех его внутренних точках конечные производные, причем $f'(t) \neq 0$, $a < t < b$, то существует такая точка $\xi \in (a; b)$, что*

$$\frac{\psi(b)-\psi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{\psi'(\xi)}{\varphi'(\xi)}. \tag{5}$$

Если $\varphi(a) \neq \varphi(b)$, то условие $\varphi'(t) \neq 0$ на $(a; b)$ можно заменить условием $[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 > 0$, $a < t < b$.

Геометрический смысл теоремы Коши состоит в том, что на параметрически заданной кривой $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, существует точка $(\varphi(\xi); \psi(\xi))$, $a < \xi < b$, в которой касательная параллельна хорде, соединяющей начало $(\varphi(a); \psi(a))$ и конец $(\varphi(b); \psi(b))$ этой кривой. В самом деле, дроби $\dfrac{\psi'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$ и $\dfrac{\psi(b)-\psi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$ равны соответственно тангенсам углов, образованных указанными касательной и хордой с осью.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема на интервале $(a;b)$, где $a > 0$. Доказать, что существует точка $\xi \in (a;b)$ такая, что

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = f(\xi) - \xi f'(\xi). \tag{6}$$

▲ Применяя теорему Коши к функциям $\psi(t) = f(t)/t$ и $\varphi(t) = 1/t$, получаем

$$\frac{f(b)/b - f(a)/a}{1/b - 1/a} = \frac{(\xi f'(\xi) - f(\xi))/\xi^2}{-1/\xi^2},$$

откуда следует равенство (6). ▲

Пример. Доказать, что все корни *многочленов Лежандра*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

действительные, простые и лежат на интервале $(-1;1)$.

▲ Рассмотрим многочлен $Q_{2n}(x) = (x^2-1)^n$. Он имеет степень $2n$, и его корнями являются $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$, причем каждый корень имеет кратность n. Поэтому если $n > 1$, то производная Q'_{2n} также имеет x_1 и x_2 своими корнями, но уже кратности $n-1$. По теореме Ролля, у производной $Q'_{2n}(x)$ существует еще по крайней мере один корень x_3, лежащий между x_1 и x_2. Поскольку сумма кратностей всех корней многочлена равна его степени, а степень многочлена $Q'_{2n}(x)$ равна $2n-1$, то кратность корня x_3 равна 1 и других корней, кроме x_1, x_2 и x_3, у многочлена Q'_{2n} нет. Продолжая этот процесс, по индукции получим, что производная $Q_{2n}^{(n-1)}(x)$ имеет $n+1$ простых корней x_i $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$. Занумеруем их в порядке возрастания: $-1 = x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} = 1$. По теореме Ролля, на каждом отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ лежит хотя бы один корень производной многочлена $Q_{2n}^{(n-1)}(x)$, т. е. корень многочлена Лежандра, ибо

$$[Q_{2n}^{(n-1)}(x)] = Q_{(2n)}^{(n)}(x) = 2^n n!\, P_n(x).$$

Таким образом, многочлен Лежандра имеет на интервале $(-1;1)$ n различных корней, а так как его степень равна n, то все они простые и других корней, действительных или комплексных, у него нет. ▲

ЗАДАЧИ

1. Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $x(x^2 - 1)$ на отрезках $[-1;1]$ и $[0;1]$.

2. На интервалах $(-1;1)$ и $(1;2)$ найти точки, в которых касательная к графику функции $f(x) = (x^2-1)(x-2)$ горизонтальна.

3. На интервале $(0;1)$ найти такую точку ξ, что касательная к графику функции $y = x^3$ в точке $(\xi;\xi^3)$ будет параллельна хорде графика, соединяющей точки $(0;0)$ и $(1;1)$.

4. Доказать, что между двумя действительными корнями многочлена с действительными коэффициентами имеется корень его производной.

5. Доказать, что если функция f дифференцируема n раз, на отрезке $[a;b]$ и обращается на нем в нуль в $n+1$ точках, то существует такое $\xi \in (a;b)$, что $f^{(n)}(\xi) = 0$.

6. Доказать, что если функция f дифференцируема n раз на отрезке $[a;b]$, $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_k = b$, $x_i \in [a;b]$, n_i — натуральные числа, $n_1 + \ldots + n_k = n - 1$ и $f^{(j_i)}(x_i) = 0$, $j_i = 0, 1, \ldots, n_i - 1$, $i = 1, 2, \ldots, k$, то на отрезке $[a;b]$ существует такая точка ξ, что $f^{(n)}(\xi) = 0$.

7. Доказать, что корни производной многочлена

$$x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

действительные, простые и лежат на интервалах $(0;1)$, $(1;2)$, $(2;3)$, $(3;4)$.

8. Доказать, что все корни уравнения $(1+x^2)^n \dfrac{d^n(1+x^2)^{-1}}{dx^n} = 0$ действительные.

9. Доказать, что все корни уравнения $x^{2n}e^{-1/x} \dfrac{d^n e^{-1/x}}{dx^n} = 0$ действительные.

10. Доказать, что все производные от многочлена с действительными коэффициентами, имеющего только действительные корни, также могут иметь только действительные корни.

11. Доказать, что корни всех производных (порядка $m < 2n$) многочленов Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n(x^2-1)}{dx^n}$$

действительные, простые и лежат в интервале $(-1;1)$.

12. Доказать, что у *многочленов Лагерра*

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n x^n e^{-x}}{dx^n}$$

все корни положительны.

13. Доказать, что у *многочленов Чебышева–Эрмита*

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$$

все корни действительны и лежат в интервале $(-\sqrt{2n+1}; \sqrt{2n+1})$.

14. Применив теорему Лагранжа к функции $1/x^\alpha$, доказать, что при любом $n \in N$ и любом $\alpha > 0$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{n^{\alpha+1}} < \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}\right].$$

15. Пользуясь теоремой Лагранжа, доказать неравенства:
1) $n(b-a)a^{n-1} < b^n - a^n < n(b-a)b^{n-1}$ при $0 < a < b$, $n \in N$;
2) $x/(1+x) < \ln(1+x) < x$ при $x > 0$; 3) $e^x \geqslant 1 + x$ при $x \in R$;
4) $e^x > ex$ при $x > 1$; 5) $x^\alpha |\ln x|, 1/(\alpha e)$ при $0 < x < 1$, $\alpha > 0$.

16. Доказать, что при $x \geqslant 0$ справедливо равенство

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

где $1/4 \leqslant \theta(x) < 1/2$, причем $\lim\limits_{x\to+0} \theta(x) = 1/4$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \theta(x) = 1/2$.

17. Доказать: если функция f дифференцируема n раз при $x \geqslant 0$, $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$, а $f^{(n)}(x) > 0$ при $x > 0$, то и $f(x) > 0$ при $x > 0$.

18. Доказать: если функции f и g дифференцируемы n раз при $x \geqslant 0$ и $f(0) = g(0)$, $f'(0) = g'(0), \ldots, f^{(n-1)}(0) = g^{(n-1)}(0)$, $f^{(n)}(x) > g^{(n)}(x)$ при $x > 0$, то и $f(x) > -g(x)$ при $x > 0$.

19. Доказать, что если функция f дифференцируема и неограниченна на конечном интервале $(a; b)$, то ее производная также неограниченна на этом интервале.

20. Доказать, что если функция f дифференцируема на конечном или бесконечном интервале $(a; b)$ и существуют равные конечные или одного и того же знака бесконечные пределы $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$, то существует такая точка $\xi \in (a; b)$, что $f'(\xi) = 0$.

21. Пусть $f(x) - f(0) = xf'(\xi(x))$, $0 < \xi(x) < x$. Доказать, что если $f(x) = x\sin(\ln x)$ при $x > 0$ и $f(0) = 0$, то функция $\xi(x)$ разрывна в сколь угодно малом интервале $(0; \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

22. Доказать, что если функция f дифференцируема при $x > a$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

23. Доказать, что если функция f дифференцируема при $x > a$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, то $\varliminf\limits_{n\to+\infty} |f'(x)| = 0$.

24. Доказать, что если функция f дифференцируема на отрезке $[a; b]$, $ab > 0$, то

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(x) & f(b) \end{vmatrix} = f(\xi) - \xi f'(\xi),$$

где $a < \xi < b$.

25. Доказать, что если функция f удовлетворяет условиям теоремы Ролля на отрезке $[a; b]$ и не является постоянной, то на этом отрезке существуют такие точки ξ_1 и ξ_2, что

$$f'(\xi_1) > 0, \quad f'(\xi_2) < 0.$$

26. Доказать, что если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале $(a; b)$ и не является линейной, то существует такая точка $\xi \in (a; b)$, что

$$|f'(\xi)| > \left|\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right|.$$

27. Доказать, что если функция f дважды дифференцируема на отрезке $[a; b]$ и $f'(a) = f'(b) = 0$, то существует такая точка $\xi \in (a; b)$, что

$$|f''(\xi)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}|f(b) - f(a)|.$$

28. Пусть функция f непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируема в проколотой окрестности этой точки. Доказать, что если существуют пределы $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f'(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f'(x)$, причем они не равны между собой, то функция f недифференцируема в точке x_0.

29. Доказать, что если функция f дифференцируема в некоторой проколотой окрестности точки x_0, непрерывна в самой этой точке и существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$, то существует и производная $f'(x_0)$, причем $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ (иначе говоря, доказать следствие 3 теоремы Лагранжа).

30. Доказать, что если функция f дифференцируема на отрезке $[1; 2]$, то существует такая точка $\xi \in (1; 2)$, что $f(2) - f(1) = \dfrac{\xi^2}{2} f'(\xi)$.

31. Доказать, что если функция f дифференцируема на отрезке $[a; b]$, причем $f(a) = f(b)$, то существует такая точка $\xi \in (a; b)$, что $f(a) - f(\xi) = (\xi f'(\xi))/2$.

32. Пусть функция f непрерывно дифференцируема на интервале $(a; b)$ и ее производная монотонна на этом интервале. Доказать, что если $f(x_0) = 0$, $x_0 \in (a; b)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{f'(x)} = 0$.

33. Выяснить, будет ли всегда существовать такая точка $\xi \in (a; b)$, что $f'(\xi) = 0$, если функция f удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, кроме одного из следующих:

а) функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$;

б) функция f имеет во всех точках интервала $(a; b)$ конечную или определенного знака бесконечную производную;

в) $f(a) = f(b)$.

34. Являются ли условия теоремы Ролля необходимыми и достаточными для того, чтобы существовала такая точка $\xi \in (a; b)$, что $f'(\xi) = 0$?

35. Выяснить, справедлива ли формула конечных приращений Лагранжа на отрезке $[-1;1]$ для функции

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x), & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0. \end{cases}$$

36. Пусть функция f непрерывно дифференцируема на интервале $(a;b)$. Верно ли, что для любого $\xi \in (a;b)$ существуют такие точки $x_1 \in (a;b)$ и $x_2 \in (a;b)$, что

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\ ?$$

37. Пусть функция f при любом $x \in R$ и любом $h > 0$ удовлетворяет условию $|f(x+h) - f(x-h)| < h^2$. Доказать, что $f(x) = \mathrm{const}$.

38. Пусть функция f дифференцируема при всех $x \in R$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Доказать, что существует точка ξ такая, что $f'(\xi) = 0$.

39. Пусть функция f дифференцируема на отрезке $[a;b]$ и $f'(a)f'(b) < 0$. Доказать, что существует точка $x_0 \in (a;b)$ такая, что $f'(x_0) = 0$.

40. Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную второго порядка на R, и пусть существуют конечные пределы этой функции при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$. Доказать, что найдется точка x_0 такая, что $f'(x_0) = 0$.

41. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема на интервале $(a;b)$, где $a > 0$. Доказать, что существует точка $\xi \in (a;b)$ такая, что

$$\frac{ab\,(bf(b) - af(a))}{b-a} = \xi^2(f(\xi) + \xi f'(\xi)).$$

42. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0;1]$, дифференцируема на интервале $(0;1)$ и удовлетворяет условиям: $f(0) = 5$, $f(1) = 3$, $f'(x) \geqslant -2$ для всех $x \in (0;1)$. Доказать, что $f(x)$ — линейная на отрезке $[0;1]$ функция.

43. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0;2]$, дифференцируема на интервале $(0;2)$ и удовлетворяет условиям: $f(0) = -5$, $f(2) = -1$; $f(x) \leqslant -2$ для всех $x \in (0;2)$. Доказать, что $f(x)$ — линейная на отрезке $[0;2]$ функция.

44. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема при $x > 1$ и существует конечный $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Доказать, что $f'(x)$ не может иметь при $x \to +\infty$ конечного предела, не равного нулю. Может ли $f'(x)$ не иметь предела при $x \to +\infty$?

45. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(a;b)$ и для любых точек x_1 и x_2 из этого интервала справедливо неравенство $|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant |x_2 - x_1|^\alpha$, где $\alpha > 1$. Доказать, что функция $f(x)$ постоянна на интервале $(a;b)$.

ОТВЕТЫ

2. $x_{1,2} = (2 \pm \sqrt{7})/3$. **3.** $\xi = \sqrt{3}/3$.

23. Применить теорему Коши о среднем к функциям $f(x)/x$ и $1/x$.

30. Применить теорему Коши о среднем к функциям $f(x)$ и $1/x$.

§ 17. Правило Лопиталя

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Теорема (правило Лопиталя раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$:*

а) *дифференцируемы в окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a, причем $g'(x) \neq 0$ в этой окрестности;*

б) *функции $f(x)$ и $g(x)$ являются одновременно либо бесконечно малыми, либо бесконечно большими при $x \to a$;*

в) *существует конечный $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.*

Тогда существует

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{1}$$

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке a, $f(a) = g(a) = 0$, $g'(a) \neq 0$, то

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}. \tag{2}$$

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^5 - 1}{2x^3 - x - 1}$.

▲ Применяя формулу (2), получаем

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^5 - 1}{2x^3 - x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{5x^4}{6x^2 - 1} = 1. \ ▲$$

Теорема остается в силе при $a = +\infty$, $a = -\infty$, а также в случае одностороннего предела ($x \to a + 0, x \to a - 0$) при выполнении условий а)–в) соответственно на интервалах $(\delta; +\infty)$, $(-\infty; -\delta)$, $(a; a + \delta)$, $(a - \delta; a)$, $\delta > 0$.

Если выполнены условия а), б), а $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ равен $+\infty$ или $-\infty$, то $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ также равен соответственно $+\infty$ или $-\infty$.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$.

▲ Раскрывая неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ по правилу Лопиталя, получаем

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-1/(1+x^2)}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{3x^2(1+x^2)}=\frac{1}{3}.\ ▲$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

▲ Раскрывая неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$ по правилу Лопиталя, получаем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1/(2\sqrt{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0.\ ▲$$

Применяя правило Лопиталя, часто бывает выгодно предварительно использовать асимптотические равенства вида

$$\sin\alpha\sim\operatorname{tg}\alpha\sim e^\alpha-1\sim\ln(1+\alpha)\sim\operatorname{sh}\alpha\sim$$
$$\sim\operatorname{tg}\alpha\sim\operatorname{arctg}\alpha\sim\arcsin\alpha\sim\alpha,\qquad(3)$$

где $\alpha=\alpha(x)\to0$ при $x\to a$.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^3x}$.

▲ Замечая, что $\sin x\sim x$ при $x\to0$, по правилу Лопиталя находим

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}=$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{3}.\ ▲$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sh}^2x\ln(1+x)}{\operatorname{tg}x-x}$.

▲ Замечая, что $\ln(1+x)\sim x$, $\operatorname{sh}x\sim x$ при $x\to0$ и применяя правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sh}^2x\ln(1+x)}{\operatorname{tg}x-x}=\lim_{x\to0}\frac{x^3}{\operatorname{tg}x-x}=$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{3x^2}{1/\cos^2x-1}=\lim_{x\to0}\frac{3x^2}{\sin^2x}\cos^2x=3.\ ▲$$

Иногда при вычислении пределов правило Лопиталя приходится применять несколько раз.

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{10}-10x+9}{x^5-5x+4}$.

▲ Применяя правило Лопиталя, снова получаем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^{10}-10x+9}{x^5-5x+4}=\lim_{x\to1}\frac{10x^9-10}{5x^4-5}.$$

Пользуясь еще раз правилом Лопиталя, находим

$$\lim_{x\to1}\frac{10x^9-10}{5x^4-5}=2\lim_{x\to1}\frac{x^9-1}{x^4-1}=2\lim_{x\to1}\frac{9x^8}{4x^3}=\frac{9}{2}.$$

Следовательно, искомый предел равен $9/2$. ▲

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^{\beta x}}$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

▲ Пусть $k = [\alpha] + 1$; тогда $\alpha - k < 0$. Применяя правило Лопиталя k раз, получаем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\beta e^{\beta x}} = \ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}}{\beta^k e^{\beta x}} = 0. \blacktriangle$$

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln^\alpha x}{x^\beta}$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

▲ Пусть $\ln x = t$; тогда $x = e^t$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t^\alpha}{e^{\beta t}} = 0$ (пример 7). ▲

Неопределенности вида $0\cdot\infty$ и $\infty - \infty$ часто удается свести к виду $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ с помощью алгебраических преобразований, а затем применить правило Лопиталя.

Пример 9. Найти $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x$.

▲ Преобразуя неопределенность вида $0\cdot\infty$ к виду $\dfrac{\infty}{\infty}$ и применяя правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{x\to+0} x\ln x = \lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to+0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to+0}(-x) = 0. \blacktriangle$$

Пример 10. Найти $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{x^{50}} e^{-1/x^2}$.

▲ Полагая $1/x^2 = t$, получаем $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{x^{50}} e^{-1/x^2} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t^{25}}{e^t} = 0$. ▲

Пример 11. Найти $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right)$.

▲ Преобразуя неопределенность вида $\infty - \infty$ к виду $\dfrac{0}{0}$ и используя асимптотическую формулу $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, получаем

$$\lim_{x\to0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right) = \lim_{x\to0} \frac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x} =$$
$$= \lim_{x\to0} \frac{(\sin x + x\cos x)(\sin x - x\cos x)}{x^2\sin^2 x} =$$
$$= \lim_{x\to0} \frac{\sin x + x\cos x}{x} \cdot \lim_{x\to0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3}.$$

Так как

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x + x\cos x}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} + \lim_{x\to0} \cos x = 2, \text{ а } \lim_{x\to0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3} = \frac{1}{3}$$

(пример 4), то искомый предел равен $2/3$. ▲

При вычислении пределов функций вида $\varphi(x) = (f(x))^{g(x)}$ часто приходится раскрывать неопределенности вида 0^0, ∞^0, 1^∞. Представляя функцию $\varphi(x)$ в виде $\varphi(x) = e^{g(x)\ln f(x)}$, можно свести вычисление предела функции $g(x)\ln f(x)$ к раскрытию неопределенности вида $0\cdot\infty$.

Пример 12. Найти $\lim\limits_{x\to+0} x^x$.

▲ Так как $x^x = e^{x\ln x}$, а $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x = 0$ (пример 9), то $\lim\limits_{x\to+0} x^x = e^0 = 1$. ▲

Пример 13. Найти $\lim\limits_{x\to\pi/2} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

▲ Так как $(\sin x)^{\operatorname{tg} x} = e^{\operatorname{tg} x \ln \sin x} = e^{(\ln\sin x)/\operatorname{ctg} x}$, то, применяя правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\ln\sin x}{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\operatorname{ctg} x}{-1/\sin^2 x} = \lim_{x\to\pi/2} (-\cos x\cdot\sin x) = 0,$$

а, следовательно, $\lim\limits_{x\to\pi/2} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = e^0 = 1$. ▲

Пример 14. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+\sqrt{x^2+1})^{1/\ln x}$.

▲ По правилу Лопиталя находим

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/\sqrt{x^2+1}}{1/x} = 1,$$

и поэтому $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+\sqrt{x^2+1})^{1/\ln x} = e$. ▲

ЗАДАЧИ

Найти предел функций (1–75).

1. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{3x^2+4x-7}{2x^2+3x-5}$. **2.** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln\cos x}{\ln\cos 3x}$. **3.** $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\ln(x^2-8)}{2x^2-5x-3}$.

4. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{ch} 2x - 1}{x^2}$. **5.** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin ax - \sin bx}{\operatorname{sh} ax - \operatorname{sh} bx}$, $a\ne b$.

6. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^\alpha-1}{x^\beta-1}$, $\beta\ne0$. **7.** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln\cos ax}{x^2}$.

8. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^a-a^x}{a^x-a^a}$, $a>0$, $a\ne1$. **9.** $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^a-a^x}{x^a-a^a}$.

10. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)-x}{\operatorname{tg}^2 x}$. **11.** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln((2/\pi)\arccos x)}{\ln(1+x)}$. **12.** $\lim\limits_{x\to\pi/4} \dfrac{\ln\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} 2x}$.

13. $\lim\limits_{x\to\pi/6} \dfrac{4\sin^2 x-6\sin x+1}{3\sin^2 x+5\sin x-4}$. **14.** $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^5-3x^2+7x-5}{x^4-5x+4}$.

15. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^x-1}{\ln x}$. **16.** $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{5x^3-x}-2x}{\sqrt[5]{x^2}-1}$. **17.** $\lim\limits_{x\to1+0} \dfrac{\operatorname{arctg}(x-1)}{\sqrt{x^2+x-2}}$.

18. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3-3x^2+7x-5}{x^3+2x^2-9x+6}$. **19.** $\lim\limits_{x\to\pi/6} \dfrac{\sqrt[5]{3\operatorname{tg}^2 x}-1}{2\sin^2 x+5\sin x-3}$.

20. $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{\cos(2m+1)x}{\cos(2n+1)x}$, $m\in N$, $n\in N$. **21.** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x\arcsin x^2}{x\cos x-\sin x}$.

22. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x-\sin x}{\operatorname{tg} x - x}$. **23.** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{(x+1)\ln(1+x)-x}{e^x-x-1}$.

24. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln((1+x)/(1-x))-2x}{x-\sin x}$. **25.** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{(a+x)^x-a^x}{x^2}$, $a>0$.

26. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\operatorname{tg}3x-6\operatorname{tg}x}{3\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}3x}$. **27.** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{20}-2x+1}{x^{30}-2x+1}$.

28. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{\ln^3(1+x)}$. **29.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x-2x}{x^2\arcsin x}$.

30. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{\arcsin x-\ln(1+x)}$. **31.** $\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{x^{10}-10x+9}{(x-1)^2}\right]$.

32. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{50}-50x+49}{x^{100}-100x+99}$. **33.** $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^4+3x^3-4x^2-9x-4}{3x^4+5x^3+3x^2+3x+2}$.

34. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\alpha x^{\alpha+2}-(\alpha+1)x^{\alpha+1}+x}{(x-1)^2}$.

35. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\alpha(1-x^\beta)-\beta(1-x^\alpha)}{(1-x^\alpha)(1-x^\beta)}$, $\alpha\beta\neq0$. **36.** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x-x+1}{x-x^x}$.

37. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x}-e^x}{\sin x-x}$. **38.** $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^4+x^3-3x^2-5x-2}{x^4+2x^3-2x-1}$.

39. $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{\ln\sin x}$. **40.** $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln\sin x}{\operatorname{ctg}x}$. **41.** $\lim\limits_{x\to\pi/2+0}\dfrac{\ln(x-\pi/2)}{\operatorname{tg}x}$.

42. $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln(1-\cos x)}{\ln\operatorname{tg}x}$. **43.** $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{3+\ln x}{2-3\ln\sin x}$.

44. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\alpha\ln^\beta x}{e^{\gamma x}}$. **45.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}\ln\ln x}{\sqrt[3]{2x+3\sqrt{\ln x}}}$.

46. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^{x^\alpha\ln^\beta x}}$. **47.** $\lim\limits_{x\to0}\sin x\ln\operatorname{ctg}x$.

48. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)$. **49.** $\lim\limits_{x\to+\infty}x^ne^{-x^3}$.

50. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\pi-2\operatorname{arctg}\sqrt{x})\sqrt{x}$.

51. $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\pi-2\arcsin(x/\sqrt{x^2+1}))$.

52. $\lim\limits_{x\to+0}x^\alpha\ln^\beta(1/x)$, $\alpha>0$, $\beta>0$. **53.** $\lim\limits_{x\to+0}(x^x-1)\ln x$.

54. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^\alpha a^x$, $a>0$, $a\neq1$. **55.** $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

56. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\arcsin x}\right)$. **57.** $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2x}\right)$.

58. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$. **59.** $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x\operatorname{arctg}x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

60. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{7/8}-x^{6/7}\ln^2x)$. **61.** $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{\alpha}{1-x^\alpha}-\dfrac{\beta}{1-x^\beta}\right)$, $\alpha\beta\neq0$.

62. $\lim\limits_{x\to1}x^{1/(x-1)}$. **63.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^x$.

64. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{1/x}$. **65.** $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{1/x^2}$.

66. $\lim\limits_{x\to+0}(1+x)^{\ln x}$. **67.** $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{(1+x)^{1/x}}{e}\right)^{1/x}$.

68. $\lim\limits_{x\to+0}(\arcsin x)^{\operatorname{tg}x}$. **69.** $\lim\limits_{x\to+0}x^{1/\ln(\operatorname{sh}x)}$.

70. $\lim\limits_{x\to\pi/2-0} (\pi - 2x)^{\cos x}$. **71.** $\lim\limits_{x\to+0} x^{x^x-1}$.

72. $\lim\limits_{x\to\pi/2-0} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$. **73.** $\lim\limits_{x\to+\infty} (3x^2 + 3^x)^{1/x}$.

74. $\lim\limits_{x\to+0} |\ln x|^{2x}$. **75.** $\lim\limits_{x\to+0} (1/x)^{\sin x}$.

76. Показать, что следующие пределы не могут быть вычислены по правилу Лопиталя, и найти эти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\cos x}{x-\cos x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 \sin(1/x)}{\sin^2 x}$.

77. Выяснить, можно ли применить правило Лопиталя для вычисления предела

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2+2x+\sin 2x}{(2x+\sin 2x)e^{\sin x}}.$$

Найти этот предел, если он существует.

78. Найти $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}$ предполагая, что существует $f''(a)$.

79. Найти $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+3h)-3f(a+2h)+3f(a+h)-f(a)}{h^3}$, предполагая, что существует $f'''(a)$.

80. Показать, что функция $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ бесконечно дифференцируема на всей числовой прямой, и найти $f^{(k)}(0)$, $k \in N$.

81. Найти предел функции:

1) $\lim\limits_{x\to 1-0} \ln x \cdot \ln(1-x)$; 2) $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\ln x \cdot \ln(1+x)}{\sqrt{x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos 3x + x^3\cos(\pi/x)}{x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} x[(1+a/x)^{1+1/x} - x^{-1/(x(x+a))}]$.

ОТВЕТЫ

1. 10/7. **2.** 1/9. **3.** 6/7. **4.** 2. **5.** 1. **6.** α/β. **7.** $-a^2/2$. **8.** $\alpha a^{\alpha-a-1}/\ln a$. **9.** $1-\ln a$. **10.** $-1/2$. **11.** $-2/\pi$. **12.** -1. **13.** $-1/4$. **14.** -6. **15.** 1. **16.** 15/4. **17.** 0. **18.** -2. **19.** 16/105. **20.** $(-1)^{m-n}(2m+1)/(2n+1)$. **21.** -3. **22.** 1/2. **23.** 1. **24.** 4. **25.** $1/a$. **26.** 2. **27.** 9/14. **28.** 1/3. **29.** $-4/3$. **30.** 0. **31.** 45. **32.** 49/198. **33.** $-1/6$. **34.** $\alpha(\alpha+1)/2$. **35.** $(\alpha-\beta)/2$. **36.** 1/2. **37.** 1. **38.** 3/2. **39.** 1. **40.** 0. **41.** 0. **42.** 2. **43.** $-1/3$.

44. 0 при $\gamma > 0$ (α, β любые), при $\gamma = 0$ ($\alpha < 0$, β любое; $\alpha = 0$, $\beta < 0$); $+\infty$ при $\gamma < 0$ (α, β любые), при $\gamma = 0$ ($\alpha > 0$, β любое; $\alpha = 0$, $\beta > 0$); 1 при $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

45. 0.

46. 0 при $\alpha > 1$ и при $\alpha = 1$, $\beta > -1$; 1 при $\alpha = 1$, $\beta = -1$; $+\infty$ при $\alpha < 1$ и при $\alpha = 1$, $\beta < -1$.

47. 0. **48.** $-2/\pi$. **49.** 0. **50.** 2. **51.** 2. **52.** 0. **53.** 0.

54. 0 при $0 < \alpha < 1$ (α любое), $+\infty$ при $a > 1$ (α любое).

55. 0. **56.** 0. **57.** $-1/3$. **58.** $1/2$. **59.** $1/3$. **60.** $+\infty$.

61. $(\alpha - \beta)/2$. **62.** e. **63.** $e^{-2/\pi}$. **64.** $e^{-2/\pi}$. **65.** $e^{-1/2}$.

66. 1. **67.** $e^{-1/2}$. **68.** 1. **69.** e. **70.** 1. **71.** 1. **72.** 1.

73. 3. **74.** 1. **75.** 1. **76.** 1) 0; 2) 1.

77. Правило Лопиталя неприменимо, предел не существует.

78. $f''(a)$. **79.** $f'''(a)$. **80.** $f^{(k)}(0) = 0$, $k \in N$.

81. 1) 0; 2) 0; 3) 4; 4) a.

§ 18. Формула Тейлора

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1) Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0, имеет в этой окрестности производные до $(n-1)$-го порядка включительно, и пусть существует $f^{(n)}(x_0)$. Тогда

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \quad \text{при} \quad x \to x_0,$$

или, короче,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0. \tag{1}$$

Многочлен

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{2}$$

называется *многочленом Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0*, а функция

$$r_n(x) = f(x) - P_n(x) \tag{3}$$

— *остаточным членом n-го порядка формулы Тейлора.*

Формула (1) называется *формулой Тейлора n-го порядка для функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 с остаточным членом в форме Пеано*, ее называют также *локальной формулой Тейлора.*

2) Функция $f(x)$, имеющая в точке x_0 производные до n-го порядка включительно, единственным образом представляется в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0, \tag{4}$$

причем коэффициенты разложения (4) определяются формулами

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Если $x_0 = 0$, то формула (1) принимает вид

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + o(x^n), \quad x \to 0, \tag{6}$$

и называется *формулой Маклорена.*

3) Пусть функция $f(x)$ имеет в окрестности точки $x_0 = 0$ производные всех порядков (бесконечно дифференцируема). Тогда:

а) если f — четная функция, то при любом $n \in N$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}\, x^{2k} + o(x^{2n+1}); \tag{7}$$

б) если f — нечетная функция, то при любом $n \in N$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} + o(x^{2n+2}). \tag{8}$$

4) Формулы Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$ (формулы Маклорена) для основных элементарных функций имеют следующий вид:

а) *показательная функция*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

или

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n); \tag{9}$$

б) *гиперболические функции*

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

или

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}); \tag{10}$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

или

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}); \tag{11}$$

в) *тригонометрические функции*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

или
$$\sin x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}); \tag{12}$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$
или
$$\cos x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}); \tag{13}$$

г) *степенная функция*
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + o(x^n),$$
или
$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} C_\alpha^k x^k + o(x^n), \tag{14}$$
где $C_\alpha^0 = 1$, $C_\alpha^k = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(k-1))}{k!}$, $k = 1, 2, \ldots$; в частности,
$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k + o(x^n), \tag{15}$$
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n); \tag{16}$$
$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_{-1/2}^k x^k + o(x^n),$$
где
$$C_{-1/2}^k = \frac{(-1/2)(-1/2-1)\ldots(-1/2-(k-1))}{k!} = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{2^k k!},$$
$$(2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1),$$
т. е.
$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} x^k + o(x^n); \tag{17}$$

д) *логарифмическая функция*
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o(x^n),$$
или
$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} + o(x^n), \tag{18}$$
$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n). \tag{19}$$

5) Если

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n),$$

$$g(x)=\sum_{k=0}^{n}b_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n),$$

то

$$f(x)+g(x)=\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n),$$

$$f(x)g(x)=\sum_{k=0}^{n}c_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n),$$

где $c_k=\sum\limits_{p=0}^{k}a_pb_{k-p}$.

6) Если функция $f(x)$ представляется в виде $f(x)=g(x)/h(x)$ и если известны представления функций g и h формулой Тейлора в окрестности точки $x=x_0$ с $o((x-x_0)^n)$, т. е. известны разложения

$$g(x)=\sum_{k=0}^{n}b_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n),$$

$$h(x)=\sum_{k=0}^{n}c_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n),$$

причем $c_0=h(x_0)\neq 0$, то для нахождения формулы Тейлора для функции f можно применить метод неопределенных коэффициентов, который состоит в следующем.

Пусть $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)$ — искомое разложение. Приравнивая коэффициенты при $(x-x_0)^k$, где $k=0,1,\ldots,n$, в левой и правой частях равенства:

$$\left(\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)\right)\left(\sum_{k=0}^{n}c_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)\right)=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}b_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n),$$

получаем систему уравнений, из которой можно найти коэффициенты $a_0,a_1,\ldots,a_n$.

7) Пусть $F(x)=f(\varphi(x))$ — сложная функция, и пусть известны формулы Тейлора для функций φ и f, т. е.

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{n}c_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n), \tag{20}$$

$$f(w)=\sum_{k=0}^{n}a_k(w-w_0)^k+o((w-w_0)^n), \tag{21}$$

где $w_0 = \varphi(x_0)$. Тогда для нахождения коэффициентов b_k $(k = 0, 1, \dots$ $\dots, n)$ функции

$$F(x) = f(\varphi(x)) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

нужно в формулу (21) подставить $w = \varphi(x)$, заменить функцию $\varphi(x)$ ее формулой Тейлора (20), произвести соответствующие арифметические действия, сохраняя при этом только члены вида $b_k (x - x_0)^k$, где $k = 0, 1, \dots, n$. В частности, если

$$\varphi(x) = Ax^m, \quad m \in N, \quad f(w) = \sum_{k=0}^{n} a_k w^k + o(w^n),$$

то

$$f(\varphi(x)) = f(Ax^m) = \sum_{k=0}^{n} A^k a_k x^{mk} + o(x^{mn}).$$

Например, из (15) и (17) следует, что

$$\frac{1}{1 + x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n+1}), \tag{22}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!}\, x^{2k} + o(x^{2n+1}). \tag{23}$$

8) Пусть известно представление формулой Тейлора в окрестности точки x_0 до $o((x - x_0)^n)$ производной функции f, т. е. известна формула

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n),$$

где $b_k = \dfrac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}$.

Тогда существует $f^{(n+1)}(x_0)$, и поэтому функцию $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^{n+1}) =$$

$$= f(x_0) + \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} (x - x_0)^{k+1} + o((x - x_0)^{n+1}),$$

где $a_{k+1} = \dfrac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!} = \dfrac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!} \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{b_k}{k+1}$. Следовательно,

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1} + o((x - x_0)^{n+1}), \tag{24}$$

где b_k — коэффициенты формулы Тейлора функции $f'(x)$.

9) Если функция $f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x_0 производные до $(n + 1)$-го порядка включительно, то для любой точки x из этой окрестности найдется точка ξ, лежащая между x и x_0

($x < \xi < x_0$ или $x_0 < \xi < x$) и такая, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad (25)$$

Эта формула называется *формулой Тейлора с остаточным членом*

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

в форме Лагранжа.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Представить формулой Маклорена с $o(x^n)$ функцию

$$f(x) = \sin(2x + \pi/4).$$

▲ Так как

$$f^{(k)}(x) = 2^k \sin\left(2x + \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{и} \quad f^{(k)}(0) = 2^k \sin\frac{\pi}{4}(2k+1),$$

то по формуле (6) получаем

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} \sin\frac{\pi}{4}(2k+1) \cdot x^k + o(x^n). \ ▲$$

Пример 2. Представить формулой Маклорена до $o(x^n)$ функцию $f(x)$, если:

1) $f(x) = e^{x/2+2}$; 2) $f(x) = \sqrt{1+x}$; 3) $f(x) = \dfrac{1}{2x+3}$;

4) $f(x) = \ln(5-4x)$.

▲ 1) Используя формулу (9) и равенство $e^{x/2+2} = e^2 \cdot e^{x/2}$, получаем

$$e^{x/2+2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^2}{2^k k!} x^k + o(x^n).$$

2) Так как $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$, то, применяя формулу (14) при $\alpha = 1/2$, находим

$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{k=1}^{n} C_{1/2}^k x^k + o(x^n),$$

где

$$C_{1/2}^k = \frac{(1/2)(1/2-1)\ldots(1/2-(k-1))}{k!} = (-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{2^k k!},$$

$$(2k-3)!! = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-3).$$

Следовательно,

$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{2^k k!} + o(x^n).$$

3) Используя равенство $\dfrac{1}{2x+3} = \dfrac{1}{3(1+2x/3)}$ и формулу (15), получаем

$$\frac{1}{2x+3} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{2}{3}\right)^k x^k + o(x^n),$$

т. е.

$$\frac{1}{2x+3} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,\frac{2^k}{3^{k+1}}\,x^k + o(x^n).$$

4) Из равенства $\ln(5-4x) = \ln 5 + \ln(1-4x/5)$ и формулы (19) следует, что

$$\ln(5-4x) = \ln 5 - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{4}{5}\right)^k x^k + o(x^n). \ \blacktriangle$$

Пример 3. Представить формулой Маклорена с $o(x^n)$ функцию $f(x)$, если:

1) $f(x) = (x+5)e^{2x}$; 2) $f(x) = \ln\dfrac{3+x}{2-x}$;

3) $f(x) = e^x\ln(1+x)$, $n=4$.

▲ 1) Используя равенство $f(x) = xe^{2x} + 5e^{2x}$ и формулу (9), получаем

$$f(x) = x\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^k x^k}{k!} + o(x^{n-1})\right) + 5\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k x^k}{k!} + o(x^n) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^k x^{k+1}}{k!} + \sum_{k=0}^{n}\frac{5\cdot 2^k x^k}{k!} + o(x^n).$$

Так как $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^k x^{k+1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{2^{k-1}x^k}{(k-1)!}$, то

$$f(x) = 5 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{5\cdot 2^k}{k!}\right)x^k + o(x^n) =$$

$$= 5 + \sum_{k=1}^{n}\frac{2^{k-1}}{k!}(k+10)x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n}\frac{2^{k-1}}{k!}(k+10)x^k + o(x^n).$$

2) Из равенства $f(x) = \ln\dfrac{3}{2} + \ln\left(1+\dfrac{x}{3}\right) - \ln\left(1-\dfrac{x}{2}\right)$ и формул (18), (19) следует, что

$$f(x) = \ln\frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2^k} + \frac{(-1)^{k-1}}{3^k}\right)x^k + o(x^n).$$

3) Используя формулы (9) и (18), получаем

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) =$$

$$= x + \left(-\frac{1}{2}+1\right)x^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)x^3 + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right)x^4 + o(x^4) =$$

$$= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4). \ \blacktriangle$$

Пример 4. Представить формулой Маклорена с $o(x^n)$ функцию $f(x) = \cos x + |x|^3$. Какие значения может принимать n?

▲ Пусть $g(x) = |x|^3$; тогда $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$, а $g'''(0)$ не существует (§ 15, пример 9). Поэтому для $g(x)$ формулы Маклорена до $o(x^n)$ при $n = 1$ и $n = 2$ имеют вид соответственно

$$g(x) = o(x) \quad \text{и} \quad g(x) = o(x^2),$$

а представление функции $g(x)$ формулой Маклорена с $o(x^3)$ не существует. Используя для функции $\cos x$ формулу Маклорена с $o(x^n)$ при $n=1$ и $n=2$ (формула (13)), получаем формулу Маклорена $f(x)$ при $n=1$ и $n=2$:

$$f(x) = 1 + o(x), \quad f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Представление формулой Маклорена функции $f(x)$ до $o(x^3)$ не существует. ▲

Для получения формулы Тейлора рациональной дроби эту дробь обычно представляют в виде суммы многочлена и элементарных дробей.

Пример 5. Представить формулой Маклорена с $o(x^n)$ рациональную дробь

$$f(x) = \frac{x^2+5}{x^2+x-12}.$$

▲ Так как $f(x)$ не является правильной дробью, то, разделив числитель на знаменатель, представим $f(x)$ в виде

$$f(x) = 1 + \frac{17-x}{(x+4)(x-3)} = 1 - \frac{3}{x+4} + \frac{2}{x-3}.$$

Преобразуем $f(x)$ так, чтобы можно было использовать формулы (15) и (16):

$$f(x) = 1 - \frac{3}{4(1+x/4)} - \frac{2}{3(1-x/3)}.$$

Отсюда получаем

$$f(x) = 1 - \frac{3}{4}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^k}{4^k} - \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{3^k} + o(x^n),$$

или

$$f(x) = -\frac{5}{12} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3(-1)^{k+1}}{4^{k+1}} - \frac{2}{3^{k+1}}\right)x^k + o(x^n). \ ▲$$

Пример 6. Представить формулой Маклорена с $o(x^{2n+1})$ функцию

$$f(x) = \frac{1}{x^4-3x^2-4}.$$

▲ Представим $f(x)$ в следующем виде:

$$f(x) = \frac{1}{(x^2-4)(x^2+1)} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x^2-4} - \frac{1}{x^2+1}\right).$$

Заметим, что нет необходимости заменять дробь $\frac{1}{x^2-4}$ суммой элементарных дробей вида $\frac{A}{x-2}$ и $\frac{B}{x+2}$. Записав эту дробь в виде $-\frac{1}{4(1-x^2/4)}$ и используя формулы (15), (16), получаем

$$f(x) = \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4(1-x^2/4)} - \frac{1}{1+x^2}\right) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\left((-1)^{k+1} - \frac{1}{4^{k+1}}\right)\frac{x^{2k}}{5} + o(x^{2n+1}). \ \blacktriangle$$

Чтобы получить формулу Маклорена произведения тригонометрических функций, часто бывает полезным представить это произведение в виде суммы тригонометрических функций.

Пример 7. Представить формулой Маклорена с $o(x^{2n+1})$ функцию $f(x)$, если:

1) $f(x) = \sin^2 x \cos^2 x$; 2) $f(x) = \cos^3 x$.

▲ 1) Так как $\sin^2 x\cos^2 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x = \frac{1}{8}(1-\cos 4x)$, то, применяя формулу (13), получаем

$$\sin^2 x\cos^2 x = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}2^{4k-3}}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2n+1}).$$

2) Используя равенство $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, получаем

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x = \sum_{k=0}^{n}\frac{3(-1)^k}{4(2k)!}(3^{2k-1}+1)x^{2k} + o(x^{2n+1}). \ \blacktriangle$$

Пример 8. Применяя метод неопределенных коэффициентов, получить формулу Маклорена с $o(x^5)$ функции $\operatorname{tg} x$.

▲ Так как $\operatorname{tg} x$ — нечетная функция и $\operatorname{tg} x = x + o(x)$, то

$$\operatorname{tg} x = x + a_3x^3 + a_5x^5 + o(x^6).$$

Используя формулу $\sin x = \operatorname{tg} x\cos x$ и равенства (12) и (13), получаем

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) = (x + a_3x^3 + a_5x^5 + o(x^6))\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right).$$

Приравнивая коэффициенты при x^3 и x^5, находим

$$-\frac{1}{6} = -\frac{1}{2} + a_3, \quad \frac{1}{5!} = \frac{1}{4!} - \frac{a_3}{2!} + a_5.$$

Из этой системы получаем $a_3 = 1/3$, $a_5 = 2/15$. Следовательно,

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6).$$

Заметим, что это равенство можно получить и по общей формуле (6). ▲

Пример 9. Представить формулой Маклорена с $o(x^3)$ функцию $e^{x\cos x}$.

▲ Искомая формула должна иметь вид

$$e^{x\cos x} = \sum_{k=0}^{3} a_k x^k + o(x^3).$$

Так как $x\cos x = x + o(x)$, $(x\cos x)^k = x^k + o(x^k)$ при $k = 1, 2, \ldots$, то в формуле

$$e^w = \sum_{k=0}^{n} \frac{w^k}{k!} + o(w^n),$$

где $w = x\cos x$, нужно взять $n = 3$. При этом функции w^k ($k = 1, 2, 3$) следует представить формулой Маклорена с $o(x^3)$. Используя разложение (13), получаем

$$w = x\cos x = x - \frac{x^3}{2!} + o(x^4), \quad w^2 = x^2 + o(x^3), \quad w^3 = x^3 + o(x^3).$$

Следовательно,

$$e^{x\cos x} = \sum_{k=0}^{3} \frac{w^k}{k!} + o(w^3) = 1 + x - \frac{x^3}{2!} + o(x^4) + \frac{1}{2!}(x^2 + o(x^3)) +$$
$$+ \frac{1}{3!}(x^3 + o(x^3)) + o(x^3) = 1 + x + \frac{1}{x}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3). \ ▲$$

Пример 10. Представить формулой Маклорена с $o(x^6)$ функцию

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + \sin x}.$$

▲ Искомая формула должна иметь вид

$$f(x) = \sum_{k=0}^{6} a_k x^k + o(x^6).$$

Поэтому функцию $\dfrac{1}{1+\sin x}$ следует представить формулой Маклорена с $o(x^4)$. Так как $\sin x = x + o(x)$, то в формуле

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k z^k + o(z^n),$$

где $z = \sin x$, нужно взять $n = 4$.

Применяя формулу (12), получаем

$$z = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4), \quad z^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4),$$
$$z^3 = x^3 + o(x^4), \quad z^4 = x^4 + o(x^4).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{1+\sin x} = 1 - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + \left(x^2 - \frac{1}{3}x^4\right) - x^3 + x^4 + o(x^4) =$$
$$= 1 - x + x^2 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$$

и
$$f(x) = x^2 - x^3 + x^4 - \frac{5}{6}x^5 + \frac{2}{3}x^6 + o(x^6). \quad \blacktriangle$$

Пример 11. Представить формулой Маклорена с $o(x^{2n+1})$ функцию: 1) $\operatorname{arctg} x$; 2) $\arcsin x$.

▲ 1) Так как $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + o(x^{2n+1})$ (формула (22)), то по формуле (24) получаем
$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}). \tag{26}$$
Полагая в равенстве (26) $n = 2$, находим
$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6).$$

2) Используя равенство (23), получаем
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!}\, x^{2k} + o(x^{2n+1}),$$
откуда по формуле (24) находим
$$\arcsin x = x + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!(2k+1)}\, x^{2k+1} + o(x^{2n+2}). \tag{27}$$
Из формулы (27) при $n = 2$ получаем
$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}\, x^3 + \frac{3}{40}\, x^5 + o(x^6). \quad \blacktriangle$$

Представление функции $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки x_0 заменой $x - x_0 = t$ обычно сводят к представлению функции $g(t) = f(x_0 + t)$ по формуле Маклорена.

Пример 12. Представить функцию $f(x) = \dfrac{3x+3}{\sqrt{3-2x-x^2}}$ формулой Тейлора в окрестности точки $x = -1$ с $o((x+1)^{2n})$.

▲ Пусть $x + 1 = t$; тогда
$$f(x) = \frac{3(x+1)}{\sqrt{4-(x+1)^2}} = \frac{3t}{\sqrt{4-t^2}} = \frac{3}{2}\, t\left(1 - \frac{t^2}{4}\right)^{-1/2} = g(t).$$
Для получения формулы Тейлора для функции $f(x)$ нужно представить функцию $g(t)$ формулой Маклорена с $o(t^{2n})$.

Применяя формулу (14), находим
$$g(t) = \frac{3}{2}t + \frac{3}{2}\, t\sum_{k=1}^{n-1} C^k_{-1/2}(-1)^k\, \frac{t^{2k}}{4^k} + o(t^{2n}),$$
где
$$C^k_{-1/2}(-1)^k = (-1)^k\, \frac{(-1/2)(-1/2-1)\ldots(-1/2-(k-1))}{k!} = \frac{(2k-1)!!}{2^k k!}.$$

Следовательно,

$$g(t) = \frac{3}{2}\,t + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{3(2k-1)!!}{2^{3k+1}k!}\,t^{2k+1} + o(t^{2n}).$$

Заменяя t на $x+1$, получаем

$$f(x) = \frac{3}{2}(x+1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{3(2k-1)!!}{2^{3k+1}k!}(x+1)^{2k+1} + o((x+1)^{2n}). \ \blacktriangle$$

Пример 13. Представить формулой Тейлора в окрестности точки $x=2$ с $o((x-2)^n)$ функцию $f(x) = \ln(2x - x^2 + 3)$.

$\blacktriangle$ Так как $2x - x^2 + 3 = (3-x)(x+1)$, то, полагая $x - 2 = t$, получаем

$$2x - x^2 + 3 = (1-t)(3+t) = 3(1-t)(1+t/3).$$

Отсюда следует, что

$$f(x) = g(t) = \ln 3 + \ln(1-t) + \ln(1+t/3).$$

Представив функцию $g(t)$ по формуле Маклорена с $o(t^n)$, получаем

$$g(t) = \ln 3 - \sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{t^k}{k\,3^k} + o(t^n).$$

Следовательно,

$$f(x) = \ln 3 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(-1)^{k-1}}{3^k} - 1\right)\frac{(x-2)^k}{k} + o((x-2)^n). \ \blacktriangle$$

ЗАДАЧИ

Представить формулой Маклорена с $o(x^n)$ функцию (1–4).

1. 1) e^{5x-1}; 2) $\sin(2x+3)$; 3) $\cos\left(\frac{x}{2}+2\right)$; 4) $\frac{1}{1-2x}$;
5) $\frac{1}{3x+4}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{1+4x}}$; 7) $\ln(ex+2)$; 8) 3^{2-x}; 9) $\frac{1}{(1-x)^2}$.

2. 1) $(x-1)e^{x/2}$; 2) $(x^2-x)e^{-x}$; 3) $\frac{x^2+3e^x}{e^{2x}}$;
4) $(2x+1)\sqrt{1-x}$; 5) $(2x-3)\ln(5x+6)$; 6) $\ln\frac{1+2x}{1-x}$;
7) $\ln\frac{2-3x}{3+2x}$; 8) $\ln(x^2+3x+2)$; 9) $\ln(2+x-x^2)$.

3. 1) $(1+x^2)\ln\sqrt{1+x}$; 2) $(x-1)(x+\ln(1+x))$;
3) $(1-x)\ln(1+x) - (1+x)\ln(1-x)$; 4) $x\sqrt[3]{4-4x+x^2}$;
5) $\frac{x}{\sqrt[3]{9-6x+x^2}}$; 6) $\ln\frac{x+4}{x^2-5x+6}$; 7) $\ln(6+11x+6x^2+x^3)$;
8) $\ln\left(\frac{2x^2-5x+2}{2}\right)^{1/x}$; 9) $(1-x)\ln(1+5x+6x^2)$.

4. 1) $\dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$; 2) $\dfrac{2x-3}{x+1}$; 3) $\dfrac{x^2+1}{2x-3}$; 4) $\dfrac{x^3}{x-1}$;
5) $\dfrac{2x+5}{x^2+5x+4}$; 6) $\dfrac{3x-1}{x^2+x-6}$; 7) $\dfrac{x^2+4x-1}{x^2+2x-3}$; 8) $\dfrac{1-2x^2}{2+x-x^2}$;
9) $\dfrac{3x^2+5x-5}{x^2+x-2}$.

Представить формулой Маклорена с $o(x^{2n})$ функцию (5, 6).

5. 1) $\operatorname{sh}(x/2)$; 2) $x\operatorname{ch}3x$; 3) $x\sin^2 2x$; 4) $x\operatorname{ch}^2 x$;
5) $\sin x\cos 2x$; 6) $\sin^3 x$; 7) $\operatorname{sh}x\operatorname{ch}2x$; 8) $\sin^3 x\cos x$.

6. 1) $\dfrac{x^4+1}{x^2+1}$; 2) $\dfrac{x^2}{3x^2-4}$; 3) $\dfrac{1}{3x^4+10x^2+3}$; 4) $\dfrac{x^2+2}{x^3+x^2+x+1}$;
5) $\dfrac{x}{3}\ln\dfrac{x^2-1}{x^2-e}$; 6) $(1+2x)e^{-2x}-(1-2x)e^{2x}$;
7) $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$; 8) $\dfrac{x^5-x^3}{\sqrt{1-2x^2}}$.

Представить формулой Маклорена с $o(x^{2n+1})$ функцию (7–9).

7. 1) $\cos 3x$; 2) $x^2\cos^2 x$; 3) $\cos x\, 3x\cos 5x$; 4) $\sin x\sin 3x$;
5) $\operatorname{ch}x\operatorname{ch}3x$; 6) $\operatorname{sh}x\operatorname{sh}5x$; 7) $(4x-x^3)\operatorname{sh}2x$.

8. 1) $\operatorname{sh}^2 x$; 2) $\cos^4 x$; 3) $\sin^2 x\cos^4 x$; 4) $\cos^4 x+\sin^4 x$;
5) $\cos^6 x+\sin^6 x$; 6) $\sin^8 x+\cos^8 x$.

9. 1) $\dfrac{x-1}{2-x^2-x^4}$; 2) $\dfrac{1}{x^4-8x^2+15}$; 3) $x\sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}}$;
4) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2-x^2}}$; 5) $\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}}$; 6) $\ln\sqrt[3]{\dfrac{2+x^2}{x^4-3x^2+2}}$;
7) $\dfrac{1}{1-x+x^2-x^3}$.

10. Представить формулой Маклорена с $o(x^{3n})$ функцию:
1) $\dfrac{1}{2x^6-10x^3+12}$; 2) $\dfrac{5x^6-11}{x^6-x^3-2}$; 3) $\dfrac{1}{1+x+x^2}$.

11. Представить формулой Маклорена с $o(x^{3n+1})$ функцию:
1) $\dfrac{x}{(1+x^3)^2}$; 2) $\ln\sqrt{\dfrac{e-x^3}{1-ex^3}}$; 3) $\dfrac{5x^3+28}{14+5x^3-x^6}$.

Представить формулой Тейлора в окрестности точки x_0 с $o((x-x_0)^n)$ функцию (12–16).

12. 1) $1/x$, $x_0=2$; 2) $\sqrt{x}$, $x_0=1$; 3) $\sin(2x-3)$, $x_0=1$;
4) xe^{2x}, $x_0=-1$; 5) x^2e^{-2x}, $x_0=-1$; 6) $(x^2-1)e^{2x}$, $x_0=-1$;
7) $\sin(x+1)\sin(x+2)$, $x_0=-1$; 8) $(x^2+4x+2)e^{-3x}$, $x_0=-2$.

13. 1) $\ln(2x+1)$, $x_0=1/2$; 2) $\log_3\sqrt[3]{3x-1/3}$, $x_0=3$;
3) $\ln(2+x-x^2)$, $x_0=1$; 4) $\ln(x^2-7x+12)$, $x_0=1$.

14. 1) $\ln\sqrt[3]{7x-2}$, $x_0=1$; 2) $\ln\sqrt[4]{\dfrac{x-2}{5-x}}$, $x_0=3$;

3) $x\ln(2-3x+x^2)$, $x_0=-2$; 4) $\ln\dfrac{(x-1)^{x-2}}{3-x}$, $x_0=2$;

5) $\dfrac{2x+1}{x-1}\ln x$, $x_0=1$; 6) $\ln(5+14x+14x^2+6x^3+x^4)$, $x_0=-2$.

15. 1) $\dfrac{2x-1}{x-1}$, $x_0=2$; 2) $\dfrac{(x-2)^2}{3-x}$, $x_0=2$; 3) $\dfrac{x}{4+x}$, $x_0=10$;

4) $\dfrac{x+5}{2x-4}$, $x_0=-\dfrac{1}{10}$; 5) $\dfrac{x^2+3x}{x+1}$, $x_0=1$; 6) $\dfrac{x^2-3x+3}{x-2}$, $x_0=3$;

7) $\dfrac{x+7}{x(2x+7)}$, $x_0=-2$; 8) $\dfrac{x-2}{(x-3)^2}$, $x_0=2$.

16. 1) $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+10x+25}$, $x_0=-2$; 2) $\dfrac{x^2-4x+5}{x^2-5x+6}$, $x_0=1$;

3) $\dfrac{x^2-5x+7}{x^2-9x+20}$, $x_0=-2$; 4) $\dfrac{2x}{1-x^2}$, $x_0=2$;

5) $\dfrac{x^3-5x^2+4x+5}{x^2-5x+6}$, $x_0=1$; 6) $x\left(\dfrac{1}{(x-1)^3}-1\right)$, $x_0=2$.

Представить формулой Тейлора в окрестности точки x_0 с $o((x-x_0)^{2n})$ функцию (17–19).

17. 1) e^{x^2+2x-1}, $x_0=-1$; 2) $(x+3)e^{3x^2+18x}$, $x_0=-3$;
3) $(x+2)\ln(2x^2+8x+11)$, $x_0=-2$;

4) $(x-5)\ln(26-10x+x^2)$, $x_0=5$; 5) $\ln\dfrac{\sqrt[3]{x+3}}{x^2+2x+2}$, $x_0=-1$.

18. 1) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$, $x_0=1$; 2) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x_0=-1$;

3) $\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+8}}$, $x_0=2$; 4) $\dfrac{x^2-2x+1}{\sqrt[3]{x(2-x)}}$, $x_0=1$;

5) $\dfrac{(x+1)^3}{\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x_0=-1$.

19. 1) $\dfrac{x-1}{x^2-2x+5}$, $x_0=1$; 2) $\dfrac{x-1}{3x^2-6x+5}$, $x_0=1$;

3) $\dfrac{x-3}{x^2-4x+8}$, $x_0=2$.

Представить формулой Тейлора в окрестности точки x_0 с $o((x-x_0)^{2n+1})$ функцию (20–23).

20. 1) e^{2x^2+8x+3}, $x_0=-2$; 2) e^{2x^2-12x}, $x_0=3$;
3) 2^{x-x^2}, $x_0=1/2$; 4) $(x+3)e^{2x^2+8x+5}$, $x_0=-2$;
5) $(x+1)^2 2^{x^2+2x}$, $x_0=-1$; 6) $x(x-2)2^{x^2-2x-1}$, $x_0=1$;
7) $(3x^2-6x+4)e^{2x^2-4x+5}$, $x_0=1$.

21. 1) $\sin^2(x-1)\cos(x-1)$, $x_0=1$; 2) $\sin\frac{9}{2}x\cos\frac{3}{2}x$, $x_0=\frac{\pi}{6}$;
3) $\left(x+\frac{\pi}{4}\right)(\sin x+\cos x)$, $x_0=-\frac{\pi}{4}$;
4) $(x^2-\pi x)\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, $x_0=\frac{\pi}{2}$; 5) $\frac{x^2+x}{2x+1}\cos\pi x$, $x_0=-\frac{1}{2}$.

22. 1) $\log_2(3x^2-24x+50)$, $x_0=4$;
2) $(x+2)\ln(2-x^2-2x)$, $x_0=-1$; 3) $\log_5\sqrt[3]{\frac{2x-1}{3-2x}}$, $x_0=1$;
4) $(x^2+4x+2)\ln(-2x^2-8x-5)$, $x_0=-2$.

23. 1) $\frac{x-2}{\sqrt[3]{x^2-4x+5}}$, $x_0=2$; 2) $\frac{x-1}{\sqrt{1+4x-x^2}}$, $x_0=2$;
3) $\sqrt{\frac{x}{2-x}}$, $x_0=1$; 4) $\frac{1-4x+4x^2}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$, $x_0=\frac{1}{2}$;
5) $\frac{2x-3}{x^2-3x+2}$, $x_0=\frac{3}{2}$; 6) $\frac{2x^2-8x+5}{x^2-4x+3}$, $x_0=2$;
7) $\frac{(x+1)^2}{(2x^2+4x+1)(x^2+2x+3)}$, $x_0=-1$;
8) $(3x^2-6x+1)\sqrt{2x-x^2}$, $x_0=1$.

24. Представить формулой Тейлора в окрестности точки $x_0=1$ с $o((x-x_0)^{3n})$ функцию $2^{x^3-3x^2+3x}$.

25. Представить формулой Тейлора в окрестности точки $x_0=2$ с $o((x-2)^{2n+2})$ функцию $\sqrt{x/(4-x)}-\sqrt{(4-x)/x}$.

26. Представить формулой Тейлора в окрестности точки $x_0=2$ с $o((x-2)^{3n+1})$ функцию $(x-2)/\sqrt[3]{(x-4)(x^2-2x+4)}$.

27. Представить формулой Тейлора в окрестности точки $x_0=1$ с $o((x-1)^{4n+1})$ функцию $(1-\sqrt{2x-x^2})/(1-\sqrt{x^2-2x+2})$.

28. Представить формулой Тейлора в окрестности точки x_0 с $o((x-x_0)^{4n})$ функцию:
1) $\sin(x^2-2x+3)$, $x_0=1$; 2) $\cos(x^2-4x+3)$, $x_0=2$;
3) $\sin(3x^2+6x+4)$, $x_0=-1$.

29. Представить формулой Тейлора в окрестности точки x_0 с $o((x-x_0)^{4n+3})$ функцию:
1) $\cos\left(\frac{8}{\pi}x^2-4x+\pi\right)$, $x_0=\frac{\pi}{4}$;
2) $\sin\left(\frac{4}{\pi}x^2-2x+\frac{3}{4}\pi\right)$, $x_0=\frac{\pi}{4}$;
3) $x\sin(x^2+2\sqrt{\pi}x)$, $x_0=-\sqrt{\pi}$;
4) $x\sin(x^2+2x+2)\cos(x^2+2x)$, $x_0=-1$.

30. Представить формулой Маклорена с $o(x^n)$ функцию:
1) $x^3|x|+\cos^2 x$; 2) $\sin|x|^3+e^x$; 3) $|x|^{2k+1}$, $k\in N$.
Число n выбрать наибольшим.

31. Найти $f^{(k)}(0)$, если:

1) $f(x) = e^{-x^2}$, $k = 6$; 2) $f(x) = 1/(1 + x + x^2)$, $k = 32$;
3) $f(x) = 1/(1 - x^4)$, $k = 60$.

32. Пусть $P_n(x)$ — многочлен степени не выше n. Доказать, что

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

33. Представить функцию $f(x)$ в виде многочлена по степеням $x - x_0$, если:

1) $f(x) = x^3$, $x_0 = 1$;
2) $f(x) = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 17$, $x_0 = -2$;
3) $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3$, $x_0 = -1$; 4) $f(x) = (x^3 - 8)^2$, $x_0 = 2$.

34. Пусть $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$. Доказать, что

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} ka_k(x - x_0)^{k-1} + o((x - x_0)^{n-1}).$$

35. Пусть $f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0 + \theta h)$, где $0 < \theta < 1$, и пусть существует $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$. Доказать, что

$$\lim_{h \to 0} \theta = \frac{1}{n+1}.$$

36. Представить формулой Маклорена с $o(x^2)$ функцию:

1) $e^{\operatorname{tg} x}$; 2) $e^{\sqrt{1+2x}}$; 3) $\operatorname{ch}(\sin x)$; 4) $\cos(\operatorname{sh}(x/\sqrt{5}))$;
5) $(1 - x + x^2)^3$; 6) $\ln\cos x$.

37. Представить формулой Маклорена с $o(x^3)$ функцию:

1) $(1 - x + x^2)/(1 + x + x^2)$; 2) $\sqrt{1 + 2x - x^2} - \sqrt[3]{1 - 3x + x^3}$;
3) $\sqrt[3]{1 - 3x\cos 2x}$; 4) $\operatorname{arctg}(\sin x)$; 5) $e^{\sin x}$; 6) $\ln^3(1 - x/2)$;
7) $(1 + x)^{1/x}$; 8) $\sqrt[3]{1 + 3\sin x}$; 9) $\ln(1 + \arcsin x)$.

38. Представить формулой Маклорена с $o(x^4)$ функцию:

1) $e^{x/\sin x}$; 2) $1/(\sin x + \cos x)$; 3) $\operatorname{tg}(\operatorname{sh} 3x)$; 4) $\sin(\operatorname{arctg} x)$;
5) $x/(e^x - 1)$; 6) $\sqrt{\cos x}$; 7) $x/\arcsin x$; 8) $x/\operatorname{arctg} x$;
9) $e^{x\sin x}$.

39. Представить формулой Маклорена с $o(x^5)$ функцию:

1) $(1 - 2x + 3x^2 + 4x^3)^3$; 2) $\ln(1 + x + x^2 + x^3)$; 3) $\dfrac{1}{\cos x}$;
4) $e^{x/\sqrt{1+x^2}}$; 5) $\ln\dfrac{\sin x}{x}$; 6) $\dfrac{1}{1 - \ln^2(1 + x)}$; 7) $(1 + x)^{\sin x}$.

40. Представить формулой Тейлора функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0 с $o((x-x_0)^n)$:

1) $f(x) = \operatorname{th} x,\ x_0 = 0,\ n = 6;$

2) $f(x) = \dfrac{1 - 2x\sqrt{e} + ex^2}{\sqrt{-\ln(2x - x^2\sqrt{e})}},\ x_0 = \dfrac{1}{\sqrt{e}},\ n = 9;$

3) $f(x) = (6 - \sqrt{1 - 10x^4})^{\cos 2x^3},\ x_0 = 0,\ n = 9;$

4) $f(x) = (x^2 - 1)^{1973},\ x_0 = 1,\ n = 1973.$

41. Найти такие числа A и B, чтобы при $x \to 0$ были справедливы асимптотические равенства:

1) $Ae^x - \dfrac{B}{1-x} = -\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{5}{6}x^3 + o(x^3);$

2) $\sin x(A + B\cos x) = x + o(x^4);$

3) $A\arcsin x + B\operatorname{arctg} x = \dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{1}{8}x^5 + o(x^6);$

4) $\operatorname{tg} x = \dfrac{x + Ax^3}{1 + Bx^2} + o(x^6).$

42. С помощью формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа (25) приближенно вычислить (с точностью до 10^{-3}):

1) $\sqrt{127}$; 2) $\sqrt[4]{83}$; 3) $\sqrt[5]{250}$; 4) $\sqrt[3]{e}$; 5) $\sin 85^\circ$; 6) $\cos 72^\circ$; 7) $\ln 1{,}3$; 8) $\operatorname{arctg} 0{,}8$.

43. Оценить с помощью формулы Тейлора (25) абсолютную погрешность приближенных формул:

1) $e^x \approx \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!},\ 0 \leqslant x \leqslant 1;$ 2) $\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!},\ |x| \leqslant 1;$

3) $\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!},\ |x| \leqslant 0{,}5;$

4) $\operatorname{tg} x \approx x + \dfrac{x^3}{3},\ |x| \leqslant 0{,}1;$

5) $\ln(1+x) \approx x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4},\ |x| \leqslant 0{,}1;$

6) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{16},\ 0 \leqslant x \leqslant 0{,}2.$

44. Вычислить с помощью формулы Тейлора (25):

1) e с точностью до 10^{-7}; 2) $\sqrt{10}$ с точностью до 10^{-3};
3) $\sin 1^\circ$ с точностью до 10^{-6}; 4) $\cos 5^\circ$ с точностью до 10^{-5};
5) $\sqrt[3]{30}$ с точностью до 10^{-4}; 6) $\lg 11$ с точностью до 10^{-4}.

45. Доказать, что для всех $n \in N$ $(n \geqslant 2)$ выполняется равенство

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta}{n!\,n},$$

где $0 < \theta < 1$.

46. Пусть функция $f(x)$ такова, что при всех $x \in R$ справедливы неравенства

$$f(x) > 0, \quad f'(x) > 0, \quad f''(x) > 0, \quad f'''(x) > 0.$$

Доказать, что существует число $a > 0$ такое, что $f(x) > ax^2$ при любом $x > 0$.

47. Пусть $f(x) \in C^{(2)}[0;1]$, $f(0) = f(1) = 0$, и пусть существует число M такое, что для всех $x \in (0;1)$ выполняется неравенство $|f''(x)| \leqslant M$. Доказать, что

$$|f'(x)| \leqslant M/2 \quad \text{при} \quad x \in (0;1).$$

48. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на R, и пусть $M_k = \sup\limits_{x \in R} |f^{(k)}(x)| < +\infty$ $(k = 0, 1, 2)$. Доказать, что $M_1^2 \leqslant 2M_0M_2$.

ОТВЕТЫ

1. 1) $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{5^k}{e \cdot k!}\, x^k + o(x^n)$; 2) $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{2^k \sin(3 + k\pi/2)}{k!}\, x^k + o(x^n)$;

3) $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\cos(2 + k\pi/2)}{2^k k!}\, x^k + o(x^n)$; 4) $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k x^k + o(x^n)$;

5) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{3^k}{4^{k+1}}\, x^k + o(x^n)$;

6) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{2^k (2k-1)!!}{k!}\, x^k + o(x^n)$;

7) $\ln 2 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\dfrac{e}{2}\right)^k x^k + o(x^n)$;

8) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{9(\ln 3)^k}{k!}\, x^k + o(x^n)$; 9) $\sum\limits_{k=0}^{n} (k+1)x^k + o(x^n)$.

2. 1) $-1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2k-1}{2^k k!}\, x^k + o(x^n)$; 2) $-x + \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{(-1)^k k}{(k-1)!}\, x^k + o(x^n)$;

3) $3 + \sum\limits_{k=1}^{n} (3 + k(k-1)2^{k-2}) \dfrac{(-1)^k}{k!}\, x^k + o(x^n)$;

4) $1 + \dfrac{3}{2}\, x - \dfrac{9}{8}\, x^2 - \sum\limits_{k=3}^{n} \dfrac{3(2k-1)(2k-5)!!}{2^k k!}\, x^k + o(x^n)$;

5) $-3\ln 6 + \left(2\ln 6 - \dfrac{5}{2}\right)x + \sum\limits_{k=2}^{n} (-1)^k \dfrac{9k-5}{2k(k-1)} \left(\dfrac{5}{6}\right)^{k-1} x^k + o(x^n)$;

6) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}2^k + 1}{k}\, x^k + o(x^n)$;

7) $\ln\frac{2}{3}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-4)^k-9^k}{k6^k}\,x^k+o(x^n)$;

8) $\ln 2+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(1+2^{-k})x^k+o(x^n)$;

9) $\ln 2+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}-2^{-k}}{k}x^k+o(x^n)$.

3. 1) $\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}+\sum_{k=3}^{n}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)}{k(k-2)}\,x^k+o(x^n)$;

2) $-2x+\frac{5}{2}\,x^2+\sum_{k=3}^{n}\frac{(-1)^k(2k-1)}{k(k-1)}\,x^k+o(x^n)$;

3) $2x+\sum_{k=2}^{n}\frac{2k-1}{k(k-1)}((-1)^{k-1}+1)x^k+o(x^n)$;

4) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}2^{5/3-k}C_{2/3}^{k-1}x^k+o(x^n)$;

5) $\sum_{k=1}^{n}3^{1/3-k}(-1)^{k-1}C_{-2/3}^{k-1}x^k+o(x^n)$;

6) $\ln\frac{2}{3}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}4^{-k}+2^{-k}+3^{-k}}{k}+o(x^n)$;

7) $\ln 6+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\,(1+2^{-k}+3^{-k})x^k+o(x^n)$;

8) $-\sum_{k=1}^{n}\frac{2\operatorname{ch}((k+1)\ln 2)}{k+1}\,x^k+o(x^n)$;

9) $5x+\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\left(\frac{2^k+3^k}{k}+\frac{2^{k-1}+3^{k-1}}{k-1}\right)x^k+o(x^n)$.

4. 1) $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3}\left((-1)^{k+1}-2^{-(k+1)}\right)x^k+o(x^n)$;

2) $-3+\sum_{k=1}^{n}5(-1)^{k-1}x^k+o(x^n)$;

3) $-\frac{1}{3}-\frac{2}{9}\,x-\frac{13}{12}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k x^k+o(x^n)$;

4) $-\sum_{k=3}^{n}x^k+o(x^n)$; 5) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(1+4^{-(k+1)})x^k+o(x^n)$;

6) $\sum\limits_{k=0}^{n}(2(-1)^k 3^{-(k+1)} - 2^{-(k+1)})x^k + o(x^n)$;

7) $\frac{1}{3} + \sum\limits_{k=1}^{n}((-1)^k\, 3^{-(k+1)} - 1)x^k + o(x^n)$;

8) $\frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} - 7 \cdot 2^{-(k+1)}}{3}\, x^k + o(x^n)$;

9) $\frac{5}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}((-1)^k\, 2^{-(k+1)} - 1)x^k + o(x^n)$.

5. 1) $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k+1}}{2^{2k+1}(2k+1)!} + o(x^{2n})$;

2) $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{3^{2k}}{(2k)!}\, x^{2k+1} + o(x^{2n})$;

3) $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}2^{4k-1}}{(2k)!}\, x^{2k+1} + o(x^{2n})$;

4) $x + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{2^{2k-1}}{(2k)!}\, x^{2k+1} + o(x^{2n})$;

5) $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2(2k+1)!}\,(3^{2k+1} - 1)x^{2k+1} + o(x^{2n})$;

6) $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{3(-1)^k}{4(2k+1)!}\,(1 - 3^{2k})x^{2k+1} + o(x^{2n})$;

7) $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{3^{2k+1} - 1}{2(2k+1)!}\, x^{2k+1} + o(x^{2n})$;

8) $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, 2^{2k-1}(1 - 2^{2k})x^{2k+1} + o(x^{2n})$.

6. 1) $1 - x^2 + \sum\limits_{k=2}^{n} 2(-1)^k x^{2k} + o(x^{2n})$;

2) $-\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{3^{k-1}}{4^k}\, x^{2k} + o(x^{2n})$;

3) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \operatorname{sh}((k+1)\ln 3)}{4}\, x^{2k} + o(x^{2n})$;

4) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{3 + (-1)^k}{2}\, x^{2k} + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1} - 3}{2}\, x^{2k+1} + o(x^{2n})$;

5) $-\frac{x}{3}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{e^{-k}-1}{3k}\,x^{2k+1}+o(x^{2n})$;

6) $\sum_{k=2}^{n}\frac{(k-1)2^{2k+1}}{(2k-1)!}\,x^{2k-1}+o(x^{2n})$;

7) $x+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k(2k-1)!!}{2^k(2k+1)k!}\,x^{2k+1}+o(x^{2n})$;

8) $-x^3+\sum_{k=1}^{n-2}(-2)^{k-1}(C_{-1/2}^{k-1}+2C_{-1/2}^{k})x^{2k+3}+o(x^{2n})$.

7. 1) $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k3^{2k}}{(2k)!}\,x^{2k}+o(x^{2n+1})$;

2) $x^2+\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\frac{2^{2k-3}}{(2k-2)!}\,x^{2k}+o(x^{2n+1})$;

3) $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k2^{2k-1}}{(2k)!}(1+4^{2k})x^{2k}+o(x^{2n+1})$;

4) $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k2^{2k-1}}{(2k)!}(1-2^{2k})x^{2k}+o(x^{2n+1})$;

5) $\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}(2^{2k}+1)x^{2k}+o(x^{2n+1})$;

6) $\sum_{k=0}^{n}\frac{6^{2k}-4^{2k}}{2\cdot(2k)!}\,x^{2k}+o(x^{2n+1})$.

8. 1) $\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}\,x^{2k}+o(x^{2n+1})$;

2) $1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k2^{2k-1}}{(2k)!}(1-2^{2k-2})x^{2k}+o(x^{2n+1})$;

3) $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k2^{2k-5}}{(2k)!}(1-2^{2k+1}-3^{2k})x^{2k}+o(x^{2n+1})$;

4) $1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{4^{2k}}{(2k)!}\,x^{2k}+o(x^{2n+1})$;

5) $1+\sum_{k=1}^{n}\frac{3(-1)^k4^{2k-1}}{2(2k)!}\,x^{2k}+o(x^{2n+1})$;

6) $1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k4^{2(k-1)}}{(2k)!}(7+4^{k-1})x^{2k}+o(x^{2n+1})$.

9. 1) $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}2^{-(k+1)}-1}{3}\, x^{2k} + \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1+(-1)^k 2^{-(k+1)}}{3}\, x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$;

2) $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{2}\,(3^{-(k+1)} - 5^{-(k+1)})x^{2k} + o(x^{2n+1})$;

3) $\sum\limits_{k=1}^{n} C_{-1/2}^{k-1}\, \dfrac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}}\, x^{2k} + \sum\limits_{k=0}^{n} C_{-1/2}^{k}\, \dfrac{(-1)^k}{4^k}\, x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$;

4) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_{1/2}^{k+1} 2^{-(k+3/2)}(1+(-1)^k)x^{2k} + o(x^{2n+1})$;

5) $\sum\limits_{k=1}^{n} C_{1/2}^{k+1} x^{2k} + o(x^{2n+1})$;

6) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{3k}\left(1 + \dfrac{1+(-1)^{k+1}}{2^k}\right)x^{2k} + o(x^{2n+1})$.

10. 1) $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{2}\,(2^{-(k+1)} - 3^{-(k+1)})x^{3k} + o(x^{3n})$;

2) $\dfrac{11}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}(2(-1)^k - 3\cdot 2^{-(k+1)})x^{3k} + o(x^{3n})$;

3) $\sum\limits_{k=0}^{n} x^{3k} - \sum\limits_{k=0}^{n-1} x^{3k+1} + o(x^{3n})$.

11. 1) $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k(k+1)x^{3k+1} + o(x^{3n+1})$;

2) $\dfrac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\operatorname{sh} k}{k}\, x^{3k} + o(x^{3n+1})$;

3) $\sum\limits_{k=0}^{n}((-1)^k 2^{-k} + 7^{-k})x^{3k} + o(x^{3n+1})$.

12. 1) $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2^{k+1}}(x-2)^k + o((x-2)^n)$;

2) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_{1/2}^{k}(x-1)^k + o((x-1)^n)$;

3) $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{2^k \sin(k\pi/2 - 1)}{k!}\,(x-1)^k + o((x-1)^n)$;

4) $-e^{-2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{e^{-2}2^{k-1}(k-2)}{k!}\,(x+1)^k + o((x+1)^n)$;

5) $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k e^2 2^{k-2}}{k!}(k^2+3k+4)(x+1)^k + o((x+1)^n)$;

6) $\sum\limits_{k=1}^{n} e^{-2}\,\dfrac{2^{k-2}(k-5)}{(k-1)!}(x+1)^k + o((x+1)^n)$;

7) $\sum\limits_{k=1}^{[n/2]} \dfrac{(-1)^{k-1}\cos 1\cdot 2^{2k-1}}{(2k)!}(x+1)^{2k} +$

$$+\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \frac{\sin 1\cdot(-1)^k 2^{2k}}{(2k+1)!}(x+1)^{2k+1} + o((x+1)^n);$$

8) $-2e^6 + 6e^6(x+2) + \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{(-1)^k(k^2-k-18)}{k!}\,e^6(x+2)^k +$

$$+o((x+2)^n).$$

13. 1) $\ln 2 + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}(-1)^{k-1}\left(x-\frac{1}{2}\right)^k + o\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^n\right)$;

2) $\dfrac{\ln(26/3)}{3\ln 3} + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{(3\ln 3)k}\left(\dfrac{9}{26}\right)^k(x-3)^k + o((x-3)^n)$;

3) $\ln 2 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}2^{-k}-1}{k}(x-1)^k + o((x-1)^n)$;

4) $\ln 6 - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2^{-k}+3^{-k}}{k}(x-1)^k + o((x-1)^n)$.

14. 1) $\dfrac{\ln 5}{3} + \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(\dfrac{7}{5}\right)^k \dfrac{(x-1)^k}{3k} + o((x-1)^n)$;

2) $-\dfrac{\ln 2}{4} + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}+2^{-k}}{4k}(x-3)^k + o((x-3)^n)$;

3) $-2\ln 12 + \left(\ln 12 + \dfrac{7}{6}\right)(x+2) -$

$$-\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}\left(\frac{k+2}{3^k} + \frac{k+1}{2^{2k-1}}\right)(x+2)^k + o((x+2)^n);$$

4) $(x-2) + \sum\limits_{k=2}^{n}\left(\dfrac{1}{k} + \dfrac{(-1)^k}{k-1}\right)(x-2)^k + o((x-2)^n)$;

5) $3 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k(k-2)}{k(k+1)}(x-1)^k + o((x-1)^n)$;

6) $-2\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(x+2)^k}{k} + \sum\limits_{k=1}^{[n/2]}(-1)^{k-1}\dfrac{(x+2)^{2k}}{k} + o((x+2)^n)$.

15. 1) $3+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k(x-2)^k+o((x-2)^n)$;

2) $\sum_{k=2}^{n}(x-2)^k+o((x-2)^n)$;

3) $\frac{5}{7}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2^{k-1}7^{k+1}}(x-10)^k+o((x-10)^n)$;

4) $-\frac{7}{6}+\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{5}{3}\right)\left(\frac{10}{21}\right)^k\left(x+\frac{1}{10}\right)^k+o\left(\left(x+\frac{1}{10}\right)^n\right)$;

5) $2+\frac{3}{2}(x-1)+\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(x-1)^k}{2^k}+o((x-1)^n)$;

6) $3+\sum_{k=2}^{n}(-1)^k(x-3)^k+o((x-3)^n)$;

7) $\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{(-1)^{k+1}2^k}{3^{k+1}}-\frac{1}{2^{k+1}}\right)(x+2)^k+o((x+2)^n)$;

8) $\sum_{k=1}^{n}k(x-2)^k+o((x-2)^n)$.

16. 1) $\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k(k-1)}{3^k}(x+2)^k+o((x+2)^n)$;

2) $1+\sum_{k=1}^{n}(1-2^{-k})(x-1)^k+o((x-1)^n)$;

3) $\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(3-\frac{7}{2^{k+1}}\right)(x-3)^k+o((x-3)^n)$;

4) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\left(1+\frac{1}{3^{k+1}}\right)(x-2)^k+o((x-2)^n)$;

5) $\frac{5}{2}+\frac{9}{4}(x-1)+\sum_{k=2}^{n}(1+2^{-(k+1)})(x-1)^k+o((x-1)^n)$;

6) $-6(x-2)+\sum_{k=2}^{n}(-1)^k\frac{(k+1)(k+4)}{2}(x-2)^k+o((x-2)^n)$.

17. 1) $\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{-2}}{k!}(x+1)^{2k}+o((x+1)^{2n})$;

2) $\sum_{k=0}^{n-1}e^{-27}\frac{3^k}{k!}(x+3)^{2k+1}+o((x+3)^{2n})$;

3) $(x+2)\ln 3+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}2^k}{3^k k}(x+2)^{2k+1}+o((x+2)^{2n})$;

4) $\sum\limits_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{(x-5)^{2k+1}}{k}+o((x-5)^{2n})$;

5) $\ln 2+\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\frac{(x-1)^{2k-1}}{2k-1}+\left(\frac{(-1)^{k-1}}{k2^{2k+1}}+\frac{1}{2k}\right)(x-1)^{2k}\right]+o((x-1)^{2n})$.

18. 1) $1+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!!}{2^k k!}(x-1)^{2k}+o((x-1)^{2n})$;

2) $(x+1)+\sum\limits_{k=1}^{n-1}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}(x+1)^{2k+1}+o((x+1)^{2n})$;

3) $\frac{(x-2)}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k(2k-1)!!}{2^{2k+1}(2k)!!}(x-2)^{2k+1}+o((x-2)^{2n})$;

4) $(x-1)^2+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3k-2)}{3^k k!}(x-1)^{2k+2}+o((x-1)^{2n})$;

5) $(x+1)^3+\sum\limits_{k=1}^{n-2}\frac{(-1)^k(2k-1)!!}{2^k k!}(x+1)^{2k+3}+o((x+1)^{2n})$.

19. 1) $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{4^{k+1}}(x-1)^{2k+1}+o((x-1)^{2n})$;

2) $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{3^k}{2^{k+1}}(x-1)^{2k+1}+o((x-1)^{2n})$;

3) $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\frac{(x-2)^{2k}}{2^{2k+2}}+\sum\limits_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{(x-2)^{2k+1}}{2^{2k+2}}+o((x-2)^{2n})$.

20. 1) $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{e^{-5}2^k}{k!}(x+2)^{2k}+o((x+2)^{2n+1})$;

2) $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{e^{-18}2^k}{k!}(x-3)^{2k}+o((x-3)^{2n+1})$;

3) $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\sqrt[4]{2}(\ln 2)^k}{k!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2k}+o\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\right)$;

4) $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{e^{-3}2^k}{k!}((x+2)^{2k}+(x+2)^{2k+1})+o((x+2)^{2n+1})$;

5) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(\ln 2)^{k-1}}{2(k-1)!}(x+1)^{2k}+o((x+1)^{2n+1})$;

6) $-\frac{1}{4}+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(\ln 2)^{k-1}}{4\cdot k!}(k-\ln 2)(x-1)^{2k}+o((x-1)^{2n+1})$;

7) $e^3+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{e^3 2^{k-1}(3k+2)}{k!}(x-1)^{2k}+o((x-1)^{2n+1})$.

21. 1) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(1-3^{2k})}{4(2k)!}(x-1)^{2k}+o((x-1)^{2n+1})$;

2) $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\frac{3\cdot 6^{2k}}{(2k+1)!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^{2k+1}+\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 3^{2k}}{2(2k)!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^{2k}+$
$+o\left(\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^{2n+1}\right)$;

3) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2}(-1)^{k+1}}{(2k-1)!}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)^{2k}+o\left(\left(x+\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}\right)$;

4) $\frac{\pi^2}{4}+\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\left(\frac{\pi^2}{4(2k)!}-\frac{1}{(2k-2)!}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k}+$
$+o\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}\right)$;

5) $-\frac{\pi}{8}+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2}\left(\frac{\pi^{2k-1}}{(2k-1)!}+\frac{\pi^{2k+1}}{4(2k+1)!}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2k}+$
$+o\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\right)$.

22. 1) $1+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}3^k}{k2^k\ln 2}(x-4)^{2k}+o((x-4)^{2n+1})$;

2) $\ln 3+(x+1)\ln 3-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(x+1)^{2k}}{k}-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(x+1)^{2k+1}}{k}+$
$+o((x+1)^{2n+1})$;

3) $\frac{2}{3\ln 5}\sum\limits_{k=1}^{n+1}\frac{2^{2k-1}}{2k-1}(x-1)^{2k-1}+o((x-1)^{2n+1})$;

4) $-2\ln 3+\left(\ln 3+\frac{4}{3}\right)(x+2)^2+\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{2^{k-1}(k-4)}{3^k k(k-1)}(x+2)^{2k}+$
$+o((x+2)^{2n+1})$.

23. 1) $\sum\limits_{k=0}^{n}C_{-1/3}^{k}(x-2)^{2k+1}+o((x-2)^{2n+1})$;

2) $\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}(x-2)+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!!}{\sqrt{5}\,10^k k!}((x-2)^{2k}+(x-2)^{2k+1})-$
$-o((x-2)^{2n+1})$;

3) $1+(x-1)+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!!}{2^k k!}((x-1)^{2k}+(x-1)^{2k+1})+$
$+o((x-1)^{2n+1})$;

4) $\sum\limits_{k=0}^{n-1} C_{1/2}^{2k+1} 2^{2k+5/2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2k+2}+o\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\right)$;

5) $-\sum\limits_{k=0}^{n} 2^{2k+3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^{2k+1}+o\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^{2n+1}\right)$;

6) $3+\sum\limits_{k=1}^{n}(x-2)^{2k}+o((x-2)^{2n+1})$;

7) $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{(-1)^k}{5\cdot 2^k}-\frac{2^k}{5}\right)(x+1)^{2k}+o((x+1)^{2n+1})$;

8) $-2+4(x-1)^2+\sum\limits_{k=2}^{n}(-1)^{k+1}(2C_{1/2}^{k}+3C_{1/2}^{k-1})(x-1)^{2k}+$
$+o((x-1)^{2n+1})$.

24. $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{2(\ln 2)^k}{k!}(x-1)^{3k}+o((x-1)^{3n})$.

25. $(x-2)+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!!}{2^{2k}k!}(x-2)^{2k+1}+o((x-2)^{2n+2})$.

26. $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}C_{-1/3}^{k}}{2^{3k+1}}(x-2)^{3k+1}+o((x-2)^{3n+1})$.

27. $-1-\frac{1}{2}(x-1)^2-\sum\limits_{k=2}^{n}\left(\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}+2\frac{(4k-3)!!}{(4k)!!}\right)(x-1)^{4k-2}+$
$+o((x-1)^{4n+1})$.

28. 1) $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\cos 2}{(2k+1)!}(x-1)^{4k+2}+\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\sin 2}{(2k)!}(x-1)^{4k}+$
$+o((x-1)^{4n})$;

2) $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\sin 1}{(2k+1)!}(x-2)^{4k+2}+\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\cos 1}{(2k)!}(x-2)^{4k}+$
$+o((x-2)^{4n})$;

3) $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k 3^{2k+1}\cos 1}{(2k+1)!}(x+1)^{4k+2}+\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 3^{2k}\sin 1}{(2k)!}(x+1)^{4k}+$
$+o((x+1)^{4n})$.

29. 1) $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{2k+1}\left(\frac{8}{\pi}\right)^{2k+1}\frac{(x-\pi/4)^{4k+2}}{(2k+1)!}+o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{4n+3}\right)$;

2) $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{4}{\pi}\right)^{2k}\frac{(x-\pi/4)^{4k}}{(2k)!}+o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{4n+3}\right)$;

3) $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\sqrt{\pi}}{(2k+1)!}(x+\sqrt{\pi})^{4k+2}+\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!}(x+\sqrt{\pi})^{4k+3}+$
$+o((x+\sqrt{\pi})^{4n+3})$;

4) $-\dfrac{\sin 2}{2}+\dfrac{\sin 2}{2}(x+1)+\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\dfrac{2^{2k}}{(2k+1)!}(x+1)^{4k+3}+$

$$+\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\frac{2^{2k}}{(2k+1)!}(x+1)^{4k+2}+o((x+1)^{4n+3}).$$

30. 1) $1-x^2+o(x^3)$; 2) $1+x+x^2/2+o(x^2)$; 3) $o(x^{2k})$.
31. 1) -120; 2) 0; 3) $60!$.
33. 1) $1+3(x-1)+3(x-1)^2+(x-1)^3$; 2) $1+(x+2)^4$;
3) $2(x+1)-2(x+1)^2+(x+1)^3$;
4) $144(x-2)^2+144(x-2)^3+60(x-2)^4+12(x-2)^5+(x-2)^6$.
36. 1) $1+x+x^2/2+o(x^2)$; 2) $e+ex+o(x^2)$;
3) $1+x^2/2+o(x^2)$; 4) $1-x^2/10+o(x^2)$;
5) $1-3x+6x^2+o(x^2)$; 6) $-x^2/2+o(x^2)$.
37. 1) $1-2x+2x^2+o(x^3)$; 2) $2x+7x^3/3+o(x^3)$;
3) $1-x-x^2+x^3/3+o(x^3)$; 4) $x-x^3/2+o(x^3)$;
5) $1+x+x^2/2+o(x^3)$; 6) $-x^3/8+o(x^3)$;
7) $e-(e/2)x+(11e/24)x^2-(7e/16)x^3+o(x^3)$;
8) $1+x-x^2+3x^3/2+o(x^3)$; 9) $x-x^2/2+x^3/2+o(x^3)$.
38. 1) $e+(e/6)x^2+(e/30)x^4+o(x^4)$;
2) $1-x+3x^2/2-11x^3/6+19x^4/8+o(x^4)$;
3) $3x+27x^3/2+o(x^4)$; 4) $x-x^3/2+o(x^4)$;
5) $1-x/2+x^2/12-x^4/720+o(x^4)$; 6) $1-x^2/4-x^4/96+o(x^4)$;
7) $1-x^2/6-17x^4/360+o(x^4)$; 8) $1+x^2/3-4x^4/45+o(x^4)$;
9) $1+x^2+x^4/3+o(x^4)$.
39. 1) $1-6x+21x^2-32x^3+15x^4+66x^5+o(x^5)$;
2) $x+x^2/2+x^3/3-3x^4/4+x^5/5+o(x^5)$;
3) $1+x^2/2+5x^4/24+o(x^5)$;
4) $1+x+x^2/2-x^3/3-11x^4/24+2x^5/15+o(x^5)$;
5) $-x^2/6-x^4/180+o(x^5)$;
6) $1+x^2-x^3+23x^4/12-17x^5/6+o(x^5)$;
7) $1+x^2-x^3/2+2x^5/3+o(x^5)$.
40. 1) $x-x^3/3+2x^5/15+o(x^6)$;
2) $e\sqrt{2}(x-1/\sqrt{e})^2-e^2\sqrt{2}(x-1/\sqrt{e})^4+e^3\sqrt{2}(x-1/\sqrt{e})^6-$

$$-(4e^4/3)\sqrt{2}(x-1/\sqrt{e})^8+o((x-1/\sqrt{e})^9);$$

3) $5+5x^4-10\ln 5\cdot x^6+25x^8/2+o(x^9)$;
4) $2^{1973}(x-1)^{1973}+o((x-1)^{1973})$.
41. 1) $A=1$, $B=1$; 2) $A=4/3$, $B=-1/3$; 3) $A=1$, $B=-1$;
4) $A=-1/15$, $B=-2/5$.
42. 1) 5,027; 2) 3,019; 3) 3,017; 4) 1,396; 5) 0,996; 6) 0,309;
7) 0,262; 8) 0,675.
43. 1) $e/(n+1)!$; 2) $1/7!$; 3) $1/(2^8 8!)$; 4) $2\cdot 10^{-6}$; 5) $2\cdot 10^{-6}$;
6) $1{,}5\cdot 10^{-3}$.
44. 1) 2,7182818; 2) 3,162; 3) 0,017452; 4) 0,99619; 5) 3,1072;
6) 1,0414.

§ 19. Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1) Пусть требуется найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $f(0) = g(0) = 0$. Предполагая, что функции f и g можно представить формулами Маклорена, ограничимся первыми отличными от нуля членами в этих формулах:

$$f(x) = ax^n + o(x^n), \quad a \neq 0; \quad g(x) = bx^m + o(x^m), \quad b \neq 0.$$

Если $m = n$, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{ax^n + o(x^n)}{bx^n + o(x^n)} = \frac{a}{b}. \tag{1}$$

Если $n > m$, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0; \tag{2}$$

если же $m > n$, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty. \tag{3}$$

2) Формула Тейлора часто применяется для вычисления пределов вида

$$\lim_{x\to x_0} (f(x))^{g(x)},$$

где

$$f(x) > 0, \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty.$$

Рассмотрим сначала случай $x_0 = 0$ и предположим, что функции f и g представляются в виде

$$f(x) = 1 + ax^k + o(x^k), \quad g(x) = 1/(bx^k + o(x^k)), \quad x \to 0,$$

где $a \neq 0$, $b \neq 0$, $k \in N$. Так как

$$\lim_{x\to 0}(1 + ax^k + o(x^k))^{1/(ax^k+o(x^k))} = e, \quad \lim_{x\to 0} \frac{ax^k + o(x^k)}{bx^k + o(x^k)} = \frac{a}{b},$$

то

$$\lim_{x\to 0}(f(x))^{g(x)} = \lim_{x\to 0}(1 + ax^k + o(x^k))^{1/(bx^k+o(x^k))} = e^{a/b}. \tag{4}$$

Если

$$f(x) = \frac{1 + ax^k + o(x^k)}{1 + a_1x^k + o(x^k)}, \quad g(x) = \frac{1}{bx^k + o(x^k)} \quad \text{при} \quad x \to 0,$$

причем $a \neq 0$, $a_1 \neq 0$, $b \neq 0$, $k \in N$, то

$$\lim_{x\to 0}(f(x))^{g(x)} = e^{(a-a_1)/b}. \tag{5}$$

Заметим, что для вычисления предела функции $(f(x))^{g(x)}$ при $x \to 0$ можно предварительно найти предел ее логарифма, т. е.

$$\lim_{x\to 0} g(x) \ln f(x),$$

представив функции $g(x)$ и $\ln f(x)$ формулами Маклорена.

Если

$$f(x) = 1 + ax^n + o(x^n), \quad g(x) = \frac{1}{bx^m + o(x^m)}, \quad x \to 0,$$

где $a \neq 0$, $b \neq 0$, $m, n \in N$ и $m \neq n$, то

$$\lim_{x\to 0}(f(x))^{g(x)} = 1 \quad \text{при} \quad n > m; \tag{6}$$

если $m > n$ и $m - n$ — четное число, то

$$\lim_{x\to 0}(f(x))^{g(x)} = \begin{cases} +\infty, & ab > 0, \\ 0, & ab < 0; \end{cases} \tag{7}$$

если же $m > n$ и $m - n$ — нечетное число, то $\lim\limits_{x\to 0}(f(x))^{g(x)}$ не существует.

3) При вычислении предела с помощью формулы Тейлора в конечной точке $x_0 \neq 0$ следует положить $t = x - x_0$ и свести задачу к вычислению предела в точке $t = 0$. Случай $x \to \infty$ заменой $x = 1/t$ сводится к случаю $t = 0$.

Если имеется неопределенность одного из видов $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, ее следует привести к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + 2\operatorname{tg} x} - e^x + x^2}{\arcsin x - \sin x}$.

▲ Функции, стоящие в числителе и знаменателе дроби, являются бесконечно малыми при $x \to 0$. Так как

$$\sin x = x - x^3/6 + o(x^3), \quad \arcsin x = x + x^3/6 + o(x^3), \quad x \to 0,$$

то формула Маклорена для знаменателя дроби имеет вид

$$\arcsin x - \sin x = x^3/3 + o(x^3), \quad x \to 0.$$

Поэтому числитель дроби следует представить формулой Маклорена с $o(x^3)$. Используя формулы

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 + o(t^3), \quad t \to 0,$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \quad x \to 0,$$

получаем

$$\sqrt{1 + 2\operatorname{tg} x} = 1 + \frac{1}{2}(2\operatorname{tg} x) - \frac{1}{8}(2\operatorname{tg} x)^2 + \frac{1}{16}(2\operatorname{tg} x)^3 + o(\operatorname{tg}^3 x) =$$

$$= 1 + x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3).$$

Учитывая, что

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

находим представление формулой Маклорена числителя дроби

$$\sqrt{1 + 2\operatorname{tg} x} - e^x + x^2 = \frac{2}{3}x^3 + o(x^3), \quad x \to 0.$$

Таким образом, дробь представляется в виде

$$\frac{2x^3/3 + o(x^3)}{x^3/3 + o(x^3)}, \quad x \to 0,$$

откуда следует, что искомый предел равен 2. ▲

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{arctg} x} - 1/(1-x) + x^2/2}{\ln((1+x)/(1-x)) - 2x}$.

▲ Используя формулы

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \quad \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

находим формулу Маклорена для знаменателя дроби:

$$\ln\frac{1+x}{1-x} - 2x = \frac{2}{3}\,x^3 + o(x^3), \quad x \to 0.$$

Поэтому числитель дроби следует представить формулой Маклорена с $o(x^3)$. Так как

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

то

$$e^{\operatorname{arctg} x} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{3}\right) + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x^3 + o(x^3) =$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad x \to 0.$$

Заметив, что $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$, $x \to 0$, получаем представление формулой Маклорена числителя дроби:

$$e^{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{1-x} + \frac{x^2}{2} = -\frac{7}{6}\,x^3 + o(x^3), \quad x \to 0.$$

Таким образом, данную дробь можно записать в виде

$$\frac{-7x^3/6 + o(x^3)}{2x^3/3 + o(x^3)}, \quad x \to 0,$$

откуда следует, что искомый предел равен $-7/4$. ▲

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(\operatorname{sh}(x/\sqrt{5})) - \sqrt[5]{1 - x^2/2}}{\operatorname{ch}(\sin x) - e^{x^2/2}}$.

▲ Используя формулы

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad x \to 0, \qquad \operatorname{ch} t = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^4), \quad t \to 0,$$

получаем

$$\operatorname{ch}(\sin x) = 1 + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) + \frac{x^4}{24} + o(x^4) = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4),$$
$$x \to 0.$$

Учитывая, что $e^{x^2/2} = 1 + x^2/2 + x^4/8 + o(x^4)$, находим формулу Маклорена для знаменателя дроби:

$$\operatorname{ch}(\sin x) - e^{x^2/2} = -\frac{1}{4}\,x^4 + o(x^4), \quad x \to 0.$$

Числитель дроби следует представить формулой Маклорена с $o(x^4)$. Так как

$$\operatorname{sh}\frac{x}{\sqrt{5}} = \frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{1}{3!}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^3 + o(x^4) = \frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{x^3}{30\sqrt{5}} + o(x^4), \quad x \to 0,$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + o(t^4), \quad t \to 0,$$

то

$$\cos\left(\operatorname{sh}\frac{x}{\sqrt{5}}\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{5} + \frac{x^4}{75}\right) + \frac{1}{4!}\frac{x^4}{25} + o(x^4) =$$
$$= 1 - \frac{x^2}{10} - \frac{x^4}{200} + o(x^4), \quad x \to 0.$$

Используя формулу $(1+t)^{1/5} = 1 + \frac{1}{5}t - \frac{2}{25}t^2 + o(t^2)$, $t \to 0$, получаем

$$\sqrt[5]{1 - \frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{10} - \frac{x^4}{50} + o(x^4), \quad x \to 0.$$

Итак,

$$\cos\left(\operatorname{sh}\frac{x}{\sqrt{5}}\right) - \sqrt[5]{1 - \frac{x^2}{2}} = \frac{3}{200}x^4 + o(x^4), \quad x \to 0,$$

и поэтому заданная дробь представляется в виде

$$\frac{3x^4/200 + o(x^4)}{-x^4/4 + o(x^4)}, \quad x \to 0,$$

откуда следует, что искомый предел равен $-3/50$. ▲

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - x + x^3/6}{x - \operatorname{th} x}$.

▲ Так как $\operatorname{th} x$ — нечетная функция и $\operatorname{th} x = x + o(x)$ при $x \to 0$, то

$$\operatorname{th} x = x + a_3x^3 + o(x^4).$$

Используя формулы

$$\operatorname{sh} x = x + x^3/6 + o(x^4), \quad \operatorname{ch} x = 1 + x^2/2 + o(x^3)$$

и равенство

$$\operatorname{sh} x = \operatorname{th} x \operatorname{ch} x,$$

получаем

$$x + x^3/6 + o(x^4) = (x + a_3x^3 + o(x^4))(1 + x^2/2 + o(x^3)).$$

Приравнивая коэффициенты при x^3 в этом равенстве, находим

$$1/6 = a_3 + 1/2,$$

откуда $a_3 = -1/3$, и, следовательно,

$$\operatorname{th} x = x - x^3/3 + o(x^4), \quad x - \operatorname{th} x = x^3/3 + o(x^4).$$

Поэтому числитель дроби следует представить формулой Маклорена с $o(x^3)$. Заметим, что

$$(\ln(x + \sqrt{1+x^2}))' = 1/\sqrt{1+x^2},$$

где

$$1/\sqrt{1+x^2} = 1 - x^2/2 + o(x^3).$$

Поэтому (§18, формула (24))

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = x - x^3/6 + o(x^4)$$

и числитель дроби есть $o(x^4)$. Таким образом, дробь представляется в виде

$$\frac{o(x^4)}{x^3/3 + o(x^4)},$$

откуда следует, что искомый предел равен нулю. ▲

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(\cos(xe^x) - \ln(1-x) - x)^{\operatorname{ctg} x^3}$.

▲ Так как

$$\operatorname{ctg} x^3 = \frac{1}{\operatorname{tg} x^3} = \frac{1}{x^3 + o(x^3)}, \quad x \to 0,$$

то функцию $f(x) = \cos(xe^x) - \ln(1-x) - x$ следует представить формулой Маклорена с $o(x^3)$. Используя равенства

$$xe^x = x + x^2 + o(x^2), \quad x \to 0, \quad \cos t = 1 - t^2/2 + o(t^3), \quad t \to 0,$$

$$-\ln(1-x) = x + x^2/2 + x^3/3 + o(x^3), \quad x \to 0,$$

получаем

$$f(x) = 1 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3),$$

$$(f(x))^{\operatorname{ctg} x^3} = \left(1 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)\right)^{1/(x^3+o(x^3))}, \quad x \to 0,$$

откуда следует, что искомый предел равен $e^{-2/3}$. ▲

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2\operatorname{tg} x}{x+\sin x}\right)^{1/(1-\cos x)}$.

▲ Используя формулы

$$1 - \cos x = x^2/2 + o(x^2), \quad \operatorname{tg} x = x + x^3/3 + o(x^3),$$

$$\sin x = x - x^3/6 + o(x^3), \quad x \to 0,$$

получаем

$$\left(\frac{2\operatorname{tg} x}{x+\sin x}\right)^{1/(1-\cos x)} = \left(\frac{2x + 2x^3/3 + o(x^3)}{2x - x^3/6 + o(x^3)}\right)^{1/(1-\cos x)} = \left(\frac{1 + x^2/3 + o(x^2)}{1 - x^2/12 + o(x^2)}\right)^{1/(x^2/2+o(x^2))}$$

откуда следует, что искомый предел равен $e^{2(1/3-(-1/12))}$, т. е. равен $e^{5/6}$. ▲

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos(\sin x) + \dfrac{1}{2}(\arcsin x)^2\right)^{1/(x^2(\sqrt{1+2x}-1))}$

▲ Используя формулы

$$\cos t = 1 - t^2/2 + t^4/4! + o(t^5), \quad t \to 0,$$

$$\sin x = x - x^3/6 + o(x^4), \quad \arcsin x = x + x^3/6 + o(x^4),$$

$$\sqrt{1+2x} = 1 + x + o(x), \quad x \to 0,$$

получаем

$$f(x) = \cos(\sin x) + \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 = 1 + \frac{3}{8}\,x^4 + o(x^4),$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2(\sqrt{1+2x} - 1)} = \frac{1}{x^3 + o(x^3)}.$$

Следовательно, искомый предел есть

$$\lim_{x\to 0}(f(x))^{g(x)} = \lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{3}{8}\,x^4 + o(x^4))\right)^{1/(x^3+o(x^3))} = 1. \ \blacktriangle$$

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to 2}(\sqrt{3-x} + \ln(x/2))^{1/\sin^2(x-2)}$.

▲ Полагая $x - 2 = t$, получаем

$$\lim_{x\to 2}(\sqrt{3-x} + \ln(x/2))^{1/\sin^2(x-2)} = \lim_{t\to 0}\left(\sqrt{1-t} + \ln(1+t/2)\right)^{1/\sin^2 t}.$$

Так как

$$\sin^2 t = t^2 + o(t^2), \quad \sqrt{1-t} = 1 - t/2 - t^2/8 + o(t^2),$$
$$\ln(1+t/2) = t/2 - t^2/8 + o(t^2)$$

при $t \to 0$, то

$$(\sqrt{1-t} + \ln(1+t/2))^{1/\sin^2 t} = (1 - t^2/4 + o(t^2))^{1/(t^2+o(t^2))},$$

откуда следует, что искомый предел равен $e^{-1/4}$. ▲

Пример 9. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{7/4}(\sqrt[4]{x+1} + \sqrt[4]{x-1} - 2\sqrt[4]{x})$.

▲ Используя равенство

$$\sqrt[4]{x+1} + \sqrt[4]{x-1} - 2\sqrt[4]{x} = x^{1/4}(\sqrt[4]{1+1/x} + \sqrt[4]{1-1/x} - 2)$$

и полагая $1/x = t$, получаем

$$\lim_{x\to+\infty} x^{7/4}(\sqrt[4]{x+1} + \sqrt[4]{x+1} - 2\sqrt[4]{x}) = \lim_{t\to+0}\frac{(1+t)^{1/4} + (1-t)^{1/4} - 2}{t^2}.$$

Так как

$$(1+t)^{1/4} = 1 + \frac{t}{4} - \frac{3}{32}\,t^2 + o(t^2),$$

то

$$(1+t)^{1/4} + (1-t)^{1/4} - 2 = -\frac{3}{16}\,t^2 + o(t^2), \quad t \to +0,$$

откуда следует, что искомый предел равен $-3/16$. ▲

Пример 10. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x \operatorname{arctg} x} - \dfrac{1}{\operatorname{tg} x \arcsin x}\right)$.

▲ Используя формулы

$$\sin x = x - x^3/6 + o(x^4), \quad \operatorname{arctg} x = x - x^3/3 + o(x^4),$$
$$\operatorname{tg} x = x + x^3/3 + o(x^4), \quad \arcsin x = x + x^3/6 + o(x^4),$$

получаем

$$\frac{1}{\sin x \operatorname{arctg} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x \arcsin x} = \frac{\operatorname{tg} x \arcsin x - \sin x \operatorname{arctg} x}{\sin x \operatorname{arctg} x \operatorname{tg} x \arcsin x} =$$

$$= \frac{(x + x^3/3)(x + x^3/6) - (x - x^3/6)(x - x^3/6) + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \frac{x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)},$$

откуда следует, что искомый предел равен 1. ▲

ЗАДАЧИ

Найти предел (1–18).

1. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh}2x-2\operatorname{sh}x}{x^3}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}$;
4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1+x^2/2}{x^4}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch}3x+\cos 3x-2}{x^4}$;
6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}-2\sqrt[4]{1-x}}{x}$;
8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}x-\arcsin x}{x^2}$.

2. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{\sin x-x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}x-\arcsin x}{\operatorname{tg}x-\sin x}$;
3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x-\arcsin 2x}{x^3}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+2x}-1}{\sqrt[4]{1+x}-\sqrt{1-x}}$;
5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\cos x-\sqrt{1+2x}}{\ln(1+x)-x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sqrt{1+2x}}{\ln\cos x}$;
7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cos x+\arcsin x-3\sqrt[3]{1+x}}{\ln(1-x^2)}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-x^2}-x\operatorname{ctg}x}{x\sin x}$.

3. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^x-1}{x^2}$;
3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{1/x}-e(1-x/2)}{x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos((\pi/2)\cos x)}{\sin(\sin^2 x)}$.

4. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sqrt[3]{1+3x+9x^2/2}}{x^3}$;
2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^3)-2\sin x+2x\cos x^2}{\operatorname{arctg}x^3}$;
3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sqrt{1+\sin x}-(1/2)\ln(1+x^2)-x}{\operatorname{tg}^3 x}$;
4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-\sqrt{1+x^2}-x\cos x}{\ln^3(1-x)}$;
5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x\ln\cos x}-(1+4x)^{1/4}+x-3x^2/2}{x\sin x^2}$.

5. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{arctg}x}+\ln(1-x)-1}{2-\sqrt{4+x^3}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}\sin x+\ln\cos x-x}{\sqrt[3]{1-x^3}-1}$;
3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}\operatorname{sh}x+\ln\cos x-x}{1-\sqrt[3]{1-x^3}}$;
4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(e^{2x}+\sin x)-3\arcsin x+5x^2/2}{\sqrt[3]{8+x^3}-2}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\ln(1+x)/(1+x))-\operatorname{tg}(x-2x^2)}{\sqrt{4+x^3}-2}$.

6. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt{1-x^2}}{\sin x-x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x^3}-\cos x^4}{\operatorname{tg} x-x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sqrt{1+\sin x}+\ln(1-x)}{\operatorname{tg} x-\sin x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}\ln(1+x)-x/(x+1)}{\operatorname{tg} x-\sin x}$.

7. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}+\ln(1-x)-1}{\arcsin x-\sin x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\operatorname{tg} x}-e^x+x^2}{\arcsin x-\sin x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)\cos x-e^{\operatorname{tg} x}+\sqrt{1+2x^2}}{x-\sin x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\sin x}-\ln(1-x/2)-1}{\operatorname{tg} x-\sin x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg} x}-x-\operatorname{ch} x}{\sin x-\operatorname{arctg} x}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}+\ln(1-\sin x)-1}{\operatorname{tg} x-\operatorname{arctg} x}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-e^{\sin x}+3x^2/2}{\arcsin x-\operatorname{tg} x}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}\ln(1-x)+\sin(\sin x)+3x^2/2}{\operatorname{tg} x-\arcsin x}$.

8. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+2x}-x(x+x^2)}{x-\operatorname{arctg} x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x/2)-\sqrt{1+\sin x}+1}{\operatorname{sh} x-\operatorname{arctg} x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg}(x/2)}-\sqrt{1+\sin x}-x^2/4}{\arccos x-\operatorname{arcctg} x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x+x^2}+\sin\ln(1-x)-e^{-7x^2/6}}{x-\operatorname{arctg} x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{sh} 2x}-\cos x-x}{\operatorname{tg} x-\operatorname{arctg}\sin x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2-e^{2x}}-\cos 2x+\ln(1+x)}{\sin x-\arcsin\operatorname{tg} x}$.

9. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^{\operatorname{tg} x}-\sin^2 x-x}{x+x^3-\operatorname{tg} x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^3}-x\operatorname{ctg} x-x^2/3}{x\cos x-\sin x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt{1-2x}-x}{x^2\operatorname{tg} x-e^{-x^3}+1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\ln(\sin x+\sqrt{1+x^2})}{\operatorname{tg} x-x\cos^2 x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{e^x-1}-1/(1-x)}{\ln((1+x)/(1-x))-2\sin x}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(\sin x)-\ln(x+\sqrt[3]{1+x^2})-x^2/6}{\operatorname{th}(x-x^3)-x}$.

10. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-\operatorname{ch} 2x-2x}{\operatorname{tg} 2x-2\sin x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x-x^2/6)-\operatorname{sh} x+2x^2/3}{\sin 2x-2x\cos x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2e^{2x}+\ln(1-x^2)}{x\cos x-\sin x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x+3\cos x-3\sqrt[3]{1+x}}{1+\ln(1+x)-e^x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2e^x-\ln(1+x^2)-\arcsin x^3}{x\sin x-x^2}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{1+\operatorname{tg} x} - e^{\sqrt{1+2x}}}{\sin(x^2/7) - (x/3)\ln(1-x)}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \sqrt{1+2x+2x^2}}{x + \operatorname{tg} x - \sin 2x}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}\sin x - x\cos x}{e^x + \ln(1-x) - 1}$.

11. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - x\sqrt{1+x} - 1}{\sin x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sin x - x\cos x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x-x^2} - \ln(1+\sin x) - 1}{x\cos x - \operatorname{sh} x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\ln\cos x + x\operatorname{sh} x}{\sin(x^2/2) - \operatorname{sh}(x^2/2)}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}\operatorname{tg} x - x\cos\sin x}{\ln(1+x) - x\sqrt{1-x}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x - xe^x}{x\sqrt{1-x^2} - \operatorname{tg} x}$.

12. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-2x} + e^{\operatorname{tg} x} - 2}{\sin x/x - \cos x - x^2/3}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x - x\ln(1+x)} + (3/4)\operatorname{tg} x^2 - 1}{xe^x - \arcsin x - x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh} 2x + \ln(1-\sin x) - \sin\ln(1+x)}{(1-2x)^{-1/2} - e^x - x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-2x)^{-1/2} - (1+2x)^{-1/2} - \operatorname{arctg} 2x}{e^{-x} + \ln(1+\arcsin x) - 1}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(e^{\sin x} + \ln(1-x) + x^3/3)}{\ln\operatorname{ch} x - x^2/2}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\operatorname{arctg} x - \operatorname{tg} x}{e^{\operatorname{sh} x} - (1+2x)^{1/2} - x^2}$.

13. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2} - e^{x^3/4}}{\ln(1+3x^2) - 3x^2\cos x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\sqrt{1+x^2} - x) + \operatorname{tg} x}{x(\operatorname{ch} x - e^{x^2})}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{\ln(e+x)} - e^{x/(3e)} + x^2/(3e^2)}{x\operatorname{ch} x - \sin x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x} - \sqrt{1+x^2} - \arcsin x}{\operatorname{sh}(x-x^2) - \ln\sqrt{1+2x}}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{ch}(2x/(2+x^4)) + \cos(2x/(2-x^4)) - 2e^{x^4/2}}{\operatorname{tg}\sqrt{1+x^4} - \operatorname{tg}\sqrt{1-x^4}}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{1+\cos x} - e^{2+x^2} + (3e^2/2)\sin x^2}{\ln(1+x^2) - (\operatorname{arctg} x)^2}$.

14. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin 2x) - 2x + 2x^2}{x/2 + \operatorname{tg}(x/2) - \arcsin x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin x} - (1/2)\operatorname{tg} x + x^2/8 - 1}{e^x - \sqrt{1+2x} - x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x} - e^{\operatorname{tg} x} + 6x^3 + x^2}{\ln(1+x) - \operatorname{arctg} x + x^2/2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{ch} 2x - (1+3x)^{-1/3} - x}{x^2/2 + \ln(1+\operatorname{tg} x) - \arcsin x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x/(1-x)} - \operatorname{sh} x - \cos x}{\sqrt[6]{1+x} + \sqrt[6]{1-x} - 2}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + \operatorname{ch} x - e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x + \sqrt[3]{1-3x} - 2\cos x + 1}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2x+\cos 2x} - e^{\operatorname{tg} x} + 2x^2}{2\sin x - 2\ln(1+x) - x^2}$,

8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh} \sin x^3 + \sin \operatorname{sh} x^3}{(x^2/2)\sqrt{1-x} + \ln(1+x) - x\cos x}$

15. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x^2}{e^{\arcsin x} - e^{\sin x} - x^3/2}$, 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\sin x/x) + \operatorname{ch}(x/\sqrt{3}) - 1}{\operatorname{sh} x - \ln(x + \sqrt{1+x^2})}$,

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\operatorname{arctg} \sin x - \operatorname{tg} \operatorname{sh} 3x}{\sqrt{1+x}\sin x^3 - x^2\ln(1 - 16x/9)}$, 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\sqrt{1+x^3} - \sin 1}{\sqrt[5]{1 - 2x\ln\cos x} - 1}$,

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}(3+x^2) - \operatorname{arctg}(2+\cos x)}{\ln(1+x) - e^x + 1}$,

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(1/2 + x^2) - \arcsin(\cos x - 1/2)}{1 + \ln(1+x^2) - \cos x}$

16. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - \sqrt{1+2x^2}}{\operatorname{tg}^4 x}$, 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + \ln(1 - \sin x) - 1}{\sqrt[3]{8 - x^4} - 2}$,

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x + x^2/2)}{e^{-x^2/2} - \cos x}$, 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x/(1+x)} - \cos(1 - e^{-x}) - \operatorname{arctg} x}{x^4}$,

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sqrt{e^x - \sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{x^6 - x^7}}}{(1/e)(1+x)^{1/x} - \sqrt{1 - x + 7x^2/6}}$,

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sqrt{\ln(1+x) + \cos x + 4x^3/3 - \sqrt[3]{1+3x}}}{\sqrt{1 - x + x^2/2} - (\cos x)^{1/x}}$

17. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(xe^x) + \sin(xe^{-x}) - 2x - 2x^3/3}{x^5}$,

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x\cos x) + x\ln(1 + 2x^2/3) - x}{\sqrt{1+x^5} - 1}$,

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1 - x^2/2} - e^{-x^2/6}}{x^2\ln(1+x) - (\operatorname{tg} x^3)\cos \operatorname{sh}(x/2)}$,

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x + x\sin x) - (x^2/2)e^x}{(x/2)\sqrt[3]{1-x} + \sqrt{1 + x^2/3} - \sin(x/2) - 1}$

18. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\cos x} - e\sqrt[3]{1 - 4x^2}}{(1/x)\arcsin 2x - 2\operatorname{ch} x^2}$,

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\sqrt{1+2x} - \operatorname{tg} x) + (1/2)\operatorname{arctg} x^2}{xe^{x^2} - \sin x}$,

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-2x} - e^{-x} + x^2\sqrt[3]{1+x}}{\sin^2 x - \ln \operatorname{ch} 2x}$,

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) + (1/2)\operatorname{sh} x^2 - x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}$,

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{((1+3x)^{1/3} - 1)/\operatorname{tg} x - e^{-\operatorname{sh} x} - x^2(x+5)/(x+6)}{\ln(2e^{x^2} - 1)/\sin x - \operatorname{arctg} 2x}$,

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sqrt{\cos 2x + \operatorname{sh} 2x} - e^x)/x + 2x(2-x)/(2+x)}{(\ln \operatorname{ch} x)/\operatorname{sh} x - (1/2)\arcsin x}$.

19. Найти числа $\alpha \in R$ и $n \in N$ такие, чтобы существовал конечный предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\alpha x^n} - \cos x^2}{x^8}$.

Найти предел (20–42).

20. 1) $\lim\limits_{x\to 0} (\sqrt{1+x} - x)^{1/x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{ch} x)^{1/\sin^2 x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\cos x}{\operatorname{ch} 3x}\right)^{1/x^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{e^{x^2}}{\operatorname{ch} 3x}\right)^{1/x^2}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\ln(e+x) - \dfrac{x}{e}\right)^{1/\sin^3 x}$.

21. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{1/x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\ln(\sqrt{1+x^2}+x)}{x}\right)^{1/x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{\arcsin x}\right)^{1/x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{arctg} x}\right)^{1/x^2}$.

22. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{2(\sqrt{1+x}-1)}\right)^{\operatorname{ctg} x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}}{\ln \operatorname{ch} x}\right)^{1/x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}\, e^{x/(1+x)} - \dfrac{1}{\sin x}\right)^{1/\operatorname{arctg} x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{tg} 3x + \cos 4x - \cos 2x}{\ln\sqrt{1+3x} - \ln\sqrt{1-3x}}\right)^{1/\sin x}$.

23. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1 + 6\,\dfrac{x - \sin x}{x^2}\right)^{2(\operatorname{ch} x - 1)/x^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{e^2 - (1+2x)^{1/x}}{2xe^2}\right)^{1/x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{ch} x - \cos x}{2\sqrt{1+2x} - 2\sqrt[3]{1+3x}}\right)^{1/x}$.

24. 1) $\lim\limits_{x\to 0} (\sqrt{1+\operatorname{tg} 2x} + \ln(1-x))^{1/x^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{tg}(x/3) + 2 - \sqrt[3]{1+x})^{\operatorname{ctg}^2 x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \left(e^{(1/3)\sin x} + \sqrt[3]{1 - \operatorname{tg} x} - 1\right)^{1/\ln(1+x^2)}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{e}(1+x)^{1/x} + \dfrac{2x}{4+5x}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

25. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{arctg} x}{e^x - 1 - x^2/2}\right)^{1/x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x \operatorname{sh} x}{\ln(1+x^2)}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2\cos x + x}{2\sqrt{1+x}}\right)^{1/x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x \sin x}{2\operatorname{ch} x - 2}\right)^{1/x^2}$.

26. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\operatorname{sh} x}\right)^{1/\sin^2 x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x^2-\sqrt{1+x^2}}{\operatorname{ch} x-1}\right)^{1/x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{\cos x}}{e^x-\ln(1+x)}\right)^{1/x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{1+\operatorname{tg} x^2}}\right)^{1/x^2}$.

27. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(\arcsin x)^2-x^2}{\sin^2(x^2/\sqrt{3})}\right)^{1/\sin^2 x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{arctg}(2x/(2-x^2))-x}{x\sin(x^2/6)}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2-(\operatorname{arctg} x)^2}{x^2\sin(2x^2/3)}\right)^{1/x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3\arccos(1-2x^2)-6x}{x^3}\right)^{1/x^2}$.

28. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2e^{x-x^2}-2}{2x-x^2}\right)^{(\sin x)/x^3}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{1+x}-(1/2)\operatorname{sh} x}\right)^{1/\arcsin x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{sh}(x+\sin x)}{\sin x+\arcsin x}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

29. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}+\dfrac{x}{\ln(e^2-xe^2)}\right)^{1/x^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin 5x-\arcsin 3x-\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{1/\ln\cos 3x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin(2x+x^3)-\operatorname{sh}(x+2x^3)}{x}\right)^{1/(2\ln(1+x^2)-\ln^2(1+x))}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg}(2x+x^3)-\operatorname{th}(x+2x^3)}{x}\right)^{1/(\sqrt[3]{1+x^3}-\sqrt{1+x^2})}$.

30. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 2x+\dfrac{xe^x}{1-x}-x\right)^{1/x^3}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{1+2x+x^3}-\dfrac{2x}{2x+3}\right)^{1/x^3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x}{x-2}+\ln(e+xe^{x+1})\right)^{1/x^3}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2-x}{2+x}+\sin\ln(1+x)\right)^{1/x^3}$.

31. 1) $\lim\limits_{x\to 0}(x-\ln(1+x)+\cos(xe^{-x}))^{1/x^3}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}(e^{\sin x}-e^{2x-x^2}+e^{\operatorname{tg} x})^{1/x^3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}-\operatorname{arctg} x\right)^{1/\arcsin x^3}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x - x}{\sqrt{1+x^2}-\ln(1+x^3)}\right)^{1/x^3}$.

32. 1) $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt[3]{8+x^3}-\cos x^2)^{1/\arcsin x^3}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x - x + e^{\operatorname{arctg} x} - 1)^{1/\sin^3 x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3}{2}x^2 + \sqrt[3]{1+3\sin x}+\ln(1-x)\right)^{1/\operatorname{sh}^3 x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{1-3x\cos 2x}+4x^2+\dfrac{x}{1+3x}\right)^{1/(\arcsin x)^3}$.

33. 1) $\lim\limits_{x\to 0}(e^{\operatorname{tg} x}+\ln(1-x))^{\operatorname{ctg} x^3}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+\sin x}-(1/2)\operatorname{tg} x + x^2/8)^{\operatorname{ctg} x^3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1-2x+3x^2}+x(1-\operatorname{sh} x))^{\operatorname{ctg}^3 x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}(e^{\sin x}-x^2/2+\cos x-\sqrt{1+2x})^{1/\operatorname{tg} x^3}$.

34. 1) $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(1-x)+e^{x\cos x})^{1/(x^2(\sqrt{1+3x}-1))}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}((2/\pi)\arccos x+\sin(2x/\pi))^{1/(\sqrt{1+2x^3}-1)}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{th}(xe^x)+(1/2)\ln(1-2x))^{1/x^3}$.

35. 1) $\lim\limits_{x\to 0}(e^{\operatorname{arctg} x}-1/(1-x)+\cos x+x^2)^{1/\sin x^3}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\operatorname{arctg} x-\operatorname{sh} 2x)^{1/\ln^3(1-x)}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}(e^{\sin x}-x^2/2-x\cos x)^{1/\ln^3(1-x/2)}$.

36. 1) $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt[3]{1+\operatorname{tg} x}-(x/3)e^{-x/3})^{1/(x\ln\cos x)}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{-x}}{1-x}+\dfrac{1}{2}(\ln\sqrt{1+2x}-\operatorname{tg} x)\right)^{1/(x(\cos x-1))}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}(e^{x-x^2}-x\sqrt[3]{1-3x/2})^{1/(\operatorname{tg} x-x)}$.

37. 1) $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+2\operatorname{tg} x}+x^2/2-\sin x)^{1/(\operatorname{sh} x-\operatorname{arctg} x)}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x+\operatorname{arctg} x)^{1/(\operatorname{sh} x-\sin x)}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sqrt{1-x}\ln(1+x)-x/(1+x))^{1/(\operatorname{tg} x-\operatorname{sh} x)}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos(\sin x)+(1/2)\operatorname{arctg} x^2+4x^3)^{1/(\operatorname{tg} x-\operatorname{sh} x)}$.

38. 1) $\lim\limits_{x\to 0}(e^{\sin 2x}-2x-2x^2)^{1/\sin x^4}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}(e^{\sin x}+\ln(1-x)+x^3/3)^{1/x^4}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+\sin x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}\right)^{1/x^4}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x)}{\sin x}\right)^{1/\sin^4 x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin(x\cos x)}{\operatorname{arctg} x}\right)^{1/\sin x^4}$

39. 1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x\arcsin x-x^2e^{x^2})^{1/\sin^2 x^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x\operatorname{arctg} x-x^2\operatorname{ch}^2 x)^{1/(1-\cos x)^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\operatorname{th} x\ln\dfrac{1+x}{1-x}-2x^2\cos x^2\right)^{1/x^4}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\log_2\left(\dfrac{3-4x}{1-2x}-\dfrac{1+4x}{1+2x}\right)\right)^{2\operatorname{sh} x/(x-\sin x)}$.

40. 1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{sh} x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-x^2\cos x^2)^{1/x^4}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos\sin x+(1/2)\operatorname{arctg} x^2)^{1/\sin x^4}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{ch} x+2\cos x}{3}+\dfrac{x^2}{6(1+x^2)}\right)^{1/\operatorname{arctg} x^4}$.

41. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x}{\sin 2x}-\dfrac{2}{3}x^2\right)^{x^2/(x^2-\operatorname{arctg} x^2)}$,

2) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+x^2\sqrt{x+1/4})^{(x+e)/\arcsin x^3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt[3]{1+3x}-\operatorname{tg}\sin x+x^2)^{1/(\operatorname{arctg} x-x\cos x)}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{(1+x^2)^{1/x^2}-e^{\cos x}}{e}\right)^{1/(\sqrt{\operatorname{ch} 2x}-e^{x^2})}$.

42. 1) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos(2x+x^2)+2\arcsin(xe^x)-2x)^{\operatorname{ctg}^3 x+1/(3x^3)}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\arcsin x^3)^{e^x/(x\sqrt[3]{\cos x}-\sin x+\operatorname{tg}^3 x)}$.

43. Доказать, что:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{1/x^3}(\arccos\operatorname{sh} x+x)^{\operatorname{ctg} x^3}=e^{-2/(3\pi)}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{6}{\pi}\arcsin\left(\dfrac{1}{2}e^{\pi x^2}\right)+\operatorname{sh}^2 x\right)^{1/x^2}=e^{1+2\sqrt{3}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4\operatorname{arctg}(\operatorname{ch} 3x)+\sin^2 x}{\pi}\right)^{1/x^2}=e^{10/\pi}$.

Найти предел (44–60).

44. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2\ln(1+x)}{x^2}-\dfrac{2}{(x+1)\operatorname{sh} x}\right)^{\operatorname{ctg} x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{6}{\ln(1+3\sin^2 x)}-\dfrac{4}{\ln(2-\cos 2x)}\right)^{1/x^2}$.

45. 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\operatorname{ch} x)^{x^2(\operatorname{tg}(1/x)-\operatorname{arctg}(1/x))}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^2/3}\left(\dfrac{x}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x^4}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^4+x^2+1}{x^4-x^2-1}\right)^{x^4\sin^2(1/x)}$.

46. 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x^2-x}}{x}+\dfrac{1}{4}\sin\dfrac{2}{x}\right)^{x^2+\sin 3x}$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln(1+x)-x\ln x+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2x}\right)^{x^2\operatorname{arctg} x}$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\operatorname{tg}^2\ln\dfrac{x+1}{x}-\operatorname{sh}^2\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)+4\ln x\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2/2}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}}{2}\right)^{x^4}$.

47. 1) $\lim\limits_{x\to+0}(\operatorname{sh} x-\ln(x+\sqrt{1+x^2}))^{1/\ln x}$;

2) $\lim\limits_{x\to+0}(x/3+\operatorname{ctg} x-(1/x)\cos(x^2/3))^{1/\ln\sin x}$;

3) $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{x}{\sin x}-\dfrac{\operatorname{sh} x}{x}+\dfrac{\sin^4 x}{10}\right)^{1/\ln\operatorname{tg} x}$;

4) $\lim\limits_{x\to+0}\left(1+\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\arcsin x}\right)^{1/x+\ln^2 x}$;

5) $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{arctg} x}\right)^{1/x^2+\ln x}$.

48. $\lim\limits_{x\to\pi/2-0}((\pi/2-x)\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} x}$.

49. 1) $\lim\limits_{x\to 1}(e^{x-1}-\ln x)^{1/(\sin(x-1)+\cos(x-1)-x)}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}(e^{\sin(x-1)}-\ln x)^{\operatorname{ctg}^2(x-1)}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{x}-(1/2)\ln x)^{1/(\cos^2 x\sin^2(1-x))}$.

50. 1) $\lim\limits_{x\to 1}(x-\ln x)^{1/(\cos^2 x\sin^2(1-x))}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}(2^{x-1}-x^x\ln 2)^{1/(\sin(x-1)-\cos(1-x)+x)}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1+0}(\ln(x^2-x)-\ln(x-1)+e^{1-x})^{1/\arcsin(x-1)^3}$.

51. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)^{1/\sin(x-1)}$.

52. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{(x-1)/x}-\sqrt[4]{4x-3}}{\operatorname{ch}(x-1)-\cos 2(x-1)}$.

53. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3\sqrt[3]{x}-\arcsin(x-1)-3\cos(x-1)}{e^{x-1}-1-\ln x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\sqrt{x}-\sin(x-1)-2\cos(x-1)}{\operatorname{arctg}(x-1)-\ln x}$.

54. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(\sin\pi x)}{\ln(1+\ln x)}$; 2) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{1-e^{\pi x-2x^2}}{\cos x}$;

3) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\ln\operatorname{ctg}x+2x-\pi/2}{(1-\operatorname{tg}x)^3}$.

55. $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x(1-x^2)^{1/2}-\cos x\ln(1+x)}{\ln\sin x-\ln x}$.

56. 1) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{arctg}x}-\dfrac{1}{\arcsin x}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\operatorname{tg}x}\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{(x+1)\operatorname{sh}x}-\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}\right)$.

57. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}x(1-x\ln(1+1/x))$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}x((2e)^{1/x}+e^{1/x}-2)$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3\ln(1+1/x)-x^2+x/2)$.

58. 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[6]{x^6+x^5}+\sqrt[6]{x^6-x^5}-2x}{x\ln(1+x)-x\ln x-x\sin(1/x)}$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(\sqrt{x^2+x}-x)+\cos x\ln x}{\ln(1+\operatorname{ch}x)}$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2(\sqrt[3]{x^3+x}-x)+\sin x\ln(1+x)}{\ln(1+x+e^{5x})}$.

59. 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{1/x}(x^2-x+2)-\sqrt{x^4+x^2+1})$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}((x^3-x^2+x/2+1)e^{1/x}-\sqrt[4]{x^{12}-x^9+2})$.

60. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[5]{x^5+x^4}-\sqrt[5]{x^5-x^4})$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}((x^3+x)\sin(1/x)-\sqrt[3]{x^6-3x^4+1})$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-x/2-(x^3+x+1)\ln(1+1/x))$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x}\left(1-\dfrac{x^2+1}{x}\ln\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)$.

ОТВЕТЫ

1. 1) $-1/2$; 2) 1; 3) $1/2$; 4) $1/24$; 5) $27/4$; 6) $1/2$; 7) $4/3$; 8) 0.
2. 1) -2; 2) -1; 3) -1; 4) $8/15$; 5) -1; 6) -2; 7) $7/6$; 8) 0.
3. 1) $-e/2$; 2) 1; 3) $11e/24$; 4) $\pi/4$.
4. 1) $3/2$; 2) $4/3$; 3) $-1/8$; 4) $-1/2$; 5) -4.
5. 1) 2; 2) $7/8$; 3) $1/8$; 4) 44; 5) $40/3$.
6. 1) 0; 2) 3; 3) $-11/12$; 4) $-13/12$.
7. 1) -1; 2) 2; 3) -4; 4) $1/8$; 5) 3; 6) $-1/4$; 7) -10; 8) -1.
8. 1) -3; 2) $1/8$; 3) $-1/6$; 4) $5/2$; 5) $7/5$; 6) $11/4$.
9. 1) $3/4$; 2) -1; 3) $1/4$; 4) $1/8$; 5) $-1/6$; 6) $-1/8$.

10. 1) $4/9$; 2) -1; 3) -6; 4) $7/6$; 5) -6; 6) $21e/20$; 7) $2/5$; 8) -4.
11. 1) $7/4$; 2) $3/2$; 3) $3/2$; 4) $13/15$; 5) 4; 6) 1.
12. 1) $15/2$; 2) $3/4$; 3) $3/7$; 4) 23; 5) $9/2$; 6) 5.
13. 1) $1/18$; 2) -1; 3) $5/(12e^3)$; 4) $1/7$; 5) $-(11/12)\cos^2 1$; 6) $-2e^2$.
14. 1) $-32/3$; 2) $9/16$; 3) 9; 4) $28/3$; 5) $-72/5$; 6) $1/4$; 7) -1; 8) $24/7$.
15. 1) 2; 2) 0; 3) $-27/5$; 4) $(5/2)\cos 1$; 5) $-3/20$; 6) $2/\sqrt{3}$.
16. 1) 1; 2) $1/2$; 3) $1/2$; 4) $7/24$; 5) $-\sqrt{7}/2$; 6) $15/\sqrt{2}$.
17. 1) $-7/5$; 2) $7/45$; 3) $1/12$; 4) $72/5$.
18. 1) $5e/8$; 2) $1/7$; 3) $14/3$; 4) $4/3$; 5) $-97/12$; 6) 8.
19. $\alpha = -1/2$, $n = 4$.
20. 1) $e^{-1/2}$; 2) $e^{-1/2}$; 3) $e^{1/2}$; 4) e^{-5}; 5) $e^{-7/2}$; 6) не существует.
21. 1) $e^{1/6}$; 2) $e^{-1/6}$; 3) $e^{-1/3}$; 4) $e^{2/3}$.
22. 1) $e^{1/4}$; 2) $e^{7/3}$; 3) $e^{-2/3}$; 4) e^{-2}.
23. 1) e; 2) $e^{-7/3}$; 3) $e^{7/3}$.
24. 1) e^{-1}; 2) $e^{1/9}$; 3) $e^{-1/18}$; 4) $e^{-1/6}$.
25. 1) $e^{-1/2}$; 2) $e^{2/3}$; 3) $e^{-3/8}$; 4) $e^{-1/4}$.
26. 1) $e^{-1/24}$; 2) $e^{1/6}$; 3) $e^{-5/4}$; 4) $e^{-3/4}$.
27. 1) $e^{8/15}$; 2) $e^{-3/10}$; 3) $e^{-23/30}$; 4) $e^{9/20}$.
28. 1) $e^{-5/6}$; 2) $e^{-1/8}$; 3) $e^{7/12}$.
29. 1) $e^{7/12}$; 2) $e^{-25/3}$; 3) $e^{-5/2}$; 4) e^{-4}.
30. 1) $e^{5/2}$; 2) $e^{43/81}$; 3) $e^{-5/12}$; 4) $e^{-1/12}$.
31. 1) $e^{2/3}$; 2) $e^{7/6}$; 3) $e^{2/3}$; 4) $e^{7/6}$.
32. 1) $e^{1/12}$; 2) $e^{-1/6}$; 3) $e^{7/6}$; 4) $e^{28/3}$.
33. 1) $e^{1/6}$; 2) $e^{-3/16}$; 3) e; 4) $e^{-1/2}$.
34. 1) $e^{-4/9}$; 2) $e^{(-\pi^2+4)/(3\pi^8)}$; 3) $e^{-7/6}$.
35. 1) $e^{-7/6}$; 2) e^2; 3) e^{-4}. **36.** 1) $e^{-25/81}$; 2) $e^{-5/3}$; 3) $e^{-7/4}$.
37. 1) e^2; 2) $e^{-1/2}$; 3) $e^{-13/4}$; 4) e^{24}.
38. 1) e^{-2}; 2) $e^{-3/8}$; 3) $e^{-1/15}$; 4) $e^{1/30}$; 5) $e^{-1/3}$.
39. 1) e^{-1}; 2) e^{-4}; 3) 1; 4) $e^{48/\ln 2}$.
40. 1) $e^{1/2}$; 2) $e^{5/24}$; 3) $e^{-1/8}$.
41. 1) $e^{14/15}$; 2) e^e; 3) e^9; 4) $e^{7/16}$.
42. 1) $e^{-8/9}$; 2) e. **44.** 1) e^{-1}; 2) $e^{-5/6}$.
45. 1) $e^{2/3}$; 2) $e^{13/90}$; 3) e^2.
46. 1) $e^{-1/8}$; 2) $e^{\pi/6}$; 3) $\ln(5/4)$; 4) $e^{3/4}$.
47. 1) e^3; 2) e^3; 3) e^4; 4) $e^{1/3}$; 5) $e^{1/2}$. **48.** 1.
49. 1) e^{-2}; 2) e; 3) $e^{1/(8\cos^2 1)}$.
50. 1) $e^{1/(2\cos^2 1)}$; 2) предел не существует; 3) $e^{1/6}$.
51. $e^{-1/3}$. **52.** $-2/5$. **53.** 1) $7/6$; 2) $3/2$.
54. 1) $-\pi$; 2) $-\pi$; 3) $1/6$.

55. -3. **56.** 1) 0; 2) 0; 3) 1/3; 4) $-1/2$.
57. 1) 1/2; 2) $2+\ln 2$; 3) 1/3. **58.** 1) 5/18; 2) 1/2.
59. 1) 1; 2) 17/12. **60.** 1) 2/5; 2) 11/6; 3) $-4/3$; 4) 1/2.

§ 20. Исследование функций

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Условия возрастания и убывания функции.

1) Для того чтобы дифференцируемая на интервале $(a; b)$ функция $f(x)$ *строго возрастала* на этом интервале, достаточно, чтобы производная $f'(x)$ была положительна всюду на $(a; b)$, т. е.

$$f'(x) > 0, \quad x \in (a; b).$$

2) Для того чтобы дифференцируемая на интервале $(a; b)$ функция $f(x)$ *возрастала* (*не убывала*) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы производная $f'(x)$ была неотрицательна всюду на $(a; b)$, т. е.

$$f'(x) \geqslant 0, \quad x \in (a; b).$$

3) Аналогично, достаточным условием *строгого убывания* дифференцируемой функции $f(x)$, $x \in (a; b)$, является условие

$$f'(x) < 0, \quad x \in (a; b);$$

необходимым и достаточным условием *убывания* — условие

$$f'(x) \leqslant 0, \quad x \in (a; b).$$

2. Экстремумы функции.

1) Точка x_0 называется *точкой локального максимума* функции $f(x)$, если существует окрестность точки x_0, для всех точек которой верно неравенство

$$f(x) \leqslant f(x_0).$$

Если для всех $x \neq x_0$ из некоторой окрестности точки x_0 верно строгое неравенство

$$f(x) < f(x_0),$$

то точка x_0 называется *точкой строгого локального максимума* функции $f(x)$.

Аналогично, если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство

$$f(x) \geqslant f(x_0),$$

то точка x_0 называется *точкой локального минимума*; если для всех $x \neq x_0$ из некоторой окрестности точки x_0 верно строгое неравенство

$$f(x) > f(x_0),$$

то точка x_0 называется *точкой строгого локального минимума*.

Для краткости слово "локальный" часто опускают и пишут просто "точка минимума" или "точка строгого максимума".

Точки максимума и минимума функции называются *точками экстремума*, а значения функции в этих точках — ее *экстремумами.*

2) *Необходимые условия экстремума.* Если точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$, то либо $f(x_0) = 0$, либо $f'(x_0)$ не существует.

Эти условия не являются достаточными.

Точки, в которых функция определена, а производная функции равна нулю или не существует, называют *критическими точками* функции. Экстремумы функции следует искать среди ее критических точек.

3) *Достаточные условия строгого экстремума* (с использованием первой производной). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0, в которой, однако, функция $f(x)$ непрерывна. Тогда точка x_0 является точкой строгого максимума, если существует окрестность точки x_0, в которой

$$f'(x) > 0 \quad \text{при} \quad x < x_0 \quad \text{и} \quad f'(x) < 0 \quad \text{при} \quad x > x_0. \tag{1}$$

При выполнении условий (1) принято говорить, что производная функции при переходе через точку x_0 меняет знак плюс на знак минус.

Если же

$$f'(x) < 0 \quad \text{при} \quad x < x_0 \quad \text{и} \quad f'(x) > 0 \quad \text{при} \quad x > x_0, \tag{2}$$

т. е. если производная при переходе через точку x_0 меняет знак минус на плюс, то x_0 — точка строгого минимума.

4) *Условия строгого экстремума* (с использованием производных высших порядков). Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производные до порядка n $(n \in N)$ включительно. Тогда если

$$f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad \text{а} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0, \tag{3}$$

то при четном n точка x_0 является точкой строгого экстремума, причем точкой максимума, если $f^{(n)}(x_0) < 0$, и точкой минимума, если $f^{(n)}(x_0) > 0$; при нечетном n экстремума в точке x_0 нет.

В частности, если

$$f'(x_0) = 0, \quad \text{а} \quad f''(x_0) \neq 0,$$

то в точке x_0 имеется строгий максимум в случае $f''(x_0) < 0$ и строгий минимум в случае $f''(x_0) > 0$.

3. Наибольшее и наименьшее значения функции. Для функции, непрерывной на отрезке, существуют на этом отрезке точка, в которой функция принимает наибольшее значение, и точка, в которой функция принимает наименьшее значение (*теорема Вейерштрасса*).

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и имеет на нем k локальных максимумов в точках $x_1, x_2, ..., x_k$. Тогда наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ равно наибольшему из чисел

$$f(a),\ f(x_1),\ f(x_2), ..., f(x_k),\ f(b).$$

Аналогично, если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и имеет на нем n локальных минимумов в точках $x_1', x_2', ..., x_n'$, то ее наименьшее значение на этом отрезке равно наименьшему из чисел

$$f(a),\ f(x_1'),\ f(x_2'), ..., f(x_n'),\ f(b).$$

4. Условия выпуклости. Точки перегиба.

1) Функция $f(x)$ называется *выпуклой вниз* (или *вогнутой вверх*) на интервале $(a; b)$, если для любых точек x_1 и x_2 этого интервала и любых чисел $\alpha_1 \geqslant 0$ и $\alpha_2 \geqslant 0$ таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, верно неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2). \quad (4)$$

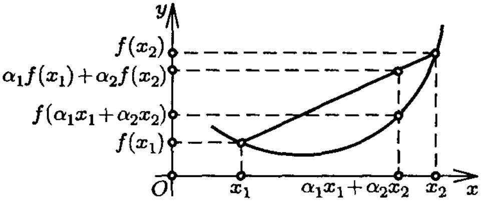

Рис. 20.1

Геометрический смысл выпуклости вниз функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$ заключается в том, что точки любой дуги графика функции расположены не выше хорды, стягивающей эту дугу (рис. 20.1). Если функция выпукла вниз на некотором интервале, то ее график тоже называют выпуклым вниз.

Если при тех же условиях относительно x_1, x_2, α_1, α_2 выполняется неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \geqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2), \quad (5)$$

то функция $f(x)$ называется *выпуклой вверх* (или *вогнутой вниз*).

В том случае, когда при $x_1 \neq x_2$ и $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ неравенство (4) или (5) является строгим, функция $f(x)$ называется *строго выпуклой вниз* или соответственно строго выпуклой вверх на интервале $(a; b)$.

Например, функция $f(x) = x^2$ строго выпукла вниз на всей числовой оси.

Всякий интервал, на котором функция (строго) выпукла вниз, называется *интервалом (строгой) выпуклости вниз* этой функции; интервал, на котором функция (строго) выпукла вверх — интервалом (строгой) выпуклости вверх этой функции.

Интервалы выпуклости вверх и интервалы выпуклости вниз называют *интервалами выпуклости.*

2) *Условия выпуклости функции.* Для того чтобы функция $f(x)$, дважды дифференцируемая на интервале $(a; b)$, была выпуклой вниз

на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы вторая производная $f''(x)$ была неотрицательна на $(a; b)$, т. е.

$$f''(x) \geqslant 0, \quad x \in (a; b). \tag{6}$$

Условие

$$f''(x) > 0, \quad x \in (a; b), \tag{7}$$

является достаточным условием строгой выпуклости вниз функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$.

Условие (7) не является необходимым для строгой выпуклости. В самом деле, функция $f(x) = x^4$ строго выпукла вниз на всей числовой прямой, однако ее вторая производная $f''(x) = 12x^2$ равна нулю в точке $x = 0$.

Аналогично, для функции $f(x)$, имеющей на интервале $(a; b)$ вторую производную, необходимым и достаточным условием выпуклости вверх на этом интервале является условие

$$f''(x) \leqslant 0, \quad x \in (a; b), \tag{8}$$

а достаточным условием строгой выпуклости вверх — условие

$$f''(x) < 0, \quad x \in (a; b). \tag{9}$$

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0. Если существуют интервалы

$$(x_0 - \delta; x_0) \quad \text{и} \quad (x_0; x_0 + \delta), \quad \delta > 0,$$

на одном из которых $f(x)$ строго выпукла вниз, а на другом строго выпукла вверх, то говорят, что при переходе через точку x_0 функция $f(x)$ *меняет направление выпуклости.*

3) Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, непрерывна в точке x_0 и имеет в этой точке конечную или бесконечную производную. Тогда если функция $f(x)$ при переходе через точку x_0 меняет направление выпуклости, то точка x_0 называется *точкой перегиба функции* $f(x)$. В этом случае точку $(x_0; f(x_0))$ называют *точкой перегиба графика функции* $f(x)$.

Если $(x_0; f(x_0))$ — точка перегиба графика функции $f(x)$, то график функции $f(x)$ переходит с одной стороны касательной к нему в этой точке на другую ее сторону. Заметим, что обратное утверждение неверно (см. задачу 62).

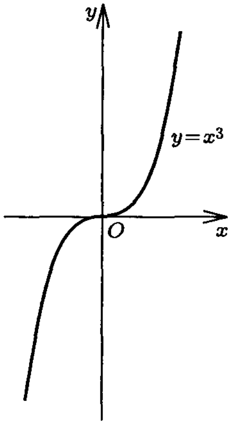

Рис. 20.2

На рис. 20.2 и рис. 20.3 представлены график функции $y = x^3$ и график обратной ей функции $y = \sqrt[3]{x}$, для которых точка $(0; 0)$ является точкой перегиба. Функция $y = \sqrt[3]{x}$ в точке $x = 0$ имеет бесконечную производную.

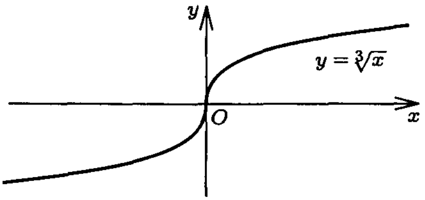

Рис. 20.3

Функция (рис. 20.4)

$$y = \begin{cases} 1/x, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0, \end{cases}$$

при переходе через точку $x = 0$ меняет направление выпуклости, в точке $x = 0$ имеет бесконечную производную, однако точка $x = 0$ не является для нее точкой перегиба, так как при $x = 0$ функция разрывна. Для функции $y = \sqrt[3]{|x|}$ точка $x = 0$ (рис. 20.5) не является точкой перегиба, поскольку при переходе через точку $x = 0$ направление выпуклости

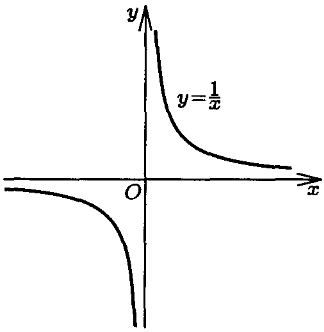

Рис. 20.4

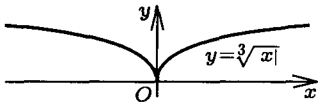

Рис. 20.5

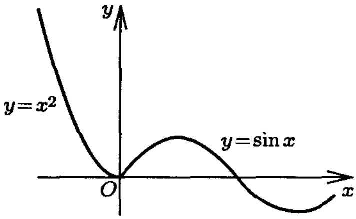

Рис. 20.6

не меняется (это так называемая точка возврата). При переходе через точку $x = 0$ функция

$$y = \begin{cases} \sin x, & \text{если} \quad x \geqslant 0, \\ x^2, & \text{если} \quad x < 0, \end{cases}$$

меняет направление выпуклости, но точка $x = 0$ не является для нее точкой перегиба (рис. 20.6), так как в этой точке у функции нет ни конечной, ни бесконечной производной (это так называемая угловая точка).

4) *Необходимые условия существования точки перегиба.* Если точка x_0 является точкой перегиба функции $f(x)$, то либо $f''(x_0) = 0$, либо $f''(x_0)$ не существует.

Эти условия не являются достаточными. В самом деле, для функции $f(x) = x^4$ вторая производная в точке $x = 0$ равна нулю, а для функции

$$g(x) = \begin{cases} x^3, & \text{если} \quad x \geqslant 0, \\ x^2, & \text{если} \quad x < 0, \end{cases}$$

вторая производная в точке $x = 0$ не существует, но ни для $f(x)$, ни для $g(x)$ точка $x = 0$ не является точкой перегиба.

Точки перегиба функции следует искать среди критических точек ее первой производной.

5) *Достаточные условия существования точки перегиба* (с использованием второй производной). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0. Тогда точка x_0 является точкой перегиба функции x_0, если существует окрестность точки x_0, в которой либо

$$f''(x) < 0 \quad \text{при} \quad x < x_0 \quad \text{и} \quad f''(x) > 0 \quad \text{при} \quad x > x_0, \tag{10}$$

либо

$$f''(x) > 0 \quad \text{при} \quad x < x_0 \quad \text{и} \quad f''(x) < 0 \quad \text{при} \quad x > x_0. \tag{11}$$

В этом случае принято говорить, что при переходе через точку x_0 вторая производная меняет знак.

6) *Условия существования точки перегиба* (с использованием производных высших порядков). Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производные до порядка $n > 2$ включительно, и пусть

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad \text{а} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0; \tag{12}$$

тогда если n — нечетное число, то x_0 — точка перегиба; если же n — четное число, то x_0 не является точкой перегиба.

В частности, если

$$f''(x_0) = 0, \quad \text{а} \quad f'''(x_0) \neq 0, \tag{13}$$

то x_0 — точка перегиба функции $f(x)$.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Найти интервалы возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = x^3 - 30x^2 + 225x + 1$;

2) $f(x) = \begin{cases} 1/e, & \text{если} \quad x < e, \\ (\ln x)/x, & \text{если} \quad x \geqslant e; \end{cases}$ 3) $f(x) = \cos \dfrac{\pi}{x}$.

▲ 1) Данная функция всюду дифференцируема, причем

$$f'(x) = 3x^2 - 60x + 225 = 3(x-5)(x-15).$$

Так как $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty; 5)$ и $x \in (15; +\infty)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in (5; 15)$, то на интервалах $(-\infty; 5)$ и $(15; +\infty)$ функция строго возрастает, а на интервале $(5; 15)$ строго убывает.

2) Функция дифференцируема на всей числовой прямой, причем

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < e, \\ (1 - \ln x)/x^2, & \text{если} \quad x \geqslant e. \end{cases}$$

Так как $f'(x) \leqslant 0$ при всех x, то данная функция является невозрастающей на всей числовой оси. На интервале $(-\infty; e)$ она постоянна, на интервале $(e; +\infty)$ строго убывает.

3) Данная функция является четной, поэтому достаточно найти интервалы монотонности при $x > 0$. Решая при $x > 0$ неравенство

$$f'(x) = \frac{\pi}{x^2} \sin \frac{\pi}{x} > 0,$$

получаем

$$0 < \pi/x < \pi \quad \text{или} \quad 2\pi k < \pi/x < \pi + 2\pi k, \quad k \in N,$$

откуда

$$x > 1 \quad \text{или} \quad 1/(2k+1) < x < 1/(2k), \quad k \in N.$$

Таким образом, на интервалах $(1; +\infty)$ и $(1/(2k+1); 1/(2k))$, $k \in \in N$, функция строго возрастает. На интервалах $(1/(2k); 1/(2k-1))$, $k \in N$, очевидно, справедливо неравенство $f'(x) < 0$, и поэтому на этих интервалах функция строго убывает. Если $x < 0$, то, используя четность функции, получаем, что на интервалах $(-1/(2k); -1/(2k-\\-1))$, $k \in N$, функция строго возрастает, а на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(-1/(2k-1); -1/(2k))$, $k \in N$, строго убывает.

Следует обратить внимание на то, что данная функция не является монотонной ни в какой окрестности точки $x = 0$. В любой окрестности этой точки содержится счетное множество интервалов возрастания и счетное множество интервалов убывания данной функции. ▲

Пример 2. Найти точки экстремума функции $f(x) = (x+1)e^{2x}$.

▲ Функция имеет производную при всех $x \in R$, причем

$$f'(x) = e^{2x} + (x+1)2e^{2x} = (2x+3)e^{2x}.$$

Следовательно, у функции может быть только один экстремум в точке $x = -3/2$. Так как $f'(x) < 0$ при $x < -3/2$ и $f'(x) > 0$ при $x > -3/2$, то точка $x = -3/2$ является точкой строгого минимума. ▲

Пример 3. Найти экстремумы функции

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 14.$$

▲ Так как

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x-2)(x-3),$$

то критические точки функции — $x = 2$ и $x = 3$. Экстремумы могут быть только в этих точках. Так как при переходе через точку $x = 2$ производная меняет знак плюс на знак минус, то в этой точке функция имеет максимум. При переходе через точку $x = 3$ производная меняет знак минус на плюс, поэтому в точке $x = 3$ у функции минимум.

Тот же результат можно получить, используя вторую производную. Так как $f''(x) = 12x - 30$ и $f''(2) < 0$, а $f'(3) > 0$, то в точке $x = 2$ функция имеет максимум, а в точке $x = 3$ — минимум.

Вычислив значения функций в точках $x = 2$ и $x = 3$, найдем экстремумы функции: максимум $f(2) = 14$ и минимум $f(3) = 13$. ▲

Пример 4. Исследовать на экстремум функцию:

1) $f(x) = \dfrac{(x+3)^3}{(x+1)^2}$; 2) $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$;

3) $f(x) = \operatorname{ch} x + \cos x$.

▲ 1) Функция определена и дифференцируема при всех $x \in R$, кроме точки $x = -1$. Вычисляем ее производную:

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2 3(x+3)^2 - (x+3)^3 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(x+3)^2(x-3)}{(x+1)^3},$$

и находим критические точки: $x = -3$ и $x = 3$. Легко видеть, что существует окрестность точки $x = -3$, в которой $f'(x) \geqslant 0$, т. е. при переходе через точку $x = -3$ знак производной не изменяется. Следовательно, эта критическая точка не является точкой экстремума. В точке $x = 3$ функция имеет строгий минимум, так как существуют левая окрестность этой точки, в которой $f'(x) < 0$, и правая окрестность этой точки, в которой $f(x) > 0$. Вычисляя значение функции при $x = 3$, находим минимум:

$$f(3) = 6^3/4^2 = 13{,}5.$$

2) Функция определена и непрерывна при всех $x \in R$. Вычисляем ее производную:

$$f'(x) = \frac{(1-x)2(x-2) - (x-2)^2}{3\sqrt[3]{(1-x)^2(x-2)^4}} = \frac{4-3x}{3\sqrt[3]{(1-x)^2(x-2)}}, \quad x \neq 1, \quad x \neq 2.$$

В точках $x = 1$, $x = 2$ производная не существует. Таким образом, функция имеет три критические точки: $x = 1$, $x = 4/3$, $x = 2$. При переходе через точку $x = 1$ производная не меняет знака, поэтому критическая точка $x = 1$ не является точкой экстремума. При переходе через точку $x = 4/3$ производная меняет знак минус на плюс, поэтому в точке $x = 4/3$ функция имеет минимум. При переходе через точку $x = 2$ производная меняет знак плюс на минус, поэтому $x = 2$ — точка максимума. Минимум функции равен $f(4/3) = -\sqrt[3]{4}/2$, а максимум равен $f(2) = 0$.

3) Функция дифференцируема при всех $x \in R$. Так как $f'(x) = \operatorname{sh} x - \sin x$ и уравнение $\operatorname{sh} x - \sin x = 0$ имеет только одно решение, а именно $x = 0$, то экстремум может быть только в точке $x = 0$. Вычисляем вторую производную:

$$f''(x) = \operatorname{ch} x - \cos x.$$

Поскольку $f''(0) = 0$, находим следующие производные в точке $x = 0$:

$$f'''(x) = \operatorname{sh} x + \sin x, \quad f'''(0) = 0,$$
$$f^{IV}(x) = \operatorname{ch} x + \cos x, \quad f^{IV}(0) = 2.$$

Таким образом, первой не равной нулю оказалась производная четного порядка. Следовательно, в точке $x = 0$ функция имеет экстремум. Так как $f^{IV}(0) > 0$, то при $x = 0$ у функции минимум, равный $f(0) = 2$. ▲

Пример 5. Исследовать на экстремум функцию $y = f(x)$, заданную параметрически уравнениями

$$x = \frac{t^3}{t^2+1}, \quad y = \frac{t^3-2t^2}{t^2+1}.$$

▲ Функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы при всех значениях параметра t, причем производная

$$x'_t = \frac{(t^2+1)3t^2-2t^4}{(t^2+1)^2} = \frac{t^2(t^2+3)}{(t^2+1)^2}$$

при $t \neq 0$ положительна. Поэтому y'_x при $t \neq 0$ можно найти по формуле $y'_x = y'_t/x'_t$. Так как

$$y'_t = \frac{(t^2+1)(3t^2-4t)-2t(t^3-2t^2)}{(t^2+1)^2} = \frac{t(t-1)(t^2+t+4)}{(t^2+1)^2},$$

то

$$y'_x = \frac{(t-1)(t^2+t+4)}{t(t^2+3)}, \quad t \neq 0.$$

Производная y'_x равна нулю только при $t = 1$, поскольку $t^2+t+{}$ $+4>0$ при всех t. Следовательно, у данной функции две критические точки: $x = 1/2$ (при $t = 1$) и $x = 0$ (при $t = 0$). Если x принадлежит левой окрестности точки $x = 0$, то параметр t принадлежит левой окрестности точки $t = 0$, где $y'_x > 0$. В некоторой правой окрестности точки $x = 0$ производная $y'_x < 0$. Поэтому в точке $x = 0$ функция имеет максимум, равный $f(0) = 0$. Аналогично убеждаемся в том, что при переходе через точку $x = 1/2$, соответствующую значению $t = 1$, производная y'_x меняет знак минус на плюс. Таким образом, в точке $x = 1/2$ у функции минимум, равный $f(1/2) = y(1) = -1/2$. ▲

Пример 6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x - 8$$

на отрезке $[-3; 6]$.

▲ Находим экстремумы функции. Вычисляем производную:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 6(x+2)(x-3).$$

Обе критические точки $x = -2$ и $x = 3$ функции $f(x)$ принадлежат отрезку $[-3; 6]$. Находим вторую производную: $f''(x) = 12x - 6$. Так как $f''(-2) < 0$, а $f''(3) > 0$, то в точке $x = -2$ имеется максимум, а в точке $x = 3$ — минимум. Вычисляем значения функции в точках экстремума и в концах заданного отрезка:

$$f(-3) = 19, \quad f(-2) = 36, \quad f(3) = -89, \quad f(6) = 100.$$

Таким образом,

$$\max_{[-3;6]} f(x) = \max\{19, 36, 100\} = 100,$$

$$\min_{[-3;6]} = \min\{19, -89, 100\} = -89. \quad ▲$$

Пример 7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = (x-3)^2 e^{|x|}$$

на отрезке $[-1; 4]$.

▲ Так как $f(x) \geqslant 0$ и $f(3) = 0$, то наименьшее значение данной функции равно нулю. Для определения наибольшего значения найдем локальные максимумы функции на интервале $(-1; 4)$. Вычисляем производную:

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x-3)e^{-x} - (x-3)^2 e^{-x} = (x-3)(5-x)e^{-x}, & \text{если } x < 0, \\ 2(x-3)e^{x} + (x-3)^2 e^{x} = (x-3)(x-1)e^{x}, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

В точке $x = 0$ производная не существует. Критическими точками являются точки $x = 0$, $x = 1$, $x = 3$. Все они принадлежат отрезку $[-1; 4]$. При переходе через точку $x = 0$ производная меняет знак минус на плюс, т. е. в этой точке — минимум функции. В точке $x = 3$, как уже было отмечено, функция принимает наименьшее значение. При переходе через точку $x = 1$ производная меняет знак плюс на минус, т. е. в точке $x = 1$ у функции максимум. Вычисляем значения функции в точке максимума и в концах заданного отрезка:

$$f(-1) = 16e, \quad f(1) = 4e, \quad f(4) = e^4.$$

Так как $e^4 > 16e > 4e$, то наибольшее значение функции равно e^4. Итак,

$$\min_{[-1;4]} f(x) = f(3) = 0, \quad \max_{[-1;4]} f(x) = f(4) = e^4. \ ▲$$

Пример 8. Доказать неравенство:

1) $e^x \geqslant 1 + x$, $x \in R$; 2) $x^\alpha \geqslant 1 + \alpha \ln x$, если $x > 0$, $\alpha > 0$.

▲ 1) Рассмотрим функцию $f(x) = e^x - 1 - x$. Исследуем ее на экстремумы. Уравнение $f'(x) = e^x - 1 = 0$ имеет одно решение $x = 0$. Так как $f''(x) = e^x > 0$, то в точке $x = 0$ имеется минимум, который является наименьшим значением функции. Следовательно, для всех x верно неравенство $f(x) \geqslant f(0)$, но $f(0) = 0$, поэтому $e^x - 1 - x \geqslant 0$, т. е. $e^x \geqslant 1 + x$.

2) Рассмотрим функцию $f(x) = x^\alpha - 1 - \alpha \ln x$. Исследуем ее на экстремум. Производная

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} - \frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha}{x}(x^\alpha - 1)$$

равна нулю только при $x = 1$. Так как $\alpha > 0$, то $f'(x) < 0$ при $x \in (0; 1)$ и $f'(x) > 0$ при $x \in (1; +\infty)$. Следовательно, в точке $x = 1$ функция имеет минимум, который одновременно является наименьшим значением функции. Таким образом, при всех $x > 0$ верно неравенство $f(x) \geqslant f(1)$, но $f(1) = 0$, поэтому $x^\alpha - 1 - \alpha \ln x \geqslant 0$, т. е. $x^\alpha \geqslant 1 + \alpha \ln x$. ▲

Пример 9. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции:

1) $f(x) = x^4 - 6x^2 - 6x + 1$; 2) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)^3}$; 3) $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x\sqrt{x}}$.

▲ 1) Так как $f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1)$, то $f''(x) > 0$ при $|x| > 1$ и $f''(x) < 0$ при $|x| < 1$. Следовательно, $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$ — интервалы выпуклости вниз, а $(-1; 1)$ — интервал выпуклости вверх. При переходе через точки $x = \pm 1$, в которых вторая производная равна нулю, функция меняет направление выпуклости. Поэтому $x = \pm 1$ — точки перегиба функции. В том, что точки $x = \pm 1$ являются точками перегиба, можно убедиться и другим способом, используя достаточное условие (13). Действительно, $f''(\pm 1) = 0$, $f'''(x) = 24x$ и $f'''(\pm 1) \neq 0$, т. е. условия (13) выполнены. Следовательно, $x = \pm 1$ — точки перегиба функции.

2) Функция дифференцируема при всех $x \in R$, кроме $x = 1$, причем

$$f'(x) = -\frac{x(x+2)}{(x-1)^4},$$

$$f''(x) = 2\,\frac{x^2 + 4x + 1}{(x-1)^5} = 2\,\frac{(x - (-2 - \sqrt{3}))(x - (-2 + \sqrt{3}))}{(x-1)^5}.$$

В точках $x = -2 \pm \sqrt{3}$ вторая производная равна нулю, а в точке $x = 1$ не существует. На интервалах

$$(-\infty; -2 - \sqrt{3}), \quad (-2 - \sqrt{3}; -2 + \sqrt{3}), \quad (-2 + \sqrt{3}; 1), \quad (1; +\infty)$$

вторая производная сохраняет знак. Следовательно, каждый из этих интервалов — интервал выпуклости. На первом и третьем интервалах $f''(x) < 0$, значит, это интервалы выпуклости вверх; на втором и четвертом интервалах $f''(x) > 0$, т. е. это интервалы выпуклости вниз. При переходе через точки $x = -2 \pm \sqrt{3}$, $x = 1$ функция меняет направление выпуклости. Но в точке $x = 1$ функция не определена, поэтому $x = 1$ не является точкой перегиба. Итак, функция имеет две точки перегиба: $x = -2 - \sqrt{3}$ и $x = -2 + \sqrt{3}$.

3) Функция определена на интервале $(0; +\infty)$ и дифференцируема в каждой его точке, кроме точки $x = 1$. Вычислив вторую производную, получим

$$f''(x) = \frac{3}{4}\,\frac{5 - x}{x^3\sqrt{x}}, \quad x \in (0; 1); \qquad f''(x) = \frac{3}{4}\,\frac{x - 5}{x^3\sqrt{x}}, \quad x \in (1; +\infty).$$

Вторая производная равна нулю в точке $x = 5$ и не существует в точке $x = 1$. Определяем интервалы, на которых $f''(x)$ сохраняет знак:

$$\begin{aligned} f''(x) &> 0 \quad \text{при} \quad x \in (0; 1), \\ f''(x) &< 0 \quad \text{при} \quad x \in (1; 5), \\ f''(x) &> 0 \quad \text{при} \quad x \in (5; +\infty). \end{aligned}$$

Следовательно, на интервалах $(0; 1)$ и $(5; +\infty)$ функция выпукла вниз, а на интервале $(1; 5)$ выпукла вверх. При переходе через точки $x = 1$ и $x = 5$ функция меняет направление выпуклости. Но в точке $x = 1$ у функции нет ни конечной, ни бесконечной производной. Поэтому точка $x = 1$ не является точкой перегиба. Точка $x = 5$ является точкой перегиба, так как в ней функция имеет конечную производную. ▲

Пример 10 Найти точки перегиба графика функции $y = e^{\sqrt[3]{x}}$ и угловые коэффициенты касательных к графику функции в его точках перегиба

▲ Вычислим первую и вторую производные функции

$$y'(x) = \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad y''(x) = \frac{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}-2)}{9x^2}\, e^{\sqrt[3]{x}}, \quad x \neq 0$$

В точке $x = 0$ функция непрерывна и имеет бесконечную производную Вторая производная не существует при $x = 0$ и равна нулю при $x = 8$ Следовательно, точки перегиба функции могут быть только в точках $x = 0$ и $x = 8$ При переходе через эти точки $y''(x)$ меняет знак, и, следовательно, $y(x)$ в этих точках меняет направление выпуклости Поэтому точки $x = 0$, $x = 8$ являются точками перегиба функции, а точки $(0, 1)$ и $(8, e^2)$ — точками перегиба графика функции Касательная к графику функции в точке $(0, 1)$ вертикальна, так как $y'(0) = +\infty$ В точке перегиба $(8, e^2)$ угловой коэффициент касательной равен $y'(8) = e^2/12$ ▲

Пример 11 Определить, является ли точка $x = 0$ точкой перегиба функции

$$f(x) = x^3/2 - \operatorname{tg} x + \sin x$$

▲ Найдем вид главного члена разложения функции по формуле Маклорена (6) § 18 В § 18 (см (12) и пример 8) были получены формулы

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6), \quad \operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$

Следовательно,

$$f(x) = c_5 x^5 + o(x^6), \quad c_5 \neq 0$$

Эта формула является формулой Маклорена для функции $f(x)$, поэтому

$$f''(0) = f'''(0) = f^{IV}(0) = 0, \quad \text{а} \quad f^V(0) \neq 0$$

Таким образом, условия (12) выполнены, причем $n = 5$ — нечетное число Следовательно, $x = 0$ — точка перегиба функции ▲

Пример 12 Найти точки перегиба графика функции $y = f(x)$, заданной параметрически уравнениями

$$x = 1 + \operatorname{ctg} t, \quad y = \frac{\cos 2t}{\sin t}, \quad 0 < t < \pi \tag{14}$$

▲ Функции $x(t)$ и $y(t)$ при $t \in (0, \pi)$ дважды дифференцируемы, причем производная $x'_t = -1/\sin^2 t$ отрицательна Поэтому уравнениями (14) определяется дважды дифференцируемая функция $y = f(x)$, производные которой можно найти по формулам

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_{xx} = (y'_x)'_t \, \frac{1}{x'_t}$$

Так как

$$y'_t = -\frac{\cos t(2\sin^2 t + 1)}{\sin^2 t},$$

то
$$y'_x = \cos t(2\sin^2 t + 1).$$

Вычисляем вторую производную функции $y = f(x)$. Так как $(y'_x)'_t = 3\cos 2t \sin t$, то
$$y''_{xx} = -3\sin^3 t \cos 2t.$$

Вторая производная y''_{xx} равна нулю при $t = \pi/4$ и $t = 3\pi/4$. При переходе через эти точки y''_{xx} меняет знак. Следовательно, при этих значениях параметра t график функции $y = f(x)$ имеет точки перегиба. Значениям параметров $t = \pi/4$ и $t = 3\pi/4$ соответствуют точки $(2; 0)$ и $(0; 0)$ графика функции. Таким образом, график функции имеет две точки перегиба $(0; 0)$ и $(2; 0)$. ▲

Пример 13. Доказать неравенство $e^{(x+y)/2} \leqslant \dfrac{e^x + e^y}{2}$, $x, y \in R$.

▲ Рассмотрим функцию $f(x) = e^x$. Так как $f''(x) = e^x > 0$, то $f(x)$ на всей числовой прямой выпукла вниз. По определению всюду выпуклой вниз функции для любых точек x_1 и x_2 числовой прямой и любых чисел $\alpha_1 \geqslant 0$, $\alpha_2 \geqslant 0$ таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, верно неравенство
$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

Если $f(x) = e^x$, то это неравенство имеет вид
$$e^{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2} \leqslant \alpha_1 e^{x_1} + \alpha_2 e^{x_2}.$$

Положив $x_1 = x$, $x_2 = y$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$, получаем
$$e^{(x+y)/2} \leqslant \frac{e^x + e^y}{2}.$$

Так как $f''(x) = e^x$ строго больше нуля, то функция $f(x) = e^x$ строго выпукла вниз. Поэтому при $x \neq y$ получаем строгое неравенство
$$e^{(x+y)/2} < \frac{e^x + e^y}{2}. \ ▲$$

ЗАДАЧИ

Найти интервалы возрастания и убывания функции (1–5).

1. 1) $f = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 7$; 2) $f = 8x^3 - x^4$;
3) $f = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$; 4) $f = (x-1)^3(2x+3)^2$.

2. 1) $f = xe^{-3x}$; 2) $f = e^x/x$; 3) $f = x^2 e^{-x^2}$;
4) $f = x^\alpha e^{-x}$, $x > 0$, $\alpha > 0$; 5) $f = x^2 - 10\ln x$; 6) $f = x^2 \ln x$;
7) $f = x/\ln x$; 8) $f = 3^{1/(x-3)}$; 9) $f = \operatorname{arctg} x - \ln x$;
10) $f = e^{\pi x}\cos \pi x$.

3. 1) $f = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$; 2) $f = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2x}{x^2 - 1}$; 3) $f = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$;
4) $f = \dfrac{(3-x)^3}{(x-2)^2}$.

4. 1) $f=\sqrt[3]{x}/(x+50)$; 2) $f=\sqrt{8x^2-x^4}$; 3) $f=\sqrt{2x^3+9x^2}$;
4) $f=x\sqrt{(x+1)^3}$; 5) $f=x/\sqrt[3]{x^2-1}$; 6) $f=(x+1)\sqrt{x^2-1}$;
7) $f=(1+1/x)^x$.

5. 1) $f=\dfrac{\sqrt{1+|x+2|}}{1+|x|}$; 2) $f=\dfrac{\sin x+\cos x}{1+|\cos x|}$.

6. Найти интервалы возрастания и убывания для функции $y = f(x)$, заданной неявно уравнением:

1) $x^2y^2+y=1,\ y>0$; 2) $x^3y^3=x-y,\ x>0$.

7. Найти интервалы возрастания и убывания для функции $y = f(x)$, заданной параметрически уравнениями

$$x=\frac{e^{-t}}{1-t},\quad y=\frac{e^t}{1-t},\quad t>1.$$

8. Выяснить, при каких значениях параметра a функция $f(x)$ возрастает на всей числовой прямой:

1) $f(x)=x^3-ax$; 2) $f(x)=\dfrac{a^2-1}{3}x^3+(a-1)x^2+2x$;
3) $f(x)=ax-\sin x$; 4) $f(x)=ax+3\sin x+4\cos x$;
5) $f(x)=(8a-7)x-a\sin 6x-\sin 5x$;
6) $f(x)=4x+\dfrac{a+1}{2}\ln(x^2-x+1)+\dfrac{a-5}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt3}$.

9. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна на интервале $(a;b)$ и $f'(x)>0$ всюду на $(a;b)$, кроме конечного числа точек, то $f(x)$ строго возрастает на $(a;b)$.

10. Доказать, что для строгого возрастания функции $f(x)$ на некотором интервале необходимо и достаточно, чтобы для любых точек x_1 и x_2 $(x_1<x_2)$ этого интервала существовала точка $\xi \in (x_1;x_2)$ такая, что $f'(\xi)>0$.

11. Пусть функция $f(x)$ возрастает на интервале $(a;b)$. Следует ли из этого, что производная $f'(x)$ также возрастает на интервале $(a;b)$?

12. Функция $f(x)$ называется возрастающей в точке x_0, если существует такое число $\delta>0$, что $f(x)<f(x_0)$, если $x\in(x_0-\delta;x_0)$, и $f(x)>f(x_0)$, если $x\in(x_0;x_0+\delta)$.

Доказать, что:

1) из возрастания функции $f(x)$ в каждой точке некоторого интервала следует возрастание $f(x)$ на этом интервале;

2) функция $f(x)=\begin{cases} x+x^2\sin(2/x), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ возрастает в точке $x=0$, но не является возрастающей ни в каком интервале, содержащем эту точку.

13. Найти точки максимума и минимума функции:

1) $y = x^3 - 4x^2$; 2) $y = x(x-3)^2(x+1)^3$; 3) $y = 2\sin x + \cos 2x$;
4) $y = \dfrac{1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$; 5) $y = (x-5)e^x$; 6) $y = x^2 e^{1/x}$;
7) $y = (2x+1)\sqrt[3]{(x-2)^2}$; 8) $y = \dfrac{\sqrt[3]{1+|x|}}{1+|4x+5|}$.

14. Найти точку минимума функции

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (x - x_k)^2, \quad x_k \in R, \quad n \in N.$$

15. Найти многочлен наименьшей степени, имеющий локальный максимум, равный 6 при $x = 1$ и локальный минимум, равный 2 при $x = 3$.

Найти максимумы и минимумы функции (16–20).

16. 1) $y = x^4 - 8x^2 + 12$; 2) $y = \begin{cases} x^2 + 1, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0; \end{cases}$
3) $y = \dfrac{x^4}{4} - 2x^3 + \dfrac{11}{2}x^2 - 6x + 3$; 4) $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5$;
5) $y = (x^3 - 10)(x+5)^2$; 6) $y = (x+2)^2(x-3)^3$.

17. 1) $y = \dfrac{1}{x^2 - x}$; 2) $y = \dfrac{x}{x^2+4}$; 3) $y = \dfrac{(x-1)^2}{x+1}$; 4) $y = \dfrac{(2-x)^3}{(3-x)^2}$;
5) $y = \dfrac{x^3 + 2x^2}{(x-1)^2}$; 6) $y = \dfrac{x^4}{(x+1)^3}$.

18. 1) $y = \sin x + \dfrac{1}{2}\sin 2x$; 2) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$; 3) $y = \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$;
4) $y = x + \sin x$; 5) $y = x - 2\sin^2 x$; 6) $y = x - 2\operatorname{arctg} x$;
7) $y = (x-2)\cos \pi x - \dfrac{1}{\pi}\sin \pi x$; 8) $y = (x^2+1)\operatorname{arctg} x - \dfrac{\pi}{4}x^2 - x$.

19. 1) $y = (x-1)e^{3x}$; 2) $y = (3 - x^2)e^x$; 3) $y = (x^2 - 8)e^{-x}$;
4) $y = x^3 e^{-4x}$; 5) $y = x^4 e^{-x^2}$; 6) $y = (x+1)^5 e^{-x}$;
7) $y = (x^3 + 3x^2 + 6x + 6)e^{-x}$; 8) $y = (x+2)e^{1/x}$.

20. 1) $y = \sqrt{x}\ln x$; 2) $y = \dfrac{\ln^2 x}{x}$; 3) $y = \dfrac{1}{\ln(x^4 + 4x^3 + 30)}$;
4) $y = x^2 - 4x - 1 - \ln(x^2 - 4x + 4)$; 5) $y = \ln\cos x - \cos x$;
6) $y = \ln(x^2 - 1) - 2\operatorname{arctg} x$.

21. 1) $y = x + \sqrt{3-x}$; 2) $y = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + x}$; 3) $y = \sqrt[3]{x^2} - x$;
4) $y = x\sqrt[3]{x-1}$; 5) $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2 - 1}$; 6) $y = x/\sqrt[3]{x^2 - 4}$;
7) $y = \sqrt[3]{(x-2)^2(x-4)^2}$; 8) $y = \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$;
9) $y = \sqrt[3]{(3x-2)^2/(x-1)}$; 10) $y = 1 - \sqrt[3]{(x+1)^2/(x+2)^2}$.

22. 1) $y = x^x$; 2) $y = x^{1/x}$.

23. 1) $y = |x-5|(x-3)^3$; 2) $y = \max\{7x - 6x^2, |x^3|\}$;

3) $y = \sqrt{1+2|x-1|}/(6+|3x-2|)$; 4) $y = \sqrt[3]{x^2|2-x|}$;
5) $y = |x-1|\sqrt[3]{x+2}$; 6) $y = |x^2-1|e^{|x|}$; 7) $y = |x^2-4|e^{-|x|}$;
8) $y = e^{-|x-1|}/(x+1)$.

24. 1) $y = \sin(x+1) - |\cos x|$, $x \in (0;\pi)$;
2) $y = \sin|x-3| + \cos x$, $x \in (0;\pi)$;
3) $y = \dfrac{1+|\cos x|}{2+\cos x+\sqrt{3}\sin x}$, $x \in (0;\pi)$.

25. 1) $y(x) = \begin{cases} x, & x \leqslant 0, \\ x\ln x, & x > 0; \end{cases}$ 2) $y(x) = \begin{cases} 1+x, & x \leqslant 0, \\ (x)^{x^3}, & x > 0; \end{cases}$
3) $y(x) = \begin{cases} 1+x, & x \leqslant 0, \\ x^{x^2 \ln x}, & x > 0. \end{cases}$

26. Исследовать на экстремум функцию:
1) $y = (x+1)^n e^{-x}$, $n \in N$;
2) $y = \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$, $n \in N$;
3) $y = x^k(1-x)^n$, $k, n \in N$; 4) $y = ae^{px} + be^{-px}$, $a, b, p \in R$.

27. Исследовать на экстремум в точке $x = a$ функцию
$$y = (x-a)^n\varphi(x), \quad n \in N;$$
$\varphi(x)$ непрерывна в точке $x = a$ и $\varphi(a) \neq 0$.

28. Исследовать на экстремум функцию $y = f(x)$, заданную неявно уравнением:
1) $x^3 + y^3 = 3x^2$; 2) $x + y = xy(y-x)$, $|y| < |x|$;
3) $x^4 - y^4 = x^2 - 2y^2$, $y > |x|$; 4) $(x^2-y^2)(x-y) = 1$, $y > |x|$.

29. Исследовать на экстремум функцию $y = f(x)$, заданную параметрически уравнениями:
1) $x = \dfrac{1}{t(t+1)}$, $y = \dfrac{(t+1)^2}{t}$, $t > 0$; 2) $x = \ln\sin\dfrac{t}{2}$, $y = \ln\sin t$.

30. Доказать, что если в точке минимума существует правая производная, то она неотрицательна, а если существует левая производная, то она неположительна.

31. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(a;b)$ и непрерывна в точке $x_0 \in (a;b)$. Доказать, что если $f(x)$ возрастает на интервале $(a;x_0)$ и убывает на интервале $(x_0;b)$, то x_0 является точкой максимума; если же $f(x)$ убывает на интервале $(a;x_0)$ и возрастает на интервале $(x_0;b)$, то x_0 — точка минимума.

32. Доказать, что функция
$$y(x) = \begin{cases} x^2\sin^2(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$
в точке $x = 0$ имеет нестрогий минимум.

33. Доказать, что функция

$$y(x)=\begin{cases} x^2(2+\cos(1/x)), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

имеет строгий минимум в точке $x=0$, но ни в каком интервале $(-\delta;0)$, $\delta>0$, не является убывающей и ни в каком интервале $(0;\delta)$, $\delta>0$, не является возрастающей.

34. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} |x|\left(2+\cos\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases} e^{-1/|x|}\left(\dfrac{6}{5}+\cos\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Доказать:

1) $f'(0)$ не существует, $g^{(n)}(0)=0$, $n\in N$;

2) $f(x)$ и $g(x)$ в точке $x=0$ имеют строгий минимум;

3) $f(x)$ и $g(x)$ ни в каком интервале $(-\delta;0)$, $\delta>0$, не являются убывающими и ни в каком интервале $(0;\delta)$, $\delta>0$, не являются возрастающими.

35. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases} xe^{-1/x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Доказать:

1) $f^{(n)}(0)=g^{(n)}(0)=0$;

2) $f(x)$ в точке $x=0$ имеет строгий минимум, $g(x)$ в точке $x=0$ не имеет экстремума.

36. Пусть $f(x)$ — четная, дважды непрерывно дифференцируемая функция, причем $f''(0)\neq 0$. Доказать, что точка $x=0$ является точкой экстремума этой функции.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции (37–40).

37. 1) $y=x^3-6x^2+9$, $x\in[-1;2]$;

2) $y=\dfrac{1}{2}x^3-9x^2+48x$, $x\in[0;9]$;

3) $y=2x^3+3x^2-120x+100$, $x\in(-4;5]$;

4) $y=x^4-8x^2+3$, $x\in[-1;2]$;

5) $y=x^5-5x^4+5x^3+1$, $x\in[-1;2]$.

38. 1) $y=\dfrac{9}{x}+\dfrac{25}{1-x}$, $x\in(0;1)$; 2) $y=\dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$, $x\in[0;1]$;

3) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$, $x\in R$; 4) $y=\dfrac{x^4+1}{x^2+1}$, $x\in[-1;1]$.

39. 1) $y=x-2\sqrt{x}$, $x\in[0;5]$; 2) $y=x-2\ln x$, $x\in[3/2;e]$;

3) $y=x\ln(x/5)$, $x\in[1;5]$;

4) $y=|x^2+2x-3|+1{,}5\cdot\ln x$, $x\in[1/2;2]$;

5) $y=(x-3)e^{|x+1|}$, $x\in[-2;4]$; 6) $y=x^x$, $x\in(0;1]$.

40. 1) $y = 2\sin x + \sin 2x,\ x \in [0; 3\pi/2]$;
2) $y = \cos^2 x + \cos^2(\pi/3 + x) - \cos x \cos(\pi/3 + x),\ x \in R$;
3) $y = 4x + 9\pi^2/x + \sin x,\ x \in [\pi; 2\pi]$;
4) $y = 2\operatorname{arctg} x + \arcsin \dfrac{2x}{x^2+1},\ x \in R$.

Найти экстремумы функции $y = f(x)$ на интервале $(a; b)$, а также ее наименьшее значение m и наибольшее значение M на отрезке $[a; b]$ (41–43).

41. 1) $y = (x-3)^2 e^{|x|},\ a = -1,\ b = 4$;
2) $y = (x-3)^3 e^{|x+1|},\ a = -2,\ b = 4$;
3) $y = e^{\sqrt{x^2|x+1|}},\ a = -2,\ b = 1$;
4) $y = \ln(1 + \sqrt{|x|(x+1)^2}),\ a = -2,\ b = 1$;
5) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{|x|(x-1)^2},\ a = -1,\ b = 2$;
6) $y = \operatorname{arcctg}\sqrt{x^2|1-x|},\ a = -1,\ b = 2$.

42. 1) $y(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leqslant 0, \\ 2ex\ln x, & x > 0, \end{cases}\quad a = -1,\ b = 2$;

2) $y = \begin{cases} 1 + 3x, & x \leqslant 0, \\ (x)^{x^2}, & x > 0, \end{cases}\quad a = -1,\ b = 2$;

3) $y = E(x)/x + x/3,\ a = 1,\ b = 3$.

43. 1) $y = \cos(x + \pi/3 \operatorname{sign} x) + \sin(x + \pi/6),\ a = -\pi,\ b = \pi$;
2) $y = \sin(x - \pi/4) - \cos(x - (3\pi/4)\operatorname{sign} x),\ a = -\pi,\ b = \pi$;
3) $y = \sin(x - \pi/3) - \cos(x - (2\pi/3)\operatorname{sign} x),\ a = -\pi,\ b = \pi$.

44. Найти номер n наибольшего члена последовательности:
1) $\{105n + 3n^2 - n^3\}$; 2) $\left\{\dfrac{\sqrt{n}}{n+1985}\right\}$; 3) $\left\{\dfrac{\sqrt[3]{n}}{n+19}\right\}$;
4) $\left\{\dfrac{n^2}{n^3+200}\right\}$; 5) $\left\{\dfrac{n^{12}}{e^n}\right\}$; 6) $\left\{\dfrac{n^{10}}{2^n}\right\}$.

Найти $\inf f$ и $\sup f$ (45–47).

45. 1) $f = 1/x + x^2,\ x \in (0; 1]$; 2) $f = \ln x - x,\ x \in (0; +\infty)$;
3) $f = 2\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x,\ x \in (-\pi/2; \pi/2)$;
4) $f = \operatorname{tg} x - 3x,\ x \in [-\pi/4; \pi/2)$.

46. 1) $f = (x^2 + 4)e^{-x},\ x \in (0; +\infty)$;
2) $f = e^{-x^2}\cos x^2,\ x \in R$; 3) $f = (1/x)e^{-1/x},\ x \in (0; +\infty)$;
4) $f = x^x,\ x \in (0; 1/2]$.

47. 1) $f = x + \left(\dfrac{2}{x-2}\right)^2,\ x \in \left(\dfrac{3}{2}; 5\right)$;

2) $f = (x+1)\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^2,\ x \in \left(\dfrac{3}{2}; 6\right)$; 3) $f = \dfrac{\sqrt{1+|x-2|}}{1+|x|},\ x \in R$;

4) $f = \dfrac{x^2+1}{x^2+3}$, $x \in (a; +\infty)$, $a \in R$.

48. Найти интервалы выпуклости функции:
1) $f = x^\alpha$, $\alpha > 1$, $x > 0$; 2) $f = x^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $x > 0$; 3) $f = e^x$;
4) $f = \ln x$; 5) $f = x \ln x$; 6) $f = \operatorname{arctg} x$.

Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции (49, 50).

49. 1) $f = 2x^4 - 3x^2 + x - 1$; 2) $f = x^5 - 10x^2 + 3x$;
3) $f = \dfrac{1}{1-x^2}$; 4) $f = \dfrac{x^3}{12+x^2}$; 5) $f = \sqrt[3]{x+3}$; 6) $f = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$;
7) $f = \sqrt[3]{4x^3 - 12x}$; 8) $f = x/\sqrt[3]{x^2-1}$.

50. 1) $f = \cos x$; 2) $f = x + \sin x$; 3) $f = e^{-x^2}$; 4) $f = e^{1/x}$;
5) $f = \dfrac{10}{x} \ln \dfrac{x}{10}$; 6) $f = x \sin \ln x$; 7) $f = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$; 8) $f = e^{\operatorname{arctg} x}$.

Найти точки перегиба функции (51–53).

51. 1) $f = x^4 - 6x^2 + 5x$; 2) $f = x^4 - 12x^3 + 48x^2$;
3) $f = 2x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 3x + 1$; 4) $f = (x^2-1)^3$.

52. 1) $f = 4x^2 + 1/x$; 2) $f = x^2/(x-1)^3$; 3) $f = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2-4}$;
4) $f = \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$; 5) $f = |x-1|/x^2$.

53. 1) $f = (x^2+1)e^x$; 2) $f = x^3 e^{-4x}$; 3) $f = x^2 \ln x$;
4) $f = \ln x/\sqrt{x}$; 5) $f = e^{\cos x}$.

Найти точки перегиба графика функций (54–56).

54. 1) $f = 36x(x-1)^3$; 2) $f = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4$;
3) $f = 1 + x^2 - x^4/2$; 4) $f = x^5/20 - x^4 + 8x^3 - 32x^2$;
5) $f = (2x^2 - x - 4)/(x^2 - 4x + 4)$; 6) $f = x^4/(x+1)^3$.

55. 1) $f = \sqrt[3]{1-x^3}$; 2) $f = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}$; 3) $f = 5 + \sqrt[3]{(x-5)^5}$;
4) $f = \sqrt{(8-x^3)/(3x)}$.

56. 1) $f = e^{2x-x^2}$; 2) $f = xe^{-(x/2)^2}$; 3) $f = 2x^2 + \ln x$;
4) $f = e^{-2x} \sin^2 x$.

57. Найти точки перегиба функции f:
1) $f = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$, $\sigma > 0$; 2) $f = \dfrac{ax}{x^2+b^2}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

58. Исследовать на точки перегиба многочлены:
1) $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$;
2) $P_4(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $a \neq 0$.

59. При каких значениях параметра a функция $f = e^x + ax^3$ имеет точки перегиба?

60. Доказать, что график функции $y(x) = (x+1)/(x^2+1)$ имеет три точки перегиба, лежащие на одной прямой.

61. Доказать, что точки перегиба графика функций $y(x) = x \sin x$ лежат на кривой $y^2(4 + x^2) = 4x^2$.

62. Пусть $f(x) = \begin{cases} x^3(2 + \cos(1/x^2)), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Доказать, что:

1) график функции $f(x)$ в точке $(0; 0)$ имеет касательную;

2) график функции $f(x)$ переходит с одной стороны касательной к нему в точке $(0, 0)$ на другую ее сторону;

3) точка $(0; 0)$ не является точкой перегиба графика функции $f(x)$.

63. 1) Может ли точка перегиба функции быть ее точкой экстремума?

2) Может ли всюду выпуклая вниз (вверх) функция иметь более одного экстремума?

64. Доказать, что у любой дважды дифференцируемой функции:

1) между двумя точками экстремума лежит хотя бы одна точка перегиба;

2) между точками перегиба функции может и не быть точек экстремума.

65. Доказать, что:

1) каждый многочлен нечетной степени $n > 1$ имеет хотя бы одну точку перегиба;

2) каждый многочлен четной степени с положительными коэффициентами не имеет точек перегиба.

66. Пусть $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая на интервале $(a; b)$ функция, и пусть для любых точек x_1, x_2 этого интервала существует единственная точка c такая, что

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c).$$

Доказать, что $f(x)$ не имеет точек перегиба.

67. Найти точки перегиба графика функции $y = f(x)$, заданной параметрически уравнениями:

1) $x = te^t$, $y = te^{-t}$, $t > 0$; 2) $x = \dfrac{t^2}{t-1}$, $y = \dfrac{t^3}{t-1}$, $t > 2$;

3) $x = \dfrac{2t^2 + 2}{t}$, $y = \dfrac{t^3 + 3t + 1}{t^2}$, $0 < t < 1$;

4) $x = \dfrac{t^2 - 2t - 5}{t^2 + 10t + 25}$, $y = \dfrac{t^2 - 4t + 5}{t^2 + 4t - 5}$, $t > 1$.

68. Доказать, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ и $f^{(n)}(x) > g^{(n)}(x)$, $x > x_0$, то $f(x) > g(x)$ при $x > x_0$.

Доказать неравенство (69–71).

69. 1) $e^x \geqslant ex,\ x \in R$; 2) $x - x^2/2 < \ln(1+x) < x,\ x > 0$;
3) $\ln(1+x) > x/(x+1),\ x > 0$; 4) $1 - 2\ln x \leqslant 1/x^2,\ x > 0$;
5) $e^x > 1 + \ln(1+x),\ x > 0$; 6) $\ln x/(x-1) \leqslant 1/\sqrt{x},\ x > 0,\ x \neq 1$.

70. 1) $\cos x \geqslant 1 - x^2/2,\ x \in R$; 2) $\operatorname{ch} x \geqslant 1 + x^2/2,\ x \in R$;
3) $\operatorname{tg} x > x + x^3/3,\ 0 < x < \pi/2$; 4) $\operatorname{arctg} x \leqslant x,\ x \geqslant 0$;
5) $\sin x \geqslant 2x/\pi,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi/2$;
6) $x - x^3/6 < \sin x < x - x^3/6 + x^5/120,\ x \in R$;
7) $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x,\ 0 < x < \pi/2$;
8) $x - x^3/3 < \operatorname{arctg} x < x - x^3/6,\ 0 < x \leqslant 1$;
9) $(\sin x/x)^3 \geqslant \cos x,\ 0 < |x| \leqslant \pi/2$.

71. 1) $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y} \leqslant \sqrt[n]{x-y},\ x \geqslant y \geqslant 0$;
2) $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n \leqslant \dfrac{x^n + y^n}{2},\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ n \in N$;
3) $(x^\alpha + y^\alpha)^{1/\alpha} > (x^\beta + y^\beta)^{1/\beta},\ x > 0,\ y > 0,\ 0 < \alpha < \beta$;
4) $\dfrac{x-y}{x} < \ln\dfrac{x}{y} < \dfrac{x-y}{y},\ x > y > 0$;
5) $\dfrac{x\ln x + y\ln y}{x+y} > \ln\dfrac{x+y}{2},\ x > 0,\ y > 0$.

72. Доказать неравенство $x^\alpha - 1 \leqslant \alpha(x-1)$, $x > 0$, $0 < \alpha < 1$.

73. Доказать неравенство Юнга: если $a > 0,\ b > 0,\ p > 1$ и $1/p + 1/q = 1$, то
$$a^{1/p}b^{1/q} \leqslant a/p + b/q,$$
причем знак равенства имеет место только при $a = b$.

74. Доказать неравенство Гёльдера: если $x_i \geqslant 0,\ y_i \geqslant 0\ (i = 1, 2, \ldots, n)$, $p > 1$ и $1/p + 1/q = 1$, то
$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q}.$$

75. Доказать неравенство Минковского: если $x_i \geqslant 0,\ y_i \geqslant 0\ (i = 1, 2, \ldots, n)$, $p > 1$, то
$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p}.$$

76. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[-2; 2]$ и не имеет бесконечного числа нулей. Пусть существует $f''(x)$ на этом отрезке, $f''(x) = x^2 f(x)$, $f'(0) = 0$, $f(0) > 0$. Доказать, что при всех $x \in [-2; 2]$ справедливо неравенство $f(x) > 0$.

77. Пусть на отрезке $[a; b]$ задана дважды дифференцируемая функция $f(x)$, не имеющая бесконечного числа нулей, такая, что $f''(x) = e^x f(x)$, $f(b) = 0$. Доказать, что $f(x) \neq 0$ при $x \neq b$.

78. Пусть на отрезке $[a; b]$ задана дважды дифференцируемая функция $f(x)$, имеющая бесконечное число нулей, такая, что $f(x) \neq 0$

на отрезке $[a; b]$. Доказать, что на этом отрезке существует общий нуль функций $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$.

79. Пусть на отрезке $[a; b]$ задана дважды дифференцируемая функция $f(x)$, не имеющая бесконечного числа нулей, такая, что $f''(x) = 2^x f(x)$. Доказать, что функция $f(x)$ не может иметь на отрезке $[a; b]$ более одного нуля.

ОТВЕТЫ

1. 1) $(-\infty, 1/2)$, $(3; +\infty)$ — интервалы возрастания, $(1/2; 3)$ — интервал убывания;

2) $(-\infty; 6)$ — интервал возрастания, $(6; +\infty)$ — интервал убывания;

3) $(-\infty; 1)$, $(3; +\infty)$ — интервалы возрастания, $(1; 3)$ — интервал убывания;

4) $(-\infty; -3/2)$, $(-1/2; +\infty)$ — интервалы возрастания, $(-3/2; -1/2)$ — интервал убывания.

2. 1) $(-\infty; 1/3)$ — интервал возрастания, $(1/3; +\infty)$ — интервал убывания;

2) $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$ — интервалы убывания, $(1; +\infty)$ — интервал возрастания;

3) $(-\infty; -1)$, $(0; 1)$ — интервалы возрастания, $(-1; 0)$, $(1; +\infty)$ — интервалы убывания;

4) $(0; \alpha)$ — интервал возрастания, $(\alpha; +\infty)$ — интервал убывания;

5) $(0; \sqrt{5})$ — интервал убывания, $(\sqrt{5}; +\infty)$ — интервал возрастания;

6) $(0; 1/\sqrt{e})$ — интервал убывания, $(1/\sqrt{e}; +\infty)$ — интервал возрастания;

7) $(0; 1)$, $(1; e)$ — интервалы убывания, $(e; +\infty)$ — интервал возрастания;

8) $(-\infty; 3)$, $(3; +\infty)$ — интервалы убывания;

9) $(0; +\infty)$ — интервал убывания;

10) $(2k - 3/4; 2k + 1/4)$, $k \in Z$, — интервалы возрастания, $(2k + 1/4; 2k + 5/4)$, $k \in Z$, — интервалы убывания.

3. 1) $(-\infty; -2)$, $(-2; -\sqrt{2})$, $(\sqrt{2}; +\infty)$ — интервалы возрастания, $(-\sqrt{2}; -1)$, $(-1; \sqrt{2})$ — интервалы убывания;

2) $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$, $(1; +\infty)$ — интервалы убывания;

3) $(-\infty; -3)$, $(3; +\infty)$ — интервалы убывания, $(-3; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}; 3)$ — интервалы возрастания;

4) $(-\infty; 0)$, $(2; +\infty)$ — интервалы убывания, $(0; 2)$ — интервал возрастания.

4. 1) $(-\infty; -50)$, $(-50; 25)$ — интервалы возрастания, $(25; +\infty)$ — интервал убывания;

2) $(-2\sqrt{2};-2)$, $(0;2)$ — интервалы возрастания, $(-2;0)$, $(2;2\sqrt{2})$ — интервалы убывания;

3) $(-9/2;-3)$, $(0;+\infty)$ — интервалы возрастания, $(-3;0)$ — интервал убывания;

4) $(-1;-2/5)$ — интервал убывания, $(-2/5;+\infty)$ — интервал возрастания;

5) $(-\infty;-\sqrt{3})$, $(\sqrt{3};+\infty)$ — интервалы возрастания, $(-\sqrt{3};-1)$, $(-1;1)$, $(1;\sqrt{3})$ — интервалы убывания;

6) $(-\infty;-1)$, $(1;+\infty)$ — интервалы возрастания;

7) $(-\infty;-1)$; $(0;+\infty)$ — интервалы возрастания.

5. 1) $(-2;0)$ — интервал возрастания, $(-\infty;-2)$, $(0;+\infty)$ — интервалы убывания;

2) $(-\pi/2+2k\pi;\pi/2+2k\pi)$, $k \in Z$, — интервалы возрастания, $(\pi/2+2k\pi;3\pi/2+2k\pi)$, $k \in Z$, — интервалы убывания.

6. 1) $(-\infty;0)$ — интервал возрастания, $(0;+\infty)$ — интервал убывания;

2) $(0;1)$ — интервал возрастания, $(1;+\infty)$ — интервал убывания.

7. $(-\infty;-e^{-2})$ — интервал возрастания, $(-e^{-2};0)$ — интервал убывания.

8. 1) $a \leqslant 0$; 2) $a \leqslant -3$, $a \geqslant 1$; 3) $a \geqslant 1$; 4) $a \geqslant 5$; 5) $a \geqslant 6$;

6) $-1 \leqslant a \leqslant 7$.

11. Нет, не следует; контрпример: $f(x)=\sqrt{x}$, $x>0$; $f(x)=\ln x$, $x>0$; $f(x)=x+\sin x$, $x \in R$.

13. 1) $x=0$ — точка максимума, $x=8/3$ — точка минимума;

2) $x=(3-\sqrt{17})/4$ и $x=3$ — точки минимума, $x=(3+\sqrt{17})/4$ — точка максимума;

3) $x=(-1)^k\pi/6+\pi k$ — точки максимума, $x=\pi/2+\pi k$ — точки минимума, $k \in Z$;

4) $x=(2+\sqrt{7})/3$ — точка максимума, $x=(2-\sqrt{7})/3$ — точка минимума;

5) $x=4$ — точка минимума; 6) $x=1/2$ — точка минимума;

7) $x=1$ — точка максимума, $x=2$ — точка минимума;

8) $x=-5/4$ — точка максимума.

14. $x=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. **15.** x^3-6x^2+9x+2.

16. 1) Максимум $y=12$ при $x=0$, минимум $y=-4$ при $x=\pm 2$;

2) максимум $y=2$ при $x=0$;

3) максимум $y=1$ при $x=2$, минимумы $y=3/4$ при $x=1$ и $x=3$;

4) минимум $y=4$ при $x=1$;

5) минимум $y=-324$ при $x=1$, максимум $y=0$ при $x=-5$;

6) минимум $y=-108$ при $x=0$, максимум $y=0$ при $x=-2$.

17. 1) Максимум $y=-4$ при $x=1/2$;

2) минимум $y=-1/4$ при $x=-2$, максимум $y=1/4$ при $x=2$;

3) максимум $y=-8$ при $x=-3$, минимум $y=0$ при $x=1$;

4) максимум $y=-27/4$ при $x=5$;

5) минимум $y=0$ при $x=0$, минимум $y=32/3$ при $x=4$, максимум $y=1/4$ при $x=-1$;

6) минимум $y=0$ при $x=0$, максимум $y=-256/27$ при $x=-4$.

18. 1) Минимумы $y=-3\sqrt{3}/4$ при $x=2\pi k-\pi/3$, максимумы $y=3\sqrt{3}/4$ при $x=2\pi k+\pi/3$, $k\in Z$;

2) максимумы $y=1$ при $x=2\pi k$ и $x=2\pi k+\pi/2$, максимумы $y=-\sqrt{2}/2$ при $x=2\pi k+5\pi/4$, минимумы $y=-1$ при $x=2\pi k+\pi$ и $x=2\pi k+3\pi/2$, минимумы $y=\sqrt{2}/2$ при $x=2\pi k+\pi/4$, $k\in Z$;

3) максимумы $y=\sqrt{3}/3$ при $x=2\pi k+2\pi/3$, минимумы $y=-\sqrt{3}/3$ при $x=2\pi k-2\pi/3$, $k\in Z$;

4) экстремумов нет;

5) максимумы $y=(\pi+6\sqrt{3}-12)/12+\pi k$ при $x=\pi/12+\pi k$, минимумы $y=(5\pi-6\sqrt{3}-12)/12+\pi k$ при $x=5\pi/12+\pi k$, $k\in Z$;

6) максимум $y=\pi/2-1$ при $x=-1$, минимум $y=1-\pi/2$ при $x=1$;

7) минимумы $y=-2n$ при $x=2-2n$, минимумы $y=1-2n$ при $x=1+2n$, максимумы $y=2n-1$ при $x=3-2n$, максимумы $y=2n$ при $x=2+2n$, $n\in N$;

8) минимум $y=\pi/4-1$ при $x=1$, максимум $y=0$ при $x=0$.

19. 1) Минимум $y=-e^2/3$ при $x=2/3$;

2) минимум $y=-6e^{-3}$ при $x=-3$, максимум $y=2e$ при $x=1$;

3) минимум $y=-4e^2$ при $x=-2$, максимум $y=8e^{-4}$ при $x=4$;

4) максимум $y=27e^{-3}/64$ при $x=3/4$;

5) максимумы $y=4e^{-2}$ при $x=\pm\sqrt{2}$, минимум $y=0$ при $x=0$;

6) максимум $y=5^5e^{-4}$ при $x=4$;

7) максимум $y=6$ при $x=0$;

8) максимум $y=1/e$ при $x=-1$, минимум $y=4\sqrt{e}$ при $x=2$.

20. 1) Минимум $y=-2/e$ при $x=e^{-2}$;

2) минимум $y=0$ при $x=1$, максимум $y=4e^{-2}$ при $x=e^2$;

3) максимум $y=1/\ln 3$ при $x=-3$;

4) минимумы $y=-4$ при $x=1$ и $x=3$;

5) максимумы $y=-1$ при $x=2k\pi$, $k\in Z$;

6) минимум $y=\ln 2-\pi/2$ при $x=1$.

21. 1) Максимум $y=13/4$ при $x=11/4$, односторонний минимум $y=3$ при $x=3$;

2) минимум $y=0$ при $x=1$, максимум $y=\sqrt[3]{4}/3$ при $x=1/3$;

3) минимум $y=0$ при $x=0$; максимум $y=4/27$ при $x=8/27$;

4) минимум $y=-3\sqrt[3]{2}/8$ при $x=3/4$;

5) минимум $y=1$ при $x=0$, максимумы $y=\sqrt[3]{4}$ при $x=\pm\sqrt{2}/2$;

6) минимум $y = \sqrt{3}$ при $x = 2\sqrt{3}$, максимум $y = -\sqrt{3}$ при $x = -2\sqrt{3}$;

7) минимумы $y = 0$ при $x = 2$ и $x = 4$, максимум $y = 1$ при $x = 3$;

8) минимум $y = -\sqrt[3]{4}/3$ при $x = -4/3$, максимум $y = 0$ при $x = 2$;

9) минимум $y = \sqrt[3]{12}$ при $x = 4/3$, максимум $y = 0$ при $x = 2/3$;

10) максимум $y = 1$ при $x = -1$.

22. 1) Минимум, $y = e^{-1/e}$ при $x = 1/e$;

2) максимум $y = e^{1/e}$ при $x = e$.

23. 1) Максимум $y = 27/16$ при $x = 9/2$, минимум $y = 0$ при $x = 5$;

2) максимум $y = 49/24$ при $x = 7/12$, минимум $y = 0$ при $x = 0$, минимум $y = 1$ при $x = 1$;

3) максимум $y = 1/\sqrt{21}$ при $x = 1/3$, максимум $y = 1/\sqrt{33}$ при $x = 7/3$, минимум $y = 1/7$ при $x = 1$;

4) максимум $y = 2\sqrt[3]{4}/3$ при $x = 4/3$, минимумы $y = 0$ при $x = 0$ и $x = 2$;

5) максимум $y = 9\sqrt[3]{6}/8$ при $x = -5/4$, минимум $y = 0$ при $x = 1$;

6) максимумы $y = 2(\sqrt{2} - 1)e^{\sqrt{2}-1}$ при $x = \pm(1 - \sqrt{2})$, минимумы $y = 0$ при $x = \pm 1$, минимум $y = 1$ при $x = 0$;

7) максимумы $y = 2(\sqrt{5} + 1)e^{-1-\sqrt{5}}$ при $x = \pm(1 + \sqrt{5})$, максимум $y = 4$ при $x = 0$, минимумы $y = 0$ при $x = \pm 2$;

8) максимум $y = 1/2$ при $x = 1$, минимум $y = 1/e$ при $x = 0$.

24. 1) Максимум $y = \cos 1$ при $x = \pi/2$;

2) максимум $y = 2\sin((\pi + 6)/4)$ при $x = (6 - \pi)/4$, минимум $y = \cos 3$ при $x = 3$;

3) минимум $y = 2 - \sqrt{3}$ при $x = \pi/2$.

25. 1) Максимум $y = 0$ при $x = 0$, минимум $y = -1/e$ при $x = 1/e$;

2) максимум $y = 1$ при $x = 0$, минимум $y = e^{-1/(3e)}$ при $x = 1/\sqrt[3]{e}$;

3) максимум $y = e^{1/e^2}$ при $x = 1/e$, минимум $y = 1$ при $x = 1$.

26. 1) Максимум $y = n^n e^{1-n}$ при $x = n - 1$, $n \in N$; если n четное, то минимум $y = 0$ при $x = -1$;

2) если n нечетное, то максимум $y = 1$ при $x = 0$; если n четное, то экстремумов нет;

3) максимум $y = k^k n^n/(k + n)^{k+n}$ при $x = k/(k + n)$; если k четное, то минимум $y = 0$ при $x = 0$; если n четное, то минимум $y = 0$ при $x = 1$;

4) если $ab > 0$, $a > 0$, то минимум $y = 2\sqrt{ab}$ при $x = (1/(2p))\ln(b/a)$; если $ab > 0$, $a < 0$, то максимум $y = -2\sqrt{ab}$ при $x = (1/(2p))\ln(b/a)$.

27. Если $\varphi(a) > 0$ и n четное, то минимум $y = 0$; если $\varphi(a) < 0$ и n четное, то максимум $y = 0$; если n нечетное, то экстремума нет.

28. 1) Максимум $y = \sqrt[3]{4}$ при $x = 2$, минимум $y = 0$ при $x = 0$;

2) максимум $y = \sqrt{2} - 1$ при $x = -1$, минимум $y = 1 - \sqrt{2}$ при $x = 1$;

3) максимум $y = \sqrt{2}$ при $x = 0$, минимумы $y = \sqrt{(2+\sqrt{3})/2}$ при $x = \pm\sqrt{2}/2$;

4) минимум $y = 3/\sqrt[3]{32}$ при $x = -1/\sqrt[3]{32}$.

29. 1) Минимум $y = 4$ при $x = 1/2$;

2) максимум $y = 0$ при $x = -\ln 2/2$.

37. 1) 9, -7; 2) 80, 0;

3) наибольшее значение не существует; -204;

4) 3, -13; 5) 2, -10.

38. 1) Наибольшее значение не существует, 64; 2) 1, 3/5;

3) 2, 2/3; 4) 1, $2\sqrt{2} - 2$.

39. 1) $5 - 2\sqrt{5}$, -1; 2) $e - 2$, $2 - 2\ln 2$; 3) 0, $-5/e$;

4) $5 + 1{,}5\ln 2$, 0; 5) e^5, $-e^3$; 6) 1, $1/e^{1/e}$.

40. 1) $3\sqrt{3}/2$, -2; 2) 3/4, 3/4; 3) 13π, $12\pi - 1$; 4) π, $-\pi$.

41. 1) Минимум $y = 0$ при $x = 3$, минимум $y = 9$ при $x = 0$, максимум $y = 4e$ при $x = 1$; $m = 0$, $M = e^4$;

2) минимум $y = -27e$ при $x = 0$, максимум $y = 64$ при $x = -1$, $m = -125e$, $M = e^5$;

3) минимумы $y = 1$ при $x = 0$ и $x = -1$, максимум $y = e^{2\sqrt{3}/9}$ при $x = -2/3$; $m = 1$, $M = e^2$;

4) минимумы $y = 0$ при $x = 0$ и $x = -1$, максимум $y = \ln(1 + 2\sqrt{3}/9)$ при $x = -1/3$, $m = 0$, $M = \ln 3$;

5) минимумы $y = 0$ при $x = 0$ и $x = 1$, максимум $y = \operatorname{arctg}(2\sqrt{3}/9)$ при $x = 1/3$, $m = 0$, $M = \operatorname{arctg} 2$;

6) минимум $y = \operatorname{arcctg}(2\sqrt{3}/9)$ при $x = 2/3$, максимумы $y = \pi/2$ при $x = 0$ и $x = 1$, $m = \operatorname{arcctg} 2$, $M = \pi/2$.

42. 1) Минимум $y = -2$ при $x = 1/e$, максимум $y = 0$ при $x = 0$; $m = -2$, $M = 4e\ln 2$;

2) минимум $y = e^{-1/(2e)}$ при $x = e^{-1/2}$, максимум $y = 1$ при $x = 0$; $m = -2$, $M = 16$;

3) минимум $y = 2/\sqrt{3}$ при $x = \sqrt{3}$, минимум $y = 4/\sqrt{6}$ при $x = \sqrt{6}$, максимум $y = 5/3$ при $x = 2$, $m = 2/\sqrt{3}$, $M = 2$.

43. 1) Минимум $y = -2$ при $x = -2\pi/3$, максимум $y = 3/2$ при $x = 0$; $m = -2$, $M = 3/2$;

2) минимум $y = -1 - \sqrt{2}/2$ при $x = 0$, минимум $y = -\sqrt{2}$ при $x = -\pi/2$, максимумы $y = 0$ при $x \in (0; \pi)$, $m = -1 - \sqrt{2}/2$, $M = 0$;

3) минимум $y = -\sqrt{2}$ при $x = -5\pi/12$, минимум $y = -2\sin(\pi/12)$ при $x = \pi/4$, минимум $y = -1 - \sqrt{3}/2$ при $x = 0$, $m = -1 - \sqrt{3}/2$, $M = (\sqrt{3} - 1)/2$.

44. 1) $n = 7$; 2) $n = 1985$; 3) $n = 10$; 4) $n = 7$; 5) $n = 12$; 6) $n = 14$.

45. 1) $3/\sqrt[3]{4}$, $+\infty$; 2) $-\infty$, -1; 3) $-\infty$, 1;

4) $\sqrt{2} - 3\arccos(1/\sqrt{3})$, $+\infty$.

46. 1) 0, 4; 2) $-(\sqrt{2}/2)e^{-3\pi/4}$, 1; 3) 0, $1/e$; 4) $1/e^{1/e}$, 1.

47. 1) 5, $+\infty$; 2) $5/2$, $+\infty$; 3) 0, $\sqrt{3}$;

4) $\inf f = \begin{cases} 1/3, & a \leqslant 0, \\ (a^2+1)/(a^2+3), & 0 < a, \end{cases}$ $\sup f = 1$.

48. 1) Выпукла вниз; 2) выпукла вверх; 3) выпукла вниз;

4) выпукла вверх; 5) выпукла вниз;

6) выпукла вверх при $x > 0$, выпукла вниз при $x < 0$.

49. 1) Выпукла вверх на интервале $(-1/2; 1/2)$, выпукла вниз на интервалах $(-\infty; -1/2)$ и $(1/2; +\infty)$, точки перегиба $x = \pm 1/2$;

2) $(-\infty; 1)$ — интервал выпуклости вверх, $(1; +\infty)$ — интервал выпуклости вниз, точка перегиба $x = 1$;

3) $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$ — интервалы выпуклости вверх, $(-1; 1)$ — интервал выпуклости вниз, точек перегиба нет;

4) $(-\infty; -6)$ и $(0; 6)$ — интервалы выпуклости вниз, $(-6; 0)$ и $(6; +\infty)$ — интервалы выпуклости вверх, точки перегиба $x = 0$, $x = \pm 6$;

5) $(-\infty; -3)$ — интервал выпуклости вниз, $(-3; +\infty)$ — интервал выпуклости вверх; точка перегиба $x = -3$;

6) $(0; (2+\sqrt{3})/\sqrt{3})$ — интервал выпуклости вверх,

$((2+\sqrt{3})/\sqrt{3}; +\infty)$ — интервал выпуклости вниз, точка перегиба $x = (2+\sqrt{3})/\sqrt{3}$;

7) $(-\infty; -\sqrt{3})$ и $(0; \sqrt{3})$ — интервалы выпуклости вниз, $(-\sqrt{3}; 0)$ и $(\sqrt{3}; +\infty)$ — интервалы выпуклости вверху, точки перегиба $x = 0$, $x = \pm\sqrt{3}$;

8) $(-\infty; -3)$, $(-1; 0)$, $(1; 3)$ — интервалы выпуклости вниз, $(-3; -1)$, $(0; 1)$, $(3; +\infty)$ — интервалы выпуклости вверх, точки перегиба $x = 0$, $x = \pm 3$.

50. 1) $(\pi(4k+1)/2;\ \pi(4k+3)/2)$ — интервалы выпуклости вниз, $(\pi(4k+3)/2;\ \pi(4k+5)/2)$ — интервалы выпуклости вверх, точки перегиба $x = \pi(2k+1)/2$, $k \in Z$;

2) $(2k\pi; (2k+1)\pi)$ — интервалы выпуклости вверх, $((2k+1)\pi; (2k+2)\pi)$ — интервалы выпуклости вниз, точки перегиба $x = k\pi$, $k \in Z$;

3) $(-\infty; -1/\sqrt{2})$ и $(1/\sqrt{2}; +\infty)$ — интервалы выпуклости вниз, $(-1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2})$ — интервал выпуклости вверх, точки перегиба $x = \pm 1/\sqrt{2}$;

4) $(-\infty; -1/2)$ — интервал выпуклости вверх, $(-1/2; 0)$ и $(0; +\infty)$ — интервалы выпуклости вниз, точка перегиба $x = -1/2$;

5) $(0; 10e\sqrt{e})$ — интервал выпуклости вверх, $(10e\sqrt{e}; +\infty)$ — интервал выпуклости вниз, точка перегиба $x = 10e\sqrt{e}$;

6) $(e^{\pi(8k-3)/4}; e^{\pi(8k+1)/4})$ — интервалы выпуклости вниз,

$(e^{\pi(8k+1)/4}; e^{\pi(8k+5)/4})$ — интервалы выпуклости вверх, точки перегиба $x = e^{\pi(4k+1)/4}$, $k \in Z$;

7) $(-\infty; 0)$ — интервал выпуклости вверх, $(0; +\infty)$ — интервал выпуклости вниз, точек перегиба нет;

8) $(-\infty; 1/2)$ — интервал выпуклости вниз, $(1/2; +\infty)$ — интервал выпуклости вверх, точка перегиба $x = 1/2$.

51. 1) $x = \pm 1$; 2) $x = 2$, $x = 4$; 3) точек перегиба нет;
4) $x = \pm 1$, $x = \pm 1/\sqrt{5}$.

52. 1) $x = -\sqrt[3]{2}/2$; 2) $x = -2 \pm \sqrt{3}$; 3) $x = \pm 2$; 4) $x = 1$; 5) $x = 3$.

53. 1) $x = -3$, $x = -1$; 2) $x = 0$, $x = (3 \pm \sqrt{3})/4$; 3) $x = 1/e\sqrt{e}$;
4) $x = e^{8/3}$; 5) $x = 2k\pi \pm \arccos((\sqrt{5} - 1)/2)$, $k \in Z$.

54. 1) $(1; 0)$, $(1/2; -9/4)$; 2) $(-3; 294)$, $(2; 114)$;
3) $(1/\sqrt{3}; 23/18)$, $(-1/\sqrt{3}; 23/18)$; 4) $(4; -1024/5)$;
5) $(8/7; -31/9)$; 6) у графика функции точек перегиба нет.

55. 1) $(0; 1)$, $(1; 0)$; 2) $(-1; -1)$, $(0; -1)$; 3) $(5; 5)$; 4) $(\sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{2})$.

56. 1) $((2 + \sqrt{2})/2; \sqrt{e})$, $((2 - \sqrt{2})/2; \sqrt{e})$;
2) $(0; 0)$, $\left(\sqrt{6}; \dfrac{1}{e}\sqrt{6e}\right)$, $\left(-\sqrt{6}; -\dfrac{1}{e}\sqrt{\dfrac{6}{e}}\right)$; 3) $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2} - \ln 2\right)$;
4) $\left((6k + (-1)^k)\dfrac{\pi}{12}; \dfrac{2 - \sqrt{3}}{4} e^{-(6k+(-1)^k)\pi/6}\right)$, $k \in Z$.

57. 1) $x = \pm\sigma$; 2) $x = 0$, $x = \pm b\sqrt{3}$.

58. 1) Одна точка перегиба $x = -b/(3a)$;
2) если $3b^2 - 8ac > 0$, то две точки перегиба $x = \dfrac{-3b \pm \sqrt{9b^2 - 24ac}}{12a}$, если $3b^2 - 8ac \leqslant 0$, то точек перегиба нет.

59. $a \in (-\infty; -e/6)$, $a \in (0; +\infty)$.

63. 1) Не может; 2) не может.

67. 1) $(\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}; \sqrt{2}e^{-\sqrt{2}})$; 2) $(9/2; 27/2)$; 3) $(5; 21/2)$; 4) $(1/10; 1/4)$.

73. Указание. Можно либо воспользоваться неравенством из задачи 72, положив в нем $x = a/b$, $\alpha = 1/p$, $p/(p-1) = q$, либо, прологарифмировав неравенство Юнга, использовать выпуклость вверх функции $\ln x$.

74. Указание. В неравенстве Юнга (задача 73) положить

$$a = x_i^p \Big/ \sum_{i=1}^{n} x_i^p, \quad b = y_i^q \Big/ \sum_{i=1}^{n} y_i^q$$

и просуммировать полученные неравенства по i от 1 до n.

75. Указание. Применить неравенство Гёльдера (задача 74) к суммам правой части тождества

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p = \sum_{i=1}^{n} x_i (x_i + y_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} y_i (x_i + y_i)^{p-1}.$$

§ 21. Построение графиков

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

При построении графика функции можно придерживаться, например, следующей схемы.

1. Найти область определения функции. Проверить, является ли функция четной, нечетной, периодической. Найти точки пересечения графика с осями координат, промежутки, где значения функции положительны, отрицательны. Найти точки разрыва функции.

2. Найти асимптоты графика (§ 11). Найти односторонние пределы функции в граничных точках области определения и в точках разрыва.

3. Сделать набросок графика, отразив на нем полученные результаты.

4. Вычислить первую производную функции, найти экстремумы и промежутки ее возрастания и убывания.

5. Вычислить вторую производную, найти точки перегиба графика, промежутки выпуклости вверх или вниз.

6. Нарисовать график функции.

При решении конкретной задачи отдельные этапы этой схемы могут быть расширены, другие же могут оказаться излишними или невыполнимыми. Например, если точки графика монотонно приближаются к асимптоте, то следует попытаться выяснить, с какой стороны от этой асимптоты они расположены. Это можно сделать методом выделения главной части или по известному направлению выпуклости кривой. Метод выделения главной части можно использовать и для уточнения рисунка вблизи отдельных точек или при $x \to +\infty$, $x \to -\infty$. Часто бывает нетрудно найти и нарисовать касательную к графику в точках перегиба, в угловых точках и т. д.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Построить график функции

$$y = \frac{1}{4}\,(x^3 + 3x^2 - 9x - 3).$$

▲ Данная функция определена и бесконечно дифференцируема на R, асимптот не имеет,

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty.$$

График пересекает ось ординат в точке $(0; -3/4)$.

Найдем экстремумы функции. Вычисляем производную:

$$y' = \frac{3}{4}\,(x^2 + 2x - 3),$$

и находим, что $y' > 0$ при $x < -3$, $y' < 0$ при $-3 < x < 1$, $y' > 0$ при $x > 1$. Значит, $x = -3$ — точка максимума, $y(-3) = 6$, а $x = 1$ — точка минимума, $y(1) = -2$.

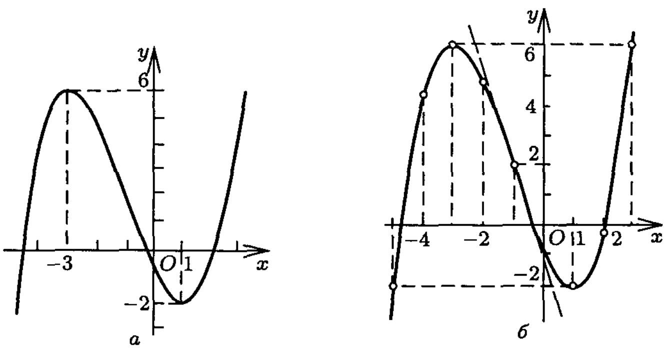

Рис. 21.1

Отметим найденные три точки графика и сделаем его набросок (рис 21.1, *а*).

Вычислив вторую производную: $y'' = \frac{3}{2}(x+1)$, найдем, что функция выпукла вверх при $x < -1$ ($y'' < 0$) и выпукла вниз при $x > -1$ ($y'' > 0$). В точке перегиба $x = -1$ вычисляем $y(-1) = 2$, $y'(-1) = -3$. Для более точного изображения графика находим еще несколько значений функции (табл. 1). Наносим полученные точки на чертеж, проводим касательную к графику в точке перегиба $(-1;2)$ с угловым коэффициентом, равным -3, и рисуем график (рис 21.1, *б*). Из табл. 1 и графика видно, что корни данного многочлена нецелые, поэтому начинать исследование функции с нахождения корней было бы нецелесообразно. ▲

Таблица 1

x	-5	-4	-3	0	-1	0	1	2	3
$y(x)$	-2	$17/4$	6	$19/4$	2	$-3/4$	-2	$1/4$	6

Пример 2. Построить график функции $y = \dfrac{x^3}{4(2-x)^2}$.

▲ Функция определена при всех $x \in R$, кроме $x = 2$. График ее пересекает оси координат в одной точке $(0;0)$. Функция положительна при $x > 0$, $x \neq 2$, и отрицательна при $x < 0$. Функция разрывна в точке $x = 2$, и, поскольку $\lim\limits_{x\to 2} y(x) = +\infty$, прямая $x = 2$ — вертикальная асимптота графика. Из того, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x} = \frac{1}{4}, \quad \lim_{x\to\infty}\left(y(x) - \frac{1}{4}x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x(x-1)}{(x-2)^2} = 1,$$

следует, что при $x \to \infty$ график имеет наклонную асимптоту

$$y = x/4 + 1.$$

Отметив еще, что $y \sim x^3/16$ при $x \to 0$, делаем предварительный рисунок графика (рис. 21.2, *а*).

Вычисляем первую производную: $y'(x) = \dfrac{x^2(x-6)}{4(x-2)^3}$, и находим единственную точку экстремума $x=6$, которая является точкой минимума, $y(6)=27/8$. На интервалах $(-\infty; 2)$ и $(6; +\infty)$ функция возрастает, на интервале $(2; 6)$ убывает. В точке $x=0$ касательная к

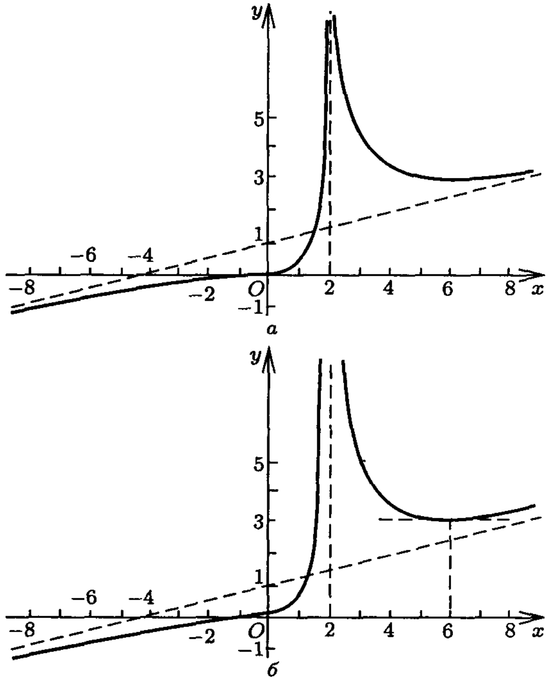

Рис. 21.2

графику горизонтальна, как и было указано на рис. 21.2, *а*. Вычисляем вторую производную:

$$y''(x) = \frac{6x}{(x-2)^4}.$$

Отсюда следует, что имеется только одна точка перегиба функции $x=0$, причем $y(0)=0$ и $y'(0)=0$. При $x<0$ функция выпукла вверх, поэтому ее график при $x \to -\infty$ приближается к асимптоте снизу. При $0<x<2$ и при $x>2$ функция выпукла вниз. Отсюда следует, что при $x \to +\infty$ график приближается к асимптоте сверху. Вычислив еще несколько точек графика, на основе проведенного исследования делаем более точный рисунок (рис 21.2, *б*). ▲

Пример 3. Построить график функции $y = x\sqrt[3]{(x+1)^2}$.

▲ Функция определена и непрерывна на R. График пересекает оси координат в точках $(0;0)$ и $(-1;0)$. Функция положительна при $x>0$ и отрицательна при $x<0$, $x \neq -1$. Так как $y(-1)=0$, то $x=-1$ —

точка максимума функции. Очевидно,

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty, \quad y(x) \sim x^{5/3} \quad \text{при} \quad x \to +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = -\infty, \quad y(x) \sim x^{5/3} \quad \text{при} \quad x \to -\infty.$$

Легко также видеть, что

$$y(x) \sim x \text{ при } x \to 0, \quad y(x) \sim -(x+1)^{2/3} \text{ при } x \to -1.$$

Делаем набросок графика: при "больших" значениях $|x|$ он "похож" на график степенной функции $y = x^{5/3}$, в окрестности точки

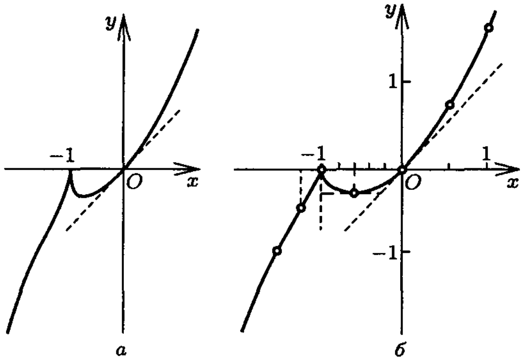

Рис. 21.3

$x = -1$ — на график функции $y = -(x+1)^{2/3}$, а в окрестности точки $x = 0$ сближается с прямой $y = x$ (рис 21.3, *а*).

Для уточнения рисунка найдем и исследуем производные:

$$y'(x) = \frac{5(x+3/5)}{3(x+1)^{1/3}}, \tag{1}$$

$$y''(x) = \frac{10(x+6/5)}{9(x+1)^{4/3}}. \tag{2}$$

Из (1) следует, что функция возрастает на интервалах $(-\infty; -1)$, $(-3/5; +\infty)$ и убывает на интервале $(-1; -3/5)$.

В точке $x = -1$ функция имеет максимум ($y(-1) = 0$), что было отмечено выше, а в точке $x = -\frac{3}{5}$ — минимум, $y\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{3}{25}\sqrt[3]{20} \approx$ $\approx -0{,}3$. В точке $x = 0$ график касается прямой $y = x$, а в точке $x = -1$ касательная к графику вертикальна, поскольку

$$\lim_{x\to-1-0} y'(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-1+0} y'(x) = -\infty.$$

Из (2) следует, что на интервале $(-\infty; -6/5)$ функция выпукла вверх, а на интервалах $(-6/5; -1)$ и $(-1; +\infty)$ выпукла вниз. Точка $x =$ $= -6/5$ —точка перегиба функции,

$$y\left(-\frac{6}{5}\right) = -\frac{6}{25}\sqrt[3]{5} \approx -0{,}4, \quad y'\left(-\frac{6}{5}\right) = \sqrt[3]{5} \approx 1{,}7.$$

Используя эти результаты и вычислив еще несколько точек графика, делаем более точный рисунок (рис 21.3, *б*). ▲

Пример 4. Построить график функции $y(x) = \sqrt{\dfrac{x^3 - 2x^2}{x-3}}$.

▲ Преобразуем формулу к виду $y(x) = |x|\sqrt{\dfrac{x-2}{x-3}}$. Данная функция определена при $x \leqslant 2$ и при $x > 3$, положительна при $x \neq 0$ и $x \neq 2$, $y(0) = y(2) = 0$. Так как

$$\lim_{x \to 3+0} y(x) = +\infty,$$

то $x = 3$ — вертикальная асимптота. При $x \to \infty$ имеем

$$y(x) = |x|\left(\frac{1-2/x}{1-3/x}\right)^{1/2} = |x|\left(1-\frac{2}{x}\right)^{1/2}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{-1/2} =$$
$$= |x|\left(1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(1 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = |x|\left(1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right);$$

отсюда при $x \to +\infty$ получаем

$$y(x) = x + 1/2 + o(1),$$

а при $x \to -\infty$

$$y(x) = -x - 1/2 + o(1).$$

Значит, $y = x + 1/2$ — асимптота при $x \to +\infty$, а $y = -x - 1/2$ — асимптота при $x \to -\infty$.

Отметим еще, что $y(x) \sim 2\sqrt{2-x}$ при $x \to 2-0$ и $y(x) \sim \sqrt{2/3}\,|x|$ при $x \to 0$ $(\sqrt{2/3} \approx 0{,}8)$.

Первый эскиз графика дан на рис 21.4, *а*.

Данная функция на своей области определения бесконечно диффе-

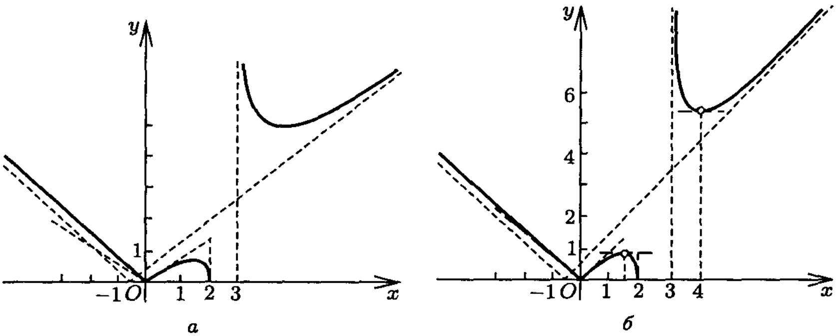

Рис. 21.4

ренцируема всюду, кроме $x = 0$ и $x = 2$. Вычисляем производные

$$y'(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x-3}}\,\frac{2x^2 - 11x + 12}{2(x-2)(x-3)}\,\operatorname{sign} x, \tag{3}$$

$$y''(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x-3}}\,\frac{11x - 24}{4(x-2)^2(x-3)^2}\,\operatorname{sign} x. \tag{4}$$

Из (3) находим, что при $x = 3/2$ функция имеет максимум, равный $y(3/2) = \sqrt{3}/2 \approx 0{,}9$, а при $x = 4$ — минимум, $y(4) = 4\sqrt{2} \approx 5{,}7$. При $x \to 2-0$ касательная к графику становится вертикальной, так как $\lim\limits_{x\to 2-0} y'(x) = +\infty$. Отметим еще, что

$$\lim_{x\to -0} y'(x) = -\sqrt{2/3}, \quad \lim_{x\to +0} y'(x) = \sqrt{2/3} \approx 0,8.$$

Из (4) следует, что при $x > 3$ и при $x < 0$ функция выпукла вниз, в частности, это означает, что график приближается к асимптоте сверху и при $x \to +\infty$, и при $x \to -\infty$. При $0 < x < 2$ функция выпукла вверх. График функции изображен на рис. 21.4, *б*. ▲

Пример 5. Построить график функции $y(x) = \dfrac{x^2-4}{x}\, e^{-5/(3x)}$.

▲ Функция определена при всех $x \in R$, $x \neq 0$. График ее пересекает ось абсцисс в точках $(2;0)$, $(-2;0)$. Функция положительна на интервалах $(-2,0)$, $(2;+\infty)$ и отрицательна на интервалах $(-\infty;-2)$, $(0;2)$.

В точке $x = 0$ функция разрывна, и

$$\lim_{x-0} y(x) = +\infty, \quad \lim_{x+0} y(x) = -0.$$

Отсюда следует, что $x = 0$ — вертикальная асимптота графика при $x \to -0$; при этом $y(x) \to +\infty$.

Применяя формулу Тейлора для экспоненты, находим

$$y(x) = \left(x - \frac{4}{x}\right)\left(1 - \frac{5}{3x} + \frac{25}{18x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x - \frac{5}{3} - \frac{47}{18x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$
$$x \to \infty.$$

Отсюда следует, что график имеет наклонную асимптоту $y = x - 5/3$

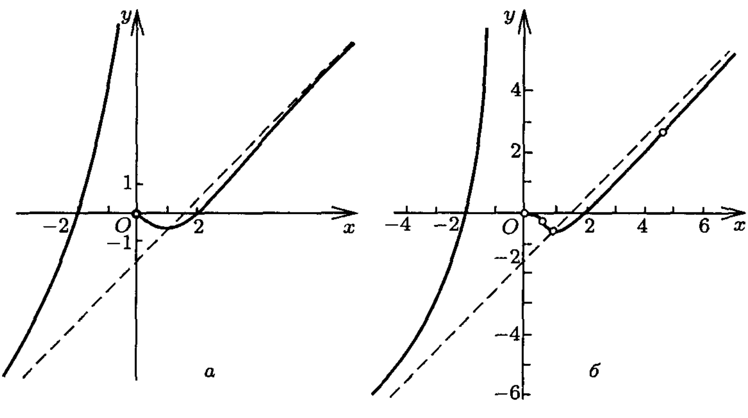

Рис. 21.5

и приближается к ней снизу при $x \to +\infty$, а при $x \to -\infty$ — сверху.

Предварительный эскиз графика показан на рис 21.5, *а*.

Вычисляем производные:

$$y'(x) = \frac{(x-1)(3x^2+8x+20)}{3x^3}\,e^{-5/3x}, \tag{5}$$

$$y''(x) = -\,\frac{47x^2-240x+100}{9x^5}\,e^{-5/3x}. \tag{6}$$

Из (5) находим, что на интервалах $(-\infty; 0)$ и $(1; +\infty)$ данная функция возрастает, а на интервале $(0; 1)$ убывает. При $x = 1$ функция имеет минимум, $y(1) = -3e^{-5/3} \approx -0,6$. Находим еще, что

$$\lim_{x\to+0} y'(x) = -(20/3)\lim_{x\to+0}(1/x^3)e^{-5/3x} = 0,$$

т. е. при $x \to +0$ касательная к графику становится горизонтальной.

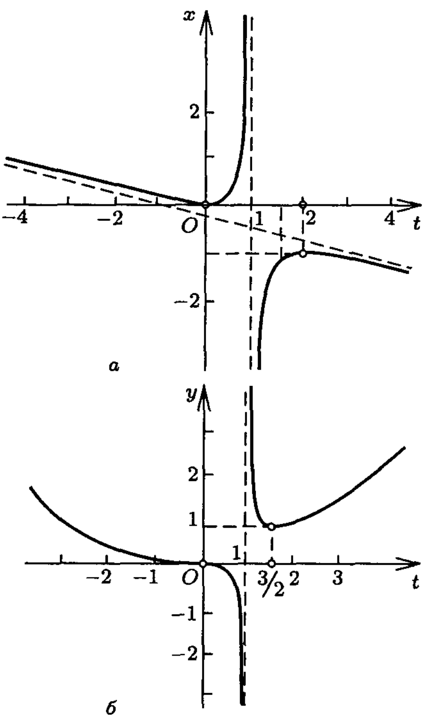

Рис. 21.6

Из (6) находим точки перегиба функции:

$$x_1 = 10(12-\sqrt{97})/47 \approx 0{,}5,$$

$$x_2 = 10(12+\sqrt{97})/47 \approx 4{,}6,$$

и вычисляем

$$y(x_1) \approx 0{,}2, \quad y(x_2) \approx 2{,}8.$$

На интервалах $(-\infty; 0)$ и $(x_1; x_2)$ функция выпукла вниз, а на интервалах $(0; x_1)$, $(x_2; +\infty)$ выпукла вверх.

Вычислив, как и обычно, еще несколько точек графика, рисуем его (рис. 21.5, *б*). ▲

При построении кривой, заданной параметрически, полезно предварительно построить графики функций $x(t)$ и $y(t)$. Удобно бывает разбить ось t на интервалы, на каждом из которых обе функции $x(t)$ и $y(t)$ монотонны. На каждом таком интервале эта пара функций определяет функцию $y(x)$ или $x(y)$, и здесь можно использовать все ранее указанные приемы исследования и построения графиков.

Пример 6. Построить кривую $x(t) = \dfrac{t^2}{4(1-t)}$, $\quad y(t) = \dfrac{t^3}{8(t-1)}$.

▲ Строим графики функций $x(t)$ и $y(t)$ (рис. 21.6). Укажем некоторые результаты исследования этих функций: $x = -(t+1)/4$ и

$t = 1$ — асимптоты графика $x(t)$, $t = 1$ — асимптота графика $y(t)$,

$$x'_t = \frac{t(2-t)}{4(1-t)^2}, \; y'_t = \frac{t^2(2t-3)}{8(t-1)^2},$$

$t = 0$ — точка минимума функции $x(t)$, $x(0) = 0$,

$t = 2$ — точка максимума функции $x(t)$, $x(2) = -1$,

$t = 3/2$ — точка минимума функции $y(t)$, $y(3/2) = 27/32$.

Отметим дополнительно, что:

а) $x = -(t+1)/4 + o(1)$, $y = (t^2 + t + 1)/8 + o(1)$ при $t \to -\infty$ и при $t \to +\infty$; отсюда следует, что $t = -4x - 1 + o(1)$, и, значит, $y \sim \sim (16x^2 + 4x + 1)/8$ при $t \to -\infty$ и при $t \to +\infty$;

б) $x \sim t^2/4$, $y \sim -t^3/8$ при $t \to 0$, откуда следует, что $x \sim y^{2/3}$ при $t \to 0$;

в) $x \sim 1/(4(1-t))$, $y \sim 1/(8(t-1))$ при $t \to 1$, откуда вытекает, что $y \sim -x/2$ при $t \to 1$.

Рассмотрим пять интервалов изменения переменной t: $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 3/2)$, $(3/2; 2)$, $(2; +\infty)$. На первом интервале значения x и y убывают от $+\infty$ до 0. Из а) следует, что

$$y \sim \frac{1}{8}(16x^2 + 4x + 1) \quad \text{при} \quad x \to +\infty$$

(это соответствует тому, что $t \to -\infty$), а из б) следует, что

$$x \sim y^{2/3}, \quad \text{или} \quad y \sim x^{3/2} \quad \text{при} \quad x \to +0$$

(это соответствует тому, что $t \to -0$). По этим данным и делаем набросок первой части кривой (рис. 21.7).

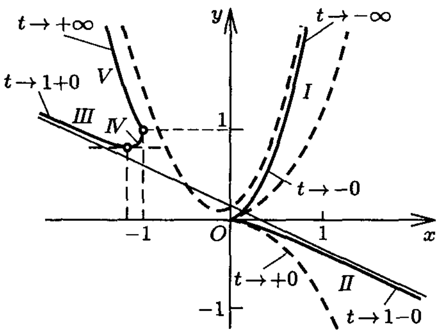

Рис. 21.7

На втором интервале значения x возрастают от 0 до $+\infty$, а значения y убывают от 0 до $-\infty$. При этом из б) и в) следует, что

$$x \sim \sqrt[3]{y^2},$$

а

$$y \sim -x^{3/2} \text{ при } x \to +0,$$

$$y \sim -x/2 \quad \text{при} \quad x \to +\infty$$

(это соответствует тому, что $t \to 1 - 0$). Выясним, имеет ли эта часть (говорят также: ветвь) кривой асимптоту при $x \to +\infty$. Находим, что

$$\lim_{t \to 1-0} \frac{y(t)}{x(t)} = -\frac{1}{2}, \quad \lim_{t \to 1-0} \left(y(t) + \frac{1}{2}\, x(t) \right) = \frac{1}{8}.$$

Следовательно, прямая

$$y = -x/2 + 1/8$$

— наклонная асимптота кривой. В соответствии с этими результатами изображена вторая часть кривой.

На интервале $(1;3/2)$ значения x возрастают от $-\infty$ до $x(3/2) = -9/8$, а значения y убывают от $+\infty$ до $27/32$. Из в) следует, что $y \sim -x/2$ при $x \to -\infty$ (это соответствует тому, что $t \to 1+0$). Как и в предыдущем случае, устанавливаем, что

$$y = -x/2 + 1/8$$

— асимптота этой части кривой при $x \to -\infty$ (см. рис. 21.7).

На интервале $(3/2;2)$ значения x возрастают от $-9/8$ до -1, а значения y возрастают от $27/32$ до $y(2) = 1$.

На интервале $(2;+\infty)$ значения x убывают от -1 до $-\infty$, а значения y возрастают от 1 до $+\infty$, причем согласно а) $y \sim (16x^2 + 4x + 1)/8$ при $x \to -\infty$.

На рис. 21.7 указано, каким значениям t соответствует та или иная часть кривой.

На каждом из рассмотренных интервалов функции $x(t)$ и $y(t)$ определяют функцию $y(x)$ (и функцию $x(y)$). Для уточнения рисунка кривой обратимся к производным этой функции.

Находим

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{t\left(t - \frac{3}{2}\right)}{t-2}, \quad y''_{xx} = \frac{4(t-1)^3(t-3)}{t(t-2)^3}$$

при $t \neq 1$, $t \neq 0$, $t \neq 2$. Рассматривая эти производные на введенных интервалах, устанавливаем, что часть I кривой является графиком возрастающей, выпуклой вниз функции ($y'_x > 0$, $y''_{xx} > 0$), часть II — график убывающей, выпуклой вверх функции ($y'_x < 0$, $y''_{xx} < 0$), часть III — график убывающей, выпуклой вниз функции ($y'_x < 0$, $y''_{xx} > 0$), часть IV — график возрастающей, выпуклой вниз функции ($y'_x > 0$, $y''_{xx} > 0$), часть V — график убывающей функции ($y'_x < 0$). В последнем случае кривая имеет точку перегиба при $t = 3$, $x = x(3) = -9/8$, $y = y(3) = 27/16$. Кривая выпукла вверх при $x \in (-9/8; -1)$ и выпукла вниз при $x \in (-\infty; -9/8)$.

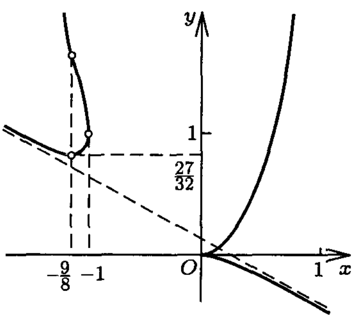

Рис. 21.8

Отметим еще, что $\lim\limits_{x \to +0} y'_x = 0$ и для первой, и для второй частей кривой (соответственно $t \to -0$, $t \to +0$), кроме того, $y'_x\big|_{x=-9/8} = y'_x\big|_{t=3/2} = 0$, т. е. касательные к кривой в начале координат и в точке $(-9/8; 27/32)$ горизонтальны. В точке $(-1;1)$ касательная к кривой вертикальна, так как $\lim\limits_{x \to -1} y'_x = \lim\limits_{t \to 2} y'_x = \infty$.

С учетом этих новых сведений делаем более точный рисунок кривой (рис. 21.8).

Пример 7. Построить график уравнения

$$x^3 + y^3 = 3xy \text{ (декартов лист).} \tag{7}$$

▲ В примере 5 § 11 (рис 11.14–11.16) уже было проведено предварительное исследование этой кривой, являющейся в полярных координатах ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$) графиком функции

$$r = \frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}. \tag{8}$$

Дополним это исследование, определив экстремумы и направления выпуклости и дав тем самым обоснование рис. 11.16.

Если $\cos\varphi = 0$, то из (8) следует, что и $r = 0$, т. е. получаем точку $x = y = 0$. При $\cos\varphi \neq 0$, полагая $t = \operatorname{tg}\varphi$, придем к параметрическому заданию кривой

$$x = \frac{3t}{t^3+1}, \quad y = \frac{3t^2}{t^3+1}. \tag{9}$$

Из (9) и из того, что

$$x'_t = \frac{3(1-2t^3)}{(t^3+1)^2}, \tag{10}$$

следует, что функция $x(t)$ строго возрастает на $(-\infty; -1)$ от 0 до $+\infty$ и на $(-1; 1/\sqrt[3]{2})$ от $-\infty$ до $\sqrt[3]{4}$ и строго убывает на $(1/\sqrt[3]{2}; +\infty)$

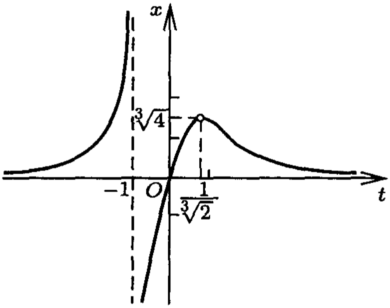

Рис. 21 9

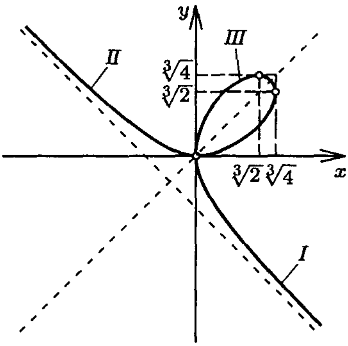

Рис. 21.10

от $\sqrt[3]{4}$ до 0 (рис. 21.9). На каждом из этих интервалов функция $x(t)$ имеет обратную, и, следовательно, функции $x(t)$ и $y(t)$ определяют функцию $y(x)$ при $x \in (0; +\infty)$ (часть I кривой, рис. 21.10), при $x \in (-\infty; \sqrt[3]{4})$ (часть II кривой), при $x \in (0; \sqrt[3]{4})$ (часть III). Находим

$$y'_t = \frac{3t(2-t^3)}{(t^3+1)^2}$$

и

$$y'_x = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}, \tag{11}$$

а также

$$y''_{xx} = \frac{2(1+t^3)^4}{3(1-2t^3)^3}. \tag{12}$$

Из (11) и (12) следует, что $y'_x < 0$ при $t \in (-\infty; -1)$, т. е. $y(x)$ убывает при возрастании x от 0 до $+\infty$ (часть I кривой), а так как $y''_{xx} > 0$, то кривая выпукла вниз и, следовательно, подходит к асимптоте сверху. При $t \in (-1; 1/\sqrt[3]{2})$ функция $y(x)$ имеет минимум при $t=0$, т. е. $x=0$; при возрастании x от $-\infty$ до $x\big|_{t=1/\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{4}$ значения $y(x)$ сначала убывают от $+\infty$ до 0 (при $x = 0$), а затем возрастают от 0 до $y\big|_{t=1/\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{2}$. При этом $y''_{xx} > 0$, кривая выпукла вниз и при $x \to -\infty$ подходит к асимптоте сверху. Поскольку $\lim\limits_{t \to 1/\sqrt[3]{2}-0} y'_x = +\infty$ и $\lim\limits_{t \to 1/\sqrt[3]{2}+0} y'_x = -\infty$, касательная к кривой в точке $x = \sqrt[3]{4}$, $y = \sqrt[3]{2}$ (соответствует $t = 1/\sqrt[3]{2}$) вертикальна.

На третьем интервале $t \in (1/\sqrt[3]{2}; +\infty)$ функция $y(x)$ имеет максимум при $t = \sqrt[3]{2}$, а $x\big|_{t=\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{2}$. Этот максимум равен $y\big|_{t=\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{4}$. Поскольку $y''_{xx} < 0$, кривая выпукла вверх. Если $x \to +0$, что соответствует тому, что $t \to +\infty$, то $y'_x \to +\infty$, т. е. в точку $(0; 0)$ кривая “входит” с вертикальной касательной.

Таким образом, получено полное обоснование рис. 21.10 и найдены две дополнительные точки $(\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{2})$ и $(\sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{4})$ с вертикальной и горизонтальной касательными. ▲

ЗАДАЧИ

1. Привести пример такой дифференцируемой функции $y = f(x)$, $x \in (0; +\infty)$, что:

1) ее график имеет асимптоту при $x \to +\infty$, но $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$ не существует;

2) ее график не имеет асимптоты при $x \to +\infty$, но $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$ существует.

2. График функции $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту при $x \to \to +\infty$. Доказать, что если $f''(x) > 0$ при $x \geqslant x_0$, то график приближается к этой асимптоте сверху, а если $f''(x) < 0$, то график приближается к асимптоте снизу.

Построить график функции (3–20).

3. 1) $y = x^3 - 3x^2 + 4$; 2) $y = -x^3 + 4x - 3$; 3) $y = (x-1)^2(x+2)$; 4) $y = \dfrac{x^2}{4} - 3x + 4$; 5) $y = x(x-1)^3$; 6) $y = (x+2)^2(x-1)^2$; 7) $y = (x-1)^3(x+1)^2$; 8) $y = 32x^2(x^2-1)^3$.

4. 1) $y = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 - 2x + 1}$; 2) $y = \dfrac{4 + x - 2x^2}{(x-2)^2}$; 3) $y = \dfrac{20x^2}{(x-1)^3}$;

4) $y = \dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$; 5) $y = \dfrac{x^3}{x-1}$; 6) $y = \dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x}$;

7) $y = \dfrac{1+x^2}{1+(x-2)^2}$; 8) $y = \dfrac{5x^2+42x+77}{x^2+7x+14}$.

5. 1) $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$; 2) $y = \dfrac{(x-1)^3}{(x-2)^2}$; 3) $y = \dfrac{(x-5)^3}{(x-7)^2}$;

4) $y = \dfrac{x^3+2x^2}{(x-1)^2}$; 5) $y = x + \dfrac{7}{x} - \dfrac{3}{x^2}$; 6) $y = (x+1)\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^2$.

6. 1) $y = \dfrac{x^4}{x^3+2}$; 2) $y = \dfrac{x^4}{(x+1)^3}$; 3) $y = 3x + \dfrac{6}{x} - \dfrac{1}{x^3}$;

4) $y = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^4$; 5) $y = \dfrac{x^5}{(x^2-1)^2}$; 6) $y = \dfrac{(x-1)^5}{(x-2)^4}$;

7) $y = \dfrac{x^5-8}{x^4}$; 8) $y = \dfrac{x^5}{x^4-1}$.

7. 1) $y = x + \sqrt{x^2-1}$; 2) $y = x - \sqrt{x^2-2x}$;

3) $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$; 4) $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2}$;

5) $y = \sqrt{x^2+1} - 2\sqrt{x+1}$; 6) $y = \sqrt{(2x+1)^3/3} + 4\sqrt{x}$.

8. 1) $y = \sqrt{2x^3+9x^2}$; 2) $y = \sqrt{x^2-x^3}$; 3) $y = \sqrt{x^3-3x}$;

4) $y = x^2\sqrt{x+1}$; 5) $y = x(x+1)^{3/2}$; 6) $y = \sqrt[4]{x^4-4x^3}$.

9. 1) $y = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}$; 2) $y = \dfrac{x+8}{\sqrt{x^2+4x+16}}$; 3) $y = \dfrac{8x}{\sqrt{x^2-4}}$;

4) $y = \dfrac{\sqrt{4x^2-1}}{x}$; 5) $y = \dfrac{\sqrt{x^2-4x}}{2-x}$; 6) $y = \dfrac{x^2\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1}$;

7) $y = \dfrac{3x-2}{\sqrt{x^2-1}}$; 8) $y = \sqrt{\dfrac{(x+6)^2}{x^2-4}}$; 9) $y = 4\sqrt{\dfrac{(x-1)^2}{x^3}}$;

10) $y = \sqrt{\dfrac{3x^2-4}{x^3}}$; 11) $y = \sqrt{\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{2}{3x}}$; 12) $y = \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$;

13) $y = \dfrac{4x}{\sqrt{x^2+1}} - \dfrac{x}{2}$.

10. 1) $y = \sqrt[3]{1-x^3}$; 2) $y = \sqrt[3]{x^2(3-x)}$; 3) $y = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$;

4) $y = \sqrt[3]{x^3-4x}$; 5) $y = x\sqrt[3]{(x-5)^2}$; 6) $y = (x+1)^3\sqrt[3]{(x-1)^2}$;

7) $y = (1+x)x^{2/3}$; 8) $y = x^3(x-1)^{2/3}$; 9) $y = (x^2-4)^{2/3}$;

10) $y = (x^2+8x+12)^{2/3}$; 11) $y = \sqrt[3]{x(3-x)^2} - x$;

12) $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2-4}$.

11. 1) $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$; 2) $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x+1}}$; 3) $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$;

4) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{1+x}}$; 5) $y = \sqrt[3]{\dfrac{(3x-2)^2}{x-1}}$; 6) $y = \sqrt[3]{\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^2}$;

7) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x+2}$; 8) $y = \dfrac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{x^2}$.

12. 1) $y = |x|\sqrt{1-x^2}$; 2) $y = x\sqrt{|x^2-1|}$; 3) $y = 4\dfrac{\sqrt{|x-1|}}{x-2}$;

4) $y = \sqrt{|3x^2 - x^3|}$; 5) $y = (x+1)\sqrt{|x^2-1|}$; 6) $y = \dfrac{\sqrt{1+|x-2|}}{1+|x|}$;

7) $y = (x^2-1)\sqrt{x+1}$; 8) $y = \dfrac{\sqrt{|x|-1}}{x-2}$; 9) $y = |x|\sqrt[3]{1+3x}$;

10) $y = \sqrt[3]{x^2|2-x|}$.

13. 1) $y = e^x - x$; 2) $y = xe^{-2x}$; 3) $y = x^2e^{-x}$; 4) $y = x^3e^{-x}$;

5) $y = (x^2-2)e^{-2x}$; 6) $y = (1-x)e^{3x+1}$; 7) $y = e^{1-x^2}$;

8) $y = e^{4x-x^2}$; 9) $y = xe^{-x^2/2}$; 10) $y = (x^2+2)e^{-x^2}$; 11) $y = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$.

14. 1) $y = e^{(1-x)/(1+x)}$; 2) $y = x^2e^{1/x}$; 3) $y = (x-2)e^{-1/x}$;

4) $y = \dfrac{x^2+2x-3}{x}\,e^{1/x}$; 5) $y = xe^{1/x^2}$.

15. 1) $y = \ln x - x + 1$; 2) $y = \dfrac{\ln x}{x}$; 3) $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$; 4) $y = x^2\ln x$;

5) $y = x\ln^2 x$; 6) $y = \dfrac{\ln^2 x}{x}$; 7) $y = \dfrac{x}{\ln x}$; 8) $y = \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| + \dfrac{6}{x+1}$;

9) $y = x^2 - 2\ln x$.

16. 1) $y = \cos x + \dfrac{1}{2}\sin 2x$; 2) $y = \sin x + \dfrac{1}{2}\sin 2x$;

3) $y = \sin x - \sin^2 x$; 4) $y = \cos x - \dfrac{1}{2}\cos 2x$; 5) $y = \cos 3x + 3\cos x$.

17. 1) $y = \sin x \sin 3x$; 2) $y = \cos x \cos 2x$;

3) $y = \sin x + \dfrac{1}{2}\sin 2x + \dfrac{1}{3}\sin 3x$.

18. 1) $y = \dfrac{\cos 2x}{\cos x}$; 2) $y = \dfrac{\sin(x-\pi/4)}{\sin x}$; 3) $y = 2x - \operatorname{tg} x$.

19. 1) $y = \dfrac{x}{2} - \operatorname{arctg} x$; 2) $y = \dfrac{1}{\operatorname{arcctg} x}$; 3) $y = x\operatorname{arctg} x$;

4) $y = \dfrac{x}{2} + 2\operatorname{arcctg} x$; 5) $y = \dfrac{3}{2}x - \arccos\dfrac{1}{x}$; 6) $y = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$;

7) $y = \arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$; 8) $y = \dfrac{x}{2} - \arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$.

20. 1) $y = e^{\cos x}$; 2) $y = e^{-\operatorname{arctg} x}$; 3) $y = \sin x - \ln\sin x$;

4) $y = x^x$; 5) $y = (1+x)^{1/x}$; 6) $y = (1+1/x)^x$.

21. Построить графики функций без исследования выпуклости:

1) $y = x^{1/x}$; 2) $y = x(1+1/x)^x$, $x > 0$; 3) $y = \cos^3 x + \sin^3 x$;

4) $y = \sin 5x - 5\sin x$; 5) $y = \dfrac{\sin^2 x}{2-\sin x}$;

6) $y = \cos x + \dfrac{\cos 2x}{2} + \dfrac{\cos 3x}{3}$; 7) $y = 2\ln x - 5\,\mathrm{arctg}\, x$;

8) $y = \dfrac{1}{1+x^2}\, e^{1/(1-x^2)}$; 9) $y = \dfrac{x^2}{x^2-4}\, e^{1/x}$.

22. Построить график функции $y = f(x)$, заданной параметрическими уравнениями:

1) $x = t^3 + 3t + 1$, $y = t^3 - 3t + 1$; 2) $x = t^3 - 3\pi$, $y = t^3 - 6\,\mathrm{arctg}\, t$;

3) $x = \dfrac{t^3}{1+t^2}$, $y = \dfrac{t^3 - 2t^2}{1+t^2}$; 4) $x = \ln\sin(t/2)$, $y = \ln\sin t$;

5) $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ (*циклоида*);

6) $x = \cos t + \ln\,\mathrm{tg}\,(t/2)$, $y = \sin t$ (*трактриса*).

Построить кривую (23–25).

23. 1) $x = t^3 + 2t^2 + t$, $y = -2 + 3t - t^3$;

2) $x = (t-1)^2(t-2)$, $y = (t-1)^2(t-3)$;

3) $x = \dfrac{1}{t(t+1)}$, $y = \dfrac{(t+1)^2}{t}$; 4) $x = \dfrac{t^2}{t-1}$, $y = \dfrac{t^2-1}{t}$;

5) $x = \dfrac{(t+1)^2}{t}$, $y = \dfrac{t+1}{t+2}$; 6) $x = \dfrac{t^2}{t^2-1}$, $y = \dfrac{t^2+1}{t+2}$;

7) $x = \dfrac{t^2+1}{t}$, $y = \dfrac{t^3+1}{t^2}$.

24. 1) $x = \dfrac{t^2+6t+5}{3}$, $y = \dfrac{t^3-54}{2t}$; 2) $x = \dfrac{t^2}{1-2t}$, $y = \dfrac{t^3}{1-2t}$;

3) $x = \dfrac{t^2}{1+t^3}$, $y = \dfrac{t^3}{1+t^3}$; 4) $x = t^3 - 3t$, $y = \left(\dfrac{t-1}{t}\right)^2$;

5) $x = \dfrac{1}{t-t^2}$, $y = \dfrac{1}{t-t^3}$; 6) $x = \dfrac{1}{t^3-t^2}$, $y = \dfrac{1}{t^2-t}$;

7) $x = \dfrac{1}{t-t^5}$, $y = \dfrac{t^4}{1-t^4}$; 8) $x = \sqrt{2}\,\dfrac{t+t^3}{1+t^4}$, $y = \sqrt{2}\,\dfrac{t-t^3}{1+t^4}$.

25. 1) $x = e^t - t$, $y = e^{2t} - 2t$; 2) $x = te^t$, $y = te^{-t}$;

3) $x = (t^3 - 2t^2 + 3t - 4)e^t$, $y = (t^3 - 2t^2 + 4t - 4)e^t$;

4) $x = e^t/t$, $y = (t-1)^2 e^t$; 5) $x = e^t/(t+1)$, $y = e^{-t}/(t+1)x$;

6) $x = 2t + \ln|t-1|$, $y = t + \ln|t-1|$; 7) $x = t\ln t$, $y = \dfrac{\ln t}{t}$;

8) $x = 2t^2$, $y = \dfrac{t^2}{2} - 3\ln\left|\dfrac{t-1}{t+1}\right|$;

9) $x = \dfrac{\sin t + \cos t}{\sin t}$, $y = \dfrac{\cos 2t}{\sin t}$;

10) $x = \mathrm{ctg}\, 2t$, $y = \dfrac{2\cos 2t - 1}{2\cos t}$;

11) $x = 2\cos t - \cos 2t$, $y = 2\sin t - \sin 2t$;

12) $x = 2\cos 2t$, $y = 2\cos 3t$; 13) $x = \sin 2t$, $y = \sin 3t$;

14) $x = \cos t + t\sin t$, $y = \sin t - t\cos t$, $t \geqslant 0$;

15) $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$.

Построить кривую (26, 27).

26. 1) $x^3 - y^3 = 1$; 2) $x^4 + y^4 = 1$; 3) $y^2(1-x) = x^2(1+x)$; 4) $3y^2x = x^3 - 2$; 5) $y^2 = 2x^3 - x^4$; 6) $y^2 = 9(x^4 - x^6)$; 7) $y^2x^2 = 4(x-1)$; 8) $y^2(2-x) = x^3$; 9) $y^2x^4 = (x^2-1)^3$; 10) $y^2(x^2-1) = x^4 - 4x^2$; 11) $(x-1)(y^2 - x^2/3) = 4x^2/3$.

27. 1) $(x-y+1)(x+y-1) = 1$; 2) $(x-2y)^2 + (4x+2y)^2 = 4$; 3) $x^2y^2 + y = 1$; 4) $xy^2 + x^2y = 1$; 5) $xy(x-y) + x + y = 0$; 6) $x^3 + y^3 = 6x^2$.

28. Кривую, данную как график уравнения, задать параметрически и построить ее:

1) $x^4 - y^4 = 4x^2y$; 2) $(x+y)^3 = xy$; 3) $(x+y)^4 = x^2 + y^2$; 4) $x^4 - 2x^2y^2 + y^3 = 0$; 5) $x^3 - y^3 + 2x - y = 0$; 6) $(x^2 - y^2)(x-y) = 1$; 7) $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$; 8) $x^{4/3} - y^{4/3} = 1$.

29. Построить кривую, перейдя к полярным координатам:

1) $(x^2+y^2)x = y$; 2) $(x^2+y^2)^2 = xy$; 3) $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$; 4) $x^4 + y^4 = 2xy$; 5) $x^4 - y^4 = xy$; 6) $x^4 - y^4 = x^2 - 2y^2$; 7) $(x^2 + y^2 - 2x)^2 = x^2 + y^2$; 8) $(x^2 + y^2 - x)^2 = 4(x^2 + y^2)$.

30. Построить кривую:

1) $x^4 + y^4 - 6y^3 + 8x^2y = 0$; 2) $(x^2+y^2)^3 = 27x^2y^2$; 3) $x^4 + 2y^3 = 4x^2y$; 4) $(x^2 - y^2)(x-y) = 4x^2$; 5) $x^2y^2 + y^4 = 4x^2$; 6) $x^3 + y^3 = x^2 + y^2$; 7) $x^2y^2 = x^3 - y^3$; 8) $x^y = y^x$.

31. Построить график функции в полярных координатах:

1) $r = |\sin 2\varphi|$; 2) $r = \cos 3\varphi$; 3) $r = \operatorname{tg} 2\varphi$; 4) $r = 1/\sqrt{\sin 3\varphi}$; 5) $r = 2 + \cos\varphi$; 6) $r = 1 + \cos\varphi$; 7) $r = 1 + 2\cos\varphi$; 8) $r = 1 - 2\cos\varphi$; 9) $r = (2/\cos\varphi) - 1$; 10) $r = 1 + \operatorname{tg}\varphi$.

ОТВЕТЫ

3. 1) Точки пересечения с осями координат: $(-1;0)$, $(2;0)$, $(0;4)$; минимум $y=0$ при $x=2$, максимум $y=4$ при $x=0$; точка перегиба $(1;2)$;

2) точки пересечения с осями координат: $(1;0)$, $((-1\pm\sqrt{13})/2;0)$, $(0;-3)$; минимум $y = -16\sqrt{3}/9 - 3$ при $x = -2\sqrt{3}/3$, максимум $y = 16\sqrt{3}/9 - 3$ при $x = 2\sqrt{3}/3$; точка перегиба $(0;-3)$;

3) точки пересечения с осями координат: $(1;0)$, $(-2;0)$, $(0;2)$; минимум $y=0$ при $x=1$, максимум $y=4$ при $x=-1$; точка перегиба $(0;2)$;

4) точки пересечения с осями координат: $(2;0)$, $(-4;0)$, $(0;4)$; минимум $y=0$ при $x=2$, максимум $y=8$ при $x=-2$; точка перегиба $(0;4)$;

5) точки пересечения с осями координат: $(0;0)$, $(1;0)$; минимум $y = -27/256$ при $x = 1/4$; точки перегиба $(1/2;-1/16)$, $(1;0)$;

6) точки пересечения с осями координат: $(-2;0)$, $(1;0)$, $(0;4)$; минимумы $y=0$ при $x=-2$ и $x=1$, максимум $y=81/16$ при $x=-1/2$; точки перегиба $(0;4)$, $(-1;4)$;

7) точки пересечения с осями координат: $(-1;0)$, $(1;0)$, $(0;-1)$; максимум $y=0$ при $x=-1$, минимум $y=-864/3125$ при $x=-1/5$; точки перегиба функции $x=1$, $x=(\sqrt{34}-2)/10\approx 0{,}4$, $x=-(\sqrt{34}+$ $+2)/10\approx -0{,}8$;

8) график симметричен относительно оси ординат; точки пересечения с осями координат: $(0;0)$, $(\pm 1;0)$; минимумы $y=-27/8$ при $x=\pm 1/2$, максимум $y=0$ при $x=0$; точки перегиба функции

$$x=\pm 1,\quad x=\pm\sqrt{(17+\sqrt{177})/56}\approx \pm 0{,}7,$$

$$x=\pm\sqrt{(17-\sqrt{177})/56}\approx \pm 0{,}3.$$

4. 1) Область определения: вся числовая ось, кроме $x=1$; точки пересечения с осями координат $((\pm\sqrt{5}-1)/2;0)$, $(0;-1)$; асимптоты $y=1$ и $x=1$; минимум $y=-5/4$ при $x=1/3$; точка перегиба $(0;-1)$;

2) область определения: $x\neq 2$; точки пересечения с осями координат $((1+\sqrt{33})/4;0)$, $(0;1)$; асимптоты $y=-2$ и $x=2$; максимум $y=33/8$ при $x=10/7$; точка перегиба $(8/7;31/9)$;

3) область определения: $x\neq 1$; точка пересечения с осями координат $(0;0)$; асимптоты $y=0$ и $x=1$; максимум $y=0$ при $x=0$, минимум $y=-80/27$ при $x=-2$; точка перегиба функции $x=-2\pm\sqrt{3}$;

4) область определения: $x\neq -1$; точки пересечения с осями координат $(1;0)$, $(0;1)$; асимптоты $y=0$ и $x=-1$; минимум $y=0$ при $x=1$, максимум $y=2/27$ при $x=5$; точки перегиба функции $x=5\pm 2\sqrt{3}$;

5) область определения: $x\neq 1$; точка пересечения с осями координат $(0;0)$; асимптота $x=1$; максимум $y=27/4$ при $x=3/2$; точка перегиба $(0;0)$;

6) область определения: $x\neq 0$; точки пересечения с осями координат $(2;0)$, $(\pm 1;0)$; асимптота $x=0$; минимум $(y\approx -0{,}3$ при $x\approx 1{,}5$; точка перегиба функции $x=-\sqrt[3]{2}$;

7) точка пересечения с осью ординат $(0;0{,}2)$; асимптота $y=1$; минимум $y=3-2\sqrt{2}$ при $x=1-\sqrt{2}$, максимум $y=3+2\sqrt{2}$ при $x=1+\sqrt{2}$; точки перегиба $(-\sqrt{3};2-\sqrt{3})$, $(\sqrt{3};2+\sqrt{3})$, $(3;5)$;

8) точки пересечения с осями координат: $(0;5{,}5)$, $((-21\pm$ $\pm 2\sqrt{14})/5;0)$; асимптота $y=5$; минимум $y=-4\sqrt{2}$ при $x=-1-$ $-2\sqrt{2}$, максимум $y=4\sqrt{2}$ при $x=2\sqrt{2}-1$; точки перегиба $(-3;-2)$, $(\pm\sqrt{21};1\pm\sqrt{21})$.

5. 1) Область определения: $x\neq\pm 1$; график симметричен относительно начала координат; точка пересечения с осями координат $(0;0)$; асимптоты $y=x$, $x=\pm 1$; минимум $y=3\sqrt{3}/2$ при $x=\sqrt{3}$, максимум $y = -3\sqrt{3}/2$ при $x = -\sqrt{3}$; точка перегиба $(0;0)$;

2) область определения: $x \neq 2$; точки пересечения с осями координат: $(1;0)$, $(0;-1/4)$; минимум $y = 27/4$ при $x = 4$; асимптоты $y = x+1$, $x = 2$; точка перегиба $(1;0)$;

3) область определения: $x \neq 7$; точки пересечения с осями координат $(5;0)$, $(0;-125/49)$; асимптоты $y = x-1$, $x = 7$; минимум $y = 13{,}5$ при $x = 11$; точка перегиба $(5;0)$;

4) область определения: $x \neq 1$; точки пересечения с осями координат $(0;0)$, $(-2;0)$; асимптоты $y = x+4$, $x = 1$; минимумы $y = 0$ при $x = 0$ и $y = 32/3$ при $x = 4$, максимум $y = 1/4$ при $x = -1$; точка перегиба $(-2/7;16/189)$;

5) область определения: $x \neq 0$; асимптоты ($y = x$ и $x = 0$; минимум $y = 19/4$ при $x = 2$, максимумы $y = 5$ при $x = 1$ и $y = -17/3$ при $x = -3$; точка перегиба $(9/7;929/189)$;

6) область определения: $x \neq 2$; точки пересечения с осями координат $(1;0)$, $(-1;0)$, $(0;1/4)$; асимптоты $y = x+3$, $x = 2$; максимум $y = 1/4$ при $x = 0$, минимумы $y = 0$ при $x = 1$ и $y = 32/3$ при $x = 5$; точка перегиба $(5/7;16/185)$.

6. 1) Область определения: $x \neq -\sqrt[3]{2}$; точка пересечения с осями $(0;0)$; асимптоты $y = x$, $x = -\sqrt[3]{2}$; минимум $y = 0$ при $x = 0$; максимум $y = -8/3$ при $x = -2$; точка перегиба $(\sqrt[3]{4};5\sqrt[3]{25}/3)$;

2) область определения: $x \neq -1$; точка пересечения с осями координат $(0;0)$; асимптоты $y = x-3$, $x = -1$; минимум $y = 0$ при $x = 0$, максимум $y = -256/27$ при $x = -4$;

3) область определения: $x \neq 0$; график симметричен относительно начала координат; точки пересечения с осями координат $x = \pm\sqrt{2/\sqrt{3}-1} \approx \pm 0,4$; асимптоты $y = 3x$, $x = 0$; точки перегиба $(1;8)$, $(-1;-8)$; функция возрастает всюду в области определения;

4) область определения: $x \neq 1$; точки пересечения с осями координат: $(-1;-0)$, $(0;1)$; асимптоты $y = 1$, $x = 1$; минимум $y = 0$ при $x = -1$; точка перегиба $(-4;81/625)$;

5) область определения: $x \neq \pm 1$; график симметричен относительно начала координат; точка пересечения с осями координат $(0;0)$; асимптоты $y = x$, $x = \pm 1$; минимум $y = 25\sqrt{5}/16$ при $x = \sqrt{5}$, максимум $y = -25\sqrt{5}/16$ при $x = -\sqrt{5}$; точка перегиба $(0;0)$;

6) область определения: $x \neq 2$; точки пересечения с осями координат $(1;0)$, $(0;-1/16)$; асимптоты $y = x+3$, $x = 2$; минимум $y = 5^5/4^4$ при $x = 6$; точка перегиба $(1;0)$;

7) область определения: $x \neq 0$; точка пересечения с осью абсцисс $(\sqrt[5]{8};0) \approx (1{,}52;0)$; асимптота $y = x$; минимум $y = -2{,}5$ при $x = -2$;

8) область определения: $x \neq \pm 1$; график симметричен относительно начала координат; точка пересечения с осями координат $(0;0)$; асимптота $y = x$; максимум $y = -5\sqrt[4]{5}/4 \approx -1{,}87$ при $x = -\sqrt[4]{5} \approx$

$\approx -1{,}49$, минимум $y = 5\sqrt[4]{5}/4 \approx 1{,}87$ при $x = \sqrt[4]{5} \approx 1{,}49$; точка перегиба $(0;\ 0)$.

7. 1) Область определения: $|x| \geqslant 1$; асимптоты $y = 2x$ при $x \to +\infty$ и $y = 0$ при $x \to -\infty$; функция убывает при $x \leqslant -1$ и возрастает при $x \geqslant 1$; выпукла вверх;

2) область определения: $x \leqslant 0$ и $x \geqslant 2$; точка пересечения с осями координат $(0;0)$; асимптоты $y = 1$ при $x \to +\infty$ и $y = 2x - 1$ при $x \to -\infty$; функция возрастает при $x \leqslant 0$ и убывает при $x \geqslant 2$; выпукла вниз;

3) область определения R; симметрия относительно оси ординат; точка пересечения с осью ординат $(0;2)$; минимумы $y = \sqrt[3]{4} \approx 1{,}6$ при $x = \pm 1$, максимум $y = 2$ при $x = 0$; функция выпукла вверх;

4) область определения R; симметрия относительно начала координат; точка пересечения с осями координат $(0;0)$; асимптота $y = 0$; максимум $y = \sqrt[3]{16} \approx 2{,}5$ при $x = 2$, минимум $y = -\sqrt[3]{16} \approx -2{,}5$ при $x = -2$; точка перегиба $(0;0)$;

5) область определения: $x \geqslant -1$; точки пересечения с осями координат $(0;-1)$, $(2 \pm \sqrt{7};0)$; минимум $y = -\sqrt{2}$ при $x = 1$; функция выпукла вниз;

6) область определения: $x \geqslant 0$; общая точка с осью ординат $(0;1/3)$; функция строго возрастающая; точка перегиба $x_0 = (\sqrt{5} + l)/2 \approx 1{,}62$, $y(x_0) \approx 8$.

8. 1) Область определения: $x \geqslant 9/2$, точки пересечения с осями координат $(0;0)$, $(-9/2;0)$; минимумы $y = 0$ при $x = 0$ и $x = -9/2$, максимум $y = 3\sqrt{3}$ при $x = -3$; функция выпукла вниз при $x > 0$ и выпукла вверх при $-9/2 < x < 0$; угловая точка $(0;0)$;

2) область определения: $x \leqslant 1$; точки пересечения с осями координат $(0;0)$ и $(1;0)$; максимум $y = 2/(3\sqrt{3}) \approx 0{,}38$ при $x = 2/3$, минимумы $y = 0$ при $x = 0$ и $x = 1$; $(0;0)$ — угловая точка; функция выпукла вниз при $x \leqslant 0$ и выпукла вверх при $0 \leqslant x \leqslant 1$;

3) область определения: $-\sqrt{3} \leqslant x \leqslant 0$ и $x \geqslant \sqrt{3}$; точки пересечения с осями $(0;0)$, $(\pm\sqrt{3};0)$; максимум $y = \sqrt{2}$ при $x = -1$; точка перегиба функции $x = \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}$;

4) область определения: $x \geqslant -1$; точки пересечения с осями координат $(-1;0)$ и $(0;0)$; минимумы $y = 0$ при $x = -1$ и $x = 0$, максимум $y = 16/(25\sqrt{5}) \approx 0{,}29$ при $x = -4/5$; точка перегиба функции $x = (\sqrt{5} - 5)/5 \approx -0{,}55$ $y = (6 - 2\sqrt{5})/5\sqrt[4]{5} \approx 0{,}21$;

5) область определения: $x \geqslant -1$; минимум $y \approx -6\sqrt{15}/125 \approx -0{,}19$ при $x = -2/5$; точка перегиба $(-4/5; -4/(25\sqrt{5}))$;

6) область определения: $x \leqslant 0$, $x \geqslant 4$; точки пересечения с осями координат $(0;0)$ и $(4;0)$; асимптоты $y = x - 1$ при $x \to +\infty$ и $y = 1 - x$ при $x \to -\infty$; функция убывает и выпукла вверх при $x \leqslant 0$, возрастает и выпукла вверх при $x \geqslant 4$.

9. 1) Область определения: R; точки пересечений с осями координат $(0;\sqrt{2})$ и $(-2;0)$; асимптоты $y=-1$ при $x\to-\infty$ и $y=1$ при $x\to+\infty$; максимум $y=\sqrt{3}$ при $x=1$; точки перегиба $(-0{,}5;1)$ и $(2;2\sqrt{6}/3)$;

2) область определения: R; точки пересечения с осями координат $(0;2)$ и $(-8;0)$; асимптоты: $y=-1$ при $x\to-\infty$ и $y=1$ при $x\to+\infty$; максимум $y=2$ при $x=0$; точки перегиба функции $x_1=-(1+\sqrt{33})/2\approx-3{,}4$ и $x_2=(\sqrt{33}-1)/2\approx2{,}4$, $y(x_1)\approx1{,}2$, $y(x_2)\approx1{,}9$;

3) область определения: $|x|>2$; симметрия относительно начала координат; асимптоты $y=8$, $x=\pm2$; функция строго убывающая на интервалах $(-\infty;-2)$ и $(2;+\infty)$;

4) область определения: $|x|\geqslant1/2$; симметрия относительно начала координат; точки пересечения с осями $(\pm1/2;0)$; асимптоты $y=2$ при $x\to+\infty$ и $y=-2$ при $x\to-\infty$; функция возрастающая;

5) область определения: $x\leqslant0$ и $x\geqslant4$; точки пересечения с осями координат $(0;0)$, $(4;0)$; асимптоты $y=-1$ при $x\to+\infty$ и $y=1$ при $x\to-\infty$; функция убывающая;

6) область определения: $|x|\geqslant1$; симметрия относительно оси ординат; точки пересечения с осями координат $(\pm1;0)$; асимптоты $y=x/2$ при $x\to+\infty$ и $y=-x/2$ при $x\to\infty$; убывает на интервале $(-\infty;-1)$ и возрастает на $(1;+\infty)$;

7) область определения: $|x|>1$; асимптоты: $y=3$ при $x\to+\infty$, $y=-3$ при $x\to-\infty$, $x=1$ при $x\to1+0$, $x=-1$ при $x\to-1-0$; минимум $y=\sqrt{5}$ при $x=3/2$; точка перегиба $(2;4/\sqrt{3})$;

8) область определения: $|x|>2$; асимптоты $y=1$ при $x\to\infty$, $x=-2$ и $x=2$ $(y\to+\infty)$; точка пересечения с осью абсцисс $(-6;0)$; минимум $y=0$ при $x=-6$; функция выпукла вверх при $x<-6$ и выпукла вниз при $-6<x<-2$ и $2<x$;

9) область определения: $x>0$; асимптоты $y=0$ при $x\to+\infty$, $x=0$ $(y\to+\infty)$; минимум $y=0$ при $x=1$, максимум $y=8/(3\sqrt{3})\approx1{,}5$ при $x=3$; точка перегиба функции $x=5$, $y(5)\approx1{,}4$, на $(0;1)$ и $(5;+\infty)$ функция выпукла вниз;

10) область определения: $-2/\sqrt{3}\leqslant x<0$, $x\geqslant2/\sqrt{3}$; асимптоты $y=0$ при $x\to+\infty$, $x=0$ $(y\to+\infty)$; минимум $y=0$ при $x=\pm2/\sqrt{3}\approx\pm1{,}2$, максимум $y=1$ при $x=2$; точки перегиба $x_1=-2\sqrt{11-2\sqrt{19}}/3\approx-1{,}0$, $x_2\approx2\sqrt{11+2\sqrt{19}}/3\approx3{,}0$, $y(x_1)\approx1{,}0$, $y(x_2)\approx0{,}9$, функция выпукла вверх на $(-2/\sqrt{3};x_1)$ и $(2/\sqrt{3};x_2)$;

11) область определения: $x<0$, $x\geqslant\sqrt[3]{2}$; точка пересечения с осью абсцисс $x=\sqrt[3]{2}$; асимптоты: $y=\sqrt{3}x/3$ при $x\to+\infty$, $y=-\sqrt{3}x/3$ при $x\to-\infty$, $x=0$ при $x\to-0$; минимум $y=1$ при $x=-1$;

12) область определения: $x\leqslant0$, $x>2$; асимптоты $y=-(x+1)/3$ при $x\to-\infty$, $y=(x+1)/3$ при $x\to+\infty$, $x=2$ $(y\to+\infty)$; минимумы $y=0$ при $x=0$ и $y=\sqrt{3}$ при $x=3$; функция выпукла вверх при

$x < 0$ и $x > 2$;

13) область определения: R; точка $(0;0)$ — центр симметрии; асимптоты $y = -(x+8)/2$ при $x \to -\infty$, $y = -(x-8)/2$ при $x \to +\infty$; точки пересечения с осями координат $(0;0)$, $(0;\pm 3\sqrt{7})$; минимум $y = -3\sqrt{3}/2$ при $x = -\sqrt{3}$, максимум $y = 3\sqrt{3}/2$ при $x = \sqrt{3}$; точка перегиба $(0;0)$, на $(0;+\infty)$ функция выпукла вверх.

10. 1) Область определения: R; точки пересечения с осями координат $(1,0)$, $(0;1)$; асимптота $y = -x$; функция убывающая; точки перегиба $(1;0)$, $(0;1)$;

2) область определения: R; точки пересечения с осями координат $(0;0)$, $(3;0)$; асимптота $y = 1 - x$; минимум $y = 0$ при $x = 0$, максимум $y = \sqrt[3]{4} \approx 1{,}6$ при $x = 2$; точка перегиба $(3;0)$;

3) область определения: R; точки пересечения с осями координат $(0;0)$, $(1;0)$; асимптота $y = x - 2/3$; минимум $y = 0$ при $x = 1$, максимум $y = \sqrt[3]{4}/3 \approx 0{,}5$ при $x = 1/3$; точка перегиба $(0;0)$;

4) область определения: R; симметрия относительно начала координат; точки пересечения с осями $(0;0)$, $(\pm 2;0)$; асимптота $y = x$; минимум $y = -2\sqrt[3]{2}/\sqrt{3} \approx -1{,}5$ при $x = 2/\sqrt{3}$, максимум $y = 2\sqrt[3]{2}/\sqrt{3} \approx$ $\approx 1{,}5$ при $x = -2/\sqrt{3}$; точки перегиба $(0;0)$, $(\pm 2;0)$;

5) область определения: R; точки пересечения с осями координат $(0;0)$, $(5;0)$; минимум $y = 0$ при $x = 5$, максимум $y = 3\sqrt[3]{4} \approx 4{,}8$ при $x = 3$; точка перегиба $(6;6)$;

6) область определения: R; точки пересечения с осями координат $(-1;0)$, $(1;0)$, $(0;1)$; минимум $y = 0$ при $x = 1$, максимум $y =$ $= \dfrac{2^4 3^6}{11^3}\sqrt[3]{\dfrac{2}{121}} \approx 2{,}2$ при $x = 7/11$; точки перегиба функции $x = -1$, $x = (7 + 3\sqrt{3})/11 \approx 1{,}1$, $x = (7 - 3\sqrt{3})/11 \approx 0{,}2$;

7) область определения: R; точки пересечения с осями координат $(0;0)$ и $(-1;0)$; минимум $y = 0$ при $x = 0$, максимум $y = 3\sqrt[3]{20}/25 \approx$ $\approx 0{,}3$ при $x = -2/5$; точка перегиба функции $x = (1/5)$, $y(1/5) = 0{,}4$, функция выпукла вверх на $(-\infty;0)$ и $(0;1/5)$;

8) область определения: R; точки пересечения с осями координат $(0;0)$ и $(1;0)$; минимум $y = 0$ при $x = 1$, максимум $y = 9\sqrt[3]{44}/11^4 \approx 0{,}2$ при $x = 9/11$; точки перегиба функции $x_1 = 0$, $x_2 = (27 - 3\sqrt{37})/44 \approx$ $\approx 0{,}2$, $x_3 = (27 + 3\sqrt{37})/44 \approx 1{,}03$, функция выпукла вверх на $(-\infty;0)$, $(x_2;1)$, $(1;x_3)$;

9) область определения: R; ось ординат — ось симметрии; точки пересечения с осями координат $(\pm 2;0)$, $(0;2\sqrt[3]{2})$; минимумы $y = 0$ при $x = \pm 2$, максимум $y = 2\sqrt[3]{2} \approx 2{,}5$ при $x = 0$; точки перегиба функции $x_1 = -x_2 = -2\sqrt{3}$, $y(x_1) = y(x_2) = 4$, функция выпукла вверх на $(x_1;-2)$, $(-2;2)$ и $(2;x_2)$;

10) область определения: R; прямая $x = -4$ — ось симметрии; точки пересечения с осями координат $(-6;0)$, $(-2;0)$, $(0;2\sqrt[3]{18})$; ми-

нимумы $y = 0$ при $x = -6$, $x = -2$, максимум $y = 2\sqrt[3]{2} \approx 2{,}5$ при $x = -4$; точки перегиба функции $x_{1,2} = -4 \mp 2\sqrt{3}$, $y(x_1) = y(x_2) = 4$, функция выпукла вверх на $(x_1; -6)$, $(-6; -2)$, $(-2; x_2)$;

11) область определения: R; асимптота $y = -2$ при $x \to \infty$; точки пересечения с осями координат $(0; 0)$, $(3/2; 0)$; минимум $y = -3$ при $x = 3$, максимум $y = 1$ при $x = 1/3$; точка перегиба $(0; 0)$, функция выпукла вверх на $(0; 3)$, $(3; +\infty)$;

12) область определения: R; ось ординат — ось симметрии; асимптота $y = 0$ при $x \to \infty$; точка пересечения с осью ординат $(0; \sqrt[3]{4})$; минимум $y = \sqrt[3]{4} \approx 1{,}6$ при $x = 0$, максимумы $y = 2\sqrt[3]{2} \approx 2{,}5$ при $x = \pm\sqrt{2}$; точки перегиба $(\pm 2; \sqrt[3]{4})$, на $(-2; 0)$ и $(0; 2)$ функция выпукла вверх, на $(-\infty; -2)$ и $(2; +\infty)$ — вниз; в точках $(0; \sqrt[3]{4})$, $(\pm 2; \sqrt[3]{4})$ касательные вертикальны.

11. 1) Область определения: $x \neq \pm 1$; симметрия относительно начала координат; точка пересечения с осями $(0; 0)$; асимптоты $x = \pm 1$; минимум $y = \sqrt{3}/\sqrt[3]{2} \approx 1{,}4$ при $x = \sqrt{3}$, максимум $y = -\sqrt{3}/\sqrt[3]{2} \approx -1{,}4$ при $x = -\sqrt{3}$; точки перегиба $(0; 0)$, $(3; 3/2)$, $(-3; -3/2)$;

2) область определения: $x \neq -1$; точка пересечения с осями координат $(0; 0)$; асимптота $x = -1$; минимум $y = 3\sqrt[3]{2}/2 \approx 1{,}9$ при $x = -3/2$; точка перегиба $(-3; 3\sqrt[3]{4}/2)$;

3) область определения: $x \neq 2$; точка пересечения с осями координат $(0; 0)$; асимптота $x = 2$; минимум $y = 3/\sqrt[3]{2} \approx 2{,}4$ при $x = 6$; точка перегиба $(12; 12/\sqrt[3]{100})$;

4) область определения: $x \neq -1$; точка пересечения с осями координат $(0; 0)$; асимптота $x = -1$; минимум $y = 0$ при $x = 0$, максимум $y = -\sqrt[3]{4} \approx -1{,}6$ при $x = -2$; точки перегиба функции $x = \sqrt{3} - 2 \approx -0{,}3$, $x = -\sqrt{3} - 2 \approx -3{,}7$;

5) область определения: $x \neq 1$, точки пересечения с осями координат $(2/3; 0)$, $(0; -\sqrt[3]{4})$, асимптота $x = 1$, минимум $y = \sqrt[3]{12} \approx 2{,}3$ при $x = 4/3$, максимум $y = 0$ при $x = 2/3$, точки перегиба функции $x = (4 \pm \sqrt{3})/3$;

6) область определения: $x \neq -2$; точки пересечения с осями координат $(-1; 0)$, $(0; 1/\sqrt[3]{4})$; асимптоты $y = 1$, $x = -2$; минимум $y = 0$ при $x = -1$; точка перегиба $(-7/6; 1/\sqrt[3]{25})$;

7) область определения: $x \neq -2$; асимптоты $y = 0$ при $x \to \infty$, $x = -2$; точка пересечения с осями координат $(0; 0)$; минимум $y = 0$ при $x = 0$, максимум $y = \sqrt[3]{2}/3$ при $x = 4$; точки перегиба $x_1 = 4 - 3\sqrt{2} \approx -0{,}2$, $x_2 = 4 + 3\sqrt{2} \approx 8{,}2$, $y(x_1) \approx 0{,}2$, $y(x_2) \approx 0{,}4$, функция выпукла вверх на $(-\infty; -2)$, $(x_1, 0)$, $(0; x_2)$;

8) область определения: $x \neq 0$; асимптоты $y = 0$ при $x \to \infty$, $x = 0$; точка пересечения с осью абсцисс $(-1; 0)$; минимум $y = 0$ при $x = -1$, максимум $y = \sqrt[3]{16}/9 \approx 0{,}3$ при $x = -1{,}5$; точки перегиба

$x_1 = -(21+3\sqrt{7})/14 \approx -2{,}1$, $x_2 = -(21-3\sqrt{7})/14 \approx -0{,}9$, $y(x_1) \approx 0{,}2$, $y(x_2) \approx 0{,}1$, функция выпукла вверх на $(x_1; -1)$, $(-1; x_2)$.

12. 1) Область определения: $|x| \leqslant 1$; симметрия относительно оси ординат; точки пересечения с осями $(-1;0)$, $(0;0)$, $(1;0)$; минимум $y=0$ при $x=0$, максимумы $y=1/2$ при $x=\pm\sqrt{2}/2$;

2) область определения: R; симметрия относительно начала координат; точки пересечения с осями $(0;0)$, $(\pm 1;0)$; максимумы $y=0$ при $x=-1$ и $y=1/2$ при $x=\sqrt{2}/2$, минимумы $y=0$ при $x=1$ и $y=-1/2$ при $x=-\sqrt{2}/2$; точки перегиба $(0;0)$, $(\sqrt{3}/2;\sqrt{3}/2)$, $(-\sqrt{3}/2;-\sqrt{3}/2)$;

3) область определения: $x \neq 2$; асимптоты $y=0$ при $x\to\infty$, $x=2$; точки пересечения с осями координат $(0;-2)$, $(1;0)$; максимум $y=0$ при $x=1$, минимум $y=-2$ при $x=0$; точки перегиба функции $x_1 = -x_2 = -2\sqrt{3}/3$, $y(x_1)=y(x_2) = -\sqrt{2\sqrt{3}} \approx -1{,}9$, функция выпукла вниз на $(x_1;1)$, $(1;x_2)$, $(2;+\infty)$;

4) область определения: R; точки пересечения с осями координат $(0;0)$, $(3;0)$; минимумы $y=0$ при $x=0$ и $x=3$, максимум $y=2$ при $x=2$; точка перегиба $(4;4)$, на $(-\infty;0)$ и $(4;+\infty)$ функция выпукла вниз, на $(0;3)$ и $(3;4)$ — вверх;

5) область определения: R; точки пересечения с осями координат $(-1;0)$, $(0;1)$, $(1;0)$; максимум $y=3\sqrt{3}/4 \approx 1{,}3$ при $x=0{,}5$, минимум $y=0$ при $x=1$; точки перегиба функции $x_1=-1$, $x_2=(1-\sqrt{3})/2 \approx -0{,}4$, $x_3=(1+\sqrt{3})/2 \approx 1{,}4$, $y(x_1)=0$, $y(x_2)\approx 1{,}2$, $y(x_3)\approx 2{,}2$, функция выпукла вверх на $(-\infty;-1)$, $(x_2;1)$, $(1;x_3)$;

6) область определения: R; асимптота $y=0$; точка пересечения с осью ординат $(0;\sqrt{3})$; максимумы $y=\sqrt{3}$ при $x=0$ и $y=\sqrt{2}/4$ при $x=3$, минимум $y=1/3$ при $x=2$; точка перегиба функции $x_0=(9+4\sqrt{3})/3 \approx 5{,}3$, $y(x_0)=\sqrt[4]{3}/4 > 0{,}3$, функция выпукла вниз на $(-\infty;0)$, $(0;2)$, $(x_0;+\infty)$;

7) область определения: R; точки пересечения с осями координат $(\pm 1;0)$, $(0;-1)$; минимум $y=-(24/25)\sqrt{6/5} \approx -1{,}1$ при $x=1/5$; точки перегиба $(-1;0)$, $(-3/5;-(16/25)\sqrt{2/5})$;

8) область определения: $|x| \geqslant 1$; точки пересечения с осями $(\pm 1;0)$; асимптоты $y=0$, $x=2$; минимум $y=-\sqrt{3}/6$ при $x=-4$; точки перегиба функции $x=2/\sqrt{3}$, $x=-4-2\sqrt{3}$;

9) область определения: R; точки пересечения с осями координат $(0;0)$, $(-1/3;0)$; минимум $y=0$ при $x=0$, максимум $y=\sqrt[3]{2}/8$ при $x=-1/4$; точки перегиба $(-1/3;0)$, $(-1/2;-1/(2\sqrt[3]{2}))$;

10) область определения: R; точки пересечения с осями $(0;0)$, $(2;0)$; асимптоты $y=x-2/3$ при $x\to+\infty$, $y=-x+2/3$ при $x\to-\infty$; минимумы $y=0$ при $x=0$ и $x=2$, максимум $y=2\sqrt[3]{4}/3$ при $x=4/3$; функция выпукла вверх.

13. 1) Асимптота $y = -x$ при $x \to -\infty$; минимум $y = 1$ при $x = 0$; функция выпукла вниз;

2) точка пересечения с осями координат $(0; 0)$; асимптота $y = 0$ при $x \to +\infty$, максимум $y = 1/(2e) \approx 0{,}2$ при $x = 0{,}5$; точка перегиба $(1; e^{-2})$;

3) область определения: R; асимптота $y = 0$ при $x \to +\infty$; точка пересечения с осями координат $(0; 0)$; минимум $y = 0$ при $x = 0$, максимум $y = 4e^{-2} \approx 0{,}54$ при $x = 2$; точки перегиба функции $x_1 = \sqrt{2} - 2$, $x_2 = \sqrt{2} + 2$, $y(x_1) \approx 0{,}3$, $y(x_2) \approx 0{,}47$, на $(x_1; x_2)$ функция выпукла вверх;

4) область определения: R; асимптота $y = 0$ при $x \to +\infty$; точка пересечения с осями координат $(0; 0)$; максимум $y = 27e^{-3} \approx 1{,}3$ при $x = 3$; точки перегиба функции $x_1 = 3 - \sqrt{3}$, $x_2 = 3 + \sqrt{3}$, $y(x_1) \approx 0{,}2$, $y(x_2) \approx 0{,}9$, на $(x_1; x_2)$ функция выпукла вверх;

5) точки пересечения с осями координат $(-\sqrt{2}; 0)$, $(\sqrt{2}; 0)$, $(0; -2)$; асимптота $y = 0$ при $x \to +\infty$, минимум $y = -e^2 \approx -7{,}4$ при $x = -1$, максимум $y = 2e^{-4} \approx 0{,}04$ при $x = 2$; точки перегиба функции $x = 1 - \sqrt{10}/2 \approx -0{,}6$ и $x = 1 + \sqrt{10}/2 \approx 2{,}6$;

6) область определения: R; асимптота $y = 0$ при $x \to -\infty$; точки пересечения с осями координат $(0; e)$, $(1; 0)$; максимум $y = e^3/3 \approx 6{,}7$ при $x = 2/3$; точка перегиба $(-1/3; 4/3)$, на $(-\infty; -1/3)$ функция выпукла вниз;

7) график симметричен относительно оси ординат; асимптота $y = 0$; максимум $y = e$ при $x = 0$; точки перегиба функции $x = \pm 1/\sqrt{2}$;

8) график симметричен относительно прямой $x = 2$; асимптота $y = 0$; максимум $y = e^4$ при $x = 2$; точки перегиба функции $x = 2 \pm 1/\sqrt{2}$;

9) график симметричен относительно начала координат; асимптота $y = 0$; минимум $y = -1/\sqrt{e} \approx -0{,}6$ при $x = -1$, максимум $y = 1/\sqrt{e}$ при $x = 1$; точки перегиба функции $x = \pm\sqrt{3}$;

10) график симметричен относительно оси ординат; асимптота $y = 0$; максимум $y = 2$ при $x = 0$; точки перегиба $(-1; 3/e)$, $(1; 3/e)$;

11) область определения: $x = 1$; асимптоты: $x = 1$ и $y = 0$ при $x \to +\infty$; максимум $y = 1$ при $x = 0$; функция выпукла вверх при $x > 1$ и выпукла вниз при $x < 1$.

14. 1) Область определения: $x \neq -1$; асимптоты: $y = 1/e$ и $x = -1$ при $x \to -1 + 0$, $y(-1 - 0) = 0$; точка перегиба $(-2; e^{-3})$;

2) область определения: $x \neq 0$; асимптота $x = 0$ при $x \to +0$, $y(-0) = 0$; минимум $y = e^2/4$ при $x = 1/2$; функция выпукла вниз при $x < 0$ и при $x > 0$;

3) область определения: $x \neq 0$; точка пересечения с осью абсцисс $(2; 0)$; асимптоты: $y = x - 3$ и $x = 0$ при $x \to -0$, $y(+0) = 0$, $y'(+0) = 0$; максимум $y = -4\sqrt{e}$ при $x = -2$ и минимум $y = -1/e$ при $x = 1$; точка перегиба $(2/5; -8e^{-5/2}/5)$;

4) область определения: $x \neq 0$; точки пересечения с осью абсцисс $(-3;0)$ и $(1;0)$; асимптоты $y=x+3$ и $x=0$ при $x \to +0$; $y(-0)=0$, $y'(-0)=0$; максимум $y=4/e$ при $x=-1$; точки перегиба функции $x=-5\pm\sqrt{22}$;

5) область определения: $x \neq 0$; начало координат — центр симметрии; асимптоты $x=0$, $y=x$ при $x \to \infty$; максимум $y=-\sqrt{2e}\approx -2{,}3$ при $x=-\sqrt{2}$, минимум $y=\sqrt{2e}$ при $x=\sqrt{2}$; на $(0;+\infty)$ функция выпукла вниз.

15. 1) Область определения: $x>0$; асимптота $x=0$ при $x\to +0$; максимум $y=0$ при $x=1$; функция выпукла вверх;

2) область определения: $x>0$; точка пересечения с осью абсцисс $(1;0)$; асимптоты $y=0$ при $x\to+\infty$ и $x=0$ при $x\to+0$; максимум $y=1/e$ при $x=e$; точка перегиба $(e^{3/2};1{,}5e^{-3/2})$;

3) область определения: $x>0$; точка пересечения с осью абсцисс $(1;0)$; асимптоты $y=0$ и $x=0$, максимум $y=2/e$ при $x=e^2$; точка перегиба $(e^{8/3};8e^{-4/3}/3)$;

4) область определения: $x>0$; $y(+0)=0$, $y'(+0)=0$; точка пересечений с осью абсцисс $(1;0)$; минимум $y=-e\ln 2$ при $x=\sqrt{e}$; точка перегиба $(e^{-3/2};-3/(2e^3))$;

5) область определения: $x>0$; $y(+0)=0$, $y'(+0)=+\infty$, максимум $y=4/e^2$ при $x=1/e^2$; минимум $y=0$ при $x=1$; точка перегиба $(1/e;1/e)$;

6) область определения: $x>0$; асимптоты $x=0$ и $y=0$; минимум $y=0$ при $x=1$, максимум $y=4/e^2\approx 0,6$ при $x=e^2\approx 7{,}4$; точки перегиба функции $x=e^{(3\pm\sqrt{5})/2}$;

7) область определения: $x>0$, $x\neq 1$; асимптота $x=1$; $y(+0)=0$, $y'(+0)=0$; минимум $y=e$ при $x=e$; точка перегиба $(e^2;e^2/2)$;

8) область определения: $x\neq\pm1$; асимптоты $x=-1$, $x=1$, $y=0$; точки пересечения с осями координат $(\approx 0{,}9;0)$, $(\approx 1{,}2;0)$, $(0;6)$; максимум $y=2-\ln 3$ при $x=2$; точки перегиба $(0{,}5;4-\ln 3)$, $(3;1{,}5-\ln 2)$;

9) область определения: $x>0$; асимптота $x=0$ $(y\to+\infty)$; минимум $y=1$ при $x=1$; функция выпукла вниз.

16. 1) Функция периодическая с периодом 2π; точки пересечения с осями координат $(0;1)$, $(\pi/2;0)$, $(3\pi/2;0)$; максимум $y=3\sqrt{3}/4$ при $x=\pi/6$, минимум $y=-3\sqrt{3}/4$ при $x=5\pi/6$; точки перегиба $(\pi/2;0)$, $(\pi+\arcsin(1/4);-3\sqrt{15}/16)$, $(3\pi/2;0)$, $(2\pi-\arcsin(1/4);3\sqrt{15}/16)$;

2) функция периодическая с периодом 2π; график симметричен относительно начала координат; максимум $y=3\sqrt{3}/4$ при $x=\pi/3$, минимум $y=-3\sqrt{3}/4$ при $x=-\pi/3$; точки перегиба $(-\pi;0)$, $(-\pi+\arccos(1/4);-3\sqrt{15}/16)$, $(0;0)$, $(\pi-\arccos(1/4);3\sqrt{15}/16)$, $(\pi;0)$;

3) функция периодическая с периодом 2π; $y(0)=y(\pi/2)=y(\pi)=0$;

максимумы $y = 1/4$ при $x = \pi/6$ и $x = 5\pi/6$, минимумы $y = 0$ при $x = \pi/2$ и $y = -2$ при $x = 3\pi/2$; точки перегиба функции: $x = \arcsin\frac{1+\sqrt{33}}{8}$, $x = \pi - \arcsin\frac{1+\sqrt{33}}{8}$, $x = \pi + \arcsin\frac{\sqrt{33}-1}{8}$, $x = 2\pi - \arcsin\frac{\sqrt{33}-1}{8}$;

4) функция периодическая с периодом 2π; график симметричен относительно оси ординат; $y\left(\pi - \arccos\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = 0$, максимумы $y = 3/4$ при $x = \pm\pi/3$, минимумы $y = 1/2$ при $x = 0$ и $y = -3/2$ при $x = \pm\pi$; точки перегиба функции: $x = \pm\arccos\frac{1+\sqrt{33}}{8}$, $x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{\sqrt{33}-1}{8}\right)$;

5) функция периодическая с периодом 2π; $x = 0$ — ось симметрии; $(\pi/2; 0)$ — центр симметрии; на $[0;\pi]$ максимум $y = 4$ при $x = 0$, минимум $y = -4$ при $x = \pi$; на $[0;\pi]$ точки перегиба функции: $x_1 = \arcsin(1/\sqrt{3})$, $x_2 = \pi/2$, $x_3 = \pi - \arcsin(1/\sqrt{3})$, $y(x_1) = -y(x_3) = 8\sqrt{6}/9 \approx 2{,}2$, $y(x_2) = 0$.

17. 1) Периодическая с периодом π функция; график симметричен относительно оси ординат; $y(0) = y(\pi/3) = y/(-\pi/3) = 0$, минимумы: $y = 0$ при $x = 0$ и $y = -1$ при $x = \pm\pi/2$, максимумы: $y = 9/16$ при $x = \pm\arccos\left(\frac{1}{4}\right)$; точки перегиба: $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{129}+1}{16}$, $x = \pm\frac{1}{2}\left(\pi - \arccos\frac{\sqrt{129}-1}{16}\right)$;

2) периодическая с периодом 2π функция; график симметричен относительно оси ординат; $y(\pi/4) = y(\pi/2) = y(3\pi/4) = 0$; на отрезке $[0;\pi]$ максимумы $y = 1$ при $x = 0$, $y = 2/(3\sqrt{6})$ при $x = \pi - \arcsin\sqrt{5/6}$, минимумы $y = -2/(3\sqrt{6})$ при $x = \arcsin\sqrt{5/6}$, $y = -1$ при $x = \pi$; точки перегиба $(\arccos\sqrt{13/18}; (4/9)\sqrt{13/18})$, $(\pi/2; 0)$, $(\pi - \arccos\sqrt{13/18}; -(4/9)\sqrt{13/18})$;

3) периодическая с периодом 2π функция, график симметричен относительно начала координат; $y(0) = y(\pi) = 0$; на отрезке $[0;\pi]$ максимумы $y = (3+4\sqrt{2})/6$ при $x = \pi/4$ и $y = \sqrt{2} - 1/2$ при $x = 3\pi/4$, минимум $y = \sqrt{3}/4$ при $x = 2\pi/3$; точки перегиба функции $x = 0$, $x = \pi$, $x = \arcsin\frac{\sqrt{7}-1}{6}$, $x = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{7}-1}{6}$.

18. 1) Область определения $x \neq \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$, периодическая с периодом 2π функция; асимптоты $y = \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$; на интервале $(-\pi/2; 3\pi/2)$ максимум $y = 1$ при $x = 0$, минимум $y = -1$ при $x = \pi$; функция убывает на интервалах $(0;\pi/2)$ и $(\pi/2;\pi)$, возрастает на интервалах $(-\pi/2; 0)$ и $(\pi; 3\pi/2)$;

2) периодическая с периодом π функция; асимптоты $x = \pi n$, $n \in$

$\in Z$; точки перегиба $(\pi/2+\pi n; 1/\sqrt{2})$, $n \in Z$: функция возрастает на интервале $(0;\pi)$;

3) график симметричен относительно начала координат; асимптоты $x = \pi/2+\pi n$, $n \in Z$; максимум $y = \pi/2+2n\pi-1$ при $x = \pi/4+\pi n$, $n \in Z$; минимум $y = 3\pi/2+2\pi n+1$ при $x = 3\pi/4+\pi n$, $n \in Z$; точки перегиба $(\pi n; 2\pi n)$, $n \in Z$.

19. 1) График симметричен относительно начала координат; асимптоты: $y = (x-\pi)/2$ при $x \to +\infty$ и $y = (x+\pi)/2$ при $x \to -\infty$; максимум $y = 1$ при $x = (2-\pi)/4$, минимум $y = -1$ при $x = (\pi-2)/4$; точка перегиба $(0;0)$;

2) область определения: R; асимптоты $y = 1/\pi$ при $x \to -\infty$, $y = x$ при $x \to +\infty$; точка пересечения с осью ординат $(0; 2/\pi)$; функция выпукла вниз;

3) область определения: R; $(0;0)$ — центр симметрии; асимптоты $y = (\pi x+2)/2$ при $x \to -\infty$, $y = (\pi x-2)/2$ при $x \to +\infty$; точка перегиба $(0;0)$, на $(-\infty;0)$ функция выпукла вверх;

4) область определения: R; $(0;\pi)$ — центр симметрии; асимптоты $y = (x+4\pi)/2$ при $x \to -\infty$, $y = x/2$ при $x \to +\infty$; $y(0) = \pi$, $y = 0$ при $x \approx 12{,}2$; максимум $y = (10\pi-3\sqrt{3})/6 \approx 4{,}4$ при $x = -\sqrt{3}$, минимум $y = (2\pi+3\sqrt{3})/6 \approx 1{,}9$ при $x = \sqrt{3}$; точка перегиба $(0;\pi)$, на $(-\infty;0)$ функция выпукла вверх;

5) область определения: $|x| \geqslant 1$; $(0;-\pi/2)$ — центр симметрии; асимптота $y = (3x-\pi)/2$ при $x \to \infty$; максимум $y = -(6\sqrt{3}+5\pi)/6 \approx -4{,}4$ при $x = -2\sqrt{3}/3$, минимум $y = (6\sqrt{3}-\pi)/6 \approx 1{,}2$ при $x = 2\sqrt{3}/3$; на $(-\infty;-1)$ функция выпукла вверх;

6) область определения: R; график симметричен относительно начала координат; асимптота $y = 0$; максимум $y = \pi/2$ при $x = 1$, минимум $y = -\pi/2$ при $x = -1$; $y'(1-0) = 1$, $y'(1+0) = -1$; точка перегиба $(0;0)$;

7) область определения: R; график симметричен относительно оси ординат; асимптота $y = \pi$; функция возрастает при $x > 0$, $y'(+0) = 2$;

8) область определения: R; точки пересечения с осями координат $(0;-\pi/2)$; $(x_0, 0)$, где $x_0 \approx 0{,}7$; асимптота $y = (x-\pi)/2$; максимумы $y = 1$ при $x = 1$ и $y = -(3\sqrt{3}+5\pi)/6$ при $x = -\sqrt{3}$, минимумы $y = -1/2-\pi$ при $x = -1$ и $y = (3\sqrt{3}-\pi)/6$ при $x = \sqrt{3}$; функция выпукла вверх на интервалах $(-\infty;-1)$ и $(0;1)$, выпукла вниз на интервалах $(-1;0)$ и $(1;+\infty)$; точка перегиба $(0;-\pi/2)$; $y'(-1-0) = -1/2$, $y'(-1+0) = 3/2$, $y'(1-0) = 3/2$, $y'(1+0) = -1/2$.

20. 1) Периодическая с периодом 2π функция, график симметричен относительно оси ординат; максимум $y = e$ при $x = 0$, минимум $y = \dfrac{1}{e}$ при $x = \pi$, точки перегиба функции $x = \arccos\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ и $x = 2\pi - \arccos\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$;

2) асимптоты: $y = e^{\pi/2}$ при $x \to -\infty$, $y = e^{-\pi/2}$ при $x \to +\infty$; функция убывает; $(-1/2; e^{\operatorname{arctg}(1/2)})$ — точка перегиба;

3) область определения: $2k\pi < x < (2k+1)\pi$, $k \in Z$, периодическая с периодом 2π: асимптоты $x = n\pi$, $n \in Z$; минимум $y = 1$ при $x = \pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$;

4) область определения: $x > 0$; минимум $y = (1/e)^{1/e} \approx 0{,}69$ при $x = 1/e$; $y(+0) = 1$; функция выпукла вниз;

5) область определения: $x > -1$; $x \neq 0$; $y(+0) = y(-0) = e$; асимптоты $x = -1$, $y = 1$; функция выпукла вниз;

6) область определения: $x < -1$, $x > 0$, асимптоты $y = e$ при $x \to \infty$, $x = -1 (y \to +\infty)$; на $(-\infty; -1)$ функция выпукла вниз, на $(0; +\infty)$ — вверх.

21. 1) Область определения; $x > 0$; асимптота $y = 1$; максимум $y = e^{1/e} \approx 1{,}44$ при $x = e$; $y(+0) = 0$;

2) асимптота $y = e(x - 1/2)$; $y(+0) = 0$;

3) периодическая функция с периодом 2π; максимумы $y = 1$ при $x = 0$ и $x = \pi/2$, $y = -1/\sqrt{2}$ при $x = 5\pi/4$, минимумы $y = 1/\sqrt{2}$ при $x = \pi/4$, $y = -1$ при $x = \pi$ и $x = 3\pi/2$;

4) функция периодическая с периодом 2π; $x = \pi/2$ — ось симметрии, $(0; 0)$ — центр симметрии; на $[0; \pi]$ минимумы $y = -3\sqrt{3}$ при $x = \pi/3$ и $x = 2\pi/3$, максимум $y = -4$ при $x = \pi/2$;

5) периодическая с периодом 2π функция; максимумы $y = 1$ при $x = \pi/2$, $y = 1/3$ при $x = 3\pi/2$, минимумы $y = 0$ при $x = 0$, $x = \pi$;

6) периодическая с периодом 2π функция, график симметричен относительно оси ординат; максимумы $y = 11/6$ при $x = 0$, $y = -5/12$ при $x = 2\pi/3$, минимумы $y = -1/2$ при $x = \pi/2$ и $y = -5/6$ при $x = \pi$;

7) область определения: $x > 0$; асимптота $x = 0$; максимум $y = -2\ln 2 - 5\operatorname{arctg}(1/2)$ при $x = 1/2$, минимум $y = 2\ln 2 - 5\operatorname{arctg} 2$ при $x = 2$;

8) область определения: $x \neq \pm 1$, график симметричен относительно оси ординат; асимптоты $x = -1$ при $x \to -1+0$, $x = 1$ при $x \to 1-0$, $y = 0$; минимум $y = e$ при $x = 0$, максимум $y = 1/(4\sqrt{e}) \approx 0{,}15$ при $x = \pm\sqrt{3}$;

9) область определения: $x \neq 0$, $x \neq \pm 2$; асимптоты $x = 2$, $x = -2$, $y = 1$, $x = 0$ при $x \to +0$; $y(-0) = 0$; минимум $y \approx 0{,}94$ при $x = -4 - 2\sqrt{5} \approx -8{,}48$, максимум $y \approx -0{,}5$ при $x = -4 + 2\sqrt{5} \approx 0{,}48$, функция возрастает на интервалах $(-4 - 2\sqrt{5}; 2)$, $(-2; 0)$, $(0; -4 + 2\sqrt{5})$, убывает на интервалах $(-\infty, -4 - 2\sqrt{5})$, $(-4 + 2\sqrt{5}; 2)$, $(2; +\infty)$.

22. 1) Область определения: R; максимум $(-3; 3)$, минимум $(5; -1)$; точка перегиба $(1; 1)$;

2) область определения: R; асимптоты $y = x$, $y = x + 6\pi$; максимум $(-3\pi - 1; 3\pi/2 - 1)$, минимум $(-3\pi + 1; 1 - 3\pi/2)$; точка перегиба $(-3\pi; 0)$;

3) область определения: R; точки пересечения с осями координат $(0;0)$, $(8/5;0)$; асимптота $y = x - 2$; максимум $(0;0)$, минимум $(1/2;-1/2)$; выпуклость вниз;

4) область определения: $x < 0$; асимптоты $y = x + \ln 2$, $x = 0$; максимум $(-\ln 2/2; 0)$; выпуклость вверх;

5) область определения: R; функция периодическая с периодом 2π; прямые $x = \pi n$, $n \in Z$, — оси симметрии; на $[0;2\pi)$ минимум $y = 0$ при $x = 0$, максимум $y = 2$ при $x = \pi$; на $(0;2\pi)$ выпуклость вверх;

6) область определения: R; ось ординат — ось симметрии; асимптота $y = 0$ при $x \to \infty$; максимум $y = 1$ при $x = 0$; функция выпукла вниз на $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$.

23. 1)

t	$-\infty$	-1	$-1/3$	0	1	$+\infty$
x	$-\infty$	0	$-4/27$	0	4	$+\infty$
y	$+\infty$	-4	$-80/27$	-2	0	$-\infty$

; $(0;-4)$ — точка возврата;

2)

t	$-\infty$	1	$5/3$	2	$7/3$	3	$+\infty$
x	$-\infty$	0	$-4/27$	0	$16/27$	4	$+\infty$
y	$-\infty$	0	$-16/27$	-1	$-32/27$	0	$+\infty$

; $(0;0)$ — точка возврата;

3) асимптоты: $y = x + 3$, $y = 0$, $x = 0$,

t	$-\infty$	$-1-0$	$-1+0$	$-1/2$	-0	$+0$	1	$+\infty$
x	$+0$	$+\infty$	$-\infty$	-4	$-\infty$	$+\infty$	$1/2$	$+0$
y	$-\infty$	-0	-0	$-1/2$	$-\infty$	$+\infty$	4	$+\infty$;

;

4) асимптоты: $y = x - 1$, $y = 0$, $x = 0$; точка самопересечения $(-1;1)$,

t	$-\infty$	-0	$+0$	$1-0$	$1+0$	2	$+\infty$
x	$-\infty$	-0	-0	$-\infty$	$+\infty$	4	$+\infty$
y	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	-0	$+0$	$3/2$	$+\infty$

;

5) асимптоты: $y = 1$, $y = 1/2$, $x = -1/2$;

t	$-\infty$	$-2-0$	$-2+0$	-1	-0	$+0$	1	$+\infty$
x	$-\infty$	$-1/2-0$	$-1/2+0$	0	$-\infty$	$+\infty$	4	$+\infty$
y	$1+0$	$+\infty$	$-\infty$	0	$1/2-0$	$1/2+0$	$2/3$	$1-0$

;

6) асимптоты: $y = 2$, $y = 2/3$, $x = 1$, $x = 4/3$;

t	$-\infty$	$-2-\sqrt{5}$	$-2-0$	$-2+0$	$-1-0$	$-1+0$	0	$-2+\sqrt{5}$	$1-0$	$1+0$	$+\infty$
x	$1+0$	$\approx 1{,}1$	$\frac{4}{3}-0$	$\frac{4}{3}+0$	$+\infty$	$-\infty$	0	$\approx 0{,}1$	$-\infty$	$+\infty$	$1+0$
y	$-\infty$	$\approx -8{,}5$	$-\infty$	$+\infty$	$2+0$	$2-0$	$1/2$	$\approx 0{,}5$	$\frac{2}{3}-0$	$\frac{2}{3}+0$	$+\infty$

;

7) асимптота $y = x$ при $x \to \infty$; точки перегиба (приближенно) $(-2{,}4; 3{,}0)$, $(2{,}2; 3{,}0)$, $(3{,}2; 3{,}0)$,

t	$-\infty$	-1 ∓ 0	∓ 0	1 ∓ 0	$\sqrt[3]{2} \mp 0$	$+\infty$
x	$-\infty$	$-2-0$	$\mp\infty$	$2+0$	$(2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})/2 \mp 0 \approx 2,1 \mp 0$	$+\infty$
y	$-\infty$	∓ 0	$+\infty$	2 ± 0	$(3\sqrt[3]{2})/2 + 0 \approx 1{,}9 + 0$	$+\infty$

;

24. 1) Асимптота $x = 5/3$, точка возврата $(-4/3; 27/2)$, точка перегиба $(77/3; 27/2)$;

t	$-\infty$	-3	-0	$+0$	$+\infty$
x	$+\infty$	$-4/3$	$5/3-0$	$5/3+0$	$+\infty$
y	$+\infty$	$27/2$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

;

2) асимптота $y = (4x-1)/8$, точка возврата $(0; 0)$, точка перегиба $(-9/8; -27/16)$;

t	$-\infty$	0	$1/2-0$	$1/2+0$	$3/4$	1	$+\infty$
x	$+\infty$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-9/8$	-1	$-\infty$
y	$-\infty$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-27/32$	-1	$-\infty$

;

3) асимптота $y = -x + 1/3$, точка возврата $(0; 0)$;

t	$-\infty$	$-1-0$	$-1+0$	0	$\sqrt[3]{2}$	$+\infty$
x	-0	$-\infty$	$+\infty$	0	$\sqrt[3]{4}/3$	$+0$
y	$1+0$	$+\infty$	$-\infty$	0	$2/3$	$1-0$

;

4) асимптоты: $y = 1$, $x = 0$, точка возврата $(-2; 0)$, точка перегиба $(117/64; 49/9)$, при $t = (-3 \pm \sqrt{21})/4$ точка самопересечения с координатами $x \approx -1{,}1$, $y \approx 2{,}4$;

t	$-\infty$	-1	-0	$+0$	1	$+\infty$
x	$-\infty$	2	$+0$	-0	-2	$+\infty$
y	$1+0$	4	$+\infty$	$+\infty$	0	$1-0$

;

5) асимптоты: $y = (2x+1)/4$, $y = x-1$, $x = -1/2$;

t	$-\infty$	$-1-0$	$-1+0$	$-1/\sqrt{3}$	-0	$+0$	$1/2$	$1/\sqrt{3}$	$1-0$	$1+0$	$+\infty$
x	-0	$-1/2+0$	$-1/2-0$	$\approx -1{,}1$	$-\infty$	$+\infty$	4	$\approx 4{,}1$	$+\infty$	$-\infty$	-0
y	$+0$	$+\infty$	$-\infty$	$\approx -2{,}6$	$-\infty$	$+\infty$	$8/3$	$\approx 2{,}6$	$+\infty$	$-\infty$	-0

;

6) асимптота $y = x+1$, точка перегиба $(-27/2; -9/2)$;

t	$-\infty$	-0	$+0$	$1/2$	$2/3$	$1-0$	$1+0$	$+\infty$
x	-0	$-\infty$	$-\infty$	-8	$-27/4$	$-\infty$	$+\infty$	$+0$
y	$+0$	$+\infty$	$-\infty$	-4	$-9/2$	$-\infty$	$+\infty$	$+0$

;

7) кривая симметрична относительно оси ординат, асимптоты $y = \pm x - 5/4$, $y = 0$;

t	$+0$	$1/\sqrt[4]{5}$	$1-0$	$1+0$	$+\infty$
x	$+\infty$	$5\sqrt[4]{5}/4$	$+\infty$	$-\infty$	-0
y	$+0$	$1/4$	$+\infty$	$-\infty$	$-1-0$

;

8) оси координат — оси симметрии; $(0; 0)$ — точка перегиба;

t	$-(\sqrt{3}+1)/\sqrt{2} \mp 0$	-1 ∓ 0	$-(\sqrt{3}-1)/\sqrt{2} \mp 0$	-0
x	$-\sqrt{3}/2 \pm 0$	$-\sqrt{2}+0$	$-\sqrt{3}/2 \mp 0$	-0
y	$1/2-0$	± 0	$-1/2+0$	-0

.

25. 1) Асимптота $y = 2x$ при $x \to +\infty$; $(1; 1)$ — точка возврата;

t	$-\infty$	∓ 0	$+\infty$
x	$+\infty$	$1+0$	$+\infty$
y	$+\infty$	$1+0$	$+\infty$

;

2) асимптоты $y = 0$, $x = 0$; точки перегиба $(\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}; \sqrt{2}e^{-\sqrt{2}})$, $(-\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}; -\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}})$;

t	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x	-0	$-1/e$	0	e	$+\infty$
y	$-\infty$	$-e$	0	$1/e$	$+0$

;

3) $(-4;4)$ — точка перегиба;

t	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x	-0	$-10/e$	-4	$-2e$	$+\infty$
y	-0	$-11/e$	-4	$-e$	$+\infty$

;

4) асимптота $y=1$, точка возврата $(e;0)$, точка перегиба $(-(3e^{-2/3})/2; (25e^{-2/3})/9)$;

t	$-\infty$	-1	-0	$+0$	1	$+\infty$
x	-0	$-1/e$	$-\infty$	$+\infty$	e	$+\infty$
y	$+0$	$4/e$	$1+0$	$1-0$	0	$+\infty$

;

5) асимптоты: $y=e^2x-2e,\ y=0,\ x=0$;

t	$-\infty$	-2	$-1-0$	$-1+0$	0	$+\infty$
x	-0	$-1/e^2$	$-\infty$	$+\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	$-e^2$	$-\infty$	$+\infty$	1	$+0$

;

6) асимптота $y=x-1$ при $x\to-\infty$;

t	$-\infty$	0	$1/2$	$1-0$	$1+0$	$+\infty$
x	$-\infty$	0	$1-\ln 2$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
y	$-\infty$	0	$1/2-\ln 2$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

;

7) асимптоты: $y=0,\ x=0$; точки перегиба $(-\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}; -\sqrt{2}e^{\sqrt{2}})$, $(\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}; \sqrt{2}e^{-\sqrt{2}})$;

t	$+0$	$1/e$	1	e	$+\infty$
x	-0	$-1/e$	0	e	$+\infty$
y	$-\infty$	$-e$	0	$1/e$	$+0$

;

та же кривая, что и в задаче 2);

8) асимптоты: $y=x/4,\ x=2$, угловая точка $(0;0)$;

t	$-\infty$	$-1-0$	$-1+0$	0	$1-0$	$1+0$	2	$+\infty$
x	$+\infty$	$2+0$	$2-0$	0	$2-0$	$2+0$	8	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$2+3\ln 3$	$+\infty$

;

9) кривая симметрична относительно оси абсцисс; асимптоты: $y = x - 1$, $y = 1 - x$; точки самопересечения $(0;0)$, $(2;0)$;

t	$+0$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi - 0$	$\pi + 0$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	$2\pi - 0$
x	$+\infty$	2	1	0	$-\infty$	$+\infty$	2	1	0	$-\infty$
y	$+\infty$	0	-1	0	$+\infty$	$-\infty$	0	1	0	$-\infty$

;

10) кривая симметрична относительно осей координат; асимптоты $y = \pm 3x$, $y = \pm 1/2$; точки самопересечения $(\pm\sqrt{3}/3; 0)$, $(0; \pm\sqrt{2}/2)$;

t	$+0$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/2 - 0$
x	$+\infty$	$\sqrt{3}/3$	0	$-\infty$
y	$1/2 - 0$	0	$-\sqrt{2}/2$	$-\infty$

;

11) ось абсцисс — ось симметрии; $(1;0)$ —точка возврата;

t	$-\pi + 0$	$-2\pi/3 \mp 0$	$-\pi/3 \mp 0$	-0
x	$-3 + 0$	$-1/2 \mp 0$	$3/2 - 0$	$1 + 0$
y	-0	$-3\sqrt{3}/2 + 0$	$-\sqrt{3}/2 \mp 0$	-0

;

12) ось абсцисс — ось симметрии;

t	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0
x	2	1	0	-1	-2	-1	0	1	2
y	-2	0	$\sqrt{2}$	2	0	-2	$-\sqrt{2}$	0	2

;

13) оси координат — оси симметрии; точки самопересечения $(\pm 1/2; \pm 1/\sqrt{2})$ (знаки произвольны);

t	$+0$	$\pi/6 \mp 0$	$\pi/4 \mp 0$	$\pi/3 \mp 0$	$\pi/2 \mp 0$
x	$+0$	$\sqrt{3}/2 \mp 0$	$1 - 0$	$\sqrt{3}/2 \pm 0$	± 0
y	$+0$	$1 - 0$	$1/\sqrt{2} \pm 0$	± 0	$-1 + 0$

;

14) эта кривая — эвольвента единичной окружности; касательные параллельны оси абсцисс в точках $((-1)^n; \pi n(-1)^n)$, касательные параллельны оси ординат в точках $((-1)^n \pi(1 + 2n)/2; (-1)^n)$, $n \in Z$;

15) касательные параллельны оси абсцисс в точках с координатами $x'_n = -y'_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}} e^{\pi(4n-1)/4}$, касательные параллельны оси ординат в

точках с координатами $x''_n = y''_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{2}} e^{\pi(4n+1)/4}$.

26. 1) $y = -x$ — ось симметрии; асимптота $y = x$; точки пересечения с осями координат $(0;-1)$, $(1;0)$, они же и точки перегиба;

2) оси координат и прямые $y = \pm x$ — оси симметрии; $(\pm 1; 0)$, $(0; \pm 1)$ — точки пересечения с осями координат; максимум $x = 1$ и минимум $x = -1$ при $y = 0$; максимум $y = 1$ и минимум $y = -1$ при $x = 0$;

3) ось абсцисс — ось симметрии; асимптота $x = 1$; точки пересечения с осями координат $(0;0)$ и $(-1;0)$; $(0;0)$ — точка самопересечения; минимум $x = -1$ при $y = 0$; максимум $y \approx 0{,}3$ при $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}6$;

4) ось абсцисс — ось симметрии; асимптоты $y = \pm x$; точка пересечения с осью абсцисс $(\sqrt[3]{2}; 0)$; минимум $x = \sqrt[3]{2}$ при $y = 0$; минимум $y = 1$ при $x = -1$, максимум $y = -1$ при $x = 1$;

5) ось абсцисс — ось симметрии; $(0;0)$, $(2;0)$ — точки пересечения с осями координат; $(0;0)$ — точка возврата; максимум $x = 2$ при $y = 0$, минимум $x = 0$ при $y = 0$; максимум $y = 27/16$ и минимум $y = -27/16$ при $x = 3/2$; точки перегиба $x = (3-\sqrt{3})/2 \approx 0{,}23$, $y \approx 0{,}35$;

6) оси координат — оси симметрии; $(\pm 1; 0)$, $(0;0)$ — точки пересечения с осями координат; $(0;0)$ — точка самопересечения; максимум $x = 1$ и минимум $x = -1$ при $y = 0$; максимумы $y = 2/\sqrt{3}$ и минимумы $y = -2/\sqrt{3}$ при $x = \pm\sqrt{2/3}$, точки перегиба (приближенно) $(\pm 0{,}52, \pm 0{,}70)$;

7) ось абсцисс — ось симметрии; асимптота $y = 0$ при $x \to +\infty$; точка пересечения с осью абсцисс $(1;0)$; максимум $x = 1$ при $y = 0$; максимум $y = 1$ и минимум $y = -1$ при $x = 2$; точки перегиба $x = (6 + 2\sqrt{3})/3 \approx 3{,}15$, $y = \pm\sqrt{\sqrt{3}/2} \approx \pm 0{,}93$;

8) ось абсцисс — ось симметрии; асимптота $x = 2$; $(0;0)$ — точка возврата; минимум $x = 0$ при $y = 0$;

9) оси координат — оси симметрии; асимптоты $y = \pm x$; $(\pm 1; 0)$ — точки пересечения с осью абсцисс; минимум $x = 1$ и максимум $x = -1$ при $y = 0$;

10) оси координат — оси симметрии; асимптоты $y = \pm x$, $x = \pm 1$; $(0;0)$, $(\pm 2; 0)$ — точки пересечения с осями координат; $(0;0)$ — точка самопересечения; минимум $x = 2$ и максимум $x = -2$ при $y = 0$;

11) ось абсцисс — ось симметрии; асимптоты $y = \pm(x+2)/3$ и $x = 1$; максимум $x = -3$ при $y = 0$; минимум $y \approx 2{,}54$ и максимум $y \approx -2{,}54$ при $x = \sqrt{3}$.

27. 1) Гипербола с осями $x = 0$ и $y = 1$ и с асимптотами $y = 1 \pm x$;

2) эллипс с осями на прямых $y = -2x$ и $x = 2y$;

3) ось ординат — ось симметрии; асимптоты $x = 0$, $y = 0$; $(0;1)$ —

точка пересечения с осью ординат; максимум $y = 1$ при $x = 0$; точки перегиба $x = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{8}} \approx \pm 0{,}47$, $y = \dfrac{-2\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}85$;

4) прямая $y = x$ — ось симметрии; асимптоты $x = 0$, $y = 0$, $y = -x$; максимум $x = -\sqrt[3]{4}$ при $y = -\sqrt[3]{4}/2$; максимум $y = -\sqrt[3]{4}$ при $x = -\sqrt[3]{4}/2$;

5) $(0;0)$ — центр симметрии; асимптоты $y = 0$, $y = x$, $x = 0$; минимумы $y = 1 \pm \sqrt{2}$ при $x = 1$, максимумы $y = -1 \pm \sqrt{2}$ при $x = -1$;

6) асимптота $y = 2 - x$; $(0;0)$, $(6;0)$ — точки пересечения с осями координат; $(0;0)$ — точка возврата; максимум $y = 2\sqrt[3]{4}$ при $x = 4$; $(6;0)$ — точка перегиба.

28. 1) $x = 4t/(1-t^4)$, $y = 4t^2/(1-t^4)$ *); ось ординат — ось симметрии; асимптоты $y = \pm x - 1$; $(0;0)$ — точка самопересечения и точка возврата; точки перегиба $(\pm 6/\sqrt[4]{3}; 2\sqrt{3})$;

2) $x = (t-1)/t^3$, $y = (t-1)^2/t^3$; прямая $y = x$ — ось симметрии; $(0;0)$ — точка самопересечения; максимум $x = 4/27$ при $y = 2/27$; максимум $y = 4/27$ при $x = 2/27$;

3) $x = t(1 \pm \sqrt{8t^2 - 1})$, $y = t(1 \mp \sqrt{8t^2-1})$; прямые $y = \pm x$ — оси симметрии; точки пересечения с осями координат: $(0;0)$, $(0;\pm 1)$, $(\pm 1; 0)$; $(0;0)$ — изолированная точка, ближайшие к началу координат точки $(1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2})$, $(-1/\sqrt{2}; -1/\sqrt{2})$; точки перегиба $x = 1/y = \pm(\sqrt{2} - 1)$, $x = 1/y = \pm(\sqrt{2}+1)$;

4) $x = t^3(1-2t)$, $y = t^4/(1-2t^2)$; ось ординат — ось симметрии; асимптота $y = -(4\sqrt{2}x + 1)/8$; максимум $x = -3\sqrt{3}/(4\sqrt{2})$ и минимум $x = 3\sqrt{3}/(4\sqrt{2})$ при $y = -9/8$; максимумы $y = -1$ при $x = \pm 1$, минимум $y = 0$ при $x = 0$; точки перегиба $(\pm 3\sqrt{3}/5; -9/5)$;

5) $x = \pm\sqrt{(t-2)/(1-t^3)}$, $y = \pm t\sqrt{(t-2)/(1-t^3)}$; $(0;0)$ — центр симметрии; асимптота $y = x$; три точки перегиба, $(0;0)$ одна из них;

6) $x = (t^2 + 1/t)/2$, $y = (t^2 - 1/t)/2$; прямая $y = x$ — ось симметрии; асимптоты $y = \pm x$; точки пересечения с осями координат $(0;1)$, $(1;0)$; минимум $x = 3/\sqrt[3]{32}$ при $y = -1/\sqrt[3]{32}$, минимум $y = 3/\sqrt[3]{32}$ при $x = -1/\sqrt[3]{32}$;

7) астроида; $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$; оси координат и прямые $y = \pm x$ — оси симметрии; $(\pm 1; 0)$, $(0; \pm 1)$ — точки возврата;

8) $x = \pm\operatorname{ch}^{3/2} t$, $y = \operatorname{sh}^{3/2} t$; оси абсцисс — оси симметрии; асимптоты $y = \pm x$; максимум $x = -1$ и минимум $x = 1$ при $y = 0$.

29. 1) $r = \sqrt{\operatorname{tg}\varphi}$; $(0;0)$ — центр симметрии; асимптота $x = 0$; максимум $x = 1/\sqrt{2}$ при $y = 1/\sqrt{2}$, минимум $x = -1/\sqrt{2}$ при $y = -1/\sqrt{2}$; точки перегиба: $x_1 = y_1 = 0$, $x_2 = -x_3 = \sqrt[4]{8\sqrt{3} - 12}/2 \approx 0{,}6$,

*) Указан один из возможных вариантов параметризации.

$y_2 = -y_3 = \sqrt[4]{24\sqrt{3}+36} \approx 1{,}5$;

2) лемниската; $r = \sqrt{\sin 2\varphi/2}$; прямые $y = \pm x$ — оси симметрии; $(0;0)$ — точка самопересечения; максимум $x = \sqrt[4]{27}/4$ при $y = \sqrt[4]{3}/4$, минимум $x = -\sqrt[4]{27}/4$ при $y = -\sqrt[4]{3}/4$; максимумы $r = 1/\sqrt{2}$ при $\varphi = \pi/4$ и $\varphi = 5\pi/4$;

3) бисквит; $r = 2/\sqrt{3+\cos 4\varphi}$; оси координат и прямые $y = \pm x$ — оси симметрии; $(0;0)$ — изолированная точка; $(\pm 1;0)$, $(0;\pm 1)$ — точки пересечения с осями координат; максимумы $x = \sqrt{(\sqrt{2}+1)/2} \approx$ $\approx 1{,}1$ и минимумы $x = -\sqrt{(\sqrt{2}+1)/2}$ при $y = \pm 1/\sqrt{2}$; максимумы $y = \sqrt{(\sqrt{2}+1)/2}$ и минимумы $y = -\sqrt{(\sqrt{2}+1)/2}$ при $x = \pm 1/\sqrt{2}$; точки перегиба (приближенно) $(\pm 1{,}05; \pm 0{,}35)$, $(\pm 0{,}35; \pm 1{,}05)$ (знаки произвольны);

4) $r = \sqrt{2\sin 2\varphi/(2-\sin^2 2\varphi)}$; прямые $y = \pm x$ — оси симметрии; максимум $x = \sqrt[8]{27/16}$ при $y = \sqrt[8]{3/16}$, минимум $x = -\sqrt[8]{27/16}$ при $y = -\sqrt[8]{3/16}$; максимум $y = \sqrt[8]{27/16}$ при $x = \sqrt[8]{3/16}$, минимум $y =$ $= -\sqrt[8]{27/16}$ при $x = -\sqrt[8]{3/16}$; максимум $r = \sqrt{2}$ при $\varphi = \pi/4$ и $\varphi = 5\pi/4$;

5) $r = \sqrt{\operatorname{tg} 2\varphi/2}$; $(0;0)$ — центр симметрии; асимптоты $y = \pm x$; $(0;0)$ — точка самопересечения; точки перегиба (приближенно): $x_1 =$ $= -x_3 \approx 1{,}11$, $y_1 = -y_3 \approx 0{,}68$, $x_2 = -x_4 \approx -0{,}68$, $y_2 = -y_4 \approx 1{,}11$;

6) $r = \sqrt{(3\cos 2\varphi - 1)/(2\cos 2\varphi)}$; оси координат — оси симметрии; асимптоты $y = \pm x$; $(0;0)$ — точка самопересечения; максимум $x = 1$ и минимум $x = -1$ при $y = 0$; максимум $y = \sqrt{2}$ и минимум $y =$ $= -\sqrt{2}$ при $x = 0$, максимумы $y = (\sqrt{3}-1)/2$ и $y = -(\sqrt{3}+1)/2$ и минимумы $y = (\sqrt{3}+1)/2$ и $y = -(\sqrt{3}-1)/2$ при $x = \pm 1/\sqrt{2}$;

7) улитка Паскаля: $r = 2\cos\varphi \pm 1$; ось абсцисс — ось симметрии; $(0;0)$ — точка самопересечения; $(3;0)$, $(1;0)$, $(0;\pm 1)$ — точки пересечения с осями координат; максимумы $x = 3$ и $x = 1$ при $y = 0$, минимумы $x = -1/8$ при $y = \pm\sqrt{15}/8 \approx \pm 0{,}48$; максимум $y \approx 1{,}76$ и минимум $y \approx -1{,}76$ при $x = (15+\sqrt{33})/16 \approx 1{,}3$, максимум $y \approx 0{,}37$ и минимум $y \approx -0{,}37$ при $x = (15-\sqrt{33})/16 \approx 0{,}58$;

8) улитка Паскаля: $r = 2+\cos\varphi$, $r = 0$; ось абсцисс — ось симметрии; $(0;0)$ — изолированная точка; максимум $x = 3$ и минимум $x = -1$ при $y = 0$; максимум $y \approx 2{,}2$ и минимум $y \approx -2{,}2$ при $x = \sqrt{3}/2 \approx 0{,}87$.

30. 1) Ось ординат — ось симметрии; $(0;0)$ — точка самопересечения; $(0;6)$ — точка пересечения с осью ординат; максимум $y = 6$ при $x = 0$, минимумы $y = -2$ при $x = \pm 2\sqrt{2}$; имеются два максимума и два минимума x;

2) четырехлепестник; оси координат и прямые $y = \pm x$ — оси сим-

метрии; $(0;0)$ — точка самопересечения; максимумы $x=2$ и минимумы $x=-2$ при $y=\pm\sqrt{2}$; максимумы $y=2$ и минимумы $y=-2$ при $x=\pm\sqrt{2}$; $(0;0)$ — точка перегиба;

3) ось ординат — ось симметрии; $(0;0)$ — точка самопересечения; максимум $x=\sqrt{2/3}$ и минимум $x=-\sqrt{2/3}$ при $y=16/9$; максимумы $y=2$ при $x=\pm2$;

4) асимптота $y=1-x$; $(0;0)$ —точка возврата; $(4;0)$ — точка пересечения с осью абсцисс; максимум $x=27/8$ при $y=-9/8$; точка перегиба $(27/4;9/4)$;

5) каппа; оси координат — оси симметрии; асимптоты $y=\pm2$; $(0;0)$ —точка самопересечения и перегиба;

6) прямая $y=x$ — ось симметрии; асимптота $y=(2-3x)/3$; точки пересечения с осями координат $(1;0)$, $(0;1)$; $(0;0)$ — изолированная точка; максимум $x\approx1{,}1$ при $y=2/3$, минимум $x=1$ при $y=0$; максимум $y\approx1{,}1$ при $x=2/3$, минимум $y=1$ при $x=0$; точки перегиба $(2(3\pm\sqrt{3})/9;\ 2(3\pm\sqrt{3})/9)$;

7) прямая $y=-x$ — ось симметрии; $(0;0)$ — точка пересечения с осями координат; минимум $=3\sqrt[3]{2}/2$ при $y=-3\sqrt[3]{4}/2$; максимум $y=-3\sqrt[3]{2}/2$ при $x=3\sqrt[3]{4}/2$; точки перегиба $\left(3\sqrt[3]{(3\mp\sqrt{5})/2};\right.$ $\left.-3\sqrt[3]{(3\pm\sqrt{5})/2}\right)$ приближенно $(2{,}18;-4{,}13)$, $(4{,}13;-2{,}18)$;

8) прямая $y=x$ — ось симметрии; асимптоты $y=1$, $y=x$, $x=1$; точка самопересечения $(e;e)$.

31. 1) Четырехлепестковая роза; оси координат и прямые $y=\pm x$ — оси симметрии; точка самопересечения $(0;0)$; максимумы $r=1$ при $\varphi=\pi(1+2k)/4$, $k=0,1,2,3$; при $0<\varphi<\pi/2$ максимум $x=4\sqrt{3}/9$ при $y=2\sqrt{6}/9$ ($\varphi=\arccos\sqrt{2/3}$); максимум $y=4\sqrt{3}/9$ при $x=2\sqrt{6}/9$ ($\varphi=\arcsin\sqrt{2/3}$);

2) трехлепестковая роза; прямые $y=0$, $y=\pm\sqrt{3}x$ — оси симметрии; $(0;0)$ — точка самопересечения; максимумы $r=1$ при $\varphi=0$, $\pm2\pi/3$; максимум $x=1$ при $y=0$ ($\varphi=0$), минимумы $x=-9/16$ при $y=\pm3\sqrt{15}/16\approx\pm0{,}73$ ($\varphi=\pm\arccos(-\sqrt{6}/4)$); максимум $y\approx0{,}185$ и минимум $y\approx-0{,}185$ при $x\approx0{,}63$, максимум $y\approx0{,}88$ и минимум $y\approx-0{,}88$ при $x=-0{,}44$;

3) $(0;0)$ — центр симметрии, точка самопересечения и точка перегиба; асимптоты $y=\pm x-1/\sqrt{2}$ при $x\to+\infty$ и $y=\pm x+1/\sqrt{2}$ при $x\to-\infty$;

4) прямые $x=0$ и $y=\pm x/\sqrt{3}$ — оси симметрии; асимптоты $y=0$, $y=\pm x\sqrt{3}$; минимумы $r=1$ при $\varphi=\pi(1+4k)/6$, $k=0,1,2$; минимум $x\approx0{,}83$ и максимум $x\approx-0{,}83$ при $y\approx0{,}68$; максимум $y\approx-1$ при $x=0$;

5) кривая из задачи 29, 8) без изолированной точки $(0;0)$;

6) кардиоида; ось абсцисс — ось симметрии; $(0;0)$ — точка возврата; $(2;0)$, $(0;\pm1)$ — точки пересечения с осями координат; максимум $x=2$ при $y=0$, минимумы $x=-1/4$ при $y=\pm\sqrt{3}/4$ ($\varphi = \pm 2\pi/3$); максимум $y=3\sqrt{3}/4$ и минимум $y=-3\sqrt{3}/4$ при $x=3/4$ ($\varphi=\pm\pi/3$);

7) часть кривой из задачи 29, 7);

8) кривая, симметричная кривой 7) относительно оси ординат;

9) ось абсцисс — ось симметрии; асимптота $x=2$; минимум $x=1$ при $y=0$ ($\varphi=0$);

10) $(0;0)$ — центр симметрии; асимптоты $x=\pm1$; точки пересечения с осями координат $(\pm1;0)$, $(0;0)$; максимум $x=\sqrt{2}$ при $y=\sqrt{2}$, минимум $x=-\sqrt{2}$ при $y=-\sqrt{2}$; максимум $y\approx 0{,}23$ при $x\approx-0{,}5$, минимум $y\approx-0{,}23$ при $x\approx 0{,}5$; точки перегиба $(0;0)$ и (приближенно) $(\pm1{,}35;\pm2{,}58)$.

§ 22. Задачи на нахождение наибольших и наименьших значений

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В прикладных задачах при нахождении наибольшего или наименьшего значения дифференцируемой функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ или на интервале $(a;b)$ уравнение $f'(x)=0$ обычно имеет единственное решение $x_0\in(a;b)$, причем производная $f(x)$ имеет один и тот же знак на интервале $(a;x_0)$ и противоположный знак на интервале $(x_0;b)$. В этом случае число $f(x_0)$ является не только локальным экстремумом функции f, но и ее наибольшим значением на интервале $(a;b)$ или отрезке $[a;b]$, если производная при переходе через точку x_0 меняет знак плюс на минус, и наименьшим значением, если производная при переходе через точку x_0 меняет знак минус на плюс.

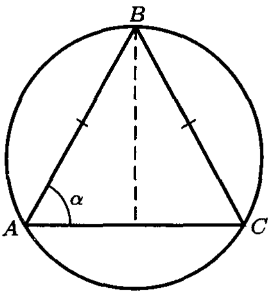

Рис. 22.1

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Среди всех равнобедренных треугольников, вписанных в данный круг, найти треугольник с наибольшим периметром.

▲ Пусть треугольник ABC вписан в круг радиуса R, причем $AB=BC$ (рис. 22.1). Обозначим $\angle BAC=\alpha$. По теореме синусов $AB=BC=2R\sin\alpha$, $AC=2R\sin(\pi-2\alpha)=2R\sin 2\alpha$, поэтому периметр треугольника ABC будет равен

$$P(\alpha) = 2R(2\sin\alpha + \sin 2\alpha),$$

где $0 < \alpha < \pi/2$. Отсюда находим

$$P'(\alpha) = 4R(\cos 2\alpha + \cos\alpha) = 4R(2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1) = \\ = 4R(2\cos\alpha - 1)(\cos\alpha + 1).$$

Уравнение $P'(\alpha) = 0$ имеет на интервале $(0;\pi/2)$ единственное решение $\alpha = \pi/3$, причем $P'(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0;\pi/3)$ и $P'(\alpha) < 0$ при $\alpha \in (\pi/3;\pi/2)$. Следовательно, число $P(\pi/3)$ является наибольшим значением функции $P(\alpha)$ на интервале $(0;\pi/2)$. Но если $\angle BAC = \alpha = \pi/3$, то $\angle BCA = \pi/3$ и, значит, $\angle ABC = \pi/3$, т. е. ABC — равносторонний треугольник. Итак, среди всех равнобедренных треугольников, вписанных в данный круг, наибольший периметр имеет равносторонний треугольник. ▲

Пример 2. Определить размеры закрытой коробки объема v с квадратным основанием, на изготовление которой расходуется наименьшее количество материала.

▲ Пусть x — сторона основания коробки, h — высота коробки, S — ее полная поверхность. Тогда

$$S = 2x^2 + 4xh, \quad v = x^2h,$$

откуда

$$S(x) = 2x^2 + 4v/x$$

и, следовательно,

$$S'(x) = 4(x - v/x^2).$$

Уравнение $S'(x) = 0$ при $x > 0$ имеет единственное решение $x_0 = \sqrt[3]{v}$, причем при переходе через точку x_0 функция $S'(x)$ меняет знак минус на плюс. Следовательно, x_0 — точка минимума функции $S(x)$, а число $S(x_0)$ является наименьшим значением этой функции при $x > 0$. Из формулы $v = x^2h$ следует, что если $x = \sqrt[3]{v}$, то $h = \sqrt[3]{v}$. Таким образом, высота коробки должна быть равна стороне основания, т. е. коробка должна быть кубом с ребром $\sqrt[3]{v}$. ▲

Пример 3. Найти радиус основания цилиндра наибольшего объема, вписанного в шар радиуса R.

▲ Пусть r и h — соответственно радиус основания и высота цилиндра, вписанного в шар радиуса R, v — объем цилиндра (рис. 22.2). Тогда

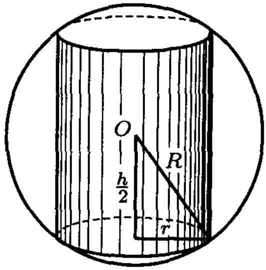

Рис. 22.2

$$v = \pi r^2 h, \quad (h/2)^2 + r^2 = R^2,$$

откуда

$$v = 2\pi r^2\sqrt{R^2 - r^2}, \quad \text{где} \quad 0 < r < R.$$

Обозначим $t = r^2$, тогда

$$v = 2\pi t\sqrt{R^2 - t}, \quad 0 < t < R^2.$$

Рассмотрим функцию

$$v^2 = 4\pi^2 t^2 (R^2 - t).$$

Так как $v \geqslant 0$, то функция $v(t)$ имеет на интервале $(0; R^2)$ те же точки экстремума, что и функция

$$v^2/4\pi^2 = t^2(R^2 - t) = f(t).$$

Найдем критические точки функции $f(t)$, решая уравнение

$$f'(t) = 2tR^2 - 3t^2 = 0.$$

Это уравнение имеет на интервале $(0; R^2)$ единственное решение $t_0 = 2R^2/3$, причем точка t_0 является точкой максимума функции, а число $f(t_0)$ — наибольшим значением функции $f(t)$ на интервале $(0; R^2)$. Следовательно, при $r = \sqrt{t_0} = R\sqrt{2/3}$ функция v принимает наибольшее значение, т. е. радиус основания цилиндра, вписанного в шар радиуса R и имеющего наибольший объем, равен $R\sqrt{2/3}$. ▲

ЗАДАЧИ

1. Среди всех прямоугольников, имеющих данную площадь S, найти прямоугольник:

1) с наименьшим периметром; 2) с наименьшей диагональю.

2. Найти наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в круг радиуса R.

3. Найти на гиперболе $x^2/2 - y^2 = 1$ точку, ближайшую к точке $(3; 0)$.

4. Найти на параболе $y = x^2$ точку, ближайшую к точке $A(2; 1/2)$.

5. Найти наибольшую площадь прямоугольника, две вершины которого лежат на осях Ox и Oy прямоугольной системы координат, третья — в точке $(0; 0)$, а четвертая — на параболе $y = 3 - x^2$.

6. Найти угловой коэффициент прямой, проходящей через точку $A(1; 2)$ и отсекающей от первого координатного угла треугольник наименьшей площади.

7. Найти длину боковой стороны трапеции, имеющей наименьший периметр среди всех равнобедренных трапеций с заданной площадью S и углом α между боковой стороной и нижним основанием.

8. Через точку $A(2; 1/4)$ проводятся прямые, пересекающие положительные полуоси в точках B и C. Найти уравнение той прямой, для которой отрезок BC имеет наименьшую длину.

9. Найти острые углы прямоугольного треугольника, имеющего наибольшую площадь среди всех треугольников, у которых сумма длин одного из катетов и гипотенузы постоянна.

10. Найти наименьшую длину отрезка, который делит равносторонний треугольник со стороной a на две равновеликие фигуры.

11. Определить углы треугольника ABC с наибольшей площадью, если задана длина его основания BC и известно, что угол BAC равен α.

12. Найти стороны прямоугольника наибольшей площади, вписанного в эллипс

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$$

так, что стороны прямоугольника параллельны осям эллипса.

13. Вычислить наибольшую площадь трапеции, вписанной в полукруг радиуса R так, что нижним основанием трапеции служит диаметр полукруга.

14. Сечение тоннеля имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Определить радиус полукруга, при котором площадь сечения будет наибольшей, если периметр сечения равен p.

15. Через какую точку эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ следует провести касательную, чтобы площадь треугольника, образованного этой касательной и положительными полуосями Ox и Oy, была наименьшей?

16. Лист картона имеет форму прямоугольника со сторонами a и b. Вырезая по углам этого прямоугольника квадраты и сгибая выступающие части крестообразной фигуры, получим открытую сверху коробку, высота которой равна стороне квадрата. Какой должна быть сторона квадрата, чтобы объем коробки был наибольшим?

17. Из трех досок одинаковой ширины нужно сколотить желоб. При каком угле наклона боковых стенок площадь поперечного сечения желоба будет наибольшей?

18. Найти высоту правильной треугольной призмы наибольшего объема, вписанной в шар радиуса R.

19. Круг радиуса R разделен на два сегмента прямой l, отстоящей от центра круга на расстояние h. Среди всех прямоугольников, вписанных в меньший из этих сегментов, найти прямоугольник с наибольшей площадью.

20. Найти наибольший объем цилиндра, периметр осевого сечения которого равен a.

21. Вычислить наибольший объем цилиндра, полная поверхность которого равна S.

22. Консервная банка имеет цилиндрическую форму. Найти наиболее выгодные размеры банки, т. е. определить отношение диаметра основания к высоте цилиндра, имеющего при заданной полной поверхности наибольший объем.

23. Каким должен быть котел, состоящий из цилиндра, завершенного полусферами, со стенками заданной толщины, чтобы при данной вместимости v на него пошло наименьшее количество материала?

24. Определить отношение радиуса основания к высоте цилиндра, имеющего при данном объеме наименьшую полную поверхность.

25. Найти наибольшую полную поверхность цилиндра, вписанного в шар радиуса R.

26. Из всех цилиндров, вписанных в куб с ребром a так, что ось каждого цилиндра совпадает с диагональю куба, а окружности оснований касаются граней куба, найти цилиндр наибольшего объема.

27. Найти высоту конуса наибольшего объема, вписанного в шар радиуса R.

28. Найти высоту конуса наименьшего объема, описанного около шара радиуса R.

29. В конус, радиус основания которого равен R, а высота H, вписан цилиндр наибольшего объема. Найти радиус основания и высоту этого цилиндра.

30. Из круглого листа жести вырезают сектор и свертывают его в коническую воронку. Каким должен быть угол сектора, чтобы воронка имела наибольший объем?

31. Найти наименьшую боковую поверхность конуса, имеющего объем v.

32. Найти наибольший объем конуса с данной образующей l.

33. Найти наименьший объем конуса, описанного около полушара радиуса r (предполагается, что основания полушара и конуса лежат в одной плоскости и концентричны).

34. Рассмотрим пучок прямых, проходящих через точку $M(a;b)$, где $a > 0$, $b > 0$, и пересекающих положительные полуоси Ox и Oy. Найти наименьшую длину отрезка PQ, где P и Q — точки пересечения прямой пучка с положительными полуосями.

35. Камень брошен с заданной начальной скоростью под углом α к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, при каком α дальность полета камня будет наибольшей.

36. Внутреннее сопротивление гальванического элемента равно r. При каком внешнем сопротивлении мощность тока, получаемого от этого элемента во внешней цепи, будет наибольшей?

37. В чашку, которая имеет форму полушара радиуса R, опущен однородный стержень длиной l, где $2R < l \leqslant 4R$. Найти положение равновесия стержня.

38. К реке, ширина которой равна a, под прямым углом построен канал шириной b. Найти наибольшую длину бревна, которое можно провести из реки в этот канал.

39. Чтобы уменьшить трение жидкости о стенки канала, площадь, смачиваемая водой, должна быть возможно меньшей. Показать, что лучшей формой открытого прямоугольного канала с заданной площадью поперечного сечения является такая, при которой ширина канала в два раза больше его высоты.

40. Из круглого бревна вытесывается балка с прямоугольным поперечным сечением. Считая, что прочность балки пропорциональна ah^2, где a — основание, h — высота прямоугольника, найти такое отношение h/a, при котором балка будет иметь наибольшую прочность.

41. Сосуд с вертикальной стенкой высоты h стоит на горизонтальной плоскости. Из отверстия в стенке сосуда бьет струя. Определить положение отверстия, при котором дальность струи будет наибольшей, если скорость вытекающей жидкости равна $\sqrt{2gx}$, где x — глубина отверстия (*закон Торричелли*).

42. Завод A нужно соединить шоссейной дорогой с прямолинейной железной дорогой, на которой расположен поселок B. Расстояние AC от завода до железной дороги равно a, а расстояние BC по железной дороге равно b. Стоимость перевозок грузов по шоссе в k раз ($k > 1$) выше стоимости перевозок по железной дороге. В какую точку D отрезка BC нужно провести шоссе от завода, чтобы стоимость перевозок грузов от завода A к поселку B была наименьшей?

43. На какой высоте над центром круглого стола радиуса R следует поместить электрическую лампочку, чтобы освещенность края стола была наибольшей?

44. Светящаяся точка расположена на линии центров двух шаров и лежит вне этих шаров. При каком положении светящейся точки сумма площадей освещенных частей поверхностей шаров будет наибольшей?

45. Груз, лежащий на горизонтальной плоскости P, нужно сдвинуть с места силой, приложенной к этому грузу. Определить угол, образуемый этой силой с плоскостью P, при котором величина силы будет наименьшей, если коэффициент трения груза равен k.

46. Наблюдатель находится напротив картины, закрепленной на вертикальной стене. Нижний край картины расположен выше уровня глаз наблюдателя на a, верхний край — на b. На каком расстоянии от стены должен стоять наблюдатель, чтобы угол, под которым он видит картину, оказался наибольшим?

47. Точка $A(x_0; y_0)$ расположена внутри параболы $y^2 = 2px$, $p > 0$, точка B — на самой параболе, F — ее фокус. Доказать, что длина ломаной ABF будет наименьшей, если отрезок AB параллелен оси параболы, а угол FBA делится нормалью к параболе в точке B пополам (*принцип параболического зеркала*).

48. Точки A и B расположены соответственно в верхней и нижней полуплоскостях прямоугольной системы xOy. Частица движется по ломаной AMB, где M — точка оси Ox. Скорости движения частицы в верхней и нижней полуплоскостях соответственно равны v_1 и v_2. Доказать, что время движения частицы будет наименьшим, если $\sin\alpha/\sin\beta = v_1/v_2$, где α, β — углы, образуемые отрезками AM и BM с нормалью к оси Ox (в оптике эти углы называют соответственно углом падения и углом отражения).

ОТВЕТЫ

1. 1) Квадрат со стороной $\sqrt{S}$; 2) квадрат со стороной $\sqrt{S}$.
2. $2R^2$. **3.** $(2;1)$, $(2;-1)$. **4.** $(1;1)$. **5.** 2. **6.** -2.
7. $\sqrt{s/\sin\alpha}$. **8.** $2x+4y=5$. **9.** $\pi/3$ и $\pi/6$. **10.** $a/\sqrt{2}$.
11. $(\pi-\alpha)/2$, $(\pi-\alpha)/2$. **12.** $a\sqrt{2}$, $b\sqrt{2}$. **13.** $R^2\sqrt{27}/4$.
14. $p/(\pi+4)$. **15.** $(a/\sqrt{2}; b/\sqrt{2})$. **16.** $(a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2})/6$.
17. $\pi/3$. **18.** $2R/\sqrt{3}$.

19. Расстояние от центра круга до стороны прямоугольника, параллельной прямой l, равно $(h+\sqrt{8r^2+h^2})/4$.

20. $\pi a^3/216$. **21.** $S^{3/2}/(3\sqrt{6\pi})$. **22.** 1.

23. Котел должен иметь форму шара с внутренним радиусом $\sqrt[3]{3v/(4\pi)}$.

24. $1/2$. **25.** $\pi(\sqrt{5}+1)R^2$.

26. Высота цилиндра $a/\sqrt{3}$, радиус его основания $a/\sqrt{6}$.

27. $4R/3$. **28.** $4R$.

29. Радиус основания $2R/3$, высота $H/3$.

30. $2\pi\sqrt{2/3}$. **31.** $3^{7/6}(\pi v^2/2)^{1/3}$. **32.** $2\pi l^3\sqrt{3}/27$.
33. $\pi r^3\sqrt{3}/2$. **34.** $(a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}$. **35.** $\pi/4$. **36.** r.

37. Угол наклона стержня к горизонту равен

$$\arccos((l+\sqrt{l^2+128R^2})/16R).$$

38. $(a^{2/3}+b^{2/3})^{2/3}$. **40.** $\sqrt{2}$. **41.** $h/2$.

42. $BD = b - a/\sqrt{k^2-1}$, если $b > a/\sqrt{k^2-1}$; $BD = 0$, если $b \leqslant a/\sqrt{k^2-1}$.

43. $R/\sqrt{2}$.

44. $r_1^2/r_2^2 = R_1^3/R_2^3$, где r_1 и r_2 — расстояния от светящейся точки до центров шаров с радиусами R_1 и R_2 соответственно.

45. $\operatorname{arctg} k$. **46.** $\sqrt{ab}$.

§ 23. Численное решение уравнений

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Интервал, содержащий только один корень*) (одно решение) уравнения

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

называют *интервалом изоляции* этого корня. *Отделить корни* уравнения — значит указать для каждого из них интервал изоляции.

Метод *деления пополам* («*половинного деления*», «*взятия в вилку*») используют для нахождения первого (часто говорят — нулевого) приближения к корню уравнения, а также для нахождения достаточно малого интервала изоляции.

Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, $(a;b)$ — интервал изоляции корня ξ уравнения $f(x) = 0$. Определим знак $f(c)$ в середине c отрезка $[a;b]$ (если $f(c) = 0$, то корень $\xi = c$ найден), и пусть $[a_1;b_1]$ — тот из отрезков $[a;c]$, $[c,b]$, на концах которого функция $f(x)$ имеет значения разных знаков. Аналогично выберем отрезок $[a_2;b_2]$, вдвое меньший, чем $[a_1;b_1]$, и т. д. В результате получим последовательность вложенных отрезков $\{[a_n;b_n]\}$, на концах которых функция $f(x)$ принимает значения разных знаков, длина n-го отрезка равна $(b-a)/2^n$, или на каком-то шаге найдем корень ξ. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi$$

и

$$0 \leqslant \xi - a_n \leqslant (b-a)/2^n, \quad 0 \leqslant b_n - \xi \leqslant (b-a)/2^n. \tag{2}$$

По этим формулам можно определить число шагов, достаточное для достижения заданной точности.

Метод *итераций* (метод *последовательных приближений*) используют для нахождения приближенных значений корней уравнения с большой точностью. Этот метод состоит в следующем.

Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет на $[a;b]$ единственный корень ξ. Для этого уравнения подбирают равносильное ему на $[a;b]$ уравнение вида

$$x = \varphi(x) \tag{3}$$

и значение $x_0 \in [a;b]$ так, чтобы была определена последовательность

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad n \in N, \tag{4}$$

и чтобы эта последовательность сходилась к корню ξ.

Достаточные условия сходимости процесса итераций таковы.

Пусть функция φ дифференцируема на $[a;b]$ и

$$|\varphi'(x)| \leqslant k < 1, \quad x \in [a;b]. \tag{5}$$

*) В этом параграфе всюду, если не оговорено иное, речь идет только о действительных корнях уравнения.

Пусть $x_0 \in [a;b]$ и $x_n = \varphi(x_{n-1}) \in [a;b]$ для любого $n \in N$. Тогда уравнение (3) имеет на $[a;b]$ единственный корень ξ и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi.$$

Для существования последовательности (4) при условии (5) достаточно выбрать

$$x_0 \in [a + d/3; b - d/3], \quad \text{где} \quad d = b - a.$$

Для оценки погрешности метода итераций используют неравенства

$$|\xi - x_n| \leqslant \frac{k}{1-k}\,|x_n - x_{n-1}|, \quad n \in N; \tag{6}$$

здесь и ниже k берется из условия (5). Для оценки числа n итераций при заданной погрешности можно использовать формулу

$$|\xi - x_n| \leqslant \frac{k^n}{1-k}\,|x_1 - x_0|, \quad n \in N. \tag{7}$$

При заданной погрешности Δ процесс итераций продолжают до получения оценки

$$|x_n - x_{n-1}| \leqslant \frac{1-k}{k}\,\Delta, \tag{8}$$

тогда заведомо $|\xi - x_n| \leqslant \Delta$.

Вычисление приближений x_n обычно происходит с округлением, и погрешность округления следует учитывать при нахождении погрешности приближения.

В сходящемся итерационном процессе последовательность $|\xi - x_n|$ монотонно стремится к нулю.

Пусть функция φ удовлетворяет условию (5) и $\varphi'(x) \geqslant 0$ на $[a;b]$; тогда последовательность (4) монотонно сходится к корню ξ. Если же $\varphi'(x) \leqslant 0$ на $[a;b]$, то одна из последовательностей $\{x_{2k}\}$ и $\{x_{2k-1}\}$ возрастает, а другая убывает. В этом случае корень ξ лежит между двумя соседними членами последовательности x_n и x_{n+1} для каждого $n \in N$, следовательно, установившиеся десятичные знаки приближения x_n принадлежат и корню ξ.

При выборе уравнения (3) следует учитывать, что чем меньше величина k из условия (5), тем меньше итераций требуется для достижения заданной точности (как говорят, тем быстрее сходится процесс итераций).

Ряд итерационных формул для решения уравнения $f(x) = 0$ получают из формулы Тейлора для функции f или функции, обратной f.

Пусть функция f дифференцируема на $[a;b]$ и

$$0 < m_1 \leqslant |f'(x)| \leqslant M_1, \quad x \in [a;b]. \tag{9}$$

Пусть ξ — корень уравнения $f(x) = 0$ на $(a;b)$ (единственный в силу (9)); тогда при $x \in [a;b]$ имеем $f(x) = f(\xi) + f'(\theta(x))(x - \xi)$, откуда

$$\xi = x - f(x)/f'(\theta(x)), \tag{10}$$

где $\theta(x)$ лежит между ξ и x. Выбрав $x_0 \in [a;b]$ и подставив в (10) x_{n-1} вместо x, x_n вместо ξ и какое-либо приближенное выражение вместо $f'(\theta(x))$, получим итерационную формулу вида (4).

Пусть в дополнение к указанному функция f дважды дифференцируема на $[a;b]$ и

$$0 < m_2 \leqslant |f''(x)| \leqslant M_2, \quad x \in [a;b], \tag{11}$$

и пусть x_0 выбрано так, что

$$f(x_0)f''(x_0) > 0. \tag{12}$$

Подставляя в (10) $f'(x)$ вместо $f'(\theta(x))$, приходим к формуле

$$x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1})/f'(x_{n-1}), \quad n \in N, \tag{13}$$

определяющей последовательность $\{x_n\}$, которая монотонно сходится к корню ξ. Формула (13) описывает *метод Ньютона* (*метод касательных*).

Для оценки погрешности (без учета погрешности округления) в методе Ньютона используют формулы

$$|\xi - x_n| \leqslant |f(x_n)|/m_1, \quad n \in N, \tag{14}$$

$$|\xi - x_n| \leqslant \frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2, \quad n \in N, \tag{15}$$

где m_1 удовлетворяет условию (9), а M_2 — условию (14).

Если x_0 выбрано так, что

$$\frac{M_2}{2m_1}|\xi - x_0| < 1, \tag{16}$$

то процесс итераций сходится быстро, а если $M_2/(2m_1) \leqslant 1$, то число верных десятичных знаков на каждом шаге удваивается.

Заменяя в (16) $f'(\theta(x))$ на $(f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$, придем к формуле

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(x_{n-1}) - f(x_0)}(x_{n-1} - x_0), \quad n \in N, \tag{17}$$

или, что то же,

$$x_n = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(x_{n-1}) - f(x_0)}(x_{n-1} - x_0), \quad n \in N, \tag{18}$$

для построения последовательности, монотонно сходящейся к корню ξ. Формулы (17), (18) описывают *метод хорд* (*метод ложного положения*). Оценку погрешности приближения по методу хорд можно получить по формуле (14), а также по формуле

$$|\xi - x_n| \leqslant \frac{M_1 - m_1}{m_1}|x_n - x_{n-1}|, \quad n \in N. \tag{19}$$

Упрощенный метод Ньютона применяют, когда производная $f'(x)$ мало изменяется на отрезке $[a;b]$. В этом случае в (10) заменяют

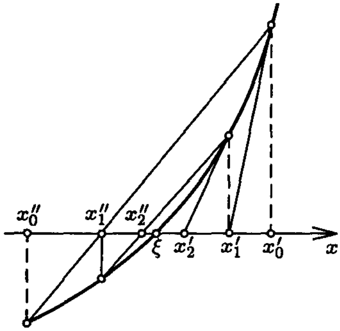

Рис. 23.1

$f'(\theta(x))$ на $f'(x_0)$; тогда формула

$$x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1})/f'(x_0), \quad n \in N, \tag{20}$$

задает последовательность, сходящуюся к корню ξ. Погрешность приближений можно определять по формулам (14), (19).

Комбинированный метод получается объединением метода хорд и метода касательных. В силу (9) и (11) производные $f'(x)$ и $f''(x)$ не меняют знаков на отрезке $[a;b]$; пусть для определенности

$$f'(x) > 0, \quad f''(x) > 0. \tag{21}$$

Выберем x_0' и x_0'' из $[a;b]$ так, что $f(x_0'') < 0$, а $f(x_0') > 0$ (рис. 23.1); тогда $x_0'' < \xi < x_0'$. Последовательность $\{x_n'\}$ зададим по методу касательных, а последовательность $\{x_n''\}$ — по методу хорд:

$$x_n' = x_{n-1}' - f(x_{n-1}')/f'(x_{n-1}'), \quad n \in N, \tag{22}$$

$$x_n'' = x_{n-1}'' - \frac{f(x_{n-1}'')}{f(x_{n-1}'') - f(x_{n-1}')}\,(x_{n-1}'' - x_{n-1}'), \quad n \in N. \tag{23}$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} x_n' = \lim_{n\to\infty} x_n'' = \xi \quad \text{и} \quad x_n'' < \xi < x_n', \tag{24}$$

$$0 < \xi - x_n'' < x_n' - x_n'', \quad n \in N. \tag{25}$$

При вычислениях значения x_n'' можно округлять с недостатком, а значения x_n' — с избытком. Процесс прекращают, когда правая часть в (19) будет меньше заданной погрешности. За приближенное значение корня часто принимают $(x_n' + x_n'')/2$.

Аналогично строится последовательность и при других сочетаниях знаков $f'(x)$ и $f''(x)$. В каждом случае последовательность $\{x_n'\}$ по методу касательных строят от начального значения x_0', удовлетворяющего условию (12).

Указанные итерационные последовательности, построенные на основе формулы (10), сходятся быстро, если производная $f'(x)$ достаточно велика (см. (14), (15), (19)).

Отправляясь от формулы Тейлора с остаточным членом более высокого порядка, чем первый, можно получать итерационные последовательности, сходящиеся более быстро, чем указанные.

Порядком метода итераций называют число τ такое, что для итерационной последовательности, сходящейся к корню ξ, верна оценка

$$|\xi - x_{n+1}| \leqslant C|\xi - x_n|^\tau, \quad n \in N.$$

Метод Ньютона имеет порядок $\tau = 2$.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Найти приближенное значение наименьшего корня уравнения: 1) $2x^3 - 8x + 1 = 0$; 2) $e^{x-2} - x = 0$.

▲ 1) Обозначим $f(x) = 2x^3 - 8x + 1$. Эта функция возрастает при $x < -2/\sqrt{3}$ $(f'(x) = 6x^2 - 8 > 0)$, $f(-2) = 1 > 0$, $f(-5/2) = -41/4 < 0$. Значит, при $x < -2$ есть решение уравнения $f(x) = 0$, оно единственно и лежит на интервале $(-5/2; -2)$. Обозначим его ξ.

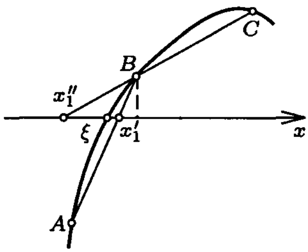

Рис. 23.2

Для уменьшения интервала изоляции ξ воспользуемся тем, что функция $f(x)$ выпукла вверх при $x < 0$ (так как $f''(x) = 12x < 0$). В таблице содержатся координаты трех точек A, B, C графика f (рис. 23.2). В силу выпуклости функции часть AB графика лежит выше и левее отрезка AB. Значит, если x_1' — абсцисса точки пересечения отрезка AB с осью Ox, то $\xi < x_1'$. В уравнение прямой AB

$$\frac{y + 41/4}{1 + 41/4} = \frac{x + 5/2}{-2 + 5/2}$$

подставляем $y = 0$ и находим $x_1' = -92/45$.

По той же причине корень ξ лежит правее точки пересечения с Ox прямой BC, т. е. $\xi > x_1''$ (рис. 23.2). В уравнение этой прямой

$$\frac{y - 1}{7 - 1} = \frac{x + 2}{-1 + 2}$$

подставляем $y = 0$ и находим $x_1'' = -13/6$. Таким образом, найден меньший интервал изоляции:

$$-13/6 < \xi < -92/45.$$

За приближенное значение ξ^* корня можно взять середину интервала

$$\xi^* = \frac{1}{2}\left(-\frac{13}{6} - \frac{92}{45}\right) = -\frac{379}{180}$$

с погрешностью, меньшей половины длины интервала

$$|\xi^* - \xi| < \frac{1}{2}\left(-\frac{92}{45} + \frac{13}{6}\right) = \frac{11}{180} < 0{,}062.$$

2) Рассмотрим функцию $f(x) = e^{x-2} - x$. Она положительна при $x \leqslant 0$, поэтому здесь данное уравнение решений не имеет. Наименьшее значение функция f принимает при $x = 2$ и $f(2) = -1 < 0$. Поскольку $f(0) = e^{-2} > 0$ и поскольку f строго убывает на $[0; 2]$ (так как $f'(x) = e^{x-2} - 1 < 0$ при $0 \leqslant x < 2$), данное уравнение имеет единственный корень на $(0; 2)$, и он наименьший. За интервал изоляции для этого корня можно взять $(0; 1)$, так как $f(1) = e^{-1} - 1 < 0$. Для

уменьшения интервала воспользуемся возрастанием функции e^{x-2} на $[0;1]$ и ее выпуклостью вниз. Записав уравнение в виде $x = e^{x-2}$, видим, что искомый корень — это абсцисса точки пересечения графиков $y = x$ и $y = e^{x-2}$ (рис. 23.3). В силу возрастания $y = e^{x-2}$ ее график лежит выше прямой, проведенной через $A(0; e^{-2})$ параллельно Ox. Значит, корень ξ больше абсциссы точки пересечения этой прямой с $y = x$:

$$x_1'' = e^{-2} < \xi.$$

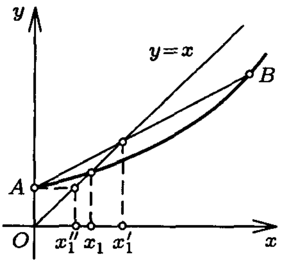

Рис 23.3

В силу выпуклости вниз график $y = e^{x-2}$ лежит ниже отрезка AB, где $B(1; e^{-1})$. Поэтому и точка его пересечения с графиком $y = x$ лежит ниже точки пересечения прямой AB с этим графиком. В уравнение прямой AB

$$\frac{y - e^{-2}}{e^{-1} - e^{-2}} = x$$

подставляем $y = x$ и находим

$$x_1' = 1/(e^2 - e + 1), \quad \xi < x_1'.$$

Итак, найден лучший интервал изоляции

$$e^{-2} < \xi < 1/(e^2 - e + 1).$$

Для перехода к числам оценим левую и правую грани соответственно снизу и сверху:

$$0{,}135 < e^{-2} < \xi < 1/(e^2 - e + 1) < 0{,}177.$$

За приближенное значение корня возьмем середину интервала

$$\xi^* = (0{,}135 + 0{,}177)/2 = 0{,}156$$

с погрешностью $|\xi - \xi^*| < (0{,}177 - 0{,}135)/2 = 0{,}021$. ▲

Пример 2. 1) Указать сходящийся итерационный процесс для вычисления наименьшего корня уравнения $2x^3 - 8x + 1 = 0$.

2) Найти с помощью итераций приближенное значение наименьшего корня уравнения $x - \ln x - 2 = 0$ с погрешностью не более чем $5 \cdot 10^{-5}$.

▲ 1) В примере 1 был найден интервал $(-13/6; -92/45)$ изоляции наименьшего корня ξ данного уравнения. На этом интервале уравнение равносильно каждому из следующих уравнений:

$$x = \frac{2x^3 + 1}{8} = \varphi_1(x), \quad x = \frac{8x - 1}{2x^2} = \varphi_2(x), \quad x = \sqrt[3]{\frac{8x - 1}{2}} = \varphi_3(x).$$

Для производных $\varphi_k'(x)$ $(k = 1, 2, 3)$ на отрезке $[-13/6; -92/45]$ имеем оценки

$$|\varphi_1'(x)| = 3x^2/4 > 3/4 \cdot 4 = 3 > 1,$$

$$|\varphi_2'(x)| = \left|\frac{1 - 4x}{x^3}\right| \geqslant \frac{1 + 4 \cdot 13/6}{(13/6)^3} > 0{,}95, \quad |f_3'(x)| = \frac{4}{3}\left(\frac{2}{8x - 1}\right)^{2/3} \leqslant 0{,}32.$$

Ясно, что для построения итерационного процесса следует выбрать третье уравнение $x = \sqrt[3]{(8x-1)/2}$. Правая часть этого уравнения удовлетворяет условию (5) с $k = 0{,}32$. Если в качестве нулевого приближения взять полученное в примере 1 значение ξ^*, то последовательность (4) будет определена и будет сходиться к корню ξ.

2) Левая часть данного уравнения положительна при $x = 1/e^2$ и отрицательна при $x = 1$. Производная левой части отрицательна при $0 < x < 1$, поэтому на интервале $(0; 1)$ уравнение имеет и притом только один корень ξ, он и является наименьшим. Данное уравнение, записанное в виде $x = \ln x + 2$, непригодно для построения итерационного процесса, так как $(\ln x + 2)' = 1/x > 1$ при $x \in (0; 1)$. Преобразуем уравнение к знакомому по примеру 1 виду

$$x = e^{x-2}. \tag{26}$$

Здесь $(e^{x-2})' = e^{x-2} \leqslant e^{-1} < 1$ при $x \in [0; 1]$, и, значит, для уравнения (26) итерационный процесс будет сходиться. В примере 1 были найдены приближенное значение наименьшего корня $\xi^* = 0{,}156$ и его интервал изоляции $(0{,}135; 0{,}177)$. На этом интервале

$$(e^{x-2})' \leqslant e^{-1{,}823} < 0{,}162 = k$$

(работаем на обычном калькуляторе с математическими функциями). Вычисляем первое приближение:

$$x_1 = e^{\xi^*-2} = 0{,}1581834...$$

Видно, что $\xi^* < \xi$. Итерационная последовательность $x_n = e^{x_{n-1}-2}$, $n \in N$, является возрастающей. Округляя с недостатком, примем $x_1 = 0{,}158183$ и найдем согласно (7) число итераций, требуемое для достижения заданной точности:

$$\frac{0{,}162^n}{1-0{,}162}(0{,}158183 - 0{,}156) \leqslant 5 \cdot 10^{-5},$$

$$0{,}162^n \leqslant 1{,}919 \cdot 10^{-2}, \quad 1{,}62 \cdot 10^{-n} \leqslant 1{,}919 \cdot 10^{-2};$$

проверяя $n = 2$ и $n = 3$, находим, что $n = 3$. При этом n будем иметь оценку согласно (7):

$$0 < \xi - x_3 < 1{,}11 \cdot 10^{-5}. \tag{27}$$

Результаты вычислений приведены в следующей таблице:

n	x_n	e^{x_n-2}
0	0,156	0,158183
1	0,158183	0,158529
2	0,158529	0,158584
3	0,158584	

Округляя еще раз по недостатку, можно взять $\xi^* = 0{,}15858$ с погрешностью, заведомо не превышающей $2 \cdot 10^{-5}$. Можно также заметить, что из (27) следуют неравенства

$$0{,}158584 < \xi < 0{,}158596$$

(с учетом погрешности округления), поэтому выбор приближенного значения $\xi^* = 0{,}15859$ дает большую точность. ▲

Пример 3. Найти наименьший корень уравнения $2x^3 - 8x + 1 = 0$ с погрешностью, меньшей, чем $5 \cdot 10^{-5}$.

▲ В примере 1 был найден интервал $(-13/6; -92/45)$ изоляции наименьшего корня ξ. Для уменьшения этого интервала воспользуемся комбинированным методом. Поскольку

$$f'(x) = 6x^2 - 8 > 16 > 0,$$
$$f''(x) = 12x < -24 < 0,$$

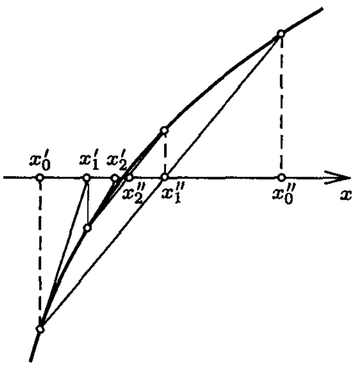

Рис. 23.4

итерационную последовательность по методу касательных построим от начального приближения $x_0' = -13/6$:

$$x_n' = x_{n-1}' - f(x_{n-1}')/f'(x_{n-1}'),\quad n \in N,$$

а для последовательности по методу хорд возьмем за начальное приближение $x_0'' = -92/45$, остальные члены последовательности вычисляем, используя (18), по формуле

$$x_n'' = x_{n-1}' - \frac{f(x_{n-1}')}{f(x_{n-1}'') - f(x_{n-1}')}(x_{n-1}'' - x_{n-1}'), \quad n \in N,$$

подставляя в (18) на каждом этапе вместо x_0 значение x_{n-1}' (рис. 23.4). Вычисления проводим, например, по схеме, указанной в следующей таблице:

n	0	1	2
x_n'	$-13/6$	$-2{,}067034$	$-2{,}059829$
x_n''	$-92/45$	$-2{,}058686$	$-2{,}059786$
$f(x_n')$	$-217/108$	$-0{,}127069$	
$f'(x_n')$	$121/6$	$17{,}635777$	
$f(x_n'')$	$0{,}265011$	$0{,}019292$	
p_n	$-217/2178$	$-0{,}007205$	
q_n	$-0{,}664269$	$-0{,}868189$	
$x_n'' - x_n'$	$0{,}122222$	$-0{,}008348$	

Здесь $p_n = f(x_n')/f'(x_n')$, $q_n = f(x_n')/(f(x_n'') - f(x_n'))$. Уже после второго этапа вычислений получаем, что

$$-2{,}05983 \leqslant \xi < -2{,}05978,$$

поэтому, полагая

$$\xi^* = -(2{,}05983 + 2{,}05978)/2 \approx -2{,}05980,$$

получаем приближенное значение корня с погрешностью не более чем $2{,}5 \cdot 10^{-5}$. ▲

ЗАДАЧИ

1. Решить графически уравнение, указав для каждого корня интервал изоляции, длина которого не превосходит 0,5:

1) $x^3 - 6x + 2 = 0$; 2) $x^4 - 4x - 1 = 0$; 3) $x^3 + 2x + 7{,}8 = 0$;
4) $x^3 - 1{,}75x + 0{,}75 = 0$; 5) $2x^3 - x^2 - x - 3 = 0$;
6) $x^3 + x^2 - 5x - 12 = 0$; 7) $x^3 - 0{,}2x^2 - 0{,}2x - 1{,}2 = 0$;
8) $0{,}3x^4 - 0{,}7x^3 - 0{,}3x^2 - 2 = 0$.

2. Решить графически уравнение, указав для каждого корня интервал изоляции, длина которого не превосходит 0,1:

1) $2x^3 + x + 1 = 0$; 2) $x^4 - x - 1 = 0$; 3) $x + e^x = 0$;
4) $x - \sin x - 1 = 0$; 5) $x = \operatorname{ctg} x$, $x \in (0; \pi)$; 6) $x^2 - \cos x = 0$;
7) $4x - 5\ln x = 5$; 8) $x^x = 10$.

3. Доказать, что с помощью сдвига вдоль оси Ox или сжатия (растяжения) вдоль оси Ox уравнение

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0,$$

можно привести к виду

$$b_0t^n + b_2t^{n-2} + \ldots + b_{n-1}t + b_n = 0$$

или к виду

$$c_0z^n + c_1z^{n-1} + \ldots + c_n = 0,$$

где $|c_0| = |c_n|$.

4. Пусть коэффициенты многочлена

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \quad a_0 \neq 0,$$

удовлетворяют равенствам $a_i = a_{n-i}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Доказать, что:

1) если n нечетно, то $x = -1$ — корень многочлена и коэффициенты частного

$$Q_{n-1} = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}$$

от деления $P_n(x)$ на $x+1$ удовлетворяют равенствам $b_i = b_{n-1-i}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$;

2) если n четно, то замена $z = x + 1/x$ приводит уравнение $P_n(x) = 0$ к уравнению степени $n/2$ и к $n/2$ квадратным уравнениям;

3) если n четно, то замена

$$z = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$$

также приводит уравнение $P_n(x) = 0$ к уравнению степени $n/2$ и к $n/2$ квадратным уравнениям.

5. Пусть функция f определена, дважды непрерывно дифференцируема на R и f'' не меняет знака на R. Доказать, что:

1) уравнение $f(x)=0$ не может иметь более двух действительных корней;

2) если $f(x_0)f'(x_0)<0$, $f(x_0)f''(x_0)<0$, то уравнение $f(x)=0$ имеет единственный корень в интервале $(x_0; x_0-f(x_0)/f'(x_0))$;

3) если $f'(x_0)=0$, $f(x_0)f''(x_0)<0$, то уравнение $f(x)=0$ имеет по одному корню в интервалах $(-\infty; x_0)$, $(x_0; +\infty)$.

6. 1) Пусть функция f непрерывна на $[a; +\infty)$, дифференцируема на $(a; +\infty)$, $f(a)<0$, $f'(x)\geqslant m>0$ на $(a; +\infty)$. Доказать, что уравнение $f(x)=0$ имеет и притом только один действительный корень на $(a; +\infty)$;

2) привести пример, который показывал бы, что условие "$f(x)\geqslant \geqslant m>0$ на $(a; +\infty)$" нельзя заменить условием "$f'(x)>0$";

3) доказать, что при условиях 1) корень уравнения принадлежит промежутку $(a; a-f(a)/m]$.

7. Корень ξ уравнения $f(x)=0$ называют *p-кратным* ($p\in N$), если $f(x)=(x-\xi)^p\varphi(x)$, где $\varphi(\xi)\neq 0$. Однократный корень называют *простым*. Доказать, что:

1) если f дифференцируема в окрестности p-кратного ($p\geqslant 2$) корня ξ уравнения $f(x)=0$, то ξ является $(p-1)$-кратным корнем уравнения $f(x)=0$;

2) если $a^2-3b<0$, то уравнение $x^3+ax^2+bx+c=0$ имеет один простой действительный корень.

8. Доказать, что многочлен

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x-a_n,$$

где $a_i\geqslant 0$ $(i=1,2,\ldots,n-1)$, $a_n>0$, имеет только один положительный корень, причем этот корень простой и не превосходит $\sqrt[n]{a_n}$.

9. Доказать, что все корни производной многочлена

$$P_4(x)=(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$$

действительны, и найти их интервалы изоляции, длина которых не более чем 0,5.

10. Доказать, что многочлен

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+x_{n-1}x+a_n, \quad a_0\neq 0,$$

имеет по крайней мере один корень на интервале $(0;1)$, если

$$a_0/(n+1)+a_1/n+\ldots+a_{n-1}/2+a_n=0.$$

11. Расположим по возрастанию номеров коэффициенты $a_0, a_1, \ldots \ldots a_n$, многочлена

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$

пропуская коэффициенты, равные нулю. *Числом перемен* знака получившегося упорядоченного набора называют число пар соседних элементов, имеющих разные знаки.

Доказать, что число положительных корней многочлена не больше числа перемен знака в наборе его коэффициентов, не равных нулю.

12. Доказать, что многочлен:

1) $x^5 - 2x^4 - x^2 - 5 = 0$ имеет и притом единственный действительный корень; указать для этого корня интервал изоляции, длина которого не более чем 0,1;

2) $x^6 + 2x^4 + x - 3 = 0$ имеет и притом только два действительных корня; указать для этих корней интервалы изоляции, длина которых не более чем 0,1.

13. Доказать, что все корни уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0:$$

1) удовлетворяют неравенству $|\xi| < 1 + M_1/|a_0|$, где

$$M_1 = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|\};$$

2) при $a_n \neq 0$ удовлетворяют неравенству $|\xi| > (1 + M_2/|a_n|)^{-1}$, где

$$M_2 = \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n-1}|\}.$$

14. Пусть в уравнении

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \quad a_0 > 0,$$

a_k $(k \geqslant 1)$ — отрицательный коэффициент с наименьшим номером, A — наибольшая из абсолютных величин отрицательных коэффициентов. Доказать, что все действительные корни этого уравнения удовлетворяют неравенству

$$\xi < 1 + \sqrt[k]{A/a_0}$$

(*теорема Лагранжа*).

15. Пусть для многочлена

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

существует такое число $c > 0$, что

$$P_n^{(k)}(c) \geqslant 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

и пусть $a_0 > 0$. Доказать, что все действительные корни этого многочлена удовлетворяют неравенству $\xi \leqslant c$ (*теорема Ньютона*).

16. Пусть многочлен $P_n(x)$ представлен в виде

$$P_n(x) = Q(x) + R(x),$$

где $Q(x)$ содержит старший по степени член многочлена $P_n(x)$ с положительным коэффициентом и все члены с отрицательными коэффициентами, а $R(x)$ содержит все остальные члены $P_n(x)$. Доказать, что если $Q(c) > 0$ при некотором $c > 0$, то все действительные корни $P_n(x)$ меньше c.

17. Доказать, что уравнение $P(x) = 0$ не имеет отрицательных корней, и, пользуясь результатами задач 13–16, указать отрезок $[a; b]$, $0 < a < b$, содержащий все положительные корни, если:

1) $P(x) = 2x^5 - 100x^2 + 2x - 1$;

2) $P(x) = x^4 - 35x^3 + 380x^2 - 1350x + 1000$.

18. Указать отрезки $[a_1; b_1]$, $a_1 < b_1 < 0$, и $[a_2; b_2]$, $0 < a_2 < b_2$, содержащие соответственно все отрицательные и все положительные корни уравнения $3x^5 + 7x^4 - 8x^3 + 5x^2 - 2x - 1 = 0$. Для положительных корней указать интервалы изоляции, длины которых не превосходят 0,5.

19. Доказать, что уравнение $x^5 + x^4 + x^2 + 10x - 5 = 0$ имеет единственный корень, и указать интервал его изоляции, длина которого не превосходит 0,1.

20. 1) Доказать, что если $4p^3 + 27q^2 > 0$, то уравнение $x^3 + px + q = 0$, $p, q \in R$, имеет один действительный корень, а если $4p^3 + 27q^2 < 0$, то это уравнение имеет три действительных корня;

2) при каком условии на a, b, c все корни уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ действительны?

21. При каком условии на p и q все корни уравнения $x^5 - 5px^2 + 5p^2x + 2q = 0$ действительны?

22. При каком условии на p и q все корни уравнения $x^m + px^n + q = 0$, где $m > n > 0$, $m, n \in N$, $q \neq 0$, $p \neq 0$, действительны?

23. Доказать, что уравнение

$$x^{2n+1} + a_1 x^{2n-1} + \ldots + a_n x = a_0, \tag{28}$$

где $a_i \in R$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$:

1) имеет хотя бы один корень в интервале $(-2; 2)$, если $|a_0| < 2$;

2) имеет корень в интервале $(-2l; 2l)$, где $l = (|a_0|/2)^{1/(2n+1)}$ (*теорема Чебышева*).

24. Указать в зависимости от значений $a \in R$ количество действительных корней уравнения:

1) $x^4 - 4ax^3 - 2 = 0$; 2) $2x^3 - 3ax^2 + 1 = 0$.

25. Найти все значения $a \in R$, при которых уравнение имеет указанное число действительных корней:

1) $2x^3 + 13x^2 - 20x + a = 0$, один корень;

2) $3x^3 + 1{,}5x^2 - 12x + a = 0$, один двукратный корень и один простой;

3) $3x^4 + 8x^3 + a = 0$, два простых корня;

4) $9x^4 + 14x^3 - 15x^2 + a = 0$, четыре различных корня.

26. Доказать, что уравнение $2e^x + x^2 + 18x - 6 = 0$ имеет единственный положительный корень; указать его интервал изоляции, длина которого не превосходит 0,2.

27. Указать в зависимости от значений a число корней уравнения:

1) $\ln x + ax = 0$; 2) $x \ln x = a$; 3) $e^x = ax^2$; 4) $\operatorname{ch} x = ax$;

5) $\cos^3 x \sin x = a$; $x \in [0; \pi]$.

28. Указать все значения $a \in R$, при которых уравнение имеет указанное число действительных корней:

1) $e^x = a + x - x^2$, два различных корня;
2) $x^2 + x - \ln x + a = 0$, один двукратный корень;
3) $x^2 = a \ln x$, два различных корня;
4) $6 \operatorname{arctg} x - x^3 + a = 0$, три различных корня.

29. Дано уравнение $\ln x - a - bx = 0$:

1) доказать, что это уравнение не может иметь более двух корней;
2) указать на координатной плоскости множества точек $(a; b)$, для которых число корней данного уравнения равно: 0, 1, 2.

30. Дано уравнение $e^x - a - bx^3 = 0$:

1) доказать, что это уравнение не может иметь более четырех корней;
2) указать на координатной плоскости множества точек $(a; b)$, для которых число корней уравнения равно: 0, 1, 2, 3, 4.

31. Пусть $a > 1$. Доказать, что уравнение $a^x = bx$:

1) имеет два действительных корня при $b > e \ln a$;
2) имеет один двукратный действительный корень при $b = e \ln a$;
3) не имеет действительных корней при $0 \leqslant b < e \ln a$;
4) имеет один простой корень при $b < 0$.

32. Указать количество корней уравнения $x^n = ae^x$, $n \in N$, в зависимости от $a \in R$.

33. Отделить действительные корни уравнения, указав интервалы изоляции, длины которых не превосходят единицы:

1) $x^3 + 2x - 7 = 0$; 2) $x^3 - 27x - 17 = 0$;
3) $x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0$; 4) $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 2x + 2 = 0$;
5) $x^4 - 4x^3 - 3x + 23 = 0$; 6) $x^4 + 6x^3 - 2x^2 + 1 = 0$;
7) $x^5 - 10x^3 + 6x + 1 = 0$; 8) $x^5 + 5x^3 - 7x + 2 = 0$;
9) $x^5 + 7x^3 - 5x + 11 = 0$;
10) $x^5 - 2x^4 - 5x^3 + 19x^2 - 17x + 1 = 0$.

34. Отделить корни уравнения $\dfrac{p^2}{a^2 + x} + \dfrac{q^2}{b^2 + x} + \dfrac{r^2}{c^2 + x} = 1$, где $p, q, r, a, b, c \in R$, $a^2 > b^2 > c^2$, $pqr \neq 0$.

35. Отделить действительные корни уравнения, указав для каждого корня интервал изоляции, длина которого не превосходит 0,1:

1) $x - \sin 2x = 0$; 2) $x = 4 \cos x$; 3) $e^x - x - 5/4 = 0$;
4) $2x^2 - e^{x+1} = 0$; 5) $x + \ln(x + 2) = 0$.

36. Методом деления пополам решить уравнение с указанной погрешностью Δ:

1) $x^4 + x - 10 = 0$, $\Delta = 10^{-2}$; 2) $x^3 - 12x - 8 = 0$, $\Delta = 10^{-2}$;
3) $x^3 + x^2 - 5x - 12 = 0$, $\Delta = 10^{-2}$;

4) $x^4 + 2x^3 + 6x^2 - 1 = 0,\ \Delta = 10^{-3}$;
5) $x^4 - 2x^3 + x - 1 = 0,\ \Delta = 10^{-3}$;
6) $(x-1)^2 - 2\sin x = 0,\ \Delta = 10^{-2}$; 7) $e^x = 2(1-x)^2,\ \Delta = 10^{-2}$;
8) $10(x-1) = \sin x,\ \Delta = 10^{-3}$; 9) $10\ln x = x^3 - 3,\ \Delta = 10^{-3}$;
10) $xe^x = 1,\ \Delta = 10^{-3}$.

37. Шар радиуса 1 м с удельной плотностью 0,75 плавает в воде. Вычислить высоту выступающей из воды части шара с погрешностью 0,05 мм.

38. Используя графики гипербол $xy = y + 1$ и $x^2 - y^2 = 1$ и метод деления пополам, вычислить с погрешностью 0,01 координаты точек пересечения этих гипербол.

39. 1) Привести пример уравнения $f(x) = 0$ с корнем ξ и его приближенным значением x^* так, чтобы были выполнены неравенства
$$f'(x) > 0 \text{ и } |x^* - \xi| \geqslant 10^3, \quad |f(x^*)| \leqslant 10^{-3},$$
т. е. удостовериться в том, что из “близости” $f(x^*)$ к нулю *не следует* “близость” x^* к корню ξ;

2) привести пример уравнения $f(x) = 0$ с корнем ξ и его приближенным значением x^* так, чтобы выполнялись неравенства
$$f'(x) > 0 \text{ и } |x^* - \xi| \leqslant 10^{-3}, \quad |f(x^*)| \geqslant 10^3,$$
т. е. удостовериться в том, что из “близости” приближенного значения x^* к корню ξ *не следует* “близость” $f(x^*)$ к нулю.

40. Уравнение
$$3x^4 - 16x^3 + 192 = 0 \tag{29}$$
при $x > 0$ равносильно каждому из следующих уравнений:

а) $x = 2\sqrt[4]{\dfrac{x^3 - 12}{3}}$; б) $x = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}(x^4 + 64)}$; в) $x = \dfrac{16}{3}\left(1 - \dfrac{12}{x^3}\right)$;

г) $x = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{8}{x^2}\right)$.

1) Доказать, что уравнение (29) имеет два положительных корня, и отделить их;

2) указать из уравнений а)–г) то, для которого итерации наиболее быстро сходятся к меньшему положительному корню уравнения (29); вычислить этот корень с точностью до 10^{-3};

3) выполнить для большего корня уравнения (29) задание, аналогичное 2).

41. Методом итераций найти действительные корни уравнения с указанной погрешностью Δ:

1) $x^3 + x = 1000,\ \Delta = 10^{-4}$; 2) $x^3 - 3x^2 + 8x + 10 = 0,\ \Delta = 10^{-5}$;
3) $x^5 + 5x + 1 = 0,\ \Delta = 10^{-5}$; 4) $10x = e^{-x},\ \Delta = 5\cdot 10^{-4}$;
5) $4^x = 8x,\ \Delta = 10^{-5}$; 6) $4e^x = 5(x+1),\ \Delta = 10^{-4}$;
7) $x^3 - 2x - 5 = 0,\ \Delta = 10^{-10}$; 8) $\sin x = 2x - 0{,}5,\ \Delta = 5\cdot 10^{-5}$;
9) $x - \sin x = 0{,}25,\ \Delta = 10^{-3}$.

42. 1) Выяснить, при каких значениях:

1) $a > 0$ уравнение $x = a^x$ имеет решение;

2) a сходится итерационная последовательность $x_0 = a$, $x_n = a^{x_{n-1}}$, $n \in N$.

43. Найти с четырьмя верными знаками после запятой:

1) наименьший положительный корень уравнения $x \sin x + 1 = 0$;

2) два положительных корня — наименьший и ближайший к нему — уравнения $\cos x \operatorname{ch} x = 1$.

44. Решить с погрешностью не более чем 10^{-4} уравнение $4x - 5 \ln x = 5$, выбрав для каждого корня сходящийся итерационный процесс.

45. Решить методом хорд уравнение с указанной погрешностью Δ:

1) $x^3 - 4x + 2 = 0$, $\Delta = 10^{-3}$; 2) $x^4 + x - 1 = 0$, $\Delta = 10^{-3}$;

3) $x^3 - 3{,}2x^2 + 3{,}1x - 2{,}2 = 0$, $\Delta = 10^{-3}$;

4) $0{,}1 \sin x = x + 2$, $\Delta = 10^{-3}$; 5) $\cos x = x^2$, $\Delta = 10^{-3}$;

6) $x^3 - 5x + 1 = 0$, $\Delta = 10^{-5}$.

46. Методом хорд и методом касательных решить уравнение с указанной погрешностью Δ:

1) $x^2 = 13$, $\Delta = 10^{-8}$; 2) $2x^3 + 2x^2 - 11x + 3 = 0$, $\Delta = 10^{-6}$;

3) $x^3 + x^2 + 2x - 3 = 0$, $\Delta = 5 \cdot 10^{-5}$.

47. Методом касательных решить уравнение с указанной погрешностью Δ:

1) $x^3 - 2x - 2 = 0$, $\Delta = 5 \cdot 10^{-5}$; 2) $x^3 + x - 3 = 0$, $\Delta = 5 \cdot 10^{-5}$;

3) $2x^3 - 7x^2 + x + 9 = 0$, $\Delta = 10^{-3}$;

4) $x^2 + 1/x^2 = 10x$, $\Delta = 10^{-3}$; 5) $x = \cos x$, $\Delta = 10^{-6}$;

6) $x \lg x = 1$, $\Delta = 10^{-4}$; 7) $x + e^x = 1$, $\Delta = 10^{-5}$;

8) $x \operatorname{th} x = 1$, $\Delta = 10^{-6}$;

9) $\operatorname{tg} x = x$, $\Delta = 5 \cdot 10^{-5}$ (наименьший положительный корень);

10) $\operatorname{ctg} x = 1/x - x/2$, $\Delta = 10^{-3}$ (найти только два положительных корня — наименьший и ближайший к нему).

48. Методом касательных вычислить отрицательный корень уравнения $x^4 - 3x^2 + 75x - 10000 = 0$ с тремя верными знаками после запятой.

49. Найти с четырьмя верными знаками чисто мнимые корни уравнения $z \sin z + 1 = 0$.

50. Решить уравнение $x^3 + 1{,}1x^2 + 0{,}9x - 1{,}4 = 0$:

1) методом деления пополам с точностью $5 \cdot 10^{-3}$;

2) методом хорд с точностью $5 \cdot 10^{-4}$;

3) методом касательных с точностью $5 \cdot 10^{-4}$.

51. К какому из корней уравнения $x^3 - x = 0$ сходится последовательность, построенная по методу касательных, в зависимости от выбора начального приближения $x_0 \in R$?

52. Доказать, что для уравнения $\sqrt{|x|}\,\operatorname{sign} x = 0$ метод касательных не сходится.

53. Проверить, что для функции $f(x) = \dfrac{\ln 2}{\pi}\sin\left(2\pi\dfrac{\ln x}{\ln 2}\right) + 1$ последовательность, построенная по методу касательных, начиная с $x_0 = 1$, сходится к числу, не являющемуся корнем уравнения $f(x) = 0$.

54. Используя метод касательных, построить итерационный процесс 2-го порядка для вычисления $\sqrt{a}$.

55. Доказать, что если $x_0 > 0$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right)$, то

$$x_{n+1} - \frac{1}{8m}\left(x_n - \frac{a}{x_n}\right)^2 \leqslant \sqrt{a} \leqslant x_{n+1}, \tag{34}$$

где $m = \min\{x_n, a/x_n\}$.

56. Доказать, что если ξ — двукратный корень уравнения $f(x) = 0$, то для его нахождения можно использовать итерационный процесс

$$x_{n+1} = x_n - 2\,f(x_n)/f'(x_n) \tag{35}$$

(*модифицированный метод Ньютона*). Указать достаточные условия сходимости последовательности $\{x_n\}$ к корню ξ.

57. Какую точность дает двукратное применение комбинированного метода при вычислении корня уравнения $x^4 - x - 1 = 0$ начиная с интервала $(1{,}22; 1{,}23)$?

58. Решить уравнение $x^3 - 4{,}1x^2 + 6{,}1x - 1{,}6 = 0$:
1) методом деления пополам с точностью $5 \cdot 10^{-3}$;
2) методом хорд с точностью $5 \cdot 10^{-4}$;
3) методом касательных с точностью $5 \cdot 10^{-4}$;
4) комбинированным методом с точностью $5 \cdot 10^{-4}$.

59. Вычислить комбинированным методом наибольший корень уравнения $x^5 - x - 0{,}2 = 0$ с точностью 10^{-4}.

60. Вычислить комбинированным методом корни уравнения

$$x^4 - 3x^2 + 75x - 10000 = 0$$

из интервалов $(-11; -10)$ и $(9; 10)$ с точностью 10^{-4}.

61. Вычислить наименьший положительный корень уравнения

$$x\sin x = 0{,}5$$

с точностью 10^{-6}.

62. Решить комбинированным методом с указанной погрешностью Δ уравнение:
1) $2x^2 - e^{1-x} = 0$, $\Delta = 10^{-5}$; 2) $2 - x - \lg x = 0$, $\Delta = 10^{-6}$.

63. Доказать, что метод Ньютона (метод касательных) имеет второй порядок.

64. Доказать, что итерационная формула $x_{n+1} = \dfrac{x_n^3 + 2ax_n}{3x_n^2 + a}$ для решения уравнения $x^2 = a$, $a > 0$, имеет третий порядок.

65. Используя разложение функции по формуле Тейлора до второго порядка, получить итерационную формулу для решения уравнения $f(x) = 0$ и доказать, что она имеет третий порядок:

1) $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)f'(x_n)}{(f'(x_n))^2 - f(x_n)f''(x_n)/2}$;

2) $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \dfrac{f^2(x_n)f''(x_n)}{2(f'(x_n))^3}$ (*формула Чебышева*).

66. Доказать, что наименьший положительный корень ξ уравнения $\operatorname{ctg} x = \lambda - x$, $\lambda > 2$, удовлетворяет неравенству

$$\xi < \frac{2}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}.$$

67. Пусть $\{x_n\}$ — возрастающая последовательность положительных корней уравнения $x \sin x = 1$. Доказать, что при $n \to \infty$:

1) $x_n = \pi n + o(1)$; 2) $x_n = \pi n + (-1)^n/(\pi n) + o(1/n)$;

3) $x_n = \pi n + (-1)^n/(\pi n) - (1/(\pi^3 n^3))(1 - (-1)^n/6) + o(1/n^3)$.

68. Пусть $\{x_n\}$ — возрастающая последовательность положительных корней уравнения $\operatorname{tg} x = 1/(1 + x^2)$. Доказать, что при $n \to \infty$

$$x_n = \pi n + 1/(\pi n)^2 + o(1/n^2).$$

69. Пусть $\{x_n\}$ — возрастающая последовательность положительных корней уравнения $\operatorname{tg} x = x$. Доказать, что при $n \to \infty$:

1) $x_n = \dfrac{\pi}{2} + \pi n + o(1)$; 2) $x_n = \dfrac{\pi}{2} + \pi n - \dfrac{1}{\pi/2 + \pi n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$;

3) $x_n = \dfrac{\pi}{2} + \pi n - \dfrac{1}{\pi/2 + \pi n} - \dfrac{2}{3(\pi/2 + \pi n)^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

ОТВЕТЫ

1. 1) $(-3; -2{,}5)$ *) $(0{,}5; 1)$, $(2; 2{,}5)$; 2) $(-0{,}5; 0)$, $(1; 1{,}5)$; 3) $(-2; -1{,}5)$; 4) $x_1 = -1{,}5$, $x_2 = 0{,}5$, $x_3 = 1$; 5) $x = 1{,}5$; 6) $(2{,}5; 3)$; 7) $(1; 1{,}5)$; 8) $(-1{,}5; -1)$, $(2{,}5; 3)$.

2. 1) $(-0{,}6; -0{,}5)$; 2) $(1{,}2; 1{,}3)$; 3) $(-0{,}6; -0{,}5)$; 4) $(1{,}9; 2)$; 5) $(0{,}8; 0{,}9)$; 6) $(-0{,}9; -0{,}8)$, $(0{,}8; 0{,}9)$; 7) $(0{,}5; 0{,}6)$, $(2{,}2; 2{,}3)$; 8) $(2{,}5; 2{,}6)$.

9. $(-0{,}5; 0)$, $(1; 1{,}5)$, $(2{,}5; 3)$.

12. 1) $(2{,}3; 2{,}4)$; 2) $(-1{,}1; -1)$, $(0{,}9; 1)$.

17. 1) $[0{,}5; 3{,}7]$; 2) $[0{,}74; 22]$.

18. $[-11/3; -1/9]$, $[0{,}27; 2{,}64]$; $(1; 1{,}5)$. **19.** $(0{,}4; 0{,}5)$.

20. 2) $4b^3 + 27c^2 + 4a^3c - a^2b^2 - 18abc < 0$. **21.** $p^5 \geqslant q^2$.

---

*) Здесь и далее указан один из возможных интервалов изоляции корня.

22. $4q \leqslant p^2$ при $m=2$, $n=1$; $0<27q^2 \leqslant -4p^3$ при $m=3$, $n=1$; $-4p^3 \leqslant 27q < 0$ или $0 < 27q \leqslant -4p^3$ при $m=3$, $n=2$; $p<0$ и $0<4q \leqslant p^2$ при $m=4$, $n=2$; при всех остальных m и n при любых p и q уравнение будет иметь хотя бы один комплексный корень.

24. 1) Два корня; 2) один корень при $a<1$, три корня при $a>1$, два корня, из которых один двукратный, при $a=1$.

25. 1) $a<-175$, $a>188/27$; 2) $a=7{,}5$, $a=104/9$;
3) $a<16$, $a \neq 0$; 4) $0<a<23/16$.

26. $(0;0{,}2)$.

27. 1) Один корень при $a \leqslant 0$, два корня при $0<a<1/e$, один двукратный корень при $a=1/e$, нет корней при $a>1/e$;

2) нет корней при $a<-1/e$, один двукратный корень при $a = -1/e$, два корня при $-1/e<a<0$, один корень при $a \geqslant 0$;

3) нет корней при $a \leqslant 0$, один корень при $0<a<e^2/4$, один простой и один двукратный корень при $a=e^2/4$, три корня при $a > e^2/4$;

4) нет корней при $|a| < \operatorname{sh} x_0 \approx 1{,}5$, один двукратный корень при $|a| = \operatorname{sh} x_0$, два корня при $|a| > \operatorname{sh} x_0$, где x_0 — положительный корень уравнения $\operatorname{cth} x = x$;

5) нет корней при $|a| > 3\sqrt{3}/16$, один двукратный корень при $|a| = 3\sqrt{3}/16$, два корня при $0<|a|<3\sqrt{3}/16$, три корня, из которых один трехкратный, при $a=0$.

28. 1) $a>1$; 2) $a=-(3+\ln 16)/4$; 3) $a>2e$; 4) $|a|<3\pi/2-1$.

29. 2) Нет корней при $b>e^{-1-a}$, один двукратный корень при $b=e^{-1-a}$, два корня при $0<b<e^{-1-a}$, один корень при $b \leqslant 0$.

30. 2) Границей областей в плоскости $(a;b)$ служат прямая $b=0$ и параметрически заданная кривая $a=e^x(3-x)/3$, $b=e^x/3x^2$.

32. Если n — четное число, то: один корень при $a>(n/e)^n$, два корня, из которых один двукратный, при $a=(n/e)^n$, три корня при $0<a<(n/e)^n$, один n-кратный корень при $a=0$, нет корней при $a<0$; если n — нечетное число, то: нет корней при $a>(n/e)^n$, один двукратный корень при $a=(n/e)^n$, два корня при $0<a<(n/e)^n$, один n-кратный корень при $a=0$, один корень при $a<0$.

33. 1) $(1;2)$; 2) $(-5;-4)$, $(-1;0)$, $(5;6)$; 3) $(4;5)$;
4) $(-2;-1)$, $(-1;0)$, $(0;1)$, $(3;4)$; 5) $(2;3)$, $(3;4)$;
6) $(-7;-6)$, $(-1;0)$;
7) $(-4;-3)$, $(-1;-0{,}5)$, $(-0{,}5;0)$, $(0;1)$, $(3;4)$;
8) $(-2;-1)$, $(0;0{,}5)$, $(0{,}5;1)$;
9) $(-2;-1)$; 10) $(-3;-2)$, $(0;1)$, $(1;2)$.

34. $(-a^2;-b^2)$, $(-b^2;-c^2)$, $(-c^2;+\infty)$.

35. 1) $(-1;-0{,}9)$, $(0{,}9;1)$; 2) $(-3{,}6;-3{,}5)$, $(-2{,}2;-2{,}1)$, $(1{,}2;1{,}3)$;
3) $(-0{,}9;-0{,}8)$, $(0{,}6;0{,}7)$; 4) $(-0{,}8;-0{,}7)$; 5) $(-0{,}5;-0{,}4)$.

36. 1) $x_1=-1{,}86$, $x_2=1{,}70$; 2) $x_1=-3{,}06$, $x_2=-0{,}69$, $x_3=3{,}76$;
3) $x=3{,}63$; 4) $x_1=-0{,}435$, $x_2=0{,}381$; 5) $x_1=-0{,}867$, $x_2=1{,}867$;
6) $x_1=0{,}27$, $x_2=2{,}25$; 7) $x=0{,}21$; 8) $x=1{,}088$;

9) $x_1 = 0{,}776$, $x_2 = 2{,}223$; 10) $x = 0{,}567$.

37. 652,7 мм. **38.** $(-1{,}10; -0{,}48)$, $(1{,}71; 1{,}39)$.

40. 1) $x_1 \in (3; 3{,}1)$, $x_2 \in (4{,}7; 4{,}8)$; 2) $x_1 = 3{,}028$; 3) $x_2 = 4{,}728$.

41. 1) $x = 9{,}9667$; 2) $x = -0{,}88677$; 3) $x = -0{,}19994$; 4) $x = 0{,}091$; 5) $x = 0{,}15495$; 6) $x = -0{,}5283$; 7) $x = 2{,}0945514815$; 8) $x = 0{,}4816$; 9) $x = 1{,}172$.

42. 1) $a \leqslant e^{1/e}$; 2) $e^{-e} < a \leqslant e^{1/e}$.

43. 1) 3,4368; 2) $x_1 = 4{,}7300$; $x_2 = 7{,}8532$.

44. $x' = 0{,}5896$, $x_{n+1} = e^{0{,}8x_n - 1}$; $x'' = 2{,}2805$, $x_{n+1} = 1{,}25 \times \times (1 + \ln x_n)$.

45. 1) $x_1 = -2{,}214$, $x_2 = 0{,}539$, $x_3 = 1{,}675$; 2) $x_1 = -1{,}221$, $x_2 = 0{,}724$; 3) 2,259; 4) $x = -2{,}087$; 5) $x_1 = -x_2 = -0{,}824$; 6) $x_1 = -2{,}33006$, $x_2 = 0{,}20164$, $x_3 = 2{,}12842$.

46. 1) $x = \pm 3{,}60555127$; 2) $x_1 = -2{,}666667$, $x_2 = 0{,}292893$, $x_3 = 1{,}707107$; 3) 0,84375.

47. 1) $x = 1{,}76926$; 2) $x = 1{,}21341$; 3) $x_1 = -0{,}951$, $x_2 = 1{,}756$, $x_3 = 2{,}694$; 4) $x_1 = 0{,}472$, $x_2 = 9{,}999$; 5) $x = 0{,}739087$; 6) $x = 2{,}5062$; 7) $x = -0{,}56715$; 8) $x = \pm 1{,}199678$; 9) $x = 4{,}49341$; 10) $x_1 = 2{,}081$, $x_2 = 5{,}940$.

48. $x = -10{,}261$. **49.** $z = \pm i0{,}9320$.

50. 1) $x = 0{,}675$; 2) $x = 0{,}6705$; 3) $x = 0{,}6705$.

51. Сходится к $\operatorname{sign} x_0$, если $|x_0| > 1/\sqrt{3}$; сходится к 0, если $|x_0| < 1/\sqrt{5}$; не сходится при $|x_0| = 1/\sqrt{5}$; при $|x_0| = 1/\sqrt{3}$ последовательность не определена; при $1/\sqrt{5} < |x_0| < 1/\sqrt{3}$, если последовательность определена, то она сходится либо к $+1$, либо к -1.

54. $x_{n+1} = (x_n + a/x_n)/2$. **57.** $|\xi - x_2| < 10^{-7}$.

58. 1) $x = 0{,}325$; 2), 3), 4), $x = 0{,}3295$. **59.** $x = 1{,}0448$.

60. $x_1 = -10{,}2610$, $x_2 = 9{,}8860$. **61.** $x = 0{,}740841$.

62. 1) $x = 0{,}78669$; 2) $x = 1{,}755581$.

§ 24. Вектор-функции. Кривые

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Вектор-функции скалярного аргумента.

1) Если X — подмножество множества действительных чисел ($X \subset R$) и каждому значению $t \in X$ поставлен в соответствие вектор $\mathbf{r}(t)$ трехмерного пространства R^3, то говорят, что на множестве X задана *вектор-функция* (или *векторная функция*) $\mathbf{r}(t)$ *скалярного аргумента* t.

Если в пространстве R^3 фиксирована декартова система координат x, y, z, то задание вектор-функции $\mathbf{r}(t)$, $t \in X$, равносильно заданию трех скалярных функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — координат вектора $\mathbf{r}(t)$ (эти функции называются *координатными функциями* вектор-функции $\mathbf{r}(t)$):

$$\mathbf{r}(t) = (x(t);\ y(t);\ z(t)).$$

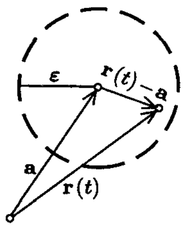

Рис. 24.1

Если $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — координатные орты, то

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}.$$

Если начало всех векторов $\mathbf{r}(t)$ помещено в начало координат, то они называются *радиус-векторами*, а множество их концов — *годографом* вектор-функции $\mathbf{r}(t)$, $t \in X$. Физический смысл годографа вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ состоит в том, что он является траекторией движущейся точки, совпадающей с концом радиус-вектора $\mathbf{r}(t)$, причем за параметр t можно принять время.

2) Если вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки t_0, то вектор $\mathbf{a}$ называется *пределом функции* $\mathbf{r}(t)$ в точке t_0 (или, что то же самое, при $t \to t_0$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех t, удовлетворяющих условию

$$|t - t_0| < \delta, \quad t \neq t_0,$$

выполняется неравенство

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}| < \varepsilon. \tag{1}$$

В этом случае пишут

$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{a} \quad \text{или} \quad \lim_{t-t_0\to 0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{a}. \tag{2}$$

Геометрически это означает, что вектор $\mathbf{r}(t)$ при $t \to t_0$ стремится к вектору $\mathbf{a}$ как по величине, так и по направлению (рис. 24.1).

Условие (1), (2) равносильно тому, что для любой последовательности $t_n \in X$, $t_n \neq t_0$, $n \in N$, такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t_0$, имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{r}(t_n) = \mathbf{a}.$$

Если $\mathbf{a} = (a_1; a_2; a_3)$, то для того, чтобы $\mathbf{a} = \lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}(t)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{t\to t_0} x(t) = a_1, \quad \lim_{t\to t_0} y(t) = a_2, \quad \lim_{t\to t_0} z(t) = a_3.$$

Если

$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{o},$$

то вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ называется *бесконечно малой* при $t \to t_0$.

3) Если функция $\mathbf{r}(t)$ определена в некоторой окрестности точки t_0 и

$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0),$$

то функция $\mathbf{r}(t)$ называется *непрерывной* в точке t_0.

4) Если существует предел

$$\lim_{t\to t_0} \frac{\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t_0)}{t-t_0},$$

то он называется *производной* вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ в точке t_0 и обозначается $\mathbf{r}'(t_0)$ или $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0)$.

Если

$$\Delta t = t - t_0, \quad \Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}(t_0+\Delta t) - \mathbf{r}(t_0)$$

(вектор $\Delta\mathbf{r}$ называется *приращением* вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ в точке t_0), то (рис. 24.2)

$$\mathbf{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}. \tag{3}$$

Вектор-функция $\mathbf{r}(t) = (x(t); y(t); z(t))$ имеет в точке t_0 производную тогда и только тогда, когда ее координатные функции имеют в этой точке производные, причем

$$\mathbf{r}'(t_0) = (x'(t_0); y'(t_0); z'(t_0)).$$

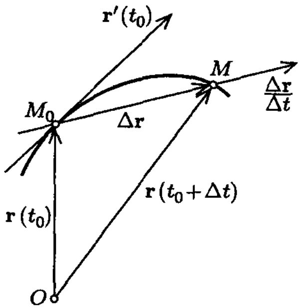

Рис. 24.2

Если годограф вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ является траекторией движущейся точки, а за параметр t принято время, то производная

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0) = \mathbf{v}$$

является мгновенной скоростью в момент времени $t = t_0$.

5) Прямая, проходящая через конец M_0 вектора $\mathbf{r}(t_0)$ в направлении вектора $\Delta\mathbf{r}$ (см. рис. 24.2), называется *секущей* годографа, а ее предельное положение при $\Delta t \to 0$ — *касательной* к годографу в точке M_0. Если $\Delta\mathbf{r} \neq \mathbf{o}$, то вектор $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ при любом знаке приращения $\Delta t \neq 0$ всегда направлен по секущей в сторону возрастания параметра t; поэтому, если производная $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{o}$, то согласно (3) она направлена по касательной к годографу в точке M_0 в сторону возрастания параметра t. В этом случае уравнение касательной имеет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{r}'(t_0)u, \quad -\infty < u < +\infty,$$

или, в координатном виде,

$$x = x_0 + x'(t_0)u, \quad y = y_0 + y'(t_0)u, \quad z = z_0 + z'(t_0)u,$$
$$-\infty < u < +\infty,$$

где $\mathbf{r}(t_0) = (x_0; y_0; z_0)$. Отсюда следует, что

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)} = \frac{y-y_0}{y'(t_0)} = \frac{z-z_0}{z'(t_0)}. \tag{4}$$

6) Для того чтобы вектор-функция, определенная в окрестности точки t_0, имела в этой точке производную, необходимо и достаточно,

чтобы ее приращение $\Delta\mathbf{r}$ в этой точке было представимо в виде

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{a}\Delta t + \varepsilon(\Delta t)\Delta t, \tag{5}$$

где $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \varepsilon(\Delta t) = \mathbf{o}$. Из равенства (5) следует, что $\mathbf{a} = \mathbf{r}'(t_0)$, т. е. равенство (5) можно записать в виде

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t_0)\Delta t + \varepsilon(\Delta t)\Delta t. \tag{6}$$

Бесконечно малая при $t \to t_0$ вектор-функция $\alpha(t)$ называется *бесконечно малой более высокого порядка*, чем бесконечно малая при $t \to t_0$ скалярная функция $\beta(t)$, если существует бесконечно малая при $t \to t_0$ вектор-функция $\varepsilon(t)$ такая, что

$$\alpha(t) = \beta(t)\varepsilon(t).$$

В этом случае пишут

$$\alpha(t) = \mathbf{o}(\beta(t)), \quad t \to t_0.$$

Используя это обозначение, равенство (6) можно записать в виде

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t_0)\Delta t + \mathbf{o}(\Delta t), \quad \Delta t \to 0.$$

7) Линейная по аргументу Δt вектор-функция $\mathbf{r}'(t_0)\Delta t$ называется *дифференциалом вектор-функции* $\mathbf{r}(t)$ в точке t_0 и обозначается $d\mathbf{r}$ или, более подробно, $d\mathbf{r}(t_0)$. Приращение аргумента Δt в этом случае часто обозначают dt, таким образом,

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t_0)\,dt.$$

Если вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ имеет в точке t_0 производную, то говорят также, что она в этой точке *дифференцируема*.

Производные и дифференциалы высших порядков определяются для вектор-функций индуктивным образом.

Производная $\mathbf{r}^{(n)}$ порядка n является производной от производной порядка $n-1$:

$$\mathbf{r}^{(n)} = (\mathbf{r}^{(n-1)})', \quad \mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{r} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Дифференциал $d^n\mathbf{r}(t)$ порядка n определяется как дифференциал по переменной t от дифференциала $d^{n-1}\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}^{(n-1)}(t)\,dt^{n-1}$ порядка $n-1$ при условии, что приращение аргумента t при взятии нового дифференциала совпадает со старым приращением аргумента, т. е.

$$d^n\mathbf{r}(t) = d(\mathbf{r}^{(n-1)}(t)\,dt^{n-1}) = \mathbf{r}^{(n)}(t)\,dt^n.$$

Из этой формулы следует, что

$$\mathbf{r}^{(n)}(t) = \frac{d^n\mathbf{r}(t)}{dt^n} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Если годограф вектор-функции есть траектория движущейся точки, а за параметр t взято время, то вторая производная $\mathbf{r}''(t_0)$ является ускорением точки в момент времени t_0.

8) Если вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ имеет в точке t_0 производные до порядка n включительно, то в окрестности этой точки справедлива

формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \frac{\mathbf{r}'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \ldots + \frac{\mathbf{r}^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n + \\ + \mathbf{o}((t-t_0)^n), \quad t \to t_0.$$

9) Если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — векторы, то через $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ обозначается *скалярное*, а через $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ — *векторное произведение*; скалярное произведение $(\mathbf{a}, \mathbf{a})$ иногда обозначается $\mathbf{a}^2$. Для трех векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ через $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ обозначается их *смешанное произведение*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = ([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}).$$

Для вектор-функций справедливы следующие правила дифференцирования:

$$(\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t))' = \mathbf{r}_1'(t) + \mathbf{r}_2'(t),$$

$$(f(t)\mathbf{r}(t))' = f'(t)\mathbf{r}(t) + f(t)\mathbf{r}'(t),$$

$$(\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t))' = (\mathbf{r}_1'(t), \mathbf{r}_2(t)) + (\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2'(t)),$$

$$[\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t)]' = [\mathbf{r}_1'(t), \mathbf{r}_2(t)] + [\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2'(t)].$$

10) Если вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема внутри него, то существует такая точка $\xi \in [a; b]$, что

$$|\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)| \leqslant |\mathbf{r}'(\xi)|(b-a)$$

(см. ниже пример 5).

2. Кривые на плоскости и в пространстве.

1) *Кривой* (или, более подробно, *параметрически заданной кривой*) называется множество Γ в пространстве R^3, заданное как непрерывный образ некоторого отрезка $[a; b]$, т. е.

$$t \to M(t) \in R^3, \quad t \in [a; b],$$

где $M(t)$ — непрерывное отображение. В этом случае пишут

$$\Gamma = \{M(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}. \tag{7}$$

Если в пространстве R^3 фиксирована декартова система координат x, y, z, то задание отображения $M(t)$ равносильно заданию таких трех функций

$$x(t),\ y(t),\ z(t), \quad a \leqslant t \leqslant b, \tag{8}$$

называемых *координатными функциями отображения* $M(t)$, что

$$M(t) = (x(t); y(t); z(t)). \tag{9}$$

Непрерывность отображения $M(t)$ означает непрерывность на отрезке $[a; b]$ всех его координатных функций. Отображение $M(t)$ называется *параметризацией* или *представлением кривой* Γ, а отображение (8) при выполнении условия (9) — ее *координатным представлением*. Переменная t называется *параметром* на кривой Γ.

Множество значений отображения $M(t)$ в пространстве R^3 называется *носителем кривой* Γ. Если одна и та же точка носителя кривой Γ является при отображении $M(t)$ образом двух разных точек отрезка $[a; b]$, то она называется *точкой самопересечения* (или *кратной точкой*) кривой. Обычно кривая и ее носитель обозначаются одной и той же буквой, а часто носитель кривой называется также *кривой*.

Например, когда говорят, что график уравнения $F(x, y) = 0$ на плоскости или пересечение графиков уравнений $F_1(x, y, z) = 0$, $F_2(x, y, z) = 0$ в пространстве являются кривыми, то под этим понимают, что эти множества являются носителями соответствующих кривых.

Если
$$t = t(t_1), \quad a_1 \leqslant t_1 \leqslant b_1, \tag{10}$$
— строго монотонная непрерывная функция, то отображение
$$M(t(t_1)), \quad a_1 \leqslant t_1 \leqslant b_1,$$
называется *представлением* той же самой кривой (7), а функция (10) называется *допустимым преобразованием параметра*.

Таким образом, кривая является определенным классом непрерывных отображений отрезков в пространстве, связанных допустимыми преобразованиями параметра.

Вектор-функцию
$$\mathbf{r}(t) = (x(t); y(t); z(t)), \quad a \leqslant t \leqslant b, \tag{11}$$
называют *векторным представлением кривой* (7), причем пишут
$$\Gamma = \{\mathbf{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}.$$

Таким образом, кривую Γ можно задать в одном из трех видов:
$$\Gamma = \{M(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}, \quad \Gamma = \{x(t), y(t), z(t);\ a \leqslant t \leqslant b\},$$
$$\Gamma = \{\mathbf{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}.$$

Иногда под кривой понимается также и множество в пространстве, заданное как непрерывный образ любого промежутка числовой оси (т. е. не обязательно отрезка, а возможно, интервала или полуинтервала).

Всякая параметризация кривой порождает на ней определенный порядок точек: если $\Gamma = \{M(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$, то точка $M(t_2)$ называется *следующей* за точкой $M(t_1)$, если $t_2 > t_2$. Если на кривой задан порядок точек (для чего достаточно зафиксировать некоторую ее параметризацию), то она называется *ориентированной кривой.* Для ориентированных кривых допустимыми преобразованиями параметра являются только строго возрастающие функции (10). При таких преобразованиях параметра порядок точек на кривой остается прежним. Если $\Gamma = \{M(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$, то ориентированная кривая, заданная представлением $M(a + b - t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, называется *кривой, ориентированной противоположно заданной кривой* Γ.

Если координатные функции (8) отображения $M(t)$ (см. (9)), или, что то же самое, координатные функции вектор-функции (11), дифференцируемы либо непрерывно дифференцируемы, либо дважды дифференцируемы и т. д., то кривая (7) называется соответственно *дифференцируемой* либо *непрерывно дифференцируемой*, либо *дважды дифференцируемой* и т. д. Для дифференцируемой (непрерывно дифференцируемой, дважды дифференцируемой и т. д.) кривой допустимыми преобразованиями параметра являются только дифференцируемые (соответственно непрерывно дифференцируемые, дважды дифференцируемые и т. д.) преобразования параметра, у которых производная не обращается в нуль.

Точка $M(a)$ называется *начальной*, а точка $M(b)$ — *конечной точкой кривой* (7). Если $M(a) = M(b)$, то кривая (7) называется *замкнутой*.

Если кривая лежит в некоторой плоскости, то она называется *плоской*, а если она лежит на некоторой сфере, то — *сферической* кривой. Если на плоскости, на которой лежит рассматриваемая плоская кривая, задана полярная система координат ρ, φ, то задание кривой уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, $a \leqslant \varphi \leqslant b$, называется ее *представлением в полярных координатах*. Если воспользоваться формулами перехода от прямоугольных декартовых координат x, y к полярным $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, то из представления кривой в полярных координатах можно получить ее параметрическое представление с параметром φ:

$$x = \rho(\varphi)\cos\varphi, \quad y = \rho(\varphi)\sin\varphi, \quad a \leqslant \varphi \leqslant b.$$

Если заданы две кривые

$$\Gamma_1 = \{M_1(t);\ a \leqslant t \leqslant b\} \quad \text{и} \quad \Gamma_2 = \{M_2(t);\ b \leqslant t \leqslant c\},$$

причем $M_1(b) = M_2(b)$, то кривая

$$\Gamma = \{M(t);\ a \leqslant t \leqslant c\}, \quad \text{где} \quad M(t) = \begin{cases} M_1(t), & \text{если } a \leqslant t \leqslant b, \\ M_2(t), & \text{если } b \leqslant t \leqslant c, \end{cases}$$

называется *объединением* (*суммой*) *кривых* Γ_1 и Γ_2 и обозначается через $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Пусть $\Gamma = \{\mathbf{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ — дифференцируемая кривая и $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{o}$ (или $\mathbf{r}(t_0) = \ldots = \mathbf{r}^{(n-1)}(t_0) = \mathbf{o}$, $\mathbf{r}^{(n)}(t_0) \neq \mathbf{o}$), $t_0 \in [a; b]$. Тогда прямая, являющаяся касательной к годографу вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ в конце радиус-вектора $\mathbf{r}(t_0)$, называется и *касательной к кривой* Γ в точке t_0. Так определенная касательная к кривой не зависит от выбора параметризации кривой.

2) Вектор $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{o}$ называется *касательным вектором* к кривой Γ, а его направление — *положительным направлением на касательной* при фиксированной ее параметризации; оно соответствует возрастанию параметра, поэтому вектор $\mathbf{r}'(t_0)$ называют также *касательным вектором ориентированной кривой* Γ.

Плоскость, проходящая через конец радиус-вектора $\mathbf{r}(t_0)$ и перпендикулярная к касательной прямой, называется *нормальной плоскостью* (в соответствующей точке кривой), а каждая прямая, проходящая через конец указанного радиус-вектора и лежащая в нор-

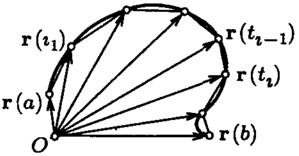

Рис 24 3

мальной плоскости, называется *нормалью*

Углом между ориентированными кривыми, пересекающимися в некоторой точке, называется угол между их касательными в этой точке.

3) Пусть

$$\Gamma = \{\mathbf{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b\} \qquad (12)$$

— кривая, $\tau = \{t_i\}\Big|_{i=0}^{i=n}$ — разбиение отрезка $[a;b]$: $a = t_0 < t_1 < \ldots$ $\ldots < t_n = b$, L_τ — ломаная с вершинами в концах радиус-векторов $\mathbf{r}(t_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$ (рис. 24.3), σ_τ — ее длина:

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})|.$$

4) Величина $S_\Gamma = \sum\limits_{\tau} \sigma_\tau$, где верхняя грань берется по возможным разбиениям τ отрезка $[a;b]$, называется *длиной кривой* (12), $0 \leqslant S_\Gamma \leqslant +\infty$.

Если $S_\Gamma < +\infty$, то кривая Γ называется *спрямляемой.*

Теорема 1. *Если кривая* (12) *непрерывно дифференцируема, то она спрямляема и ее длина* S_Γ *удовлетворяет неравенствам*

$$|\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)| \leqslant S_\Gamma \leqslant (b-a)\max_{[a,b]} |\mathbf{r}'(t)|. \qquad (13)$$

Теорема 2. *Если кривая* (12) *непрерывно дифференцируема, то переменная длина дуги* s, *отсчитываемая от начала кривой* (*или соответственно от ее конца*), *является возрастающей* (*соответственно убывающей*) *непрерывно дифференцируемой функцией параметра* t; *при этом*

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| \quad \left(\textit{соответственно} \quad \frac{ds}{dt} = -\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|\right). \qquad (14)$$

Если $\mathbf{r}(t) = (x(t); y(t); z(t))$, *то*

$$\frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

5) Когда параметром непрерывно дифференцируемой кривой является переменная длина дуги s:

$$\Gamma = \{\mathbf{r}(s);\ 0 \leqslant s \leqslant S\}, \quad \mathbf{r}(s) = (x(s); y(s); z(s)), \qquad (15)$$

то

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right| = 1, \qquad (16)$$

т. е. вектор

$$\tau = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \qquad (17)$$

является *единичным касательным вектором* к кривой (15). Поэтому, если $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ — *направляющие косинусы положительного направления касательной к кривой* (16), т. е.

$$\boldsymbol{\tau} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma),$$

то

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos\beta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos\gamma.$$

Если кривая является графиком функции $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, и переменная длина ее дуги $s = s(x)$ отсчитывается от начала графика $(a; f(a))$, то

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (f'(x))^2}.$$

Точка $(x(t_0); y(t_0); z(t_0))$ кривой (12) называется *особой*, если $\mathbf{r}'(t_0) = \mathbf{o}$; если же $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{o}$, то — *неособой*.

У всякой непрерывно дифференцируемой кривой (12) без особых точек существует ее представление $\mathbf{r}(s)$, $0 \leqslant s \leqslant S$, в котором за параметр s взята переменная длина дуги этой кривой.

3. Кривизна и кручение кривой.

1) Пусть

$$\Gamma = \{\mathbf{r}(s);\ 0 \leqslant s \leqslant S\} \tag{18}$$

— дважды непрерывно дифференцируемая кривая, s — переменная длина ее дуги и $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(s) = d\mathbf{r}/ds$ — единичный касательный вектор. Угловая скорость вращения касательного вектора $\boldsymbol{\tau}$ в данной точке кривой называется *кривизной кривой* в этой точке и обозначается $k = k(s)$, т. е.

$$k(s) = \omega(s; \boldsymbol{\tau}) = \left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}(s)\right|. \tag{19}$$

Обратная величина к кривизне называется *радиусом кривизны* кривой в данной точке:

$$R = R(s) = 1/k(s). \tag{20}$$

2) Если $k(s_0) \neq 0$, $s_0 \in [a; b]$, то единичный вектор в направлении вектора $\dfrac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}(s_0)$ (он перпендикулярен вектору $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(s_0)$) называется *главным нормальным вектором* и обозначается $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}(s_0)$. Таким образом,

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = k\boldsymbol{\nu}. \tag{21}$$

Прямая, проходящая через точку кривой параллельно вектору $\boldsymbol{\nu}$, называется *главной нормалью*.

3) Векторное произведение $[\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}]$ называется *бинормальным вектором* и обозначается через $\boldsymbol{\beta}$, т. е.

$$\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}]. \tag{22}$$

Прямая, проходящая через точку кривой параллельно вектору $\boldsymbol{\beta}$, называется *бинормалью*. Если кривая (18) трижды непрерывно дифференцируема, то производная бинормального вектора $\boldsymbol{\beta}$ коллинеарна с вектором $\boldsymbol{\nu}$; множитель, на который надо умножить вектор $\boldsymbol{\nu}$, чтобы получился вектор $d\beta/ds$, обозначается через $-\varkappa$:

$$\frac{d\beta}{ds} = -\varkappa\nu. \tag{23}$$

4) Коэффициент $\varkappa = \varkappa(s)$ называется *кручением кривой* в данной ее точке. Для производной $d\nu/ds$ справедлива формула

$$\frac{d\nu}{ds} = -k\tau + \varkappa\beta. \tag{24}$$

Формулы (21), (23) и (24) называются *формулами Френе.* Для кривой Γ уравнения

$$k = k(s), \quad \varkappa = \varkappa(s) \tag{25}$$

(s — переменная длина дуги на кривой Γ, k — ее кривизна, а $\varkappa$ — кручение) называются *натуральными уравнениями кривой.* Тетраэдр с вершиной в точке кривой Γ, ребра которого имеют длину, равную единице, и направлены по векторам τ, ν и β, называется *сопровождающим трехгранником Френе.* Иногда, для краткости, сами векторы ν и β называются соответственно *главной нормалью* и *бинормалью.*

Если кривая $\Gamma = \{\mathbf{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ трижды непрерывно дифференцируема (t — произвольный параметр), то в предположении, что знаменатели написанных ниже дробей не обращаются в нуль, имеют место следующие формулы:

$$\tau = \frac{\mathbf{r}'}{|r'|}, \quad \nu = \frac{[[\mathbf{r}',\mathbf{r}''],\mathbf{r}']}{|[[\mathbf{r}',\mathbf{r}''],\mathbf{r}']|}, \quad \beta = \frac{[\mathbf{r}',\mathbf{r}'']}{|[\mathbf{r}',\mathbf{r}'']|}, \quad k = \frac{|[\mathbf{r}',\mathbf{r}'']|}{|\mathbf{r}'|^3},$$

$$\varkappa = \frac{(\mathbf{r}',\mathbf{r}'',\mathbf{r}''')}{k^2|\mathbf{r}'|^6} = \frac{(r',\mathbf{r}'',\mathbf{r}''')}{|[r',\mathbf{r}'']|^2},$$

или, в координатном виде,

$$k = \frac{\sqrt{(y'z''-z'y'')^2+(z'x''-x'z'')^2+(x'y''-y'x'')^2}}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}},$$

$$\varkappa = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{(y'z''-z'y'')^2+(z'x''-x'z'')^2+(x'y''-y'x'')^2}.$$

Точки, в которых кривизна равна нулю, называются *точками распрямления* кривой, а точки, в которых равно нулю кручение, — ее *точками уплощения.*

Плоскость, проходящая через данную точку кривой параллельно касательной и главной нормали (т. е. перпендикулярно бинормали), называется *соприкасающейся плоскостью.* Плоскость, параллельная главной нормали и бинормали (т. е. перпендикулярная касательной), как уже отмечалось раньше, называется *нормальной плоскостью*, а плоскость, параллельная касательной и бинормали (т. е. перпендикулярная главной нормали), — *спрямляющей плоскостью* (рис. 24.4).

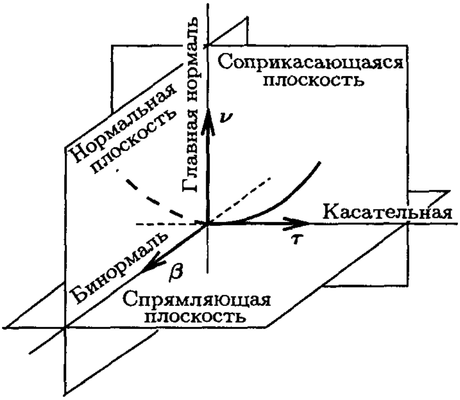

Рис. 24.4

Уравнение соприкасающейся плоскости в точке, в которой кривизна не обращается в нуль, имеет вид

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0', \mathbf{r}_0'') = 0. \qquad (26)$$

Здесь $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0) = (x_0; y_0; z_0)$ — радиус-вектор данной точки кривой, $\mathbf{r}_0' = \mathbf{r}'(t_0) = (x_0'; y_0'; z_0')$, $r_0'' = \mathbf{r}''(t_0) = (x_0''; y_0''; z_0'')$, а $\mathbf{r} = (x; y; z)$ — текущий радиус-вектор соприкасающейся плоскости. В координатном виде уравнение (26) записывается следующим образом:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_0' & y_0' & z_0' \\ x_0'' & y_0'' & z_0'' \end{vmatrix} = 0.$$

Бинормаль в точке $(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярна соприкасающейся плоскости, и потому ее уравнение имеет вид

$$\frac{x-x_0}{y_0'z_0''-z_0'y_0''} = \frac{y-y_0}{z_0'x_0''-x_0'z_0''} = \frac{z-z_0}{x_0'y_0''-y_0'x_0''}. \qquad (27)$$

Векторная запись уравнения нормальной плоскости имеет вид

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0') = 0,$$

а координатная —

$$(x-x_0)x_0' + (y-y_0)y_0' + (z-z_0)z_0' = 0.$$

Векторная запись уравнения спрямляющей плоскости имеет вид

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, [[\mathbf{r}_0', \mathbf{r}_0''], \mathbf{r}_0']) = 0. \qquad (28)$$

Если же за параметр на кривой взята переменная длина дуги, то уравнение спрямляющей плоскости имеет более простой вид:

$$\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\ \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}(s_0)\right) = 0, \qquad (29)$$

или, в координатной записи,

$$(x-x_0)\,\frac{d^2x}{ds^2}(s_0) + (y-y_0)\,\frac{d^2y}{ds^2}(s_0) + (z-z_0)\,\frac{d^2z}{ds^2}(s_0) = 0.$$

6) Точка, лежащая на главной нормали к кривой на расстоянии, равном радиусу кривизны R в направлении вектора главной нор-

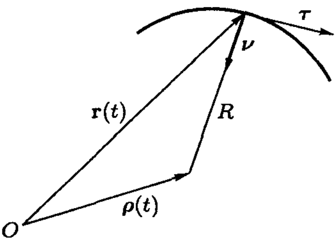

Рис. 24.5

мали ν, называется *центром кривизны кривой* в данной ее точке (рис. 24.5). Если через $\rho = \rho(t)$ обозначить радиус-вектор центра кривизны кривой $\Gamma = \{\mathbf{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$, то

$$\rho(t) = \mathbf{r}(t) + R(t)\nu(t). \tag{30}$$

Круг, лежащий в соприкасающейся плоскости с центром в центре кривизны кривой в данной ее точке, радиус которого равен радиусу кривизны в этой точке, называется *кругом кривизны кривой* в рассматриваемой точке кривой.

7) Кривая, для которой вектор-функция (30) является ее представлением, называется *эволютой кривой* Γ (коротко говорят, что множество центров кривизны кривой образует ее эволюту). Если кривая Γ_1 является эволютой кривой Γ, то кривая Γ называется *эвольвентой кривой* Γ_1.

Уравнение эволюты кривой Γ можно записать в виде

$$\rho(t) = \mathbf{r}(t) + \frac{1}{k^2}\,\frac{s'\mathbf{r}'' - s''\mathbf{r}'}{s'^3}, \tag{31}$$

где, если $\mathbf{r}(t) = (x(t); y(t); z(t))$,

$$s' = |\mathbf{r}'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \quad s'' = \frac{x'x'' + y'y'' + z'z''}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}. \tag{32}$$

Если кривая Γ лежит в плоскости переменных x и y, то $\varkappa = 0$, а

$$k = 1/R = (|x'y'' - x''y'|)/((x'^2 + y'^2)^{3/2}); \tag{33}$$

если (ξ, η) — ее центр кривизны, то

$$\xi = x - y'\,\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}, \quad \eta = y + x'\,\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}. \tag{34}$$

Для случая, когда кривая Γ является графиком функции $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, формулы для ее кривизны k и координат ξ, η ее центра кривизны принимают вид

$$k = |y''|/(1 + y'^2)^{3/2}, \tag{35}$$

$$\xi = x - (1 + y'^2)y'/y'', \quad \eta = y + (1 + y'^2)/y''. \tag{36}$$

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Построить годограф вектор-функции

$$\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\sin t\,\mathbf{j} + bt\,\mathbf{k}, \quad t \in R, \tag{37}$$

написать уравнение его касательной в произвольной точке и доказать, что она образует постоянный угол с осью z.

▲ Для любой точки $(x; y; z)$ годографа вектор-функции (37) имеем $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, и потому при любом $t \in R$ выполняется равенство $x^2 + y^2 = a^2$, т. е. все точки годографа вектор-функции (37) лежат на цилиндре, направляющей которого является окружность $x^2 + y^2 = a^2$ в плоскости переменных x, y, а образующая параллельна оси z. Если параметр t интерпретировать как время, то при равномерном движении по окружности проекции конца радиус-вектора (37) на плоскость переменных x, y его проекция на ось переменной z будет двигаться равномерно и прямолинейно со скоростью b. Иначе говоря, аппликата точки годографа вектор-функции (37) растет пропорционально углу поворота ее проекции на плоскость x, y. Поэтому искомый годограф будет иметь вид, изображенный на рис. 24.6, и он называется *винтовой линией*. Для уточнения изображения можно составить таблицу положений точек годографа для отдельных значений t, например таблицу

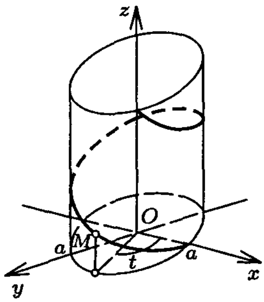

Рис. 24.6

t	$\mathbf{r}$
0	$a\,\mathbf{i}$
$\pi/4$	$(a\sqrt{2}/2)\,\mathbf{i} + (a\sqrt{2}/2)\,\mathbf{j} + (b\pi/4)\,\mathbf{k}$
$\pi/2$	$a\,\mathbf{j} + (b\pi/2)\,\mathbf{k}$
π	$-\mathbf{i} + b\pi\,\mathbf{k}$
$3\pi/2$	$-a\,\mathbf{j} + (3\pi/2)\,\mathbf{k}$
2π	$a\,\mathbf{i} + 2b\pi\,\mathbf{k}$

Для нахождения касательных к винтовой линии найдем производную вектор-функции (37):

$$r'(t) = -a\sin t\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j} + b\,\mathbf{k}.$$

Отсюда следует, что уравнение касательной к винтовой линии имеет вид

$$\frac{x - x_0}{-a\sin t_0} = \frac{y - y_0}{a\cos t_0} = \frac{z - z_0}{b},$$

а для косинуса угла φ, образованного касательной с осью z, справедливо равенство

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{r}'(t), \mathbf{k})}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Таким образом, угол φ постоянен, это означает, что винтовая линия пересекает под одним и тем же углом все образующие цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$, на котором она расположена. ▲

Пример 2. Доказать, что если

$$\mathbf{r}^{(k)}(t_0) = \mathbf{o} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \quad \mathbf{r}^{(n)}(t_0) \neq \mathbf{o}, \tag{38}$$

то уравнение касательной к годографу в конце радиус-вектора $\mathbf{r}(t_0)$ имеет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^{(n)}(t_0)t + \mathbf{r}(t_0), \quad -\infty < t < +\infty. \tag{39}$$

▲ Из условия (38) следует, что в рассматриваемом случае формула Тейлора для вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ имеет вид

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0) = \frac{1}{n!}\,\mathbf{r}^{(n)}(t_0)\Delta t^n + \mathrm{o}(\Delta t^n), \quad \Delta t \to 0.$$

Поэтому для всех достаточно малых Δt выполняется условие $\Delta\mathbf{r} \neq \mathbf{o}$ и, следовательно, прямая, проходящая через концы радиус-векторов $\mathbf{r}(t_0)$ и $\mathbf{r}(t_0 + \Delta t)$, однозначно определена. Вектор $\Delta\mathbf{r}/\Delta t^n$ параллелен этой прямой, и существует предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t^n} = \frac{1}{n!}\,\mathbf{r}^{(n)}(t_0).$$

Поэтому при $\Delta t \to 0$ существует предел указанной секущей, т. е. существует касательная к годографу в конце радиус-вектора $\mathbf{r}(t_0)$ и ее уравнение имеет вид (39). ▲

Пример 3. Доказать, что если $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0) \neq \mathbf{o}$, существует $\mathbf{r}'_0 = \mathbf{r}'(t_0)$, $\mathbf{e}(t)$ — единичный вектор в направлении вектора $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}(t_0)$, то существует $\mathbf{e}'_0 = \mathbf{e}'(t_0)$ и

$$\mathbf{r}'_0 = (\mathbf{e}_0, \mathbf{r}'_0)\mathbf{e}_0 + |\mathbf{r}_0|\mathbf{e}'_0. \tag{40}$$

Каков механический смысл этой формулы?

▲ Ясно, что из непрерывности $\mathbf{r}(t)$ в точке t_0 и условия $\mathbf{r}_0 \neq \mathbf{o}$ следует, что в некоторой окрестности точки t_0 выполняется неравенство $\mathbf{r}(t) \neq \mathbf{o}$, поэтому в этой окрестности определена функция

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{r}(t)/|\mathbf{r}(t)|,$$

причем, очевидно,

$$|\mathbf{e}(t)| = 1. \tag{41}$$

Поскольку $\mathbf{r} = |\mathbf{r}|\,\mathbf{e}$ и

$$(|\mathbf{r}|)'_{t=t_0} = (\sqrt{\mathbf{r}^2})'_{t=t_0} = \left.\frac{(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\sqrt{\mathbf{r}^2}}\right|_{t=t_0} = \left.\frac{(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r}|}\right|_{t=t_0} = (\mathbf{e}_0, \mathbf{r}'_0),$$

то из дифференцируемости в точке t_0 вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ следует дифференцируемость в этой точке скалярной функции $|\mathbf{r}(t)|$ и вектор-функции $\mathbf{e}(t) = \mathbf{r}(t)/|\mathbf{r}(t)|$. Поэтому

$$\mathbf{r}'_0 = \mathbf{r}'(t_0) = (|\mathbf{r}|\,\mathbf{e})'_{t=t_0} = (|\mathbf{r}|'\,\mathbf{e} + |\mathbf{r}|\,\mathbf{e}')|_{t=t_0} = (\mathbf{e}_0, \mathbf{r}'_0)\,\mathbf{e}_0 + |\mathbf{r}_0|\,\mathbf{e}'_0,$$

т. е. равенство (31) доказано. Из (41) следует, что $\mathbf{e}^2(t) = 1$. Дифференцируя это равенство, получим $(\mathbf{e}(t_0), \mathbf{e}'(t_0)) = 0$, что означает, что векторы $\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}(t_0)$ и $\mathbf{e}'_0 = \mathbf{e}'(t_0)$ ортогональны. Поэтому в случае, когда годограф вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ является траекторией движущейся точки, а параметр t есть время, равенство (40) показывает, что движение этой точки в каждый момент времени t_0 можно рассматривать как результат сложения двух движений: поступательного в направлении радиус-вектора $\mathbf{r}_0$ и вращательного по окружности радиуса $|\mathbf{r}_0|$, т. е. в направлении, перпендикулярном вектору $\mathbf{r}_0$. Формула (40) дает разложение мгновенной скорости $\mathbf{v}_0 = \mathbf{r}'_0$ на радиальную составляющую $(\mathbf{e}_0, \mathbf{r}'_0)\,\mathbf{e}_0$, представляющую собой проекцию скорости $\mathbf{v}_0$ на направление радиус-вектора $\mathbf{r}_0$, и трансверсальную составляющую $|\mathbf{r}_0|\,\mathbf{e}'_0$ в направлении вектора $\mathbf{e}'_0$, т. е. перпендикулярно вектору $\mathbf{e}_0$, а следовательно, и вектору $\mathbf{r}_0$. ▲

Пример 4. Пусть вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ определена и не обращается в нуль в некоторой окрестности U точки t_0, и пусть $\varphi(t)$ — наименьший неотрицательный угол, выраженный в радианах, между векторами $\mathbf{r}(t_0)$ и $\mathbf{r}(t)$, $t \in U$, $0 \leqslant \varphi(t) \leqslant \pi$. Тогда $\Delta\varphi = \varphi(t) - \varphi(t_0) = \varphi(t)$ (ибо $\varphi(t_0) = 0$). Положим $\Delta t = t - t_0$. Предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right| \tag{42}$$

называется *угловой скоростью вращения вектор-функции* $\mathbf{r}(t)$ в точке t_0 и обозначается через $\omega = \omega(t_0, \mathbf{r})$.

Доказать, что если $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0) \neq \mathbf{o}$ и существует производная $\mathbf{r}'_0 = \mathbf{r}'(t_0)$, то существует и угловая скорость вращения $\omega = \omega(t_0, \mathbf{r})$, причем

$$\omega = |[\mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0]|/\mathbf{r}_0^2. \tag{43}$$

Для случая $|\mathbf{r}(t)| = \mathrm{const}$ получить отсюда формулу

$$\omega = |\mathbf{r}'_0|/|\mathbf{r}_0|. \tag{44}$$

Каков ее механический смысл?

▲ В силу существования производной $\mathbf{r}'_0$ вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ непрерывна в точке t_0. Отсюда и из условия $\mathbf{r}_0 \neq \mathbf{o}$ следует, что для всех достаточно малых приращений Δt выполняется неравенство $\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) \neq \mathbf{o}$, и потому определен угол $\Delta\varphi$ между векторами $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$ и $\mathbf{r}(t_0 + \Delta t)$, причем

$$\lim_{\Delta t \to 0} \Delta\varphi = 0.$$

Для вычисления предела (42) заменим бесконечно малую при $\Delta t \to 0$ функцию $\Delta\varphi$ на эквивалентную ей функцию $\sin\Delta\varphi$, которую найдем из равенства

$$|[\mathbf{r}(t_0), \mathbf{r}(t_0 + \Delta t)]| = |\mathbf{r}(t_0)||\mathbf{r}(t_0 + \Delta t)||\sin\Delta\varphi|.$$

Таким образом, будем иметь

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\sin\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|[\mathbf{r}(t_0),\ \mathbf{r}(t_0 + \Delta t)]|}{|\mathbf{r}(t_0)|\,|\mathbf{r}(t_0 + \Delta t)|\,|\Delta t|} =$$
$$= \frac{1}{\mathbf{r}_0^2} \lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{[\mathbf{r}(t_0),\ \mathbf{r}(t_0 + \Delta t)]}{\Delta t} \right| \tag{45}$$

(здесь снова была использована непрерывность вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ в точке t_0: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \mathbf{r}(t_0 + \Delta t) = \mathbf{r}(t_0)$). Далее, в силу дифференцируемости функции $\mathbf{r}(t)$ в точке t_0 имеем

$$\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'_0\Delta t + \varepsilon(\Delta t)\Delta t,$$

где $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \varepsilon(\Delta t) = \mathbf{o}$. Подставив это выражение в (45) и заметив, что $[\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0] = \mathbf{o}$, а $\lim\limits_{\Delta t \to 0} [\mathbf{r}_0, \varepsilon(\Delta t)] = \mathbf{o}$, получим формулу (43).

Если $|\mathbf{r}(t)| = r$ — постоянная, то, дифференцируя равенство $\mathbf{r}^2 = r^2$, будем иметь $(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0) = 0$, т. е. $|\mathbf{r}_0||\mathbf{r}'_0|\cos\psi = 0$, где ψ — угол между векторами $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}'_0$. Поскольку $\mathbf{r}_0 \neq \mathbf{o}$, то либо $\mathbf{r}'_0 = \mathbf{o}$, либо $\psi = \pi/2$ и, следовательно, $\sin\psi = 1$. В обоих случаях

$$|[\mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0]| = |\mathbf{r}_0|\,|\mathbf{r}'_0|\,|\sin\psi| = r_0\,|\mathbf{r}'_0|.$$

Подставляя это выражение в (43), получим формулу (44). В случае, когда годограф вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ является траекторией движения точки, а параметр t — временем и, следовательно, $\mathbf{r}' = \mathbf{v}$ — скоростью движения, в силу (44) получим

$$\omega = v/r, \quad v = |\mathbf{v}|, \quad r = |\mathbf{r}|,$$

т. е. формулу, связывающую значения угловой скорости ω и линейной $\mathbf{v}$ при движении точки по поверхности шара $|\mathbf{r}| = r = \mathrm{const}$. ▲

Пример 5. Доказать, что если вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема внутри него, то существует такая точка $\xi \in (a; b)$, что

$$|\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)| \leqslant |\mathbf{r}'(\xi)|(b - a). \tag{46}$$

▲ Если $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$, то равенство (46) верно при любом выборе точки $\xi \in (a; b)$. Поэтому предположим, что $\mathbf{r}(a) \neq \mathbf{r}(b)$, и обозначим через $\mathbf{e}$ единичный вектор в направлении вектора $\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)$. Тогда

$$|\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)| = (\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a), \mathbf{e}) = (\mathbf{r}(b), \mathbf{e}) - (\mathbf{r}(a), \mathbf{e}). \tag{47}$$

Рассмотрим скалярную функцию $f(t) = (\mathbf{r}(t), \mathbf{e})$. Она удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа о среднем значении, поэтому существует такая точка $\xi \in (a; b)$, что $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$, т. е.

$$(\mathbf{r}(b), \mathbf{e}) - (\mathbf{r}(a), \mathbf{e}) = (\mathbf{r}'(\xi), \mathbf{e})(b - a).$$

Отсюда, применив неравенство Коши для оценки правой части этого равенства:

$$|(\mathbf{r}'(\xi), \mathbf{e})| \leqslant |\mathbf{r}'(\xi)||\mathbf{e}| = |\mathbf{r}'(\varepsilon)|,$$

и воспользовавшись равенством (47), получим неравенство (46). ▲

Пример 6. Представить пересечение шара $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и цилиндра $x^2 + y^2 = Rx$ в виде параметрически заданной кривой (точнее, носителя кривой).

▲ Из уравнения $x^2 + y^2 = Rx$ следует, что $0 \leqslant x \leqslant R$. Поэтому можно положить $x = R\sin^2 t$. Тогда

$$y^2 = Rx - x^2 = R^2 \sin^2 t \cos^2 t,$$
$$z^2 = R^2 - (x^2 + y^2) = R^2 - Rx = R^2 \cos^2 t,$$

и легко проверить, что кривая

$$x = R\sin^2 t, \quad y = R\sin t\cos t, \quad z = R\cos t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \tag{48}$$

совпадает с пересечением сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и цилиндра $x^2 + + y^2 = Rx$, причем точка $(R; 0; 0)$ получается при значениях параметров $t = \pi/2$ и $t = 3\pi/2$, т. е. является точкой самопересечения. Кривая (48) называется *кривой Вивиани* (рис. 24.7). ▲

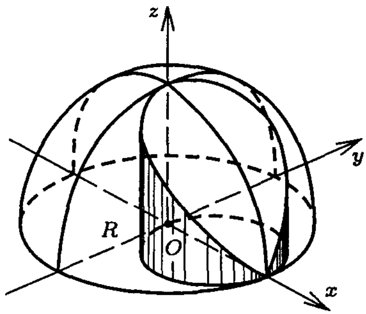

Рис. 24.7

Пример 7. Найти касательные прямые и нормальные плоскости кривой $z = x^2 + y^2$, $y = x$.

▲ Примем переменную x за параметр на данной кривой. Тогда представление кривой будет иметь вид

$$\mathbf{r}(x) = (x; x; 2x^2).$$

Найдя отсюда касательный вектор $\mathbf{r}'(x) = (1; 1; 4x)$, получим, в силу формулы (4), уравнение касательной в точке $(x_0; x_0; 2x_0^2)$ в виде

$$x - x_0 = y - x_0 = (z - 2x_0^2)/(4x_0).$$

Поскольку вектор $\mathbf{r}'(x_0) = (1; 1; 4x_0)$ перпендикулярен нормальной плоскости кривой в рассматриваемой точке, то уравнение этой плоскости имеет вид

$$(x - x_0) + (y - x_0) + 4x_0(z - 2x_0^2) = 0,$$

т. е.

$$x + y + 4x_0 z = 2x_0 + 8x_0^3. \quad ▲$$

Пример 8. При каких значениях a кривая

$$x = e^{at}\cos t, \quad y = e^{at}\sin t, \quad z = e^{at}, \quad -\infty < t < +\infty, \tag{49}$$

пересекает все образующие конуса $x^2 + y^2 = z^2$ под углом $\pi/4$?

▲ Простой подстановкой в уравнение конуса легко проверить, что кривая (49) действительно лежит на нем. Если $\mathbf{r}(t)$ — вектор с координатами (49), то касательный вектор $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(t)$ к кривой (49) имеет вид

$$\mathbf{r}'(t) = (e^{at}(a\cos t - \sin t);\ e^{at}(a\sin t + \cos t); ae^{at}),$$

а вектор $\mathbf{l} = \mathbf{l}(t)$, направленный по образующей конуса $x^2 + y^2 = z^2$ в той же точке кривой (49), — вид

$$\mathbf{l}(t) = (x; y; \sqrt{x^2 + y^2}) = (e^{at}\cos t;\ e^{at}\sin t;\ e^{at}).$$

Поскольку

$$|\mathbf{r}'(t)| = e^{at}\sqrt{2a^2 + 1}, \quad |\mathbf{l}(t)| = e^{at}\sqrt{2},$$

то

$$\cos(\widehat{\mathbf{r}'l}) = \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{l})}{|\mathbf{r}'|\,|\mathbf{l}|} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2 + 1}}. \tag{50}$$

Поэтому, если угол между векторами $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{l}$ равен $\pi/4$ или $3\pi/4$, то из (50) получается уравнение

$$\frac{|a|\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

откуда $a = \pm 1/\sqrt{2}$. ▲

Пример 9. Найти длину дуги $s(t)$ винтовой линии

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt, \quad 0 \leqslant t < +\infty, \tag{51}$$

и получить параметризацию винтовой линии, когда за параметр на ней принята переменная длина дуги.

▲ Поскольку для касательного вектора $\mathbf{r}'(t)$ винтовой линии имеет место формула

$$\mathbf{r}'(t) = (-a\sin t;\ a\cos t;\ b),$$

то, в силу формулы (14), для производной по параметру t длины дуги, отсчитываемой в сторону возрастания параметра, будем иметь

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Если производная некоторой функции постоянна, то сама функция линейна, и так как в данном случае $s(0) = 0$, то

$$s(t) = t\sqrt{a^2+b^2}, \quad t \geqslant 0.$$

Подставляя $t = s/(\sqrt{a^2+b^2})$ в формулы (51), получим

$$x = a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad y = a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad z = \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}. \quad ▲$$

Пример 10. Найти сопровождающий трехгранник Френе винтовой линии; вычислить ее кривизну и кручение.

▲ В примере 9 этого параграфа было показано, что представление винтовой линии, когда за параметр принята переменная длина дуги, имеет вид

$$x = a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad y = a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad z = \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad s \geqslant 0.$$

Поэтому

$$\boldsymbol{\tau} = \left(\frac{dx}{ds}; \frac{dy}{ds}; \frac{dz}{ds}\right) =$$

$$= \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}};\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}};\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),$$

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \left(-\frac{a}{a^2+b^2}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}};\ -\frac{a}{a^2+b^2}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}};\ 0\right).$$

Отсюда

$$k = \left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right| = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

Кроме того, в силу первой формулы Френе (см. (21)) имеем

$$\boldsymbol{\nu} = \left(-\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}};\ -\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}};\ 0\right)$$

и, следовательно,

$$\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}] =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ -\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\mathbf{i} - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\mathbf{j} + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\mathbf{k}.$$

Дифференцируя это равенство, получим

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = \frac{b}{a^2+b^2}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\mathbf{i} + \frac{b}{a^2+b^2}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\mathbf{j} = -\frac{b}{a^2+b^2}\,\boldsymbol{\nu}.$$

Отсюда, согласно третьей формуле Френе, $\varkappa = b/(a^2+b^2)$. ▲

Пример 11. Найти радиус кривизны и эволюту эллипса

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1, \quad a \geqslant b > 0.$$

▲ Запишем уравнение эллипса в параметрическом виде:

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Заметив, что $x' = -a\sin t$, $y' = b\cos t$, $x'' = -a\cos t$, $y'' = -b\sin t$, получим (см. (20), (33))

$$R = \frac{1}{k} = \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}{ab\sin^2 t + ab\cos^2 t} = \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}{ab}.$$

Отсюда, воспользовавшись формулами (34), получим уравнения эволюты

$$\xi = a\cos t - b\cos t\frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab} = \frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t,$$

$$\eta = b\sin t - a\sin t\frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab} = \frac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t.$$

Таким образом, эволютой эллипса является астроида. ▲

Пример 12. Доказать, что при монотонном изменении радиуса кривизны на некоторой части плоской кривой его приращение равно соответствующему приращению длины дуги эволюты (т. е. длине пути, пройденного центром кривизны по эволюте).

▲ Уравнение эволюты кривой $\Gamma = \{\mathbf{r}(s);\ 0 \leqslant s \leqslant S\}$, где s — переменная длина дуги кривой Γ, имеет вид

$$\boldsymbol{\rho}(s) = \mathbf{r}(s) + R(s)\boldsymbol{\nu}(s).$$

Поэтому

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} + \frac{dR}{ds}\,\boldsymbol{\nu} + R\,\frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds},$$

где

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \boldsymbol{\tau}, \quad R\,\frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds} = -Rk\boldsymbol{\tau} = -\boldsymbol{\tau}$$

(так как $Rk = 1$). Таким образом, $\dfrac{d\rho}{ds} = \dfrac{dR}{ds}\,\nu$, откуда

$$\left|\frac{d\rho}{ds}\right| = \left|\frac{dR}{ds}\right|. \tag{52}$$

Обозначим через σ переменную длину дуги эволюты кривой Γ, отсчитываемой в направлении возрастания длины дуги s самой кривой Γ. Тогда

$$\left|\frac{d\rho}{ds}\right| = \frac{d\sigma}{ds}$$

(см. (14)). Если, для определенности, на рассматриваемом участке кривой Γ ее радиус кривизны возрастает, т. е. $dR/ds \geqslant 0$, то из (52) следует, что

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{dR}{ds},$$

т. е. $\sigma(s) = R(s) + c$, где c — некоторая постоянная. Отсюда сразу и получается, что для указанных значений параметра s приращение длины дуги эволюты $\Delta\sigma = \sigma(s+\Delta s) - \sigma(s)$ совпадает с соответствующим приращением радиуса кривизны $\Delta R = R(s+\Delta s) - R(s)$, т. е. $\Delta\sigma = \Delta R$. ▲

Пример 13. Если кручение кривой тождественно равно нулю, то кривая плоская.

▲ Если у кривой $\Gamma = \{\mathbf{r}(s);\ 0 \leqslant s \leqslant S\}$, s — переменная длина дуги, ее кручение во всех точках равно нулю: $\varkappa = 0$, то в силу третьей формулы Френе (см. (23)) имеем $d\boldsymbol{\beta}/ds = 0$, т. е. бинормаль $\boldsymbol{\beta}$ кривой Γ является постоянным вектором. Обозначим его через $\boldsymbol{\beta}_0$. Тогда для любой точки кривой Γ будем иметь $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\beta}_0) = 0$, или

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}(s),\ \boldsymbol{\beta}_0\right) = 0,$$

откуда

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{r}(s),\ \boldsymbol{\beta}_0) = 0.$$

Следовательно, $(\mathbf{r}(s), \boldsymbol{\beta}_0) = c$, где c — некоторая постоянная. Это означает, что концы всех радиус-векторов $\mathbf{r}(s)$ лежат на плоскости $(\mathbf{r}, \boldsymbol{\beta}_0) = c$ (здесь $\mathbf{r} = (x; y; z)$ — текущий радиус-вектор точек плоскости, на которой лежит кривая Γ). ▲

ЗАДАЧИ

1. Построить годограф вектор-функции $(-\infty < t < +\infty)$:
1) $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 1$; 2) $x = \sin t,\ y = \cos t,\ z = t^2$;
3) $x = 1,\ y = t,\ z = t^2$; 4) $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$;
5) $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ z = 0,\ a > 0$;
6) $x = t^2 - 2t + 3,\ y = t^2 - 2t + 1,\ z = 0$;
7) $x = a\sin^2 t,\ y = b\cos^2 t,\ z = t$.

2. Доказать, что годограф вектор-функции
$$\mathbf{r} = \sin 2\varphi\, \mathbf{i} + (1 - \cos 2\varphi)\, \mathbf{j} + 2\cos\varphi\, \mathbf{k}$$
лежит на сфере.

3. Доказать, что годограф вектор-функции
$$\mathbf{r} = (a_1t^2 + b_1t + c_1)\, \mathbf{i} + (a_2t^2 + b_2t + c_2)\, \mathbf{j} + (a_3t^2 + b_3t + c_3)\, \mathbf{k}$$
лежит в некоторой плоскости, и найти уравнение этой плоскости.

4. Доказать, что если $\lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{a}$, то $\lim\limits_{t\to t_0} |\mathbf{r}(t)| = |\mathbf{a}|$. Верно ли обратное утверждение?

5. Доказать, что вектор-функция $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}$ является бесконечно малой при $t \to 0$.

6. Найти предел вектор-функции:

1) $\mathbf{r}(t) = \dfrac{1-t}{1+t}\,\mathbf{i} + \dfrac{\sin t}{t}\,\mathbf{j} - \dfrac{\ln(1-t)}{t}\,\mathbf{k}$ при $t \to 0$;

2) $\mathbf{r}(t) = \dfrac{\sin t}{t-\pi}\,\mathbf{i} + \dfrac{\ln(t/\pi)}{\pi - t}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$ при $t \to \pi$.

7. Доказать, что для того, чтобы вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ имела при $t \to t_0$ предел, равный $\mathbf{a}$, необходимо и достаточно, чтобы ее можно было представить в виде
$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + \boldsymbol{\alpha}(t),$$
где $\boldsymbol{\alpha}(t)$ — бесконечно малая при $t \to t_0$ вектор-функция.

8. Доказать, что если $\lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{a}$ и $\lim\limits_{t\to t_0} f(t) = \lambda$, то
$$\lim_{t\to t_0} f(t)\,\mathbf{r}(t) = \lambda\mathbf{a}.$$

9. Доказать, что если $\lim\limits_{t\to t_0} r_1(t) = \mathbf{a}$, $\lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{b}$ и $\lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}_3(t) = \mathbf{c}$, то:

1) $\lim\limits_{t\to t_0} (\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)) = \mathbf{a} + \mathbf{b}$; 2) $\lim\limits_{t\to t_0} (\mathbf{r}_1(t),\, \mathbf{r}_2(t)) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$;

3) $\lim\limits_{t\to t_0} [\mathbf{r}_1(t),\, \mathbf{r}_2(t)] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$; 4) $\lim\limits_{t\to t_0} (\mathbf{r}_1(t),\, \mathbf{r}_2(t),\, \mathbf{r}_3(t)) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

10. Доказать, что если скалярные функции $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ и вектор-функции $\mathbf{r}_1(t)$, $\mathbf{r}_2(t)$, $\mathbf{r}_3(t)$ непрерывны в точке t_0, то в этой точке непрерывны и функции:

1) $\lambda_1(t)\mathbf{r}_1(t) + \lambda_2(t)\mathbf{r}_2(t)$; 2) $(\mathbf{r}_1(t),\, \mathbf{r}_2(t))$; 3) $[\mathbf{r}_1(t),\, \mathbf{r}_2(t)]$;

4) $(\mathbf{r}_1(t),\, \mathbf{r}_2(t),\, \mathbf{r}_3(t))$; 5) $|\mathbf{r}_1(t)|$.

11. Найти производную вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ и написать уравнение касательной в произвольной точке ее годографа, если:

1) $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$; 2) $\mathbf{r}(t) = \sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$;

3) $\mathbf{r}(t) = a\sin^2 \omega t\,\mathbf{i} + b\cos^2 \omega t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$.

12. Найти производную функций:

1) $\mathbf{r}^2(t)$; 2) $\sqrt{\mathbf{r}^2(t)}$; 3) $[[\mathbf{r}(t),\, \mathbf{r}'(t)],\, \mathbf{r}''(t)]$; 4) $(\mathbf{r}(t),\, \mathbf{r}'(t),\, \mathbf{r}''(t))$.

13. Доказать, что если длина векторов $\mathbf{r}(t)$ постоянна в окрестности точки t_0 и существует производная $\mathbf{r}'(t_0)$, то векторы $\mathbf{r}(t_0)$ и $\mathbf{r}'(t_0)$ ортогональны. Каков механический смысл этого факта?

14. Доказать, что для того, чтобы во всех точках некоторого интервала векторы $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{r}'(t)$ были ортогональны, необходимо и достаточно, чтобы скалярная функция $|\mathbf{r}(t)|$ была постоянной на этом интервале.

15. Доказать, что для того, чтобы дифференцируемая и не обращающаяся в нуль на интервале $(a; b)$ вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ имела постоянное направление (т. е. чтобы при любом $t \in (a; b)$ вектор $\mathbf{r}(t)$ был коллинеарен, например, с вектором $\mathbf{r}((a+b)/2))$, необходимо и достаточно, чтобы векторы $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{r}'(t)$ были коллинеарны.

16. Пусть вектор-функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ имеет в точке t_0 производную. Будет ли дифференцируема в этой точке функция $|\mathbf{r}(t)|$? Верны ли в этой точке равенства $|\mathbf{r}'| = |\mathbf{r}|'$ и $(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = |\mathbf{r}|\,|\mathbf{r}|'$?

17. Доказать, что если

$$\mathbf{r} = x_1(x, y, z, t)\,\mathbf{i} + x_2(x, y, z, t)\,\mathbf{j} + x_3(x, y, z, t)\,\mathbf{k},$$

где x_1, x_2, x_3 — непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов, а x, y, z — непрерывно дифференцируемые функции от t, то

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

18. Построить годографы вектор-функции

$$\mathbf{r}(t) = (a\sin t,\ -a\cos t,\ bt^2)$$

и ее производной.

19. Пользуясь определением производной вектор-функции, доказать формулы:

1) $(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)' = \mathbf{r}_1' + \mathbf{r}_2'$;
2) $(f\mathbf{r})' = f'\mathbf{r} + f\mathbf{r}'$, f — скалярная функция;
3) $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)' = (\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2) + (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2')$; 4) $[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]' = [\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2] + [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2']$;
5) $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)' = (\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) + (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2', \mathbf{r}_3) + (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3')$.

20. Доказать, что если $\mathbf{r} = \mathbf{a}\cos\omega t + \mathbf{b}\sin\omega t$, где ω, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — постоянные, то:

1) $\left[\mathbf{r}, \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\right] = [\omega\mathbf{a}, \mathbf{b}]$; 2) $\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \omega^2\mathbf{r} = \mathbf{o}$.

21. Доказать, что если $\mathbf{r} = \mathbf{a}e^{\omega t} + \mathbf{b}e^{-\omega t}$, где ω, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — постоянные, то

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - \omega^2\mathbf{r} = \mathbf{o}.$$

22. Доказать, что если вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ дифференцируема в точке t_0, то она и непрерывна в ней.

23. Пусть вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\mathbf{r}'' = [\mathbf{r}', \mathbf{a}]$, где $\mathbf{a}$ — постоянный вектор. Выразить через $\mathbf{a}$ и $\mathbf{r}'$: 1) $[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']^2$; 2) $(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')$.

24. Пусть для дважды дифференцируемой на отрезке $[a; b]$ вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ во всех точках этого отрезка выполняются условия

$$(\mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t)) = 0, \quad [\mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t)] \neq \mathbf{o}.$$

Доказать, что тогда годограф вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ лежит на некоторой плоскости.

25. Доказать, что если у дважды дифференцируемой на отрезке $[a; b]$ вектор-функции $r(t)$ во всех точках этого отрезка векторы $\mathbf{r}'(t)$ и $\mathbf{r}''(t)$ отличны от нуля и коллинеарны, то годограф вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ является отрезком прямой.

26. Доказать, что годографом вектор-функции $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b} + t^2\mathbf{c}$, $t \in R$, где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ — постоянные векторы, причем векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ не коллинеарны, является парабола. Что будет представлять собой годограф, если векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ коллинеарны?

27. Доказать, что годограф вектор-функции $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + \cos t\,\mathbf{b} + \sin t\,\mathbf{c}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ — постоянные векторы, причем векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ не коллинеарны, является эллипсом.

28. Доказать, что траектория материальной точки, движущейся под действием центральной силы, является плоской.

29. Траектория движения точки задана в цилиндрических координатах:

$$\mathbf{r}(t) = (\rho\cos\varphi;\ \rho\sin\varphi;\ z),$$

где t — время, $\rho(t)$, $\varphi(t)$, $z(t)$ — известные функции. Найти:

1) косинус угла α между радиус-вектором движущейся точки и вектором ее мгновенной скорости;

2) величину ускорения в случае движения по цилиндру $\rho = \rho_0$.

30. Траектория движущейся точки задана в сферических координатах:

$$\mathbf{r}(t) = (\rho\cos\varphi\cos\theta;\ \rho\sin\varphi\cos\theta;\ \rho\sin\theta),$$

где t — время, $\rho(t)$, $\varphi(t)$, $\theta(t)$ — известные функции. Найти величину мгновенной скорости.

31. Пусть m — масса точки, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$ — действующая на нее сила, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ — закон движения точки, $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ — ее ускорение, $W = W(t)$ — кинетическая энергия (t — время, m — постоянная). Из закона Ньютона $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ вывести формулу $dW = (\mathbf{F}, d\mathbf{r})$.

32. При условиях предыдущей задачи доказать формулу $d\mathbf{N} = \mathbf{M}\,dt$, где $\mathbf{N}$ — момент количества движения точки относительно произвольно выбранного начала координат O, $\mathbf{M}$ — момент силы $\mathbf{F}$ относительно точки O. (*Количеством движения* материальной точки называется вектор, равный произведению ее массы на скорость. Если какой-либо вектор $\mathbf{b}$ приложен к точке P, то моментом вектора $\mathbf{b}$ относительно точки O называется вектор $[\overline{OP}, \mathbf{b}]$.)

33. Привести пример дифференцируемой вектор-функции $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, для которой не существует такой точки $\xi \in [a; b]$, что $\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a) = \mathbf{r}'(\xi)(b-a)$ (т. е. показать, что для вектор-функций в этом смысле неверен аналог формулы конечных приращений Лагранжа).

34. Доказать, что для того, чтобы дифференцируемая на интервале $(a; b)$ вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ была постоянной (т. е. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{c}$, $a < t < b$, $\mathbf{c}$ — постоянный вектор), необходимо и достаточно, чтобы производная $\mathbf{r}'(t)$ тождественно равнялась нулю на интервале $(a; b)$.

35. Составить параметрическое уравнение развернутой окружности, т. е. траектории конца туго натянутой нити, сматывающейся с неподвижной круглой плоской катушки.

36. Прямая OL, не перпендикулярная оси Oz, равномерно вращается вокруг нее с постоянной угловой скоростью ω. Точка M движется по прямой OL:

1) со скоростью, пропорциональной расстоянию OM подвижной точки M до точки O;

2) с постоянной скоростью.

В первом случае точка M описывает коническую спираль, а во втором — коническую винтовую линию. Написать параметрические уравнения этих кривых.

37. Доказать, что уравнения
$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad -\pi/2 \leqslant t \leqslant \pi/2,$$
и
$$x = \sqrt{t(2-t)}, \quad y = t - 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2,$$
являются параметризациями одной и той же кривой.

38. Доказать, что уравнения
$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad -\pi < t < \pi,$$
и
$$x = a\,(1-t^2)/(1+t^2), \quad y = b\,(2t)/(1+t^2), \quad -\infty < t < +\infty,$$
являются параметризациями одной и той же кривой. Как точка движется по этой кривой, когда параметр t растет от $-\infty$ до $+\infty$?

39. Показать, что кривая $x = e^{at}\cos t$, $y = e^{at}\sin t$, $z = e^{at}$ лежит на конусе $z^2 = x^2 + y^2$.

40. Показать, что кривая
$$x = t/(1+t^2+t^4), \quad y = t^2/(1+t^2+t^4), \quad z = t^3/(1+t^2+t^4)$$
является сферической кривой.

41. При каком условии на матрицу (a_{ij}) $(i, j = 1, 2, 3)$ кривая
$$x = a_{11}\varphi(t) + a_{12}\psi(t) + a_{13}\xi(t) + b_1,$$
$$y = a_{21}\varphi(t) + a_{22}\psi(t) + a_{23}\xi(t) + b_2,$$
$$z = a_{31}\varphi(t) + a_{32}\psi(t) + a_{33}\xi(t) + b_3$$

является плоской кривой?

42. Доказать, что проекция кривой Вивиани

$$x = R\sin^2 t, \quad y = R\sin t\cos t, \quad z = R\cos t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

на плоскость переменных x и z является дугой параболы.

43. Найти проекцию кривой $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$, $z = t$, $-\infty < < t < +\infty$, на плоскость переменных x и y.

44. Доказать, что проекция винтовой линии

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt, \quad -\infty < t < +\infty,$$

на плоскость переменных y и z является синусоидой.

45. Доказать, что при переносе начала координат в точку $O_1 = = (0; 0; \beta b)$ и повороте осей абсцисс и ординат вокруг новой оси аппликат на угол β представлению винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ можно придать вид $x_1 = a\cos t_1$, $y_1 = a\sin t_1$, $z_1 = bt_1$. Это показывает, что винтовая линия способна скользить сама по себе.

46. Найти уравнение касательной к кривой:

1) $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t^2$ при $t = 1$;

2) $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$ при $t = 0$.

47. Составить уравнение касательной к кривой

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad z = 4a\sin(t/2)$$

при $t = \pi/2$. Какой угол образует эта касательная с осью Oz?

48. Найти уравнение касательной прямой и нормальной плоскости кривой $x = t^4$, $y = t^3$, $z = t^2$ в произвольной ее точке.

49. Найти касательную к кривой Вивиани (см. задачу 42), параллельную плоскости $y = 0$.

50. В каких точках касательная к кривой $x = 3t - t^3$, $y = 3t^2$, $z = = 3t + t^3$ параллельна плоскости $3x + y + z + 2 = 0$?

51. Найти нормальную плоскость кривой $z = x^2 + y^2$, $y = x$, перпендикулярную прямой $x = y = z$.

52. Найти касательную к кривой $x^2 + y^2 = 10$, $y^2 + z^2 = 25$ в точке $(1; 3; 4)$.

53. Найти косинусы углов с осями координат у касательных к кривой $x^2 = 2az$, $y^2 = 2bz$.

54. К кривой $y^2 = 2px$, $z^2 = 2qx$ проведена касательная в точке, в которой $x = (p + q)/2$. Найти длину отрезка этой касательной от точки касания до плоскости $x = 0$.

55. Доказать, что нормальные плоскости кривой $x = a\cos t$, $y = = a\sin\alpha\sin t$, $z = a\cos\alpha\sin t$ проходят через прямую $x = 0$, $z + + y\operatorname{tg}\alpha = 0$.

56. Доказать, что касательные к кривой $x^2 = 3y$, $2xy = 9z$ образуют постоянный угол с некоторым определенным направлением.

57. Координаты точек некоторой кривой удовлетворяют соотношению

$$(x^2+y^2+z^2-a^2)(dx^2+dy^2+dz^2)=(x\,dx+y\,dy+z\,dz)^2.$$

Доказать, что касательные к этой кривой касаются шара $x^2+y^2+z^2=a^2$.

58. Доказать, что касательные к кривой

$$x=a(\sin t+\cos t),\quad y=a(\sin t-\cos t),\quad z=be^{-t}$$

пересекают плоскость переменных x и y по окружности $x^2+y^2=4a^2$.

59. Написать уравнение касательной и нормальной плоскости кривой $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ в точке $(1;1;1)$. Какая кривая получится в пересечении касательных с плоскостью переменных x, y?

60. Найти уравнение нормальной плоскости в произвольной точке кривой $x^2+y^2=1$, $y^2+z^2=1$ $(y\neq\pm1)$.

61. Доказать, что все нормальные плоскости кривой Вивиани $x=a\sin^2 t$, $y=a\sin t\cos t$, $z=a\cos t$ проходят через начало координат.

62. Доказать, что если все нормальные плоскости пространственной кривой проходят через фиксированную точку, то кривая является сферической.

63. Доказать, что кривая $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $z=e^t$ пересекает все образующие конуса $x^2+y^2=z^2$ под одним и тем же углом.

64. Доказать, что кривые пересечения цилиндров $y^2+z^2=b^2$ с поверхностью $xy=az$ пересекают все образующие этой поверхности, принадлежащие одной системе, под прямым углом.

65. Доказать, что кривая $x=a\operatorname{tg}t$, $y=b\cos t$, $z=b\sin t$ лежит на поверхности параболоида и пересекает все его образующие одной системы под прямым углом.

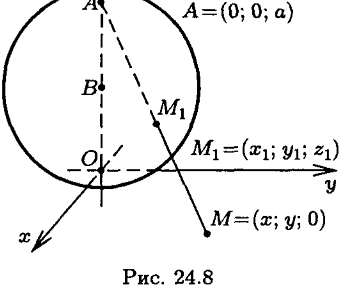

Рис. 24.8

66. Кривая, называемая *локсодромией*, определяется уравнением

$$\varphi=a\ln\operatorname{tg}(\pi/4-\theta/2),$$

где θ — широта, а φ — долгота точки на шаре. Доказать, что она пересекает меридианы шара под углом α, тангенс которого равен a.

Сформулируем определение *стереографической проекции* плоскости на касающуюся ее сферу. Пусть в пространстве R^3 фиксирована декартова прямоугольная система координат x, y, z и задан шар радиуса $a/2$ с центром в точке $B=(0;0;a/2)$, касающийся плоскости переменных x и y (рис. 24.8). Его уравнение имеет вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = az. \tag{53}$$

Соединим прямой верхнюю точку шара, т. е. точку $A = (0; 0; a)$, с произвольно фиксированной точкой $M = (x; y; 0)$ плоскости переменных x и y. Тогда точка $M_1 = (x_1; y_1; z_1)$, в которой эта прямая пересечет сферу (53), называется *стереографической проекцией* точки M на сферу (53), а точка M — стереографической проекцией точки сферы M_1 на рассматриваемую плоскость. Стереографическая проекция устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками плоскости и сферы с выколотой точкой A. Координаты точек M и M_1 связаны соотношениями

$$x_1 = \frac{a^2 x}{x^2 + y^2 + a^2}, \quad y_1 = \frac{a^2 y}{x^2 + y^2 + a^2}, \quad z_1 = \frac{a(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + a^2}. \tag{54}$$

67. Доказать, что стереографическая проекция дает *конформное отображение*, т. е. что кривые на плоскости пересекаются под тем же углом, что и их образы на сфере.

68. Доказать, что кривая $\rho = e^{\lambda\varphi}$, расположенная на плоскости переменных x и y так, что полярная ось совпадает с положительной частью оси x, при стереографической проекции (54) отображается на локсодромию.

69. Доказать, что окружности на шаре при стереографической проекции переходят в окружности или прямые на плоскости.

70. *Центральная проекция* координатной плоскости переменных x, y на полусферу $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$, $0 \leqslant z < a$, состоит в следующем. Произвольно фиксированная точка $M = (x; y; 0)$ плоскости переменных x и y соединяется прямой с центром указанной полусферы, т. е. с точкой $A = (0; 0; a)$. Точка M_1, в которой эта прямая пересекает полусферу, принимается за изображение точки M на полусфере.

Доказать, что эта проекция не является конформным отображением, т. е. она не сохраняет, вообще говоря, углы между кривыми.

71. Найти производную длины дуги по параметру для:

1) цепной линии $y = a\operatorname{ch}(x/a)$, $-a \leqslant x \leqslant a$;

2) эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$;

3) гиперболы $x = a\operatorname{ch} t$, $y = b\operatorname{sh} t$, $-\infty < t < +\infty$;

4) астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$;

5) циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $-\infty < t < +\infty$;

6) винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $-\infty < t < +\infty$;

7) кривой Вивиани $x = R\sin^2 t$, $y = R\sin t\cos t$, $z = R\cos t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

72. Пусть плоская кривая Γ задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, где функция $\rho(\varphi)$ непрерывно дифференцируема на некотором отрезке $[a; b]$. Доказать, что если $s = s(\varphi)$ есть длина дуги кривой Г, отсчитываемая от ее начала, то

$$\frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 + \rho^2}.$$

73. Найти производную длины дуги для следующей кривой, заданной в полярных координатах:

1) архимедовой спирали $\rho = a\varphi$;

2) гиперболической спирали $\rho = a/\varphi$;

3) логарифмической спирали $\rho = ae^{b\varphi}$, $-\infty < \varphi < +\infty$.

74. Доказать, что граница ограниченной выпуклой фигуры на плоскости является спрямляемой кривой.

75. Доказать, что при объединении кривых их длины складываются: если $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, то $S_\Gamma = S_{\Gamma_1} + S_{\Gamma_2}$.

76. Найти кривизну и радиус кривизны в произвольной точке:

1) параболы $y = ax^2$; 2) кубической параболы $y = x^3$;

3) синусоиды $y = \sin x$; 4) цепной линии $y = a\operatorname{ch}(x/a)$;

5) кривой $y = a\ln\cos(x/a)$.

77. Найти кривизну и центр кривизны в произвольной точке:

1) гиперболы $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$;

2) полукубической параболы $3ay^2 = 2x^3$;

3) астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

78. Найти кривизну кривой в произвольной точке:

1) эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $|t| \leqslant \pi$;

2) гиперболы $x = a\operatorname{ch} t$, $y = b\operatorname{sh} t$, $t \in R$;

3) циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in R$.

79. Найти эволюту кривой:

1) $x = t^2$, $y = t^3$; 2) гиперболы $x = a\operatorname{ch} t$, $y = b\operatorname{sh} t$;

3) циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$;

4) эвольвенты круга $x = a(t - \sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$.

80. Найти кривизну в точке M_0 графика функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $F(x, y) = 0$:

1) $F(x,y) = y^5 + y - x^2$, $M_0(\sqrt{2}; 1)$;

2) $F(x,y) = y^3 + y - 2x^3$, $M_0(1; 1)$;

3) $F(x,y) = y^5 + y - 2x^3$, $M_0(1; 1)$;

4) $F(x,y) = x^2 - y - y^3$, $M_0(\sqrt{2}; 1)$.

81. Найти наибольшую кривизну кривой:

1) $y = \ln x$; 2) $y = a\ln(1 - x^2/a^2)$; 3) $y = a\operatorname{ch}(x/a)$;

4) $y = \ln(1 + e^2)$, $x \in R$; 5) $y = \sqrt{1 + x + x^2}$, $x \in R$;

6) $y = \ln \operatorname{ch} x$, $x \in R$; 7) $y = (2\ln x - x^2)/4$; 8) $y = x^3/6 + 1/(2x)$.

82. Доказать, что радиус кривизны параболы $x^2 = 2py$ равен $R =$

$= p/\cos^3\alpha$, где α — угол наклона касательной к оси абсцисс.

83. Пусть $y = f(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a;b]$ функция и $\alpha = \alpha(x)$ — угол, образованный касательной к ее графику с осью Ox в точке $(x; f(x))$. Доказать, что если $k(x)$ — кривизна графика в этой точке, то $k(x) = |d\alpha/ds|$, $a \leqslant x \leqslant b$ (s — переменная длина дуги).

84. Пусть Γ — дважды дифференцируемая кривая без особых точек, лежащая на плоскости переменных x, y; α — угол наклона ее касательной в некоторой точке к оси x; $k^* = d\alpha/ds$ (s — переменная длина дуги); $R^* = 1/k^*$; (ξ, η) — координаты центра кривизны в той же точке кривой Γ. Доказать, что

$$\xi = x - R^*\sin\alpha, \quad \eta = y + R^*\cos\alpha,$$

а также, что

$$\xi = x - \frac{dy}{d\alpha}, \quad \eta = y + \frac{dx}{d\alpha}.$$

85. Доказать, что если $\rho = \rho(\varphi)$ — представление дважды непрерывно дифференцируемой кривой в полярных координатах, то для ее кривизны имеет место формула

$$k = \frac{|\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''|}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}. \tag{88}$$

86. Найти радиусы кривизны кривых, заданных в полярных координатах:

1) лемнискаты $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$; 2) кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi)$;
3) $\rho = a\cos^3\varphi$; 4) спирали Архимеда $\rho = a\varphi$;
5) гиперболической спирали $\rho = a/\varphi$;
6) логарифмической спирали $\rho = ae^{b\varphi}$.

87. Что представляет собой эволюта окружности?

88. Составить уравнение эволюты:

1) трактриссы $x = a\ln((a + \sqrt{a^2 - y^2})/y) - \sqrt{a^2 - y^2}$;
2) логарифмической спирали $\rho = e^{\lambda\varphi}$;
3) кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

89. Доказать, что эволюта циклоиды является также циклоидой, отличающейся от данной только положением.

90. Доказать, что эволютой кардиоиды является также кардиоида.

91. Доказать, что эволютой астроиды является астроида, подобная данной, с коэффициентом подобия 2, повернутая относительно данной на угол $\pi/4$.

92. Найти условие для параметра a логарифмической спирали $\rho = ca^{\varphi}$, при выполнении которого ее эволюта совпадает с самой спиралью.

93. Доказать, что эволютами эпициклоиды

$$x/a = (1+\lambda)\cos\lambda t - \lambda\cos(1+\lambda)t,\ \ y/a = (1+\lambda)\sin\lambda t - \lambda\sin(1+\lambda)t,$$
$$a>0,\quad \lambda>0,\quad -\infty<t<+\infty,$$

и гипоциклоиды

$$x/a = (1-\lambda)\cos\lambda t + \lambda\cos(\lambda-1)t,\ \ y/a = (1-\lambda)\sin\lambda t + \lambda\sin(\lambda-1)t,$$
$$a>0,\quad 0<\lambda<1,\quad -\infty<t<+\infty,$$

являются снова соответственно эпициклоида и гипоциклоида, получающиеся из заданных с помощью поворота и преобразования подобия.

94. Доказать, что для точек спирали Архимеда $\rho = a\varphi$ при $\varphi \to +\infty$ величина разности между длиной радиус-вектора и радиусом кривизны стремится к нулю.

95. Доказать, что в условиях задачи 94 центр кривизны перемещается по кривой, стремящейся к совпадению с окружностью $\rho = 1$.

96. Пусть $\rho = \rho(\varphi)$, $a \leqslant \varphi \leqslant \beta$, — представление дважды непрерывно дифференцируемой кривой в полярных координатах, $\alpha = \alpha(\varphi)$ — угол наклона ее касательной в некоторой точке M к полярной оси, а ψ — угол, образованный этой касательной с продолжением радиус-вектора $\overline{OM}$ точки касания M. Пусть прямая ON перпендикулярна прямой OM, прямая MN — нормаль к заданной кривой в точке M, а C — центр кривизны кривой в той же точке. Доказать, что

$$\frac{NC}{CM} = \frac{d\psi}{d\varphi}.$$

97. Доказать, что у кривых $\rho^n = a^n\cos n\varphi$, $a>0$, полярная нормаль (т. е. отрезок нормали от точки кривой до точки ее пересечения с полярной осью) в $n+1$ раз больше радиуса кривизны.

98. Доказать, что у кривых $\rho^n = a^n\sin n\varphi$, $a>0$, длина части радиус-вектора, заключенной внутри круга кривизны, равна $2\rho/(n+1)$.

99. Пусть r — длина радиус-вектора точки данной дважды непрерывно дифференцируемой кривой, p — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на касательную в указанной точке прямой, и R — радиус кривизны. Доказать, что $dr/dp = R/r$.

100. Доказать, что на эллипсе существуют, вообще говоря, три таких точки, что круги кривизны к эллипсу в этих точках проходят через данную точку эллипса.

101. Доказать, что центры кривизны в точках спирали Архимеда $\rho = a\varphi$, лежащих на одном луче, расположены на эллипсе, полуоси которого не зависят от выбора луча.

102. Пусть некоторая точка дважды непрерывно дифференцируемой кривой принята за начало координат, положительно направленная касательная к кривой в этой точке — за ось x, а ось y направлена от точки касания к центру кривизны. Доказать, что в окрестности точки касания кривая имеет представление

$$y = x^2/(2R) + o(x^2), \quad x \to 0.$$

103. Доказать, что если в точке $M(t_0)$ кривой $\Gamma = \{M(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ радиус кривизны имеет максимум, то существует такая окрестность U точки t_0, что часть кривой, соответствующая значениям параметра $t \in U$, лежит внутри круга кривизны в точке $M(t_0)$.

104. Доказать, что если в точке $M(t_0)$ кривой $\Gamma = \{M(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ радиус кривизны имеет минимум, то существует такая окрестность U точки t_0, что часть кривой, соответствующая значениям параметра $t \in U$, лежит вне круга кривизны в точке $M(t_0)$.

105. Найти параболу, соединяющую начало координат $(0;0)$ с точкой $M(1;0)$ так, чтобы дуга параболы OM образовала вместе с нижней половиной окружности $x^2 + y^2 = 1$ кривую с непрерывной касательной и непрерывной кривизной.

106. Найти параболу с осью симметрии, параллельной оси y, имеющую с синусоидой $y = \sin x$ в точке $(\pi/2; 1)$ общие касательную и кривизну.

107. Доказать: если $(\xi;\eta)$ — координаты центра кривизны дважды непрерывно дифференцируемой кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, то

$$\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'} = \frac{\xi'^2 + \eta'^2}{\xi'\eta'' - \xi''\eta'}.$$

108. Пользуясь свойствами эволюты, найти длины следующих кривых:

1) одной дуги циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$;

2) астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ между точками $(a;0)$ и $(0;a)$;

3) кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

109. Написать уравнения соприкасающейся, нормальной и спрямляющей плоскостей для произвольной точки кривой:

1) винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$;

2) $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$; 3) $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t\sqrt{2}$;

4) $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$, $z = e^t$; 5) $y^2 = x$, $x^2 = z$;

6) $y = \varphi(x)$, $z = a\varphi(x) + b$.

110. Найти уравнение главной нормали и бинормали к кривой:

1) $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$; 2) $x = y^2$, $z = x^2$;

3) $x = t^4/4$, $y = t^3/3$, $z = t^2/2$.

111. Доказать, что главная нормаль винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ перпендикулярна оси z, а ее бинормаль образует с этой осью постоянный угол, косинус которого равен $a/\sqrt{a^2 + b^2}$.

112. Доказать, что одна из биссектрис углов между касательной и бинормалью к кривой $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$ имеет постоянное направление.

113. По главным нормалям (но в противоположную сторону) винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ откладываются отрезки длиной l. Найти кривую, описываемую их концами.

114. Доказать, что прямая, проведенная из произвольной точки M кривой $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ параллельно плоскости $z = 0$ до пересечения с осью z, лежит в соприкасающейся плоскости кривой в точке M.

115. Написать уравнение соприкасающейся плоскости кривой $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $z = e^t$ при $t = 0$.

116. Написать уравнение соприкасающейся плоскости в точке $(2;1;2)$ кривой, являющейся пересечением сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ и гиперболического цилиндра $x^2 - y^2 = 3$.

117. Доказать, что если все соприкасающиеся плоскости дважды непрерывно дифференцируемой кривой проходят через фиксированную точку, то эта кривая плоская.

118. Найти векторы $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\beta}$ кривой $x = t\sin t$, $y = t\cos t$, $z = te^t$ в начале координат.

119. Найти вектор $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\beta}$ в произвольной точке кривой;

1) $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $z = \cos 2t$;

2) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $z = 4a\cos(t/2)$.

120. Доказать, что кривизна кривой тождественно равна нулю в том и только том случае, когда кривая является промежутком прямой.

121. Найти кривизну конической винтовой линии $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = at$ в начале координат.

122. Найти кривизну следующей кривой:

1) $x = a\,\mathrm{ch}\, t$, $y = a\,\mathrm{sh}\, t$, $z = bt$; 2) $x = \ln\cos t$, $y = \ln\sin t$, $z = t\sqrt{2}$;

3) $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4\sin(t/2)$;

4) $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t\sqrt{2}$;

5) $x = a\,\mathrm{ch}\, t\cos t$, $y = a\,\mathrm{ch}\, t\sin t$, $z = at$;

6) $x = a\dfrac{\cos t}{\mathrm{ch}\, t}$, $y = a\dfrac{\sin t}{\mathrm{ch}\, t}$, $z = a(t - \mathrm{th}\, t)$; 7) $x^2 = 2az$, $y^2 = 2bz$.

123. Найти кручение кривой:

1) $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$, $z = e^t$;

2) $x = a\,\mathrm{ch}\, t\cos t$, $y = a\,\mathrm{ch}\, t\sin t$, $z = at$; 3) $y^2 = x$, $x^2 = z$.

124. Найти кривизну и кручение кривой:

1) $2ay = x^2$, $6a^2z = x^3$; 2) $x = a\,\mathrm{ch}\, t$, $y = a\,\mathrm{sh}\, t$, $z = at$;

3) $x = 2abt$, $y = a^2\ln t$, $z = b^2t^2$;

4) $x = 3t - t^3$, $y = 3t^2$, $z = 3t + t^3$;

5) кривой Вивиани $x = R\sin^2 t$, $y = R\sin t\cos t$, $z = R\cos t$; есть ли на кривой Вивиани точки распрямления и точки уплощения?

125. Найти точки распрямления и уплощения, а также дуги, на которых кручение сохраняет знак, для кривой:

1) $x = t$, $y = \sin t$, $z = \sin 3t$; 2) $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t^3 - 9t$.

126. Исходя из определения главной нормали $\mathbf{v}$ как единичного вектора в направлении вектора $d\boldsymbol{\tau}/ds$ ($\boldsymbol{\tau}$ — единичный касательный вектор, а s — переменная длина дуги заданной трижды непрерывно дифференцируемой кривой без особых точек) и определения бинормали $\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}]$, доказать, что:

1) производная бинормали $d\boldsymbol{\beta}/ds$ коллинеарна с главной нормалью;

2) если $d\boldsymbol{\tau}/ds = k\boldsymbol{\nu}$, $d\boldsymbol{\beta}/ds = -\varkappa\boldsymbol{\nu}$, то $d\boldsymbol{\nu}/ds = -k\boldsymbol{\tau} + \varkappa\boldsymbol{\beta}$ (иначе говоря, доказать формулы Френе).

127. Доказать, что для трижды непрерывно дифференцируемой кривой $\Gamma = \{\mathbf{r}(s);\ 0 \leqslant s \leqslant S\}$, s — переменная длина дуги, выполняются соотношения

$$\left|\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\right|^3 = k^4 + k^2\varkappa^2 + \left(\frac{dk}{ds}\right)^2,$$

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right) = 0, \quad \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}, \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\right) = -k^2, \quad \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\right) = k\,\frac{dk}{ds}.$$

128. В предположениях предыдущей задачи доказать, что

$$\left(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\beta}, \frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}\right) = \varkappa, \quad \left(\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}, \frac{d^2\boldsymbol{\beta}}{ds^2}, \frac{d^3\boldsymbol{\beta}}{ds^3}\right) = \varkappa^5\frac{d}{ds}\frac{k}{\varkappa}, \quad \left(\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}, \frac{d^2\boldsymbol{\tau}}{ds^2}, \frac{d^3\boldsymbol{\tau}}{ds^3}\right) = k^5\frac{d}{ds}\frac{\varkappa}{k}.$$

129. Доказать, что если в точке M_0 кривизна k кривой Γ не равна нулю, то k равна кривизне проекции Γ на ее соприкасающуюся плоскость в точке M_0.

130. Доказать, что если все нормальные плоскости дважды непрерывно дифференцируемой кривой без особых точек и с кривизной, не обращающейся в нуль, параллельны постоянному вектору, то эта кривая плоская.

131. Доказать, что у кривой $x = e^t\sin t$, $y = e^t\cos t$, $z = e^t$ каждое ребро сопровождающего трехгранника Френе образует с осью z постоянный угол.

132. На бинормалях винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = e^t$ отложены отрезки одной и той же длины. Найти уравнение кривой, образованной концами этих отрезков.

133. Кривая называется *линией откоса*, если касательные к ней образуют постоянный угол с какой-либо прямой.

Доказать, что дважды непрерывно дифференцируемая кривая с не равной нулю кривизной является линией откоса тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

1) все главные нормали параллельны некоторой плоскости;

2) все спрямляющие плоскости параллельны некоторой прямой;

3) в случае трижды непрерывно дифференцируемой кривой существует такая постоянная $c > 0$, что $\varkappa(s) = ck(s)$; при этом $|c| = \operatorname{ctg}\alpha$, где α — угол, о котором шла речь при определении линии откоса.

134. При каком условии центр кривизны винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ лежит на том же цилиндре, что и сама винтовая линия?

135. Доказать, что у кривой $x = a\operatorname{ch} t\cos t$, $y = a\operatorname{ch} t\sin t$, $z = at$ отрезки нормали от точки на кривой до оси z равны обратной величине абсолютного значения кручения кривой: $1/|\varkappa|$.

136. Пусть $\Gamma = \{M(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ — дважды непрерывно дифференцируемая кривая без особых точек $t_0 \in [a;b]$, $t_0 + \Delta t_1 \in [a;b]$ и $t_0 + \Delta t_2 \in [a;b]$. Проведем через точки $M(t_0)$, $M(t_0+\Delta t_1)$ и $M(t_0 + \Delta t_2)$ плоскость. Доказать, что если в точке $M(t_0)$ кривизна не равна нулю, то при $\Delta t_1 \to 0$ и $\Delta t_2 \to 0$ эта плоскость стремится (определите это понятие) к соприкасающейся плоскости в точке $M(t_0)$.

137. Пусть π — плоскость, проходящая через касательную прямую в точке $M(s_0)$ дважды непрерывно дифференцируемой кривой $\Gamma = \{M(s);\ 0 \leqslant s \leqslant S\}$, s — переменная длина дуги кривой Γ, $s_0 \in [0, S]$ и $d(\Delta s)$ — расстояние от точки $M(s_0 + \Delta s)$ до плоскости π.

Доказать, что плоскость π является соприкасающейся плоскостью кривой Γ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{d(\Delta s)}{\Delta s^2} = 0.$$

138. В предположениях задачи 136 проведем через те же три точки $M(t_0)$, $M(t_0 + \Delta t_1)$ и $M(t_0 + \Delta t_2)$ окружность. Доказать, что эта окружность при $\Delta t_1 \to 0$ и $\Delta t_2 \to 0$ стремится к окружности, являющейся границей круга кривизны в точке $M(t_0)$ (эта окружность называется *соприкасающейся окружностью* в данной точке кривой).

139. Через четыре точки кривой можно провести сферу. Если они стремятся к одной точке, то при соответствующих условиях эта сфера стремится к некоторой предельной сфере, называемой *соприкасающейся сферой.* Найти ее центр и радиус.

140. Доказать, что вектор ускорения $\mathbf{a}$ движущейся материальной точки перпендикулярен бинормали траектории движения, и найти его разложение по касательному вектору и вектору главной нормали. Доказать, что

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\frac{v^4}{R^2} + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2},$$

где $v = |\mathbf{v}|$, $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, R — радиус кривизны траектории движения.

141. Доказать, что для трижды непрерывно дифференцируемой кривой $\Gamma = \{M(s);\ 0 \leqslant s \leqslant S\}$, где s — переменная длина дуги:

1) справедлива формула

$$\mathbf{r}(s+\Delta s) - \mathbf{r}(s) = \left(\Delta s - \frac{1}{6}\,k^2(s)\Delta s^3\right)\boldsymbol{\tau}(s) + \left(\frac{1}{2}\,k(s)\Delta s^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{6}\,k'(s)\Delta s^3\right)\boldsymbol{\nu}(s) + \frac{1}{6}\,k(s)\varkappa(s)\Delta s^3\boldsymbol{\beta}(s) + \mathrm{o}(\Delta s^3), \quad \Delta s \to 0;$$

2) если через ξ, η, ζ обозначить координаты точки в системе координат, задаваемой ортами $\boldsymbol{\tau}(s)$, $\boldsymbol{\nu}(s)$, $\boldsymbol{\beta}(s)$, то в окрестности точки кривой $M(s)$ проекция кривой на соприкасающуюся плоскость имеет вид

$$\eta = \frac{1}{2}\,k(s)\xi^2 + o(\xi^2), \quad \xi \to 0,$$

проекция на нормальную плоскость — вид

$$\eta = \sqrt[3]{\frac{9k(s)}{2\varkappa^2(s)}}\zeta^{2/3} + o(\zeta^{2/3}), \quad \zeta \to 0, \quad \varkappa(s) \neq 0,$$

проекция на спрямляющую плоскость — вид

$$\zeta = \frac{1}{6}k(s)\varkappa(s)\xi^3 + o(\xi^3), \quad \xi \to 0.$$

142. Доказать, что если на трижды непрерывно дифференцируемой кривой $\Gamma = \{\mathbf{r}(s);\ 0 \leqslant s \leqslant S\}$, s — переменная длина дуги, параметр s рассматривать как время, то при его изменении сопровождающий трехгранник Френе будет двигаться вдоль кривой как твердое тело с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = \varkappa\boldsymbol{\tau} + k\boldsymbol{\beta}$. Тем самым кривизна численно равна скорости вращения трехгранника Френе вокруг бинормали (причем это вращение всегда происходит от касательного вектора $\boldsymbol{\tau}$ к вектору главной нормали $\boldsymbol{\nu}$), а кручение — его скорости вращения вокруг касательной.

143. Доказать, что формулы Френе можно записать в виде

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\tau}], \qquad \frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds} = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}], \qquad \frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\beta}]$$

(вектор $\boldsymbol{\omega}$ определен в предыдущей задаче).

ОТВЕТЫ

6. 1) $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$; 2) $-\mathbf{i}-\mathbf{j}/\pi+\mathbf{k}$.

11. 1) $\mathbf{i}+2t\,\mathbf{j}+3t^2\,\mathbf{k}$; $x-t_0 = (y-t_0^2)/(2t_0) = (x-t_0^3)/(3t_0^2)$;
2) $\cos t\,\mathbf{i} - \sin t\,\mathbf{j}$; $(x-\sin t_0)/\cos t_0 = -(y-\cos t_0)/\sin t_0$, $z+1=0$;
3) $\omega\sin 2\omega t(a\mathbf{i}-b\mathbf{j})+\mathbf{k}$; $\dfrac{x-a\sin^2\omega t_0}{a\omega\sin 2\omega t_0} = -\dfrac{y-b\cos^2\omega t_0}{b\omega\sin 2\omega t_0} = z-t_0$.

12. 1) $2(\mathbf{r},\mathbf{r}')$; 2) $(\mathbf{r},\mathbf{r}')/\sqrt{\mathbf{r}^2}$; 3) $[[\mathbf{r},\mathbf{r}''],\mathbf{r}''] + [[\mathbf{r},\mathbf{r}'],\mathbf{r}''']$;
4) $(\mathbf{r},\mathbf{r}',\mathbf{r}''')$.

23. 1) $(\mathbf{r}')^2[\mathbf{r}',\mathbf{a}]^2$; 2) $-(\mathbf{r}',\mathbf{a})[\mathbf{r}',\mathbf{a}]^2$.

29. 1) $\cos\alpha =$
$$= \frac{(\sqrt{\rho^2+z^2})'}{\sqrt{(\rho')^2+(\rho\varphi')^2+(z')^2}} = \frac{\rho\rho'+zz'}{\sqrt{\rho^2+z^2}\sqrt{(\rho')^2+(\rho\varphi')^2+(z')^2}};$$

2) $|\mathbf{r}''| = \sqrt{\rho_0^2[(\varphi')^4+(\varphi'')^2]+(x'')^2}$.

30. $|\mathbf{r}'| = \sqrt{(\rho')^2+\rho^2[(\theta')^2+(\varphi'\cos\theta)^2]}$.

35. $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$.

36. 1) $x = ae^{k\varphi}\cos\varphi$, $y = ae^{k\varphi}\sin\varphi$, $z = be^{k\varphi}$;

2) $x = at\cos t$, $y = at\sin t$, $z = bt$.

41. (a_{ij}) — вырожденная матрица. **43.** $\rho = e^{\varphi}$ $(t=\varphi)$.

46. 1) $(x-e)/e = (y-e^{-1})/(-e^{-1}) = (z-1)/2$; 2) $x = y+1 = z$.

47. $x + a(4-\pi)/2 = y = z/\sqrt{2} - a$; $\varphi = \pi/4$.

48. Если $t_0 \neq 0$, то $(x-t_0^4)/(4t_0^2) = (y-t_0^3)/(3t_0) = (z-t_0^2)/2$, $4t_0^2(x-t_0^4)+3t_0+(y-t_0^3)+2(z-t_0^2)=0$, а если $t_0=0$, то $x=y=0$ — касательная прямая, $z=0$ — нормальная плоскость.

49. $x+(-1)^m z\sqrt{2} = (0{,}5+(-1)^n)R$, $2y-(-1)^nR=0$, $m,n=0{,}1$.

50. $(-2;12;14)$, $(-2;3;-4)$. **51.** $8(x+y+z)-5=0$.

52. $x+3y=10$, $3y+4z=25$.

53. $\cos\alpha = \sqrt{a}/c$, $\cos\beta = \sqrt{b}/c$, $\cos\gamma = \sqrt{2z}/c$, $c = \sqrt{a+b+2z}$.

54. $(p+q)/\sqrt{2}$.

59. $(x-1)/\sqrt{2} = (y-1)/2 = (z-1)/3$, $x+2y+3z-6=0$, парабола $y = 3x^2/4$.

60. $x/x_0 - y/y_0 + z/z_0 = 1$, $x_0y_0z_0 \neq 0$.

71. 1) $\operatorname{ch}(x/a)$; 2) $\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$; 3) $\sqrt{a^2\operatorname{sh}^2 t + b^2\operatorname{ch}^2 t}$;

4) $3a|\sin 2t|/2$; 5) $2a|\cos(t/2)|$; 6) $\sqrt{a^2+b^2}$; 7) $R\sqrt{1+\sin^2 t}$.

73. 1) $a\sqrt{1+\varphi^2}$; 2) $a\sqrt{1+\varphi^2}/\varphi^2$; 3) $ae^{b\varphi}\sqrt{1+b^2}$.

76. 1) $k = R^{-1} = 2|a|/(1+4a^2x^2)^{3/2}$;

2) $k = R^{-1} = 6|x|/(1+9x^4)^{3/2}$;

3) $k = 1/R = |\sin x|/(1+\cos^2 x)^{3/2}$; 4) $k = 1/R = 1/(\operatorname{ch}^2(x/a))$;

5) $k = 1/R = |\cos(x/a)|/a$.

77. 1) $k = a^4b^4/(b^4x^2+a^4y^2)^{3/2} = ab/(\varepsilon^2x^2-a^2)^{3/2}$, $\xi = x^3c^2/a^4$, $\eta = -y^3c^2/b^4$, где $c^2 = a^2+b^2$, $\varepsilon = c/a$ — эксцентриситет;

2) $k = \sqrt{3a^2/(x(2a+3x)^3)}$, $\xi = -x(a+3x)/a$, $\eta = 2y(a+2x)/x$;

3) $k = 1/3\sqrt[3]{a|xy|}$, $\xi = x^{1/3}(3a^{2/3}-2x^{2/3})$, $\eta = y^{1/3}(a^{2/3}+2x^{2/3})$;

4) $k = |x+2a|(a-x)^2/a(2a^2-x^2)^{3/2}$, $\xi = a(x^3-2a^3)/(x+2a)\times$ $\times(a-x)^2$, $\eta = 2ay(x+a)/x(x+2a)$.

78. 1) $ab/(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{3/2}$; 2) $ab/(a^2\operatorname{sh}^2 t+b^2\operatorname{ch}^2 t)^{3/2}$;

3) $1/(4a|\sin(t/2)|)$.

79. 1) $\xi = -(9t^2+2)t^2/2$, $\eta = 4(3t^2+1)t/3$;

2) $\xi = ((a^2+b^2)/a)\operatorname{ch}^3 t$, $\eta = -((a^2+b^2)/b)\operatorname{sh}^3 t$;

3) $\xi = \pi a + a(t-\sin t)$, $\eta = -2a + a(1-\cos t)$; 4) $x^2+y^2=a^2$.

80. 1) $1/\sqrt{11}$; 2) $3/(13\sqrt{13})$; 3) $\sqrt{2}/3$; 4) $1/(3\sqrt{6})$.

81. 1) $2/(3\sqrt{3})$; 2) $2/a,\ a>0$; 3) $1/a,\ a>0$; 4) $3^{-3/2}$;
5) $2/\sqrt{3}$; 6) 1; 7) $3\sqrt{3}/4$; 8) $5/8\sqrt[4]{135}$.
86. 1) $a^2/3\rho$; 2) $4/3a|\cos(\varphi/2)|$;
3) $a\cos^2\varphi(1+8\sin^2\varphi)^{3/2}/(4+8\sin^2\varphi)$;
4) $a(1+\varphi^2)^{3/2}/(2+\varphi^2)$; 5) $a(\varphi^2+1)^{3/2}/\varphi^4$; 6) $\rho\sqrt{1+b^2}$.
88. 1) $y=a\,\mathrm{ch}\,(x/a)$;
2) при том же полюсе и соответствующем повороте оси: $\rho=\lambda e^{a\varphi_1}$, $\varphi_1=\varphi+\pi/2$;
3) кардиоида.
92. $\ln a=a^{\pi/2}$. **105.** $y=\sqrt{2}(x-1+\sqrt{1-x})$.
106. $y=-x^2/2+\pi x/2+1-\pi^2/8$. **108.** 1) $8a$; 2) $3a/2$; 3) $8a$.
109. 1) $x\sin t_0-y\cos t_0+(a/b)z-at_0=0$,
$x\sin t_0-y\cos t_0-(b/a)z+(b^2/a)t_0=0,\ x\cos t_0+y\sin t_0-a=0$;
2) $3t_0^2x-3t_0y+z-t_0=0;\ x+2t_0y+3t_0^2z-t_0(1+2t_0^2+3t_0^4)=0$,
$t_0(9t_0^2+2)x+(9t_0^4-1)y-3t_0(2t_0^2+1)z-t_0^2(1+6t_0^2+3t_0^4)=0$;
3) $e^{-t_0}x-e^{t_0}y-\sqrt{2}z+2t_0=0,\ e^{t_0}x-e^{-t_0}y+\sqrt{2}z+2(t_0+$
$+\,\mathrm{sh}\,2t_0)=0,\ x+y-\sqrt{2}\,\mathrm{sh}\,t_0z+2(t_0\,\mathrm{sh}\,t_0-\mathrm{ch}\,t_0)=0$;
4) $(\sin t_0-\cos t_0)x-(\sin t_0+\cos t_0)y+2z-e^{t_0}=0$,
$(\cos t_0-\sin t_0)x+(\cos t_0+\sin t_0)y+z-2e^{t_0}=0$,
$(\sin t_0+\cos t_0)x+(\sin t_0-\cos t_0)y-e^{t_0}=0$;
5) $6y_0^2(x-x_0)-8y_0^3(y-y_0)-(z-z_0)=0$,
$2y_0(x-x_0)+(y-y_0)+4y_0^3(z-z_0)=0$,
$(1-32y_0^6)(x-x_0)-2y_0(12y_0^4+1)(y-y_0)+2y_0^2(8y_0^2+3)(z-z_0)=0$;
6) $ay-z+b=0$,
$x+\varphi'(x_0)y+a\varphi'(x_0)z=x_0+(a^2+1)\varphi(x_0)\varphi'(x_0)+ab\varphi'(x_0)$,
$(a^2+1)\varphi'(x_0)x-y-az=(a^2+1)\varphi'(x_0)x_0-(a^2+1)\varphi(x_0)-ab$.
110. 1) $xy_0-x_0y=0,\ z=z_0;\ x_0x+y_0y=a^2$,
$a^2(x-x_0)=by_0(z-z_0)$;
2) $\dfrac{x-x_0}{1-32y_0^6}=-\dfrac{y-y_0}{2y_0(12y_0^4+1)}=\dfrac{z-z_0}{2y_0(8y_0^2+3)},\ \dfrac{x-x_0}{6y_0^2}=-\dfrac{y-y_0}{8y_0^3}=$
$=-(z-z_0)$;
3) $\dfrac{x-x_0}{t_0^3+2t_0}=\dfrac{y-y_0}{1-t_0^4}=-\dfrac{z-z_0}{t_0(2t_0^2+1)},\ x-x_0=-\dfrac{y-y_0}{2t_0}=\dfrac{z-z_0}{t_0^2}$.
113. Винтовая линия: $x=(a+l)\cos t,\ y=(a+l)\sin t,\ z=bt$.
115. $bx-ay+abz=2ab$. **116.** $4x-y+z-9=0$.
118. $\boldsymbol{\tau}=(\mathbf{j}+\mathbf{k})/\sqrt{2},\ \boldsymbol{\nu}=(2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})/\sqrt{6},\ \boldsymbol{\beta}=(\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})/\sqrt{3}$.
119. 1) $\boldsymbol{\tau}=(3\cos t\,\mathbf{i}-3\sin t\,\mathbf{j}+4\mathbf{k})/5,\ \boldsymbol{\nu}=\sin t\,\mathbf{i}+\cos t\,\mathbf{j}$,
$\boldsymbol{\beta}=(1/5)(4\cos t\,\mathbf{i}-4\sin t\,\mathbf{j}-3\mathbf{k})$;
2) $\boldsymbol{\tau}=(\sqrt{2}/2)(\sin(t/2)\,\mathbf{i}+\cos(t/2)\,\mathbf{j}-\mathbf{k}),\ \boldsymbol{\nu}=\cos(t/2)\,\mathbf{i}-\sin(t/2)\,\mathbf{j}$,
$\boldsymbol{\beta}=-(\sqrt{2}/2)((t/2)\,\mathbf{i}+\cos(t/2)\,\mathbf{j}+\mathbf{k})$.
121. $2/(1+a^2)$.
122. 1) $a[a^2+b^2\,\mathrm{ch}\,2t]^{1/2}/[a^2\,\mathrm{ch}\,2t+b^2]^{3/2}$; 2) $|\sin 2t|/\sqrt{2}$;

3) $0{,}25\sqrt{1+\sin^2(t/2)}$; 4) $\sqrt{2}/(x+y)^2$; 5) $\operatorname{sh} t/(a\sqrt{2}\operatorname{ch}^2 t)$;
6) $2/(a\operatorname{ch} t)$; 7) $(a+b)^{1/2}/(a+b+2z)^{3/2}$.

123. 1) $e^t/3$; 2) $1/(a\operatorname{ch}^2 t)$; 3) $-12y/(64y^6+36y^4+1)$.

124. 1) $k=\varkappa=a/(a+y)^2$; 2) $k=\varkappa=1/(2a\operatorname{ch}^2 t)$;
3) $k=-\varkappa=2abt/(a^2+b^2t^2)^2$; 4) $k=\varkappa=1/(3(t^2+1)^2)$;
5) $k=\sqrt{5+3\sin^2 t}/(R(1+\sin^2 t)^{3/2})$, точек распрямления нет: $\varkappa=6\sin t/(R(5+3\sin^2 t))$, точки уплощения $(0;0;\pm R)$.

125. 1) Точки распрямления $x=n\pi$; точки уплощения $\varkappa=$ $=\pi/2+n\pi$;
2) точек распрямления нет, точки уплощения $t=\pm 1$.

132. Винтовая линия.

134. Шаг винта равен длине окружности цилиндра.

139. Центр лежит на бинормали на расстоянии $\left|\dfrac{1}{\varkappa}\dfrac{dR}{ds}\right|$, где R — радиус кривизны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 *Кудрявцев А Д , Кутасов А Д , Чехлов В И , Шабунин М И* Сборник задач по математическому анализу Предел Непрерывность Дифференцируемость/ Под ред Л Д Кудрявцева — М Наука, 1984

2 *Никольский С М* Курс математического анализа Т 1, 2 — 3-е изд , перераб и доп — М Наука, 1983

3 *Кудрявцев Л Д* Краткий курс математического анализа Т 1, 2 — М Физматлит, 2002

4 *Кудрявцев Л Д* Курс математического анализа Т 1, 2, 3 — М Высшая школа, 1988, 1989

5 *Демидович Б П* Сборник задач и упражнений по математическому анализу — 9-е изд — М Наука, 1977

6 *Фихтенгольц Г М* Курс дифференциального и интегрального исчисления Т 2, 3 — 5-е изд — М Наука, 1969

7 *Ильин В А , Позняк Э Г* Основы математического анализа Ч 1, 2 — 4-е изд , перераб и доп — М Наука, 1980, 1982

8 *Ильин В А , Садовничий В А , Сендов Бл Х* Математический анализ — М Наука, 1979

9 *Зорич В А* Математический анализ Т 1, 2 — М Наука, 1981, 1984

10 *Рудин У* Основы математического анализа — М Мир, 1966

11 *Полиа Г , Сеге Г* Задачи и теоремы анализа Ч 1, 2 — М Наука, 1978

12 *Прудников А П , Брычков Ю А , Маричев О И* Интегралы и ряды — М Наука, 1981

13 Сборник задач по математике для втузов/ Под ред *А В Ефимова* и *Б П Демидовича* Т 1, 2, 3 — М Наука, 1981, 1981, 1984

14 *Бугров Я С , Никольский С М* Высшая математика Задачник — М Наука, 1982

15 *Сидоров Ю В , Федорюк М В , Шабунин М И* Лекции по теории функций комплексного переменного — 2-е изд , перераб и доп — М Наука, 1982

16 *Гюнтер Н М , Кузьмин Р О* Сборник задач по высшей математике Т 1, 2 — М Физматгиз, 1958, 1959

17 *Федорюк М В* Обыкновенные дифференциальные уравнения — М Наука, 1980

18 *Тер-Крикоров А М , Шабунин М И* Курс математического анализа — 2-е изд , перераб , — М Изд-во МФТИ, 2000

19 *Зимина О В , Кириллов А И , Сальникова Т А* Решебник Высшая математика — М Физматлит, 2000

20 *Афанасьев В И , Зимина О В , Кириллов А И , Петрушко И М , Сальникова Т А* Решебник Высшая математика Специальные разделы — М Физматлит, 2001

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 4

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

Учебное издание

КУДРЯВЦЕВ Лев Дмитриевич
КУТАСОВ Александр Дмитриевич
ЧЕХЛОВ Валерий Иванович
ШАБУНИН Михаил Иванович

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
ТОМ 1
ПРЕДЕЛ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ

Редактор *Е.Ю. Ходан*
Корректор *Т.С. Вайсберг*
Оригинал-макет *Н.Л. Ивановой*
Оформление обложки *А.Ю. Алехиной*

ЛР №071930 от 06.07.99. Подписано в печать 25.11.02.
Формат $60 \times 90/16$. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 31. Уч.-изд. л. 34.1. Тираж 3000 экз. Заказ № 7332

Издательская фирма "Физико-математическая литература"
МАИК "Наука/Интерпериодика"
117864 Москва, ул. Профсоюзная, 90

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ППП "Типография "Наука"
121099 Москва, Шубинский пер., 6