Локальная теорема Коши – Пикара.

Теорема (о существовании и единственности локального решения). Пусть дана задача Коши

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t,x)\\ x(t_0) &= x_{0,}\end{aligned} \qquad (1)$$

где правая часть $f(t,x)$ определена и непрерывна в прямоугольнике $\prod = \{(t,x) \in R^2 : |t - t_0| \le a, |x - x_0| \le b\}$ и удовлетворяет в $\prod$ условию Липшица по переменной x, т.е.

$$\exists\, L > 0: \ \ \forall x_1, x_2 \in [-b + x_0; x_0 + b], \ \ \forall t[t_0 - a; t_0 + a]$$

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \le L|x_1 - x_2|,$$

то на отрезке $t_0 - d \le t \le t_0 + d$, где $d = min\left\{a; \frac{b}{M}\right\}, M = \max_{(t,x)\in\prod}|f(t,x)|$, существует единственное решение задачи (1)б к которому равномерно сходятся при $n \to \infty$ приближения x_n, определяемые формулами,

$$x_0 = x(t_0), \qquad x_{n+1} = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(\tau; x_n(\tau)\big) d\tau.$$

Доказательство: аналогичное доказательству глобальной теоремы.

Пример№1. Указать какой- нибудь отрезок, на котором существует решение с задачи Коши

$$\begin{gathered}\dot{x} = t + x^3\\ x(0) = 0.\end{gathered}$$

Решение: $t_0 = x_0 = 0$, $f(t;x) = t + x^3$. Функция $f(t,x)$ непрерывна в любом прямоугольнике $\prod = \{(t,x) \in R^2 : |t| \le a, |x| \le b\}$. Проверим выполнение условия Липшица:

$$|t + x_1^3 - t - x_2^3| = |x_1^3 - x_2^3| \le 3b^2|x_1 - x^2|.$$

Последнее неравенство получено при помощи формулы конечных приращений (теорема Лагранжа)

$$|f(a) - f(b)| \le f'(c)|a - b|.$$

Т.е. условие Липшица выполняется ($L = 3b^2$).

Следовательно, на отрезке $[-d; d]$, где

$$d = min\left\{a; \frac{b}{M}\right\}, M = \max_{(t,x)\in\Pi}|f(t,x)| = a + b^3$$

существует единственное решение данной задачи. Найдем число $d = min\left\{a; \frac{b}{a+b^3}\right\}$. Ясно, что если на каком-то сегменте I существует единственное решение, то оно существует и на каждом меньшем сегменте, вложенном в I. Отсюда следует, что желательно найти как можно больший отрезок I, т.е. $\max\min\left\{a; \frac{b}{a+b^3}\right\}$. Т.к. функция $\psi(a) = a$ возрастает при $a \geq 0$, а $g(a) = \frac{b}{a+b^3}$ убывает, то $\max\min\left\{a; \frac{b}{a+b^3}\right\}$ достигается при условии, что $\psi(a) = g(a)$, т.е.

$$a = \frac{b}{a+b^3}. \qquad (*)$$

Взяв производную от правой части (*) по переменной b, найдем, что при $b^3 = \frac{a}{2}$ достигается максимум a, который легко вычислить, подставив $a = 2b^2$ в (*).

$$2b^3 = \frac{b}{2b^3 + b^3} \Rightarrow 2b^3 = \frac{1}{3b^2} \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt[5]{6}}.$$

$$a = \frac{2}{\sqrt[5]{216}} \approx \frac{1}{3}\sqrt[5]{36} \approx 0{,}66.$$

Таким образом, можно гарантировать существование и единственность решения данной задачи на сегменте $-0{,}66 \leq t \leq 0{,}66$.

Локальная теорема Коши-Пикара дает достаточные условия разрешимости задачи Коши для широкого класса ОДУ, однако прямая проверка выполнения условия Липшица в некотором (часто искусственном) цилиндре не всегда удобна. Сформулируем еще одну локальную теорему существования и единственности с более простым условием.

Теорема. Пусть правая часть уравнения

$$\dot{x} = f(t, x)$$

определена и непрерывна вместе со своими частными производными $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ в некоторой области $G \subseteq R^2$. Тогда $\forall (t_0, x_0) \in G$ существует единственное (локальное) решение системы (1) с начальными данными $x(t_0) = x_0$.

Замечание. Локальные теоремы существования и единственности справедливы и для систем ОДУ, т.е. $x = \big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big)$.

Для проверки разрешимости задачи Коши для линейных систем можно, безусловно, пользоваться предыдущими теоремами, однако, можно доказать и более сильный результат.

Теорема. Задача Коши

$$\dot{x} = A(t)x + B(t),$$

$$x(t_0) = x_0,$$

где все элементы матрицы $A(t) = \left(a_{i,j}(t)\right)$ и правой части $B(t) = \left(b_i(t)\right)$ непрерывны на отрезке $[t_1; t_2]$, где $t_0 \in [t_1; t_2]$,

имеет единственное решение φ с областью определения $D(\varphi) = [t_1; t_2]$.

Сведение уравнения $n -$ го порядка к нормальной системе. Теорема существования и единственности для уравнений $n -$ го порядка.

Рассмотрим постановку задачи Коши для уравнений $n -$ го порядка

$$y^{(n)} = f(t; y; y'; y'' \ldots; y^{(n)}) . \qquad (1)$$

Покажем, что уравнение (1) эквивалентно некоторой нормальной системе. Введем функции

$$x_1 = y,\ x_2 = y',\ y_3 = y'', \ldots, x_n = y^{(n-1)} . \qquad (2)$$

Тогда

$$\begin{gathered} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = x_3 \\ \ldots \\ \dot{x_n} = y^{(n)} = f(t; x_1; x_2; \ldots; x_n), \end{gathered} \qquad (3)$$

Где первые $(n-1)$ уравнений являются следствиями (2), а последнее получается из (1) и (2).

Покажем, что (1) эквивалентно (3), т.е. каждому решению уравнения (1) соответствует некоторое решение системы (3) и наоборот.

$\Longrightarrow$ Пусть $\psi(t) -$ решение (1). Тогда $\psi(t)$ - n-раз дифференцируема. Построим вектор –функцию $\varphi(t) = \left(\psi(t), \psi'(t), \ldots, \psi^{(n-1)}(t)\right)$, которая, как легко видеть, является решением (3).

$\Leftarrow$ Пусть есть решение $\varphi(t) = \left(\varphi_1(t); \varphi_2(t); \ldots; \varphi(t)\right)$. Но тогда, в силу первых $n-1$ уравнений системы (3), имеем

$\varphi_2 = \varphi_1', \varphi_3 = \varphi_2' = \varphi_2'', \ldots \varphi_n = \varphi_1^{(n-1)}$. Т.о., во- первых, $\varphi_1 \in C^n$, далее

$$\varphi = \left(\varphi_1(t), {\varphi_1}'(t),\ \ldots, \varphi_1^{(n-1)}(t)\right)$$

и, наконец $\psi = \varphi_1$- является решением (1), в силу последнего уравнения системы.

Таким образом, приходим к определению

Определение. Задачей Коши для уравнения (1) называется задача нахождения его решения, удовлетворяющего начальным данным

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_{1,} \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}. \qquad (4)$$

Теорема. Пусть правая часть уравнения (1) непрерывна вместе со своими частными производными $\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}$ $(k = 1,2, \ldots, n)$ в некоторой области $G \subset R^{(n+1)}$, тогда задача Коши (1),(4) имеет единственное решение.

Пример. Применение теоремы Коши - Пикара для системы ДУ.

Найти отрезок, на котором существует единственное решение системы ДУ

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y^2 \\ \frac{dy}{dt} = x^2 \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}.$$

Решение: $t_0 = 0, x_0 = 1, y_0 = 2, f_1 = y^2, f_2 = x^2$.

f_1 и f_{2-} непрерывны в области

$$\Omega = \left\{(t, x, y) \in\ R^3\colon |t| \le a;\ \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} \le b\right\}$$

И имеют в ней ограниченные частные производные

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 0, \frac{\partial f_1}{\partial y} = 2y, \frac{\partial f_2}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0.$$

Следовательно, на отрезке $-h \le t \le h$, где $h = min\left\{a; \frac{b}{M}\right\}$,

$M = \max_{(t;x;y \in \Omega)} \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$, существует единственное решение рассматриваемой задачи.

Так как $M = max\sqrt{x^4 + y^4} \le \sqrt{(1+b)^4 + (2+b)^4} \le \sqrt{2}(2+b)^2$, то из условий

$$a = \frac{b}{M} \geq \frac{b}{\sqrt{2}(2+b)^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{b}{(2+b)^2}\right) = 0$$

Находим, что $b = 2$ и $a \geq \frac{2}{M(2)} = \frac{2}{\sqrt{3^4+4^4}} > 0{,}1$. Следовательно, на отрезке $-0{,}1 \leq t \leq 0{,}1$ существует единственное решение данной задачи.