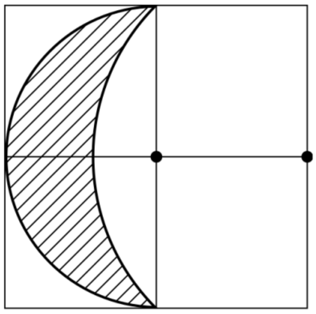
# УНИВЕРСИТЕТСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

# ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 11-Х КЛАССОВ

1) Про три ненулевых числа известно, что первое равно среднему арифметическому второго и третьего, второе – разности двух других, а третье – сумме квадратов первого и второго. Найдите все такие числа.



2) На рисунке изображены четыре одинаковых квадрата, площадь каждого равна $1$ и отмечены центры двух проведенных окружностей. Оказалось, что дуги окружностей ограничивают заштрихованную фигуру. Найдите её площадь.

3) Математики Женя и Саша задумали простые числа и сообщили Вове. Вова сообщил, что сумма этих чисел делится на их разность. Женя сказал, что не знает число Саши. Саша ответил, что не знал числа Жени, но сейчас уже знает. Какие числа задумали мальчики?

4) В круговом шахматном турнире Института математики участвовало $12$ студентов. По итогам турнира Лена набрала $9$ очков, и имелось $9$ студентов, у каждого из которых было не более $4$ очков. Как Лена сыграла с каждым из двух оставшихся студентов? (В круговом шахматном турнире каждый игрок играет с каждым по одной партии. За победу дается $1$ очко, за ничью – $0{,}5$, за поражение – $0$).

5) Два абитуриента Вася и Петя в день открытых дверей участвовали в конкурсе. Утром их приведут в аудиторию, где на парте по кругу будут лежать шесть одинаковых с виду шкатулок, из которых в четырех находятся дополнительные баллы к ЕГЭ по математике, а в двух – ничего. Затем Васе сообщают, какие шкатулки пустые, но передать информацию Пете он уже не сможет. Мальчики должны по очереди (начинает Вася) выбирать по шкатулке, пока не останется только две пустых. Могут ли абитуриенты заранее договориться, чтобы получить дополнительные баллы к ЕГЭ?

*Победители и призеры олимпиады получат дополнительные баллы к сумме баллов, полученных на ЕГЭ.
Раздел для абитуриента на сайте ИМиФИ СФУ: http://math.sfu-kras.ru/abiturient
Общественная приемная для абитуриентов: http://math.sfu-kras.ru/abiturient/anteroom

**УНИВЕРСИТЕТСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ**

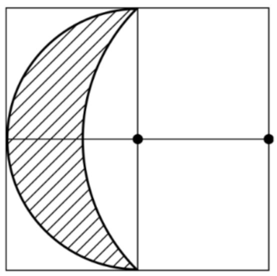
**ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 11-Х КЛАССОВ**

**РЕШЕНИЯ**

1) Обозначим данные числа за $x$, $y$, $z$, причём $x = \frac{y+z}{2}$. Далее возможны два случая. Первый случай: $y = x - z$, откуда следует $x = 0$, что противоречит условию. Остаётся случай $y = z - x$, и третье равенство принимает вид $z = y^2 + x^2$. Решая полученную систему, получаем: $x = 2y$, $z = 3y$, $3y = 5y^2$. Из этих равенств получаем ответ.

**Ответ.** $1{,}2$; $0{,}6$; $1{,}8$.

***Комментарий***. *Полное решение – 7 баллов. Не разобран случай, приводящий к нулевому решению – снимается 2 балла. Ответ с проверкой, но без объяснений – 1 балл. Ответ без объяснений и проверки – 1 балл.*



2) Заштрихованную фигуру можно получить, вырезав из полукруга радиуса $1$ сегмент круга радиуса $\sqrt{2}$. А этот сегмент получается, если вырезать из четвертинки круга радиуса $\sqrt{2}$ равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами $\sqrt{2}$. Значит, искомая площадь равна $\frac{\pi}{2} - \left(\frac{2\pi}{4} - 1\right) = 1$.

**Ответ.** $1$.

3) Сумма двух простых может делиться на их разность только если разность равна $1$ или $2$. Действительно, $a + b$ делится на $a - b$, значит $2a = (a + b) + (a - b)$ делится на $(a - b)$. Но у $2a$ ровно $4$ делителя (ведь $a$ – простое) – это $1$, $2$, $a$, $2a$. А $(a - b)$, конечно, не может быть равно $a$ или $2a$. Поэтому если загаданное число больше $5$, то никаких проблем с идентификацией числа другого быть не может ($p \pm 1$ – чётное не равное $2$, а из чисел $\mathrm{p} \pm 2$ одно делится на $3$ и не равно $3$). Поэтому оба загадали числа $2$, $3$ или $5$. Но если один бы загадал $2$, он сразу узнал бы, что у другого $3$. Поэтому ребята загадали $3$ и $5$.

**Ответ.** $3$ и $5$.

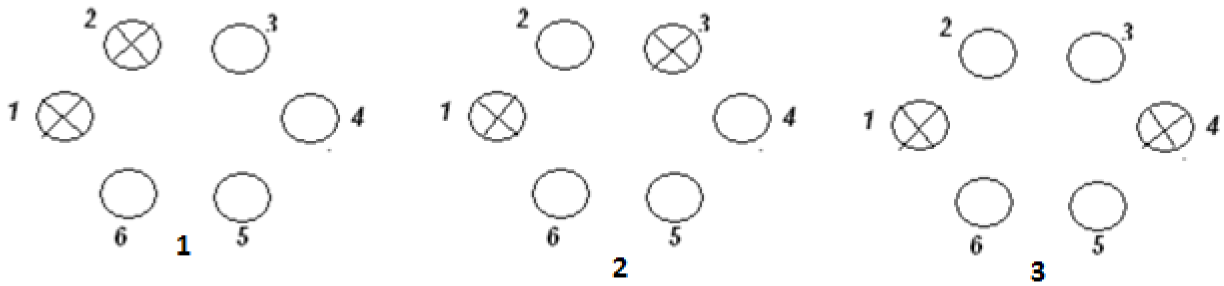
***Комментарий.*** *Полное решение 7 баллов. Ответ без решения 1 балл. Без объяснений утверждается, что разность равна 1 или 2, а остальное правильно – 5 баллов.*

4) Рассмотрим $9$ участников, о которых говорится в условии задачи. Они провели между собой $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ партий, то есть разыграли ровно $36$ очков. Значит, ни один из них не мог

набрать меньше, чем $4$ очка, то есть каждый набрал ровно $4$ очка. Следовательно, все партии, игравшиеся с остальными тремя шахматистами, они проиграли. Значит, Лена выиграла у каждого из этих девяти, а поскольку он всего набрал $9$ очков, то две остальные партии она проиграла.

**Ответ.** Лена проиграла обоим.

5) Возможны три случая расположения пустых шкатулок: они могут лежать рядом, через одну или напротив друг друга. Вася может для удобства занумеровать шкатулки по часовой стрелке так, чтобы пустые шкатулки имели номера либо 1 и 2, либо 1 и 3, либо 1 и 4 (см. рис. а – в).




Накануне Вася может дать Пете, например, такие указания: «После того, как я выберу первую шкатулку, выбирай соседнюю по часовой стрелке. А дальше смотри, что выбираю я. Если выбираю шкатулку, лежащую напротив уже выбранной кем-то из нас, то выбирай соседнюю против часовой стрелки. А если я выбираю соседнюю с двумя уже выбранными, то выбирай через одну по часовой стрелки от моей.»

Порядок выбора шкатулок, согласно этой инструкции: если пустые шкатулки $1$ и $2$ (см. рис. $1$), то Вася – $3$, Петя – $4$, Вася – $6$, Петя – $5$; если пустые $1$ и $3$ (см. рис. $2$), то Вася – $4$, Петя – $5$, Вася – $6$, Петя – $2$; если пустые $1$ и $4$ (см. рис. $3$), то Вася – $2$, Петя – $3$, Вася – $6$, Петя – $5$.

**Ответ.** Могут.

***Комментарий.*** *Приведено полное обоснованное решение: даны четкие указания Пете и сказано, какие именно шкатулки должен выбрать Вася – 7 баллов. Алгоритм описан нечётко, но проверяющему понятно, что имелось в виду (в том числе, понятно какие шкатулки выбирать Васе), и алгоритм действительно работает во всех трёх случаях – 5 баллов. Даны верные указания Пете, но из приведенного текста неясно, какие именно шкатулки будет выбирать Вася и в каком порядке – 3 балла. Алгоритм описан настолько нечетко, что неясно, работает ли он во всех случаях – 1 балл.*

*Алгоритм отсутствует или не работает хотя бы в одном случае – 0 баллов. Решение использует отличную от выбора шкатулок передачу информации от Васи к Пете (например «я подойду к парте с той стороны, где лежит пустая шкатулка, и …») – 0 баллов.*