Федеральное агентство по образованию
Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Сибирский федеральный университет
Факультет математики и информатики

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Контрольно-измерительные материалы

Учебно-методический комплекс дисциплин по проекту "Создание научно-образовательного комплекса для подготовки элитных специалистов в области математики, механики и информатики в Сибирском федеральном университете", рег. N 16

Красноярск 2007

Содержание

Выполнено на кафедре теории функций

Авторы-составители:
А.А. Шлапунов, И.В. Ермилов, И.В. Шестаков, Михалкин Е.Н.

В настоящем методическом пособии представлены контрольно-измерительные материалы по дисциплине "Функциональный анализ".

Для поготовки к зачету и экзаменам мы рекомедуем воспользоваться учебными пособиями

[1] - [8]

1 Перечень экзаменационных вопросов.

1.1 Модуль 1. Метрические пространства

1.1. Метрика. Метрические пространства. Основные примеры.

1.2. Непрерывные отображения метрических пространств. Непрерывность. Изометрия. Гомеоморфизм. Примеры.

1.3. Последовательности точек метрических пространств. Сходимость, свойства сходящихся последовательностей.

1.4. Операция замыкания. Замкнутые множества. Свойства замкнутых множеств.

1.5. Открытые множества. Связь между открытыми и замкнутыми множествами.

1.6. Плотные подмножества, сепарабельные пространства. Примеры сепарабельных и не сепарабельных пространств.

1.7. Полнота метрических пространств. Примеры полных и неполных пространств.

1.8. Характеризация полных пространств. Теорема о вложенных шарах.

1.9. Характеризация полных пространств. Теорема Бэра.

1.10. Пополнение пространства.

1.11. Принцип сжимающих отображений.

1.12. Применение принципа сжимающих отображений к доказательству теоремы о существовании и единственности решения интегральных уравнений.

1.13. Применение принципа сжимающих отображений к доказательству теоремы о существовании и единственности решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

1.2 Модуль 2. Линейные метрические пространства и функционалы

2.1. Линейные пространства. Линейная зависимость, размерность, базис, подпространства. Примеры линейных пространств и их подпространств.

2.2. Норма, нормированные пространства. Примеры нормированных пространств. Эквивалентность норм.

2.3. Теорема о пополнении нормированных пространств.

2.4. Скалярное произведение. Евклидовы пространства. Неравенство Коши–Буняковского. Угол между векторами.

2.5. Теорема о пополнении евклидовых пространств.

2.6. Ортогонализация Грама-Шмидта. Теорема об ортонормированном базисе в сепарабельном евклидовом пространстве.

2.7. Коэффициенты Фурье. Неравенство Бесселя.

2.8. Полные и замкнутые ортогональные системы.

2.9. Теорема Рисса-Фишера.

2.10. Теорема об изоморфизме полных евклидовых пространств.

2.11. Подпространства, ортогональные дополнения. Прямая сумма подпространств.

2.12. Свойство параллелограмма.

2.13. Функционалы. Определения и примеры.

2.14. Компактные множества. Максимумы (минимумы) функционалов, теорема Вейерштрасса.

2.15. Компактные множества. Теорема об ε-сети.

2.16. Компактные множества. Некомпактность шара в бесконечномерном нормированном пространстве.

2.17. Компактные множества в пространстве непрерывных функций. Теорема Арцела.

2.18. Функционалы в нормированных пространствах.

Ограниченность, норма функционала, непрерывность.

2.19. Теорема Хана-Банаха в нормированных пространствах.

2.20. Теорема Хана-Банаха в комплексных пространствах.

2.21. Сопряженное пространство.

2.22. Теорема об общем виде непрерывного линейного функционала на полном евклидовом пространстве.

2.23. Второе сопряженное пространство. Рефлексивность.

2.24. Слабая сходимость в нормированном пространстве. Ограниченность слабо сходящейся последовательности.

2.25 $*$-слабая сходимость в сопряженном пространстве. Ограниченность $*$-слабо сходящейся последовательности.

2.26. Обобщенные функции и их основные свойства.

2.27. Производная обобщенной функции

2.28. Первообразная обобщенной функции.

1.3 Модуль 3. Линейные операторы в нормированных пространства

3.1. Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность.

3.2. Норма оператора

3.3. Пространство линейных ограниченных операторов. Операции с линейными операторами. Композиция операторов.

3.4. Компактные операторы. Пространство компактных операторов.

3.5. Некомпактность тождественного оператора в бесконечномерном нормированном пространстве.

3.6. Сильная (поточечная) и равномерная сходимости в пространстве операторов. Принцип равномерной ограниченности.

3.7. Теорема Банаха-Штейнгауза.

3.8. Замкнутые операторы. Теорема о замкнутом графике.

3.9. Сопряженный для непрерывного оператора. Определение, линейность, непрерывность сопряженного оператора.

3.10. Операторные уравнения. Постановка задачи. Корректность по Адамару.

3.11. Обратный оператор. Условия обратимости.

3.12. Лемма об аннуляторе ядра.

3.13. Непрерывная обратимость. Достаточные условия непрерывной обратимости.

3.14. Теорема Банаха об обратном операторе.

3.15. Ряд Неймана.

3.16. Спектр оператора. Резольвента. Собственные значения и непрерывный спектр. Замкнутость спектра. Теорема о спектральном радиусе.

3.17. Собственные значения и собственные векторы компактного оператора.

1.4 Модуль 4. Линейные операторы в пространствах Гильберта

4.1. Сопряженный оператор. Случай евклидовых пространств.

4.2. Самосопряженные операторы. Собственные значения и собственные векторы самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве.

4.3. Спектральная теорема (Гильберта-Шмидта) для компактного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве

4.4. Базисы со свойством двойной ортогональности.

4.5 Теорема об итерациях неотрицательных операторов.

4.6. Условия разрешимости операторных уравнений первого рода. Случай компактных операторов.

4.7. Операторные уравнения второго рода.

4.8. Теоремы Фредгольма.

4.9. Задачи, приводящие к интегральным уравнениям.

4.10. Линейные интегральные уравнения второго рода. Определения, примеры.

4.11. Операторы Гильберта-Шмидта в пространстве Лебега. Ядро оператора. Компактность оператора Гильберта-Шмидта. Ядро сопряженного оператора.

4.12. Уравнения с вырожденными ядрами.

2 Перечень экзаменационных заданий

2.1 Задания, общие для всех модулей.

1. Дайте определение.

2. Сформулируйте теорему.

3. Докажите теорему.

4. Докажите, что ...

5. Теоретический вопрос (включает в себя определения, формулировки теорем и доказательства, необходимые для раскрытия заданной темы).

2.2 Задания для модуля 1

1.1. Выясните, является ли данное пространство метрическим.

1.2. Выясните, является ли данное отображение непрерывным.

1.3. Выясните, является ли данное отображение изометрией.

1.4. Выясните, является ли данное отображение гомеоморфизмом.

1.5. Сходится ли данная последовательность точек в указанном метрическом пространстве.

1.6. Графически изобразите шар в данном метрическом пространстве.

1.6. Найдите замыкание множества.

1.7. Выясните, является ли данное множество замкнутым.

1.8. Выясните, является ли данное множество открытым.

1.9. Выясните, является ли данное пространство сепарабельным.

1.10. Выясните, является ли данное пространство полным.

1.11. Постройте пополнение пространства.

1.12 Выясните, является ли данное отображение сжимающим.

1.13. Докажите, что данное уравнение в указанном метрическом пространстве имеет единственное решение.

1.14. С помощью метода последовательных приближений решите данное уравнение.

1.15. Оцените количество итераций, необходимых для достижения заданной точности при нахождении приближенного решения методом последовательных приближений.

2.3 Задания для модуля 2

2.1. Выясните, является ли данное пространство линейным с указанными операциями сложения и умножения на скаляр.

2.2. Выясните, является ли данное множество подпространством в линейном пространстве.

2.3. Выясните, является ли данное пространство нормированным.

2.4. Выясните, являются ли данные нормы эквивалентными.

2.5. Постройте пополнение нормированного пространства.

2.6. Выясните, является ли данное пространство евклидовым.

2.7. Найдите угол между данными векторами в евклидовом пространстве.

2.9. Постройте пополнение евклидова пространства.

2.10. Ортогонализуйте данные вектора в указанном евклидовом пространстве.

2.11. Постройте ортонормированный базис в данном сепарабельном евклидовом пространстве.

2.12. Найдите коэффициенты Фурье данного вектора по указанной системе векторов.

2.13. Постройте ортогональное дополнение данного множества в указанном евклидовом пространстве.

2.14. Разложите пространство в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения.

2.15. Выясните, можно ли в данном нормированном пространстве ввести скалярное произведение, согасованное с нормой.

2.16. Функционалы. Определения и примеры.

2.17. Выясните, является ли данное множество компактным в указанном пространстве.

2.18. Выясните, является ли данный функционал в указанном пространстве линейным.

2.19. Выясните, является ли данный функционал в указанном нормированном пространстве непрерывным.

2.20. Выясните, является ли данный функционал в указанном нормированном пространстве ограниченным.

2.21. Найдите норму функционала.

2.22. Оцените норму функционала.

2.23. Продолжите линейный функционал с заданного подпространства нормированного пространства с сохранением нормы.

2.24. Опишите сопряженное пространство.

2.24. Опишите второе сопряженное пространство.

2.25. Выясните, является ли данное пространство рефлексивным.

2.26. Выясните, что данная последовательность слабо сходится в указанном нормированном пространстве.

2.27. Выясните, что данная последовательность $*$-слабо сходится в указанном нормированном пространстве.

2.28. Найдите производную обобщенной функции.

2.29. Найдите первообразную обобщенной функции.

2.4 Задания для модуля 3

3.1. Выясните, является ли данный оператор линейным.

3.2. Выясните, является ли данный оператор непрерывным.

3.3. Выясните, является ли данный оператор ограниченным.

3.4. Найдите норму оператора.

3.5. Оцените норму оператора.

3.6. Выясните, является ли данный оператор компактным.

3.7. Выясните, сходится ли данная последовательность операторов поточечно в указанном пространстве.

3.8. Выясните, сходится ли данная последовательность операторов равномерно в указанном пространстве.

3.9. Выясните, является ли данный оператор замкнутым.

3.10. Найдите сопряженный для данного непрерывного оператора в нормированном пространстве.

3.11. Найдите обратный оператор для данного оператора в нормированном пространстве.

3.12. Опишите спектр данного оператора в нормированном пространстве.

3.13. Найдите резольвенту данного оператора в нормированном пространстве.

3.14. Найдите собственные значения и собственные векторы данного оператора в нормированном пространстве.

2.5 Задания для модуля 4

4.1. Найдите сопряженный оператор для данного оператора в указанных евклидовых пространствах.

4.2. Найдите собственные значения и собственные векторы данного самосопряженного оператора в указанном гильбертовом пространстве.

4.3. Постройте базис со свойством двойной ортогональности в . в указанных евклидовых пространствах.

4.4 С помощью теоремы об итерациях неотрицательных операторов постройте приближенные решения данного уравнения в указанных евклидовых пространствах.

4.5. С помощью теоремы Фредгольма укажите условия разрешимости данного операторного уравнения второго рода.

4.6. Решите данное операторное уравнение второго рода.

4.7. Решите данное уравнение Вольтерра второго рода.

4.8. Решите данное интегральное уравнение второго рода с оператором Гильберта-Шмидта в пространстве Лебега.

4.9. Решите данное интегральное уравнение с вырожденным ядром в пространстве непрерывных функций на указанном множестве.

3 Экзаменационные билеты.

Функциональный анализ, семестр 5, минисессия 1, вариант 1.

1. Дайте определение (2 балла):
открытого множества в метрическом пространстве.

2. Сформулируйте и докажите теорему (2+2=4 балла):
О вложенных шарах.

3. Пусть X состоит из непрерывных функций на отрезке $[0,1]$, а

$$\rho(x) = \max_{[a,b]} |x(t) - y(t)| \; + \; |\cos x(0) - \cos y(0)|.$$

(2+2+2+2 = 8 баллов)
а) Докажите, что (X, ρ) есть метрическое пространство.
б) Выясните, является ли оно полным.
в) Постройте какое-нибудь его пополнение.
г) Совпадает ли в этом пространстве замкнутый шар $\overline{B}(0,1)$ с замыканием открытого шара $B(0,1)$?

4. а) С помощью теоремы о сжимающем отображении доказать, что существует непрерывная на отрезке $[0,1]$ функция $x(t)$, удовлетворяющая уравнению

$$x(t) = \sin(t) + \int_0^t \frac{\sin(t+\tau)}{100} x(\tau)\, d\tau.$$

б) Выяснить, является ли она единственной (4+2 = 6 баллов).

Функциональный анализ, семестр 5, минисессия 1, вариант 2.

1. Дайте определение (2 балла):
замкнутого множества в метрическом пространстве.

2. Сформулируйте и докажите теорему (2+2=4 балла):
Бэра.

3. Пусть X состоит из непрерывных функций на отрезке $[-1,1]$, а

$$\rho(x) = \max_{[a,b]} |x(t) - y(t)| \; + \; |\cos x(0) - \cos y(0)|.$$

(2+2+2+2 = 8 баллов)

а) Докажите, что (X,ρ) есть метрическое пространство.

б) Выясните, является ли оно полным.

в) Постройте какое-нибудь его пополнение.

г) Совпадает ли в этом пространстве замкнутый шар $\overline{B}(0,1)$ с замыканием открытого шара $B(0,1)$?

4. а) С помощью теоремы о сжимающем отображении доказать, что существует непрерывная на отрезке $[-1,1]$ функция $x(t)$, удовлетворяющая уравнению

$$x(t) = \cos(t) + \int_{-1}^{t} \frac{\cos(t+\tau)}{100} x(\tau)\, d\tau.$$

б) Выяснить, является ли она единственной (4+2 = 6 баллов).

Функциональный анализ, семестр 5, минисессия 1, вариант 3.

1. Дайте определение (2 балла)
открытого шара в метрическом пространстве.

2. Сформулируйте и докажите (2+2=4 балла)
теорему о связи между открытыми и замкнутыми множествами.

3. Пусть X состоит из непрерывных функций на отрезке $[a, b]$, а

$$\rho(x) = \max_{[a,b]} |x(t) - y(t)| + \left(\int_a^b |x(\tau) - y(\tau)|^3 \, d\tau \right)^{1/3}.$$

а) Докажите, что (X, ρ) есть метрическое пространство;
б) выясните, является ли оно полным.
(3+3 = 6 баллов)

4. а) Докажите, что при малых по модулю значениях $\lambda \in \mathbb{R}$ в пространстве (X, ρ) существует неподвижная точка отображени

$$(Ax)(t) = \lambda \int_a^x x(\tau) \, d\tau + \cos t.$$

б) Найдите неподвижную точку отображения A при каком-нибудь значении $\lambda \neq 0$.
в) Является ли она единственной?
(3+3+2 = 8 баллов)

Функциональный анализ, семестр 5, минисессия 1, вариант 4.

1. Дайте определение (2 балла)
замкнутого шара в метрическом пространстве.

2. Сформулируйте и докажите (2+2=4 балла)
теорему о свойствах операции замкания множеств.

3. Пусть X состоит из непрерывных функций на отрезке $[a, b]$, а

$$\rho(x) = \max_{[a,b]} |x(t) - y(t)| + \left(\int_a^b |x(\tau) - y(\tau)|^5 \, d\tau \right)^{1/5}.$$

а) Докажите, что (X, ρ) есть метрическое пространство;
б) выясните, является ли оно полным.
(3+3 = 6 баллов)

4. а) Докажите, что при малых по модулю значениях $\lambda \in \mathbb{R}$ в пространстве (X, ρ) существует неподвижная точка отображени

$$(Ax)(t) = \lambda \int_a^x x(\tau) \, d\tau + \sin t.$$

б) Найдите неподвижную точку отображения A при каком-нибудь значении $\lambda \neq 0$.
в) Является ли она единственной?
(3+3+2 = 8 баллов)

Функциональный анализ, семестр 5, минисессия 2, вариант 1.

1. Дайте определение (1 балл)
линейного непрерывного функционала.

2. Сформулируйте и докажите теорему (2+2=4 балла)
Хана-Банаха

3. Пусть X состоит из всех непрерывных функций на отрезке $[-1;1]$.

а) Доказать, что пространство X является евклидовым, если

$$(u,v) = u(0)v(0) + \int_{-1}^{1} (t^6+1)u(t)v(t)\,dt\,?$$

б). Является ли это пространство полным?

в) Является ли множество Y, состоящее из всех нечетных непрерывных функций на отрезке $[-1;1]$ подпространством в X?

г) Верно ли, что $Y^{\perp}$ есть множество всех четных непрерывных функций на отрезке $[-1,1]$?

д) Ортогонализовать в пространстве X систему векторов $\{1,t,t^2\}$

Ответы обосновать. (3+3+3+3+3= 15 баллов)

Функциональный анализ, семестр 5, минисессия 2, вариант 2.

1. Дайте определение (1 балл)
сопряженного пространства.

2. Сформулируйте и докажите теорему (2+2=4 балла)
Рисса-Фишера

3. Пусть X состоит из всех непрерывных функций на отрезке $[-1;1]$.

а) Доказать, что пространство X является евклидовым, если

$$(u,v) = u(0)v(0) + \int_{-1}^{1} (t^4+1)u(t)v(t)\ dt\,?$$

б). Является ли это пространство полным?

в) Является ли множество Y, состоящее из всех нечетных непрерывных функций на отрезке $[-1;1]$ подпространством в X?

г) Верно ли, что $Y^{\perp}$ есть множество всех четных непрерывных функций на отрезке $[-1,1]$?

д) Ортогонализовать в пространстве X систему векторов $\{1, t^3, t^4\}$

Ответы обосновать. (3+3+3+3+3= 15 баллов)

Функциональный анализ, семестр 5, минисессия 2, вариант 3.

1. Дайте определение (2 балла)
компактного множества в нормированном пространстве.

2. Сформулируйте и докажите (2+2=4 балла)
первую теорему о Вейерштрасса для непрерывных функционалов на компакте в нормированном пространстве.

3. Сходится ли последовательность $\{\cos{(2N+1)t}\}_{N=1}^{\infty}$
a) в пространстве $L^2(-\pi,\pi)$;
b) слабо в пространстве $L^2(-\pi,\pi)$
(2+2=4 балла) ?

4. Функционал $f:\mathcal{D}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ следующим образом:

$$\langle f,\phi\rangle=\phi'(1)-\int_{-\infty}^{0}x\phi(x)\,dx+\int_{0}^{\infty}x\phi(x)\,dx,\qquad \phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Доказать, что этот функционал принадлежит $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ и найти его производную. Какова его первообразная (2+2+2 =6 баллов)?

5. Для пространства l_3 укажите сопряженное пространство. Ответ обосновать прямым доказательством (4 балла).

Функциональный анализ, семестр 5, минисессия 2, вариант 4.

1. Дайте определение (2 балла)

предкомпактного множества в нормированном пространстве.

2.5. Сформулируйте и докажите (2+2=4 балла)

вторую теорему о Вейерштрасса для непрерывных функционалов на компакте в нормированном пространстве.

3. Сходится ли последовательность $\{\cos 2Nt\}_{N=1}^{\infty}$

a) в пространстве $L^2(-\pi,\pi)$;

b) слабо в пространстве $L^2(-\pi,\pi)$ (3+3 = 6 баллов) ?

4. Функционал $f : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\langle f, \phi\rangle = \phi'(2) + \int_{-\infty}^{0} x\phi(x)\,dx - \int_{0}^{\infty} x\phi(x)\,dx, \qquad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Доказать, что этот функционал принадлежит $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ и найти его производную. Какова его первообразная (2+2+2 =6 баллов)?

5. Для пространства l_4 укажите сопряженное пространство. Ответ обосновать прямым доказательством (4 балла).

Функциональный анализ, Семестр 6, минисессия 3, вариант 1.

1. Дайте определение (2 балла)
спектра оператора.

2. Сформулируйте и докажите теорему (2+2=4 балла)
о необходимом и достаточном условии непрерывной обратимости оператора.

3. Пусть $A : C[-1,1] \to C[-1,1]$. Выяснить, является ли этот оператор

а) линейным и непрерывным (2 балла);

в) компактным (2 балла).

Найти его

г) норму (2 балла);

д) спектр и резольвенту. (6 баллов);

Является ли оператор $(I - 2A)$ непрерывно обратимым?
(2 балла)

$$(Ax)(t) = \int_{-1}^{1} (t^2\tau^4 + t\tau^2 + t^3)x(\tau)d\tau.$$

Функциональный анализ, Семестр 6, минисессия 3, вариант 2.

1. Дайте определение (2 балла)
обратного оператора.

2. Сформулируйте и докажите (2+2=4 балла)
теорему о линейности обратного оператора оператора.

3. Пусть $A : C[-1,1] \to C[-1,1]$. Выяснить, является ли этот оператор
а) линейным и непрерывным (2 балла);
в) компактным (2 балла).
Найти его
г) норму (2 балла);
д) спектр и резольвенту. (6 баллов);
Является ли оператор $(I - 4A)$ непрерывно обратимым? (2 балла)

$$(Ax)(t) = \int_{-1}^{1} (t\tau^4 + t^2\tau^2 + t^3)x(\tau)d\tau.$$

Функциональный анализ, Семестр 6, минисессия 3, вариант 3.

1. Дайте определение (2 балла)
сопряженного оператора.

2. Сформулируйте и докажите (2+2=4 балла)
лемму об аннуляторе ядра.

3. Пусть $A : C[-1,1] \to C[-1,1]$. Выяснить, является ли этот оператор

а) линейным и непрерывным (2 балла);
в) компактным (2 балла).
Найти его
г) норму (2 балла);
д) спектр и резольвенту. (6 баллов);
Является ли оператор $(I - 6A)$ непрерывно обратимым? (2 балла)

$$(Ax)(t) = \int_{-1}^{1} (t^3\tau^4 + t^2\tau^2 + t)x(\tau)d\tau.$$

Функциональный анализ, Семестр 6, минисессия 3, вариант 4.

1. Дайте определение (2 балла)
непрерывного спектра оператора.

2. Сформулируйте и докажите (2+2=4 балла)
теорему о норме сопряженного оператора.

3. Пусть $A : C[-1,1] \to C[-1,1]$. Выяснить, является ли этот оператор

а) линейным и непрерывным (2 балла);

в) компактным (2 балла).

Найти его

г) норму (2 балла);

д) спектр и резольвенту. (6 баллов);

Является ли оператор $(I-8A)$ непрерывно обратимым? (2 балла)

$$(Ax)(t) = \int_{-1}^{1} (t^2\tau^2 + t\tau)x(\tau)d\tau.$$

Функциональный анализ, Семестр 6, минисессия 4, вариант 1.

1. Дайте определение (2 балла)
интеграла Лебега.

2. Сформулируйте и докажите теорему (2+2=4 балла)
Лебега об ограниченной сходимости.

3. Выясните, является ли интегрируемой по Лебегу функция $1-\phi(x)$, где $\phi(x)$ – функция Дирихле. Является ли она интегрируемой по Риману ? (3+2=5 баллов)

4. Выясните, является ли оператор

$$A : L^2[-\pi, \pi] \to L^2[-\pi, \pi]$$

оператором Гильберта-Шмидта, если

$$Ax = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin t \cos \tau + \sin \tau \cos t) \, d\tau$$

Найдите его сопряженный. (2+2=4 балла)

5. С помощью теорем Фредгольма выяснить условия разрешимости уравнения

$$x - Ax = y$$

в пространстве $L^2[-\pi, \pi]$. Является ли его решение единственным, когда существует. Найдите, если это возможно, решение для $y = \sin 2t$. (2+1+2=5 баллов)

Функциональный анализ, Семестр 6, минисессия 4, вариант 2.

1. Дайте определение (2 балла)
меры Лебега.

2. Сформулируйте и докажите теорему (2+2=4 балла)
Фату.

3. Выясните, является ли интегрируемой по Лебегу функция $1 + \phi(x)$, где $\phi(x)$ – функция Дирихле. Является ли она интегрируемой по Риману ? (3+2=5 баллов)

4. Выясните, является ли оператор

$$A : L^2[-\pi, \pi] \to L^2[-\pi, \pi]$$

оператором Гильберта-Шмидта, если

$$Ax = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin 2t \cos 2\tau + \sin 2\tau \cos 2t)\, d\tau$$

Найдите его сопряженный. (2+2=4 балла)

5. С помощью теорем Фредгольма выяснить условия разрешимости уравнения

$$x - Ax = y$$

в пространстве $L^2[-\pi, \pi]$. Является ли его решение единственным, когда существует. Найдите, если это возможно, решение для $y = \sin 3t$. (2+1+2=5 баллов)

Функциональный анализ, Семестр 6, минисессия 4, вариант 3.

1. Дайте определение (2 балла)
сходимости почти всюду.

2. Сформулируйте и докажите теорему (2+2=4 балла)
одно из свойств интеграла Лебега.

3. Выясните, является ли интегрируемой по Лебегу функция $x - \phi(x)$, где $\phi(x)$ – функция Дирихле. Является ли она интегрируемой по Риману ? (3+2=5 баллов)

4. Выясните, является ли оператор

$$A : L^2[-\pi, \pi] \to L^2[-\pi, \pi]$$

оператором Гильберта-Шмидта, если

$$Ax = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin 3t \cos 3\tau + \sin 3\tau \cos 3t)\, d\tau$$

Найдите его сопряженный. (2+2=4 балла)

5. С помощью теорем Фредгольма выяснить условия разрешимости уравнения

$$x - Ax = y$$

в пространстве $L^2[-\pi, \pi]$. Является ли его решение единственным, когда существует. Найдите, если это возможно, решение для $y = \sin 5t$. (2+1+2=5 баллов)

Функциональный анализ, Семестр 6, минисессия 4, вариант 4.

1. Дайте определение (2 балла)
интегрируемой по Лебегу функции

2. Сформулируйте и докажите теорему (2+2=4 балла)
о сопряженном операторе для оператора Гильберта-Шмидта

3. Выясните, является ли интегрируемой по Лебегу функция $1 - \phi(x)$, где $\phi(x)$ – функция Дирихле. Является ли она интегрируемой по Риману ? (3+2=5 баллов)

4. Выясните, является ли оператор

$$A : L^2[-\pi, \pi] \to L^2[-\pi, \pi]$$

оператором Гильберта-Шмидта, если

$$Ax = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin 5t \cos 5\tau + \sin 5\tau \cos 5t)\, d\tau$$

Найдите его сопряженный. (2+2=4 балла)

5. С помощью теорем Фредгольма выяснить условия разрешимости уравнения

$$x - Ax = y$$

в пространстве $L^2[-\pi, \pi]$. Является ли его решение единственным, когда существует. Найдите, если это возможно, решение для $y = \sin 8t$. (2+1+2=5 баллов)

Функциональный анализ, 3 курс. Пересдача. Вариант 1

1. (*4 б.*) Теоретический вопрос: Первая теорема Фредгольма.

2. (*5 б.*) Найти спектр оператора $A : L_2[-1,1] \to L_2[-1,1]$, $Ax(t) = t^3 x(t)$.

3. (*3 б.*) Найти первые три обобщенные производные у функции

$$y(x) = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & 0 \le x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Ответ выразить через δ-функцию Дирака.

4. Найти резольвенту оператора $A(f)(x) = \int_{-1}^{1} (x^2 - xy) f(y)\, dy$ в пространстве $C[-1.1]$ (4 балла), доказать ограниченность резольвенты (2 балла). Будет ли резольвента компактным оператором? (Ответ обосновать — 2 балла).

Функциональный анализ, 3 курс. Пересдача. Вариант 2

1. (*4 б.*) Теоретический вопрос: Альтернатива Фредгольма.

2. (*5 б.*) Найти спектр оператора $A : L_2[-1,2] \to L_2[-1,2]$, $Ax(t) = t^2 x(t)$.

3. (*3 б.*) Найти все обобщенные решения уравнения $(\sin x - 1)y' = 0$.

4. Найти резольвенту оператора $A(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin x + \cos y) f(y)\, dy$ в пространстве $C[-\pi.\pi]$ (4 балла), доказать ограниченность резольвенты (2 балла). Будет ли резольвента компактным оператором? (Ответ обосновать — 2 балла).

Функциональный анализ, 3 курс. Пересдача. Вариант 3

1. (*4 б.*) Теоретический вопрос: Вторая теорема Фредгольма.

2. (*5 б.*) Найти спектр оператора $A : L_2[0,2] \to L_2[0,2]$, $Ax(t) = (t-5)x(t)$.

3. (*3 б.*) Найти первые две обобщенные производные у функции

$$y(x) = \begin{cases} -1, & x < -1, \\ x, & -1 \le x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Ответ выразить через δ-функцию Дирака.

4. Найти резольвенту оператора $A(f)(x) = \int_0^1 (x+y)f(y)\,dy$ в пространстве $C[0,1]$ (4 балла), доказать ограниченность резольвенты (2 балла). Будет ли резольвента компактным оператором? (Ответ обосновать — 2 балла).

Функциональный анализ, 3 курс. Пересдача. Вариант 4

1. (*4 б.*) Теоретический вопрос: Спектр оператора. Свойства спектра компактного оператора в гильбертовом пространстве.

2. (*5 б.*) Найти спектр оператора $A : C[0,2] \to C[0,2]$, $Ax(t) = e^t x(t)$.

3. (*3 б.*) Найти все обобщенные решения уравнения $(x^2-1)y' = 0$.

4. Найти резольвенту оператора $A(f)(x) = \int_0^\pi (\sin 2x + y)f(y)\,dy$ в пространстве $C[0,\pi]$ (4 балла), доказать ограниченность резольвенты (2 балла). Будет ли резольвента компактным оператором? (Ответ обосновать — 2 балла).

Функциональный анализ, 3 курс. Пересдача. Вариант 5

1. (*4 б.*) Теоретический вопрос: Теорема Гильберта–Шмидта.

2. (*5 б.*) Найти спектр оператора $A : C[0, 2\pi] \to C[0, 2\pi]$, $Ax(t) = \sin t x(t)$.

3. (*3 б.*) Найти первые три обобщенные производные у функции

$$y(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ \cos x, & 0 \le x \le \pi/2, \\ 0, & x > \pi/2. \end{cases}$$

Ответ выразить через δ-функцию Дирака.

4. Найти резольвенту оператора $A(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin x + \cos y) f(y)\, dy$ в пространстве $C[-\pi.\pi]$ (4 балла), доказать ограниченность резольвенты (2 балла). Будет ли резольвента компактным оператором? (Ответ обосновать — 2 балла).

Функциональный анализ, 3 курс. Пересдача. Вариант 6

1. (*4 б.*) Теоретический вопрос: Теорема о компактности спектра оператора в банаховом пространстве.

2. (*5 б.*) Найти спектр оператора $A : C[0, \pi] \to C[0, \pi]$, $Ax(t) = e^{it} x(t)$.

3. (*3 б.*) Найти все обобщенные решения уравнения $(\sin x) y' = 0$.

4. Найти резольвенту оператора $A(f)(x) = \int_0^1 (x + y) f(y)\, dy$ в пространстве $C[-1, 1]$ (4 балла), доказать ограниченность резольвенты (2 балла). Будет ли резольвента компактным оператором? (Ответ обосновать — 2 балла).

Функциональный анализ, 3 курс. Вторая пересдача. Вариант 1

1. *(4 балла)* $N = \{x \in C[0,1], \quad x(0) + \int_{1/2}^{1} x(t)\,\mathrm{tg}\,t\,dt = 0\}$. Доказать, что N — подпространство в $C[0,1]$.

2. а) *2 балла)* Доказать, что формула $(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k y_k}{k^2}$ задает скалярное произведение в пространстве ограниченных последовательностей $\mathbf{m}$, превращая его в евклидово пространство.

б) *2 балла)* Найти угол между векторами $u_1 = (1,0,1,2,0,0,\ldots)$ и $u_2 = (0,-1,2,3,4,0,0,\ldots)$ в этом пространстве.

в) *2 балла)* Ортогонализировать систему векторов $\{u_1, u_2\}$ в этом пространстве.

3. *2 балла)* Пусть A, B — выпуклые множества. Будет ли множество $A \cap B$ — выпуклым? Ответ обосновать.

4. *(4 балла)* Найти норму функционала в пространстве $C[0,1]$, $f(x) = x(0) + \int_0^{1/2} x(t)t\,dt$.

5. *(4 балла)* Будет ли множество $\{x \in l_2 : \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x_n^2 < 1\}$ выпуклым в l_2? Ответ обосновать.

Функциональный анализ, 3 курс. Вторая пересдача. Вариант 2

1. (3 б.) Доказать, что отображение $A : x(t) \mapsto \sin t + x(t^2)/3$ является сжимающим в пространстве $C[0, 1]$.

2. (4 б.) Найти норму функционала $f(x) = x(1)+x(0)+\int_{-1}^{1} x(t)\, dt, \qquad x \in C[-1, 1]$.

3. (4 б.) Доказать, что в $L_1[-1, 1]$ нельзя ввести скалярное произведение, согласованное со стандартной нормой этого пространства.

4. (3 б.) Является ли линейным подпространством в l_2 множество последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$, удовлетворяющих условию $x_2 - x_4 = 2$.

5. (3 б.) Доказать, что если $x_n \to x$ в нормированном пространстве, то $||x_n|| \to ||x||$.

6. (3 б.) Расстоянием от точки x до множества A в метрическом пространстве называется число $\inf\{d(x, y) : y \in A\}$. Пусть $A \subset M$ — замкнутое подмножество метрического пространства (M, d). Доказать, что $d(x, A) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in A$.

Функциональный анализ, 3 курс. Вторая пересдача. Вариант 3

1. (3 б.) Доказать, что отображение $A : x(t) \mapsto t^4 - x(\sqrt{t})/3$ является сжимающим в пространстве $C[-1,1]$.

2. (4 б.) Найти норму функционала $f(x) = \int_{-1}^{1} t^2 x(t)\,dt, \qquad x \in C[-1,1]$.

3. (4 б.) Доказать, что в пространстве ограниченных последовательностей $\mathbf{m}$ нельзя ввести скалярное произведение, согласованное со стандартной нормой этого пространства.

4. (3 б.) Является ли линейным подпространством в $C[-1,1]$ множество функций, удовлетворяющих условию $x(1) - x(-1) = 1$.

5. (3 б.) Доказать, что если $x_n \to x$ в нормированном пространстве, то $||x_n - y|| \to ||x - y||$ для любого y.

6. (3 б.) Расстоянием от точки x до множества A в метрическом пространстве называется число $\inf\{d(x,y) : y \in A\}$. Пусть $A \subset M$ — подмножество метрического пространства (M,d). Доказать, что для любой точки $x \in M$ $d(x,A) = d(x,\bar{A})$, где $\bar{A}$ — замыкание множества A.

Функциональный анализ, 3 курс. Вторая пересдача. Вариант 4

1. (3 б.) Доказать, что отображение $A : x(t) \mapsto t^4 - \int_0^1 x(t)t(1-t)\,dt$ является сжимающим в пространстве $L_1[-1,1]$.

2. (4 б.) Найти норму функционала $f(x) = \int_0^1 |t|x(t)\,dt, \qquad x \in C[-1,1]$.

3. (4 б.) Доказать, что в пространстве ограниченных последовательностей $\mathbf{m}$ нельзя ввести скалярное произведение, согласованное со стандартной нормой этого пространства.

4. (3 б.) Является ли линейным подпространством в $C[-1,1]$ множество функций, удовлетворяющих условию $x(1)-x(-1)+\int_0^1 x(t)^2\,dt = 0$.

5. (3 б.) Доказать, что если $x_n \to x$ в нормированном пространстве, то $||x_n - y|| \to ||x - y||$ для любого y.

6. (3 б.) Расстоянием от точки x до множества A в метрическом пространстве называется число $\inf\{d(x,y) : y \in A\}$. Пусть $A \subset M$ — подмножество метрического пространства (M,d). Доказать, что для любой точки $x \in M$ $d(x,A) = d(x,\bar{A})$, где $\bar{A}$ — замыкание множества A.

Функциональный анализ, 3 курс, Комиссия. Вариант 1

1. (*5 б.*) Доказать, что функционал является линейным, непрерывным и найти его норму

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}, \quad x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2.$$

2. (*3 б.*) Привести пример последовательности обобщенных функций, сходящейся в пространстве обобщенных функций на числовой прямой.

3. (*4 б.*) Привести пример таких слабо сходящихся последовательностей $x_n \to x$, $y_n \to y$ в гильбертовом пространстве, чтобы последовательность (x_n, y_n) не сходилась к (x, y) при $n \to \infty$.

4. Найти резольвенту оператора $A(f)(x) = \int_0^{\pi} (\sin 2x + y) f(y)\, dy$ в пространстве $C[0, \pi]$ (4 балла), доказать ограниченность резольвенты (2 балла). Будет ли резольвента компактным оператором? (Ответ обосновать — 2 балла).

Список литературы

[1] Шлапунов А.А. *Функциональный анализ. Учебная программа дисциплины и график учебного процесса и самостоятельной работы по дисциплине*/А.А. Шлапунов, В.В. Работин. – Красноярск: Изд-во СФУ, 2007.

[2] Шлапунов А.А. *Функциональный анализ. Конспект лекций*/А.А. Шлапунов, В.В. Работин, Т.М. Садыков. – Красноярск: Изд-во СФУ, 2007.

[3] Ермилов И.В. *Функциональный анализ. Сборник задач и упражнений*/И.В. Ермилов, А.А. Шлапунов, В.М. Трутнев, Д.П. Федченко, И.В. Шестаков, Е.И. Яковлев, Е.Н. Михалкин. – Красноярск: Изд-во СФУ, 2007.

[4] Шлапунов А.А. *Функциональный анализ. Методические указания по выполнению самостоятельной работы*/А.А. Шлапунов, Д.П. Федченко, Т.М. Садыков, В.М. Трутнев, Е.И. Яковлев. – Красноярск: Изд-во СФУ, 2007.

[5] Колмогоров А.Н. *Элементы теории функций и функционального анализа*/А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Физматлит, 2004.

[6] Треногин В.А. *Функциональный анализ*/ В.А. Треногин. – М.: Наука, 1980.

[7] Треногин В.А. *Задачи и упражнения по функциональному анализу*/ В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева. – М.: Физматлит, 2002.

[8] Владимиров В.С. *Сборник задач по уравнениям математической физики*/ В.С. Владимиров, А.А. Вашарин. – М.: Физматлит, 2001.