

АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ.

Вопросы к устному экзамену 27 января 2020 г.

kiv@icm.krasn.ru

1. Вектор. Равенство векторов. Линейные операции над векторами и их свойства.
2. Линейная комбинация векторов, определения линейной зависимости и независимости системы векторов. Алгебраический и геометрический критерии линейной зависимости.
3. Базис векторов прямой, плоскости и пространства. Координаты вектора в базисе, их единственность. Координаты линейной комбинации векторов в базисе.
4. Системы декартовых координат на прямой, плоскости и в пространстве.
5. Деление отрезка в данном отношении. Координаты точки, делящей отрезок пополам. Золотое сечение.
6. Прямоугольная система координат. Полярные, цилиндрические, сферические системы координат и их взаимосвязь с прямоугольными координатами.
7. Числовая проекция вектора на направление и её свойства.
8. Скалярное произведение векторов и его свойства.
9. Угол между векторами, условие ортогональности двух векторов. Ортонормированный базис. Выражение скалярного произведения через координаты векторов - сомножителей.
10. Векторная проекция вектора на плоскость, ортогональную заданному направлению. Свойства векторной проекции.
11. Левая и правая пары и тройки векторов. Векторное произведение и его свойства, коллинеарность векторов.
12. Координаты векторного произведения в ортонормированном базисе.
13. Тождество Якоби.
14. Смешанное произведение векторов и его свойства.
15. Выражение смешанного произведения векторов через координаты сомножителей в ортонормированном и произвольном базисах. Объём тетраэдра
16. Замена базиса и системы координат.
17. Уравнения прямой на плоскости.
18. Взаимное расположение прямой и точки на плоскости, полуплоскости. Расстояние на плоскости от точки до прямой.
19. Взаимное расположение прямых на плоскости. Угол между прямыми. Пучок прямых.
20. Уравнения плоскости в пространстве.
21. Взаимное расположение плоскости и точки в пространстве, полупространства. Расстояние от точки до плоскости.
22. Взаимное расположение плоскостей в пространстве. Угол между плоскостями. Пучок плоскостей.
23. Уравнения прямой в пространстве.
24. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.
25. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.
26. Общие уравнения линий и поверхностей. Поверхности вращения.
27. Алгебраические линии и поверхности. Инвариантность порядка алгебраической линии или поверхности при замене декартовой системы координат.
28. Классификация кривых второго порядка на плоскости.
29. Уравнение касательной прямой к плоской кривой второго порядка.
30. Фокальное свойство эллипса и его уравнение в полярной системе координат.
31. Директрисы эллипса.
32. Фокальное свойство гиперболы и её уравнение в полярной системе координат.
33. Директрисы гиперболы.
34. Фокус и директриса параболы, критерий принадлежности точки параболе. Уравнение параболы в полярной системе координат.
35. Аффинная классификация поверхностей второго порядка.

Типовые задачи

1. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ отложен отрезок $AK = AD/5$, а на диагонали AC - отрезок $AL = AC/6$. Доказать, что векторы \overrightarrow{KL} и \overrightarrow{LB} коллинеарны, и найти отношение \overrightarrow{KL} к \overrightarrow{LB} .
2. Проверить, что векторы $\vec{a}(4,1,1)$, $\vec{b}(1,2,-5)$ и $\vec{c}(-1,1,1)$ образуют базис в пространстве. Найти координаты векторов $\vec{l}(4,4,-5)$, $\vec{m}(2,4,-10)$ и $\vec{n}(0,3,-4)$ в этом базисе.
3. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE, CF . Вычислить выражение $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BE}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CF})$.
4. Дан вектор $\vec{a}(3,3,6)$. Найти ортогональную проекцию вектора \vec{b} на прямую, направление которой определяется вектором \vec{a} , и ортогональную составляющую вектора \vec{b} относительно этой прямой, если вектор \vec{b} имеет координаты: 1) $(2,-2,4)$, 2) $(1,1,2)$, 3) $(4,0,-2)$.
5. Параллелепипед $ABCD A' B' C' D'$ задан координатами концов ребер, выходящих из вершины $A(1,2,3)$: $B(9,6,4)$, $C(3,0,4)$ и $A'(5,2,6)$. Найти длину ребра AB ; угол между ребрами AB и AC ; площадь основания $ABCD$; вычислить объем параллелепипеда и высоту, опущенную из вершины A' . Система координат прямоугольная.
6. Найти координаты точки в системе координат $O(1,3,3), \vec{e}_1(3,3,1), \vec{e}_2(3,5,2), \vec{e}_3(1,2,1)$ в пространстве, если известны её координаты x', y', z' в системе координат $O'(-1,0,2), \vec{e}'_1(1,-2,1), \vec{e}'_2(4,2,1), \vec{e}'_3(2,-1,3)$.
7. Написать уравнение поверхности Ω , получающейся при вращении прямой $y = 0$ вокруг прямой $y = x$.
8. Даны две прямые $x = 3 + 2t, y = -1 - t, z = 2 + 2t$ и $x + 2y - z = 2, x - y + 3z - 1 = 0$. Установить, пересекаются они, скрещиваются, параллельны или совпадают. Если прямые пересекаются или параллельны, составить уравнение плоскости, в которой они лежат. Если прямые пересекаются, найти также координаты точки их пересечения.
9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1,-1,1)$ и параллельной прямым $x + 2y - z = 2, 2x - 2y + 6z - 1 = 0$ и $-2x - 4y + 2z = 1, x - y + 3z + 2 = 0$.
10. Составить уравнение касательной к кривой $x^2/12 + y^2/4 = 1$ в точке $(3,1)$;
11. Пусть в некоторой прямоугольной системе координат кривая второго порядка задана уравнением $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$. Найти ее канонический вид и каноническую систему координат.
12. Определить тип поверхности 2-го порядка, составить её каноническое уравнение и найти каноническую систему координат $4x^2 + 3y^2 - 16x + 6y + 14 = 0$.

Кафедра алгебры и математической логики
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
Билет 10

1. Линейные операции над векторами и их свойства.
2. Касательная к плоской кривой второго порядка.
3. Задача.

Замечание:

первый вопрос билета связан с алгеброй векторов – пп. 1 - 16;

второй вопрос билета из области аналитической геометрии – пп. 17 - 35;