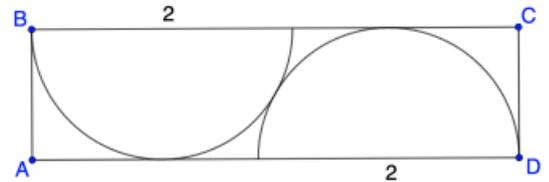


УНИВЕРСИТЕТСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ – 2025

1. В ряд стоят 50 человек, все разного роста. Ровно 15 из них выше своего левого соседа. Сколько человек при этом выше своего правого соседа? Приведите все варианты и докажите, что других вариантов нет.

2. На доске записаны числа 2, 1, 8, 9. За одну операцию между каждыми двумя подряд стоящими числами a и b (где a стоит левее b) вписывается их разность $b - a$. После первой операции на доске будут записаны числа 2, -1, 1, 7, 8, 1, 9. Найдите сумму чисел на доске после 1000-й операции.

3. Внутри прямоугольника расположены две полуокружности диаметра 2, каждая из которых касается другой полуокружности и двух сторон прямоугольника (см. рисунок). Найдите длину его диагонали.

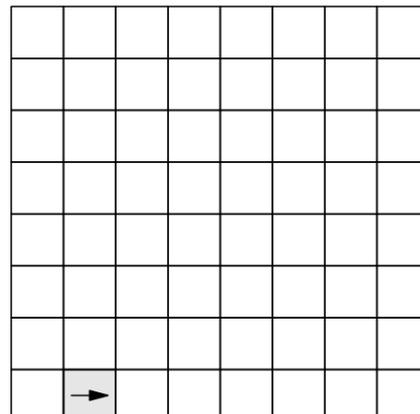
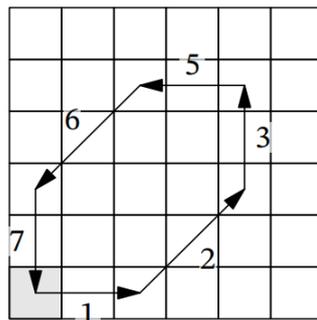


4. Глоин с большим ящиком входит в пещеру, где есть рубины и изумруды. Полный ящик рубинов весит 200 кг, полный ящик изумрудов – 40 кг, пустой ящик ничего не весит. Килограмм рубинов стоит на рынке 20 соренов, килограмм изумрудов – 60 соренов. Глоин может унести не более 100 кг. Какое наибольшее число соренов он может получить за драгоценные камни, если войти в пещеру он сможет только один раз?

5. Таракан ползает по клетчатой доске по следующим правилам.

- Изначально он находится в отмеченной клетке и смотрит вправо.
- Каждую секунду таракан проползает на две клетки вперёд в направлении своей головы (вдоль горизонтали или вдоль диагонали), если это возможно. Если проползти на две клетки нельзя, таракан остаётся в клетке.
- В конце секунды таракан поворачивает на 45° против часовой стрелки.

На рисунке показан пример перемещений таракана на доске 6×6 . В примере за первые 8 секунд таракан совершает 6 перемещений и возвращается в своё изначальное положение. (На четвёртой в восьмой секундах таракан не перемещается, а только поворачивается). Через сколько перемещений таракан впервые вернётся в отмеченную клетку доски 8×8 ?



Критерии оценивания заданий

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное (верное) решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

1. В ряд стоят 50 человек, все разного роста. Ровно 15 из них выше своего левого соседа. Сколько человек при этом выше своего правого соседа? Приведите все варианты и докажите, что других вариантов нет.

Ответ. 34.

Решение. Назовем 15 человек, которые выше своего левого соседа – *дылдами*. Если от кого-то справа стоит *дылда*, то он его ниже, иначе он его выше. Всего пар соседних людей – 49. *Дылды* ровно в 15 парах находятся на правом месте. В остальных $49 - 15 = 34$ парах справа стоит не *дылда*. Именно в этих парах человек выше своего соседа справа.

2. На доске записаны числа 2, 1, 8, 9. За одну операцию между каждыми двумя подряд стоящими числами a и b (где a стоит левее b) вписывается их разность $b - a$. После первой операции на доске будут записаны числа 2, -1, 1, 7, 8, 1, 9. Найдите сумму чисел на доске после 1000-й операции.

Ответ. 7020.

Решение. Посмотрим, как изменяется сумма чисел строки после одной операции. Пусть a_1, a_2, \dots, a_n – строка, к которой применяется операция. Тогда новая строка имеет вид

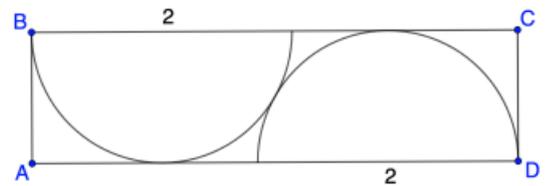
$$a_1, a_2 - a_1, a_2, a_3 - a_2, \dots, a_{n-1}, a_n - a_{n-1}, a_n.$$

Сумма чисел новой строки

$$a_1 + \dots + a_n + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_n - a_{n-1}) = s + a_n - a_1,$$

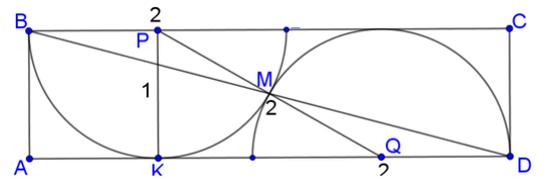
где s – сумма чисел исходной строки. Заметим теперь, что первое и последнее числа строки при применении операции не меняются, то есть в любой строке, полученной из строки 2, 1, 8, 9, будет неизменно $a_1 = 2$ и $a_n = 9$. Следовательно, после каждой операции сумма чисел увеличивается на 7. Сумма чисел исходной строки равна 20, значит, сумма чисел строки, которая получится после 1000 таких операций, равна $20 + 7 \cdot 1000 = 7020$.

3. Внутри прямоугольника расположены две полуокружности диаметра 2, каждая из которых касается другой полуокружности и двух сторон прямоугольника (см. рисунок). Найдите длину его диагонали.



Ответ. $2\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{2} + \sqrt{6}$.

Решение. Пусть P и Q – центры полуокружностей, K – точка касания полуокружности с центром P со стороной AD , тогда $PK = 1$. Так как PQ содержит точку M касания полуокружностей, то $PQ = 2$. Из прямоугольного треугольника PQK получим, что $KQ = \sqrt{3}$. Далее можно рассуждать по-разному.



Первый способ. Так как $ABPK$ – квадрат, то $AK = DQ = 1$, значит, $AD = 2 + \sqrt{3}$. Диагональ $BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2 + 1} = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

Второй способ. Точка M касания полуокружностей является их центром симметрии, а также является центром симметрии прямоугольника, то есть серединой его диагонали BD . По теореме о касательной и секущей $DK^2 = DB \cdot DM$, то есть $DK^2 = 0,5DB^2$, откуда $DB = DK \cdot \sqrt{2} = (\sqrt{3} + 1)\sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{6}$.

4. Глоин с большим ящиком входит в пещеру, где есть рубины и изумруды. Полный ящик рубинов весит 200 кг, полный ящик изумрудов – 40 кг, пустой ящик ничего не весит. Килограмм рубинов стоит на рынке 20 соренов, килограмм изумрудов – 60 соренов. Глоин может унести не более 100 кг. Какое наибольшее число соренов он может получить за драгоценные камни, если войти в пещеру он сможет только один раз?

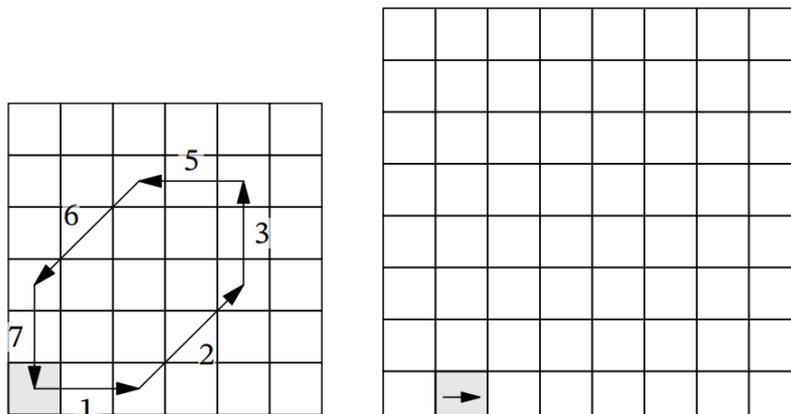
Ответ. 3000.

Решение. Предположим, что Глоин смог унести из пещеры x кг рубинов и y кг изумрудов. В этом случае он сможет получить $20x + 60y$ соренов. Поскольку Глоин может поднять не более 100 кг, то $x + y \leq 100$. 1 кг рубинов занимает $\frac{1}{200}$, а 1 кг изумрудов – $\frac{1}{40}$ часть ящика. Значит, $\frac{x}{200} + \frac{y}{40} \leq 1$ или $x + 5y \leq 200$. Сложив два полученных неравенства и умножив на 10, получим $20x + 60y \leq 3000$. Следовательно, Глоин сможет получить за драгоценные камни не более 3000 соренов. Осталось показать, что Глоин сможет унести сокровища на эту сумму. Для этого необходимо и достаточно, чтобы в неравенствах и были выполнены равенства. Решив соответствующую систему уравнений, найдём $x = 75$, $y = 25$. Это значит, что Глоин сможет получить 3000 соренов, взяв из пещеры 75 кг рубинов и 25 кг изумрудов.

5. Таракан ползает по клетчатой доске по следующим правилам.

- Изначально он находится в отмеченной клетке и смотрит вправо.
- Каждую секунду таракан проползает на две клетки вперёд в направлении своей головы (вдоль горизонтали или вдоль диагонали), если это возможно. Если проползти на две клетки нельзя, таракан остаётся в клетке.
- В конце секунды таракан поворачивает на 45° против часовой стрелки.

На рисунке показан пример перемещений таракана на доске 6×6 . В примере за первые 8 секунд таракан совершает 6 перемещений и возвращается в своё изначальное положение. (На четвёртой в восьмой секундах таракан не перемещается, а только поворачивается). Через сколько перемещений таракан впервые вернётся в отмеченную клетку доски 8×8 ?



Ответ. 20.

Решение. Через 24 минуты таракан вернётся в изначальное состояние, совершив 20 перемещений. Они показаны на рисунке: сначала красные стрелки, затем чёрные, затем синие, затем зелёные.

