

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Минисеместр 2

Содержание разделов и тем лекционного курса

Раздел II: Линейные метрические пространства и функционалы (20 ч. лекций)

2.1. Линейные пространства. Линейная зависимость, размерность, базис, подпространства. Примеры линейных пространств и их подпространств.

2.2. Нормированные пространства.

Норма, сравнение с метрикой, банаховы пространства, замкнутые подпространства. Примеры нормированных пространств (\mathbb{R}^n , $C([a, b])$). Эквивалентность норм.

2.3. Евклидовы пространства.

Скалярное произведение (над полем \mathbb{R}). Неравенство Коши–Буняковского. Угол между векторами.

2.4. Ортогональные векторы.

Примеры. Ортогонализация Грама–Шмидта. Теорема об ортонормированном базисе в сепарабельном евклидовом пространстве.

2.5. Коэффициенты Фурье. Неравенство Бесселя.

2.6. Полные и замкнутые ортогональные системы. Теорема Рисса–Фишера.

2.7. Теорема об изоморфизме.

Любое конечномерное евклидово изоморфно \mathbb{R}^n ; любое сепарабельное гильбертово изоморфно l_2 .

2.8. Подпространства, ортогональные дополнения.

Прямая сумма подпространств. Прямая сумма евклидовых пространств.

2.9. Свойство параллелограмма.

2.10. Комплексные евклидовы пространства. Скалярное произведение над полем \mathbb{C} .

2.11. Функционалы.

Определения и примеры. Выпуклые, однородные и линейные функционалы. Теорема Хана–Банаха.

2.12. Функционалы в нормированных пространствах.

Ограниченность, норма функционала, непрерывность.

2.13. Теорема Хана–Банаха в нормированных пространствах.

2.14. Теорема Хана–Банаха в комплексных пространствах.

2.15. Непрерывные линейные функционалы на пространствах Банаха. Непрерывность и ограниченность. Норма функционала.

2.16. Сопряженное пространство. Операции с непрерывными линейными функционалами. Алгебраическое сопряженное пространство. Нормированное пространство, сопряженное к нормированному. Примеры.

Практические (семинарские) занятия

Раздел II. Линейные метрические пространства и функционалы (16 ч. практических занятий)

2.1 Линейные пространства. Размерность.

2.2. Нормированные пространства. Норма. Эквивалентные нормы.

2.3. Евклидовы пространства. Свойства скалярного произведения

2.4. Тождество параллелограмма.

2.5. Алгоритм ортогонализации.

- 2.6. Полные евклидовы пространства. Теорема о прямой сумме
2.7. Функционалы. Линейность. Теорема Хана-Банаха.

Список литературы

- [1] Колмогоров А.Н. *Элементы теории функций и функционального анализа*/А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Физматлит, 2004.
[2] Треногин В.А. *Функциональный анализ*/ В.А. Треногин. – М.: Наука, 1980.
[3] Треногин В.А. *Задачи и упражнения по функциональному анализу*/ В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева. – М.: Физматлит, 2002.

Функциональный анализ, типовой билет на минисессии 2.

1. Дайте определение нормы (2 балла).
2. Сформулируйте и докажите теорему Рисса-Фишера (2+3=5 баллов)
3. Пусть $X = C[0, 1]$ – множество непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$.
а) докажите, что функция

$$d(x) = \max_{t \in [0, 1]} |x(t)| + |x(0)|$$

является нормой на X (2 балла);

б) выясните, является ли нормированное пространство (X, d) полным и постройте его пополнение (4 балла);

в) можно ли в этом пространстве ввести скалярное произведение, согласованное с нормой (3 балла) ?

- 4) Ортогонализируйте систему

$$f_1 = (1, -1, 0, \dots, 0, \dots), f_2 = (1, 1, 1, 0, \dots, 0, \dots), f_3 = (0, 1, 1, 0, \dots, 0, \dots)$$

в евклидовом пространстве l_2 . Найдите ортогональное дополнение к пространству, натянутому на эти вектора. (4 балла)