Глава 1. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

§1. Общие понятия

Пусть имеется функция u независимых переменных $x_1, x_2,..., x_n$. Уравнением с частными производными называется соотношение, связывающее переменные $x_1, x_2,..., x_n$, функцию u и все ее частные производные до некоторого порядка

$$F(x_1,..., x_n, u, u_{x_1},..., u_{x_n}, u_{x_1x_1}, u_{x_1x_2},...) = 0. \qquad (1.1)$$

Порядком уравнения называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение.

Функция $u = u(x_1,..., x_n)$ называется решением уравнения (1.1), если при подстановке ее в это уравнение оно обращается в тождество при допустимых значениях аргументов. Совокупность всех решений уравнения называется общим решением.

Рассмотрим некоторые примеры уравнений с частными производными для функции, зависящей от двух переменных $u = u(x, y)$.

Пример 1.1. Пусть дано уравнение $u_x = 0$. Это уравнение фактически означает, что функция $u(x, y)$ не зависит от x. Следовательно, решениями являются, например, функции $u(x, y) = y^2 + 2y, \;\; u(x, y) = e^y + \sin y$. Общее решение: $u(x, y) = C(y)$, где C – произвольная функция одной переменной y.

Пример 1.2. Рассмотрим уравнение $u_x = f(x, y)$. Для нахождения решения этого уравнения проинтегрируем его по переменной x

$$\int u_x dx = \int f(x, y)dx + C. \qquad (1.2)$$

При интегрировании по x мы считаем y постоянным и поэтому произвольная постоянная C в (1.2) может зависеть от y. Тем самым общее решение имеет вид:

$$u(x, y) = \int f(x, y)dx + C(y).$$

Пример 1.3. Пусть дано уравнение $u_{xy} = 0$. Из примера 1.1 следует, что $u_y = C(y)$. Решая это уравнение аналогично тому, как решалось уравнение в примере 1.2, будем иметь

$$u(x, y) = \int C(y)dy + C_1(x).$$

Обозначим $C_2(y) = \int C(y)dy$. Тогда общее решения примет вид

$$u(x, y) = C_1(x) + C_2(y).$$

Заметим, что в отличие от общего решения обыкновенного дифференциального уравнения, зависящего от произвольных постоянных, общее решение уравнения с частными производными зависит от произвольных функций.

§2. Задача Коши

Будем рассматривать случай, когда искомая функция u зависит от двух переменных x, y. Тогда уравнение первого порядка будет иметь вид

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0. \qquad (2.1)$$

Всякое решение уравнения (2.1) $u = u(x, y)$ будем называть интегральной поверхностью (график решения – поверхность в пространстве с координатами x, y, u).

Для того, чтобы из совокупности всех решений уравнений (2.1) выделить некоторое частное решение, формулируется задача Коши: найти решение уравнения (2.1), удовлетворяющее условию

$$u(x,y)|_{x=x_0}=\varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ - некоторая заданная функция.

Обозначим через l кривую в пространстве x,y,u, задаваемую уравнениями

$$x=x_0,\quad u=\varphi(y). \quad (2.2)$$

Тогда задача Коши имеет следующий геометрический смысл: среди всех интегральных поверхностей найти ту, которая проходит через заданную кривую l.

Можно поставить более общую задачу Коши, не ограничивая кривую l видом (2.2), а беря произвольную пространственную кривую. Если обозначить через λ проекцию кривой на плоскость (x,y), то эта задача Коши может быть сформулирована следующим образом: найти решение уравнения (2.1), удовлетворяющее условию

$$u(x,y)|_{(x,y)\in\lambda}=\varphi(x,y).$$

§3. Линейные однородные уравнений первого порядка

Уравнение с частными производными называются линейными, если искомая функция $u(x,y)$ и ее частные производные входят в уравнение линейно. Таким образом, линейное уравнение первого порядка имеет вид

$$A(x,y)u_x+B(x,y)u_y+C(x,y)u=f(x,y), \qquad (3.1)$$

где A, B, C и f - заданные функции. Если $f(x,y)=0$, то уравнение называется однородным.

Отметим, что основные свойства линейных уравнений с частными производными во многом аналогичны свойствам обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Так, например, линейная комбинация решений однородного уравнения тоже является решением этого уравнения. Общее решение неоднородного уравнения может быть представлено в виде некоторого частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

Будем рассматривать сначала однородное линейное уравнение вида

$$A(x,y)u_x+B(x,y)u_y=0. \quad (3.2)$$

Этому уравнению поставим в соответствие систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=A(x,y),\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=B(x,y),\end{cases} \qquad (3.3)$$

которую будем называть характеристической системой для уравнения (3.2), а всякое решение $x(t), y(t)$ этой системы назовем характеристикой.

Функция $\varphi(x,y)$, не сводящаяся тождественно к постоянной, или равенство $\varphi(x,y)=C$ называется первым интегралом системы (3.3), если при подстановке в нее любого решения системы получается постоянная величина, зависящая лишь от выбора решения.

Теорема 3.1. *Пусть $\varphi(x,y)=C$ есть первый интеграл системы (3.3). Тогда функция $u=\varphi(x,y)$ удовлетворяет уравнению (3.2).*

Доказательство. Подставим в первый интеграл системы (3.3) какое-либо решение $x(t), y(t)$ этой системы. Получим

$$\varphi(x(t),y(t))=C.$$

Возьмем производную по t от обеих частей этого равенства

$$\frac{d\varphi(x(t),y(t))}{dt}=\varphi_x\frac{dx}{dt}+\varphi_y\frac{dy}{dt}\equiv 0.$$

Поскольку $x(t), y(t)$ - решения характеристической системы (3.3), имеем

$$\varphi_x A(x,y)+\varphi_y B(x,y)=0.$$

В силу того, что последнее равенство выполнено для любого решения системы (3.3), оно справедливо для любых x, y, входящих в область определения. Тем самым функция φ удовлетворяет уравнению (3.2). Теорема доказана.

Можно доказать и обратное утверждение.

<u>**Теорема 3.2.**</u> *Пусть функция* $u=\varphi(x,y)$ *удовлетворяет уравнению (3.2). Тогда* $\varphi(x,y)=C$ *есть первый интеграл системы (3.3).*

<u>Доказательство.</u> Подставим в функцию $\varphi(x,y)$ какое-нибудь решение системы (3.3) $x(t), y(t)$ и возьмем полную производную по t

$$\frac{d\varphi(x(t),y(t))}{dt}=\varphi_x\frac{dx}{dt}+\varphi_y\frac{dy}{dt}=\varphi_x A(x,y)+\varphi_y B(x,y).$$

Поскольку φ - решение уравнения (3.2), имеем

$$\frac{d\varphi(x(t),y(t))}{dt}=0.$$

Следовательно,

$$\varphi(x(t),y(t))=C,$$

а это и означает, что $\varphi(x,y)=C$ есть первый интеграл системы (3.3). Теорема доказана.

Доказанные две теоремы устанавливают эквивалентность понятий первого интеграла системы (3.3) и решения уравнения (3.2).

Если $\varphi(x,y)=C$ - первый интеграл системы (3.3), то произвольная функция $F(\varphi)$ является также первым интегралом этой системы. Следовательно, по теореме 3.1 $F(\varphi)$ удовлетворяет уравнению (3.2) при произвольной достаточно гладкой функции F.

Можно показать, что при выполнении некоторых условий всякое решение уравнения (3.2) может быть представлено в виде $u=F(\varphi)$. Отсюда вытекает следующее правило: чтобы найти общее решение уравнения (3.2), надо составить характеристическую систему (3.3) и найти первый интеграл этой системы. Общее решение уравнения (3.2) будет

$$u=F(\varphi),$$

где F - произвольная функция.

<u>Пример 3.1.</u> Рассмотрим уравнение

$$xu_x+yu_y=0. \qquad (3.4)$$

Характеристическая система для этого уравнения:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=y.\end{cases} \qquad (3.5)$$

Решение этой системы (характеристики) имеет вид

$$\begin{cases}x=C_1e^t,\\ y=C_2e^t.\end{cases}$$

Первым интегралом системы (3.5) является функция $\varphi(x,y)=\dfrac{y}{x}$. Следовательно, общее решение уравнения (3.4) будет

$$u(x,y)=F\left(\frac{y}{x}\right),$$

т.е. произвольная однородная функция переменных x, y.

Для нахождения первого интеграла характеристической системы (3.3) можно исключить переменную t и получить обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B(x,y)}{A(x,y)}. \qquad (3.6)$$

Если $y=y(x,C)$ - общее решение этого уравнения, то выразим произвольную постоянную C через x, y и получим первый интеграл системы (3.3) $\varphi(x,y)=C$. Аналогично поступим, если будет найден общий интеграл уравнения (3.6) $F(x,y,C)=0.$

Пример 3.2. Рассмотрим уравнение

$$yu_x-xu_y=0. \qquad (3.7)$$

Характеристическая система будет иметь вид

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y,\\ \dfrac{dy}{dt}=-x.\end{cases} \qquad (3.8)$$

Исключим переменную t из этой системы

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}.$$

Разделяя переменные, получим

$$ydy=-xdx.$$

Проинтегрировав это уравнение, находим его общий интеграл

$$x^2+y^2=C.$$

Это соотношение одновременно является первым интегралом для системы (3.8). Заметим, что характеристиками в данном случае будут являться окружности с центром в начале координат. Итак, общее решение уравнения (3.7) имеет вид

$$u(x,y)=F(x^2+y^2). \qquad (3.9)$$

§4. Квазилинейные уравнения первого порядка

Квазилинейным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$A(x,y,u)u_x+B(x,y,u)u_y=C(x,y,u). \qquad (4.1)$$

Заметим, что линейное уравнение (3.1) является частным случаем квазилинейного уравнения, в которое функция u может входить и нелинейно.

Будем искать решение уравнения (4.1) в виде неявной функции

$$\varphi(x,y,u)=C,$$

где C – произвольная постоянная. Согласно правилу дифференцирования неявной функции имеем

$$u_x=-\frac{\varphi_x}{\varphi_u},\quad u_y=-\frac{\varphi_y}{\varphi_u}.$$

Подставляя эти выражения в (4.1) , получим для φ уравнение

$$A(x,y,u)\varphi_x+B(x,y,u)\varphi_y+C(x,y,u)\varphi_u=0. \qquad (4.2)$$

Это уравнение отличается от уравнения (3.2) лишь тем, что коэффициенты и искомая функция φ, входящие в него, зависят от трёх переменных x, y, u. Поэтому уравнение (4.2) решается аналогично уравнению (3.2). Для этого рассматривается характеристическая система, состоящая уже из трёх уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}} = A(x, y, u), \\ \dfrac{dy}{dt} = B(x, y, u), \\ \dfrac{du}{dt} = C(x, y, u). \end{cases} \qquad (4.3)$$

Если

$$\varphi_1(x, y, u) = C_1; \quad \varphi_2(x, y, u) = C_2 \qquad (4.4)$$

- два независимых (под независимостью понимается разрешимость относительно каких-либо двух из переменных x, y, u равенства (4.4)) интеграла системы (4.3), то общее решение уравнения (4.2), а значит, и решение исходного уравнения (4.1) в виде неявной функции, будет иметь вид

$$\varphi = F(\varphi_1, \varphi_2), \qquad (4.5)$$

где F - произвольная функция своих аргументов.

§5. Геометрическая интерпретация, задача Коши

Пусть в пространстве с координатами (x, y, u) задано поле направлений

$$(A(x, y, u), B(x, y, u), C(x, y, u)),$$

т.е. в каждой точке пространства мы имеем направление, у которого направляющие косинусы пропорциональны A, B, C. Это поле направлений определяет семейство линий, таких, что любая линия семейства имеет в каждой своей точке касательную, совпадающую с направлением поля в этой точке. Это семейство линий получается в результате интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{A(x, y, u)} = \frac{dy}{B(x, y, u)} = \frac{du}{C(x, y, u)},$$

которая, если обозначить через dt общую величину написанных трех отношений, переходит в систему (4.3).

Если имеется некоторая поверхность $u = u(x, y)$, то величины u_x, u_y и -1 пропорциональны направляющим косинусам нормали к этой поверхности. Таким образом, уравнение (4.1) выражает условие перпендикулярности нормали и поверхности $u = u(x, y)$ с направлением поля, т.е. уравнение (4.1) сводится к требованию, чтобы в каждой точке искомой поверхности $u = u(x, y)$ направление, определяемое полем (A, B, C), находилось в касательной плоскости к поверхности.

Пусть некоторая поверхность $u = u(x, y)$ состоит из характеристик системы (4.3). Тогда в каждой точке этой поверхности касательная к характеристике, проходящей через эту точку, лежит в касательной плоскости к поверхности, и следовательно, эта поверхность удовлетворяет уравнению (4.1), т.е. является интегральной поверхностью этого уравнения.

Можно показать, что верно и обратное: если некоторая гладкая поверхность (предполагается существование и непрерывность производных u_x, u_y) удовлетворяет уравнению (4.1), то ее можно полностью заполнить характеристиками.

Из (4.5) следует, что общее уравнение интегральных поверхностей для уравнения (4.1) будет иметь вид:

$$F(\varphi_1, \varphi_2) = 0 \qquad (5.1)$$

(постоянную C можно не писать в силу произвольности F).

Если выбрать некоторую функцию F, а поверхность (5.1) будет геометрическим местом тех характеристик системы (4.3), у которых значения постоянных в равенствах (4.4) связаны соотношением:

$$F(C_1, C_2) = 0. \qquad (5.2)$$

Решение уравнения (4.1) становится, вообще говоря, однозначно определенным, если потребовать, чтобы искомая поверхность проходила через заданную в пространстве кривую l, т.е. если решать задачу Коши. Искомая поверхность будет образованна теми характеристиками, которые выходят из точек кривой l.

Исключительным является тот случай, когда сама кривая l является характеристикой. В этом случае через линию l проходит, вообще говоря, бесчисленное множество поверхностей.

Пример 5.1. Рассмотрим уравнение

$$xuu_x + yuu_y = -(x^2 + y^2). \qquad (5.3)$$

Соответствующая характеристическая система будет такова:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = xu, \\ \dfrac{dy}{dt} = yu, \\ \dfrac{du}{dt} = -(x^2 + y^2). \end{cases} \qquad (5.4)$$

Из первых двух уравнений имеем

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}.$$

Отсюда $\ln|y| = \ln|C_1 x|$, что равносильно соотношению

$$\frac{y}{x} = C_1. \qquad (5.5)$$

Чтобы найти второй интеграл системы (5.4), разделим последнее ее уравнение на второе:

$$\frac{du}{dy} = -\frac{x^2 + y^2}{yu}.$$

Пользуясь равенством (5.5), получаем

$$\frac{du}{C_1 dx} = -\frac{x^2 + y^2}{C_1 xu}.$$

Отсюда

$$udu = -x(1 + C_1^2)dx.$$

Интегрируя это равенство, имеем

$$u^2 + x^2(1 + C_1^2) = C_2.$$

Подставив C_1 из (5.5), получим второй интеграл

$$x^2 + y^2 + u^2 = C_2. \qquad (5.6)$$

Уравнения (5.5) определяют плоскости, проходящие через ось Ou, а уравнения (5.6) – сферы с центром в начале координат. Тем самым характеристики системы (5.4) – это семейство окружностей, лежащих в указанных плоскостях и имеющих центр в начале координат. Общее решение уравнения (5.3) будет

$$F\left(\frac{y}{x}, x^2 + y^2 + u^2\right) = 0, \qquad (5.7)$$

где F – производная функция двух аргументов.

Пример 5.2. Решим задачу Коши для уравнения (5.3). Среди интегральных поверхностей этого уравнения найдем ту, которая проходит через прямую

$$x = 1, \quad y = u. \qquad (5.8)$$

Исключим x, y и u из уравнений (5.5), (5.6) и (5.8).

Уравнения (5.5) и (5.8) дают

$$x = 1, \quad y = C_1, \quad u = C_1.$$

Подставляя в уравнение (5.6), получаем

$$1+2C_1^2-C_2=0.$$

Таким образом,

$$F(C_1,C_2)=1+2C_1^2-C_2.$$

Отсюда искомая интегральная поверхность имеет вид

$$1+2\left(\frac{y}{x}\right)^2-(x^2+y^2+u^2)=0.$$

Пример 5.3. Будем искать интегральную поверхность для уравнения (3.7), проходящую через окружность $x^2+y^2=1$ в плоскости (x,y). Из общего решения (3.9) видно что таковой будет любая поверхность

$$u=F(x^2+y^2)-F(1).$$

Например, параболоид

$$u=x^2+y^2-1$$

или конус

$$u=\sqrt{x^2+y^2}-1,$$

наконец, просто плоскость $u=1$. Неоднозначность решения связана здесь с тем, что заданная кривая, через которую должна проходить интегральная поверхность, является характеристикой.