ФАЗОВАЯ ПЛОСКОСТЬ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим линейную систему с постоянными коэффициентами 2-го порядка

$$\dot{x} = Ax, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

С помощью линейной замены переменных, введем новую неизвестную функцию $y = Tx$, где T – невырожденная матрица.

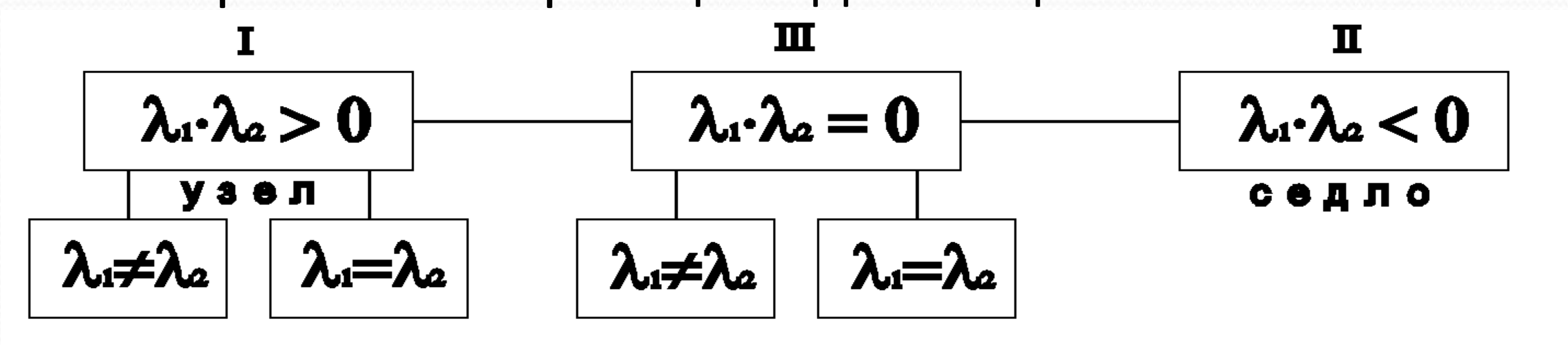
Для новой неизвестной функции получаем систему

$$\dot{y} = T\dot{x} = TAx = TAT^{-1}y = By, \qquad (2)$$

Известно, что матрицу T всегда можно выбрать так, чтобы матрица B совпала с жордановой матрицей J. В дальнейшем мы будем анализировать поведение траекторий на фазовой плоскости именно для этой системы

$$\dot{y} = J\,y \qquad (3)$$

Рассмотрим классификацию для вещественных λ.



I. Собственные числа одного знака $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$

I.1 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, тогда

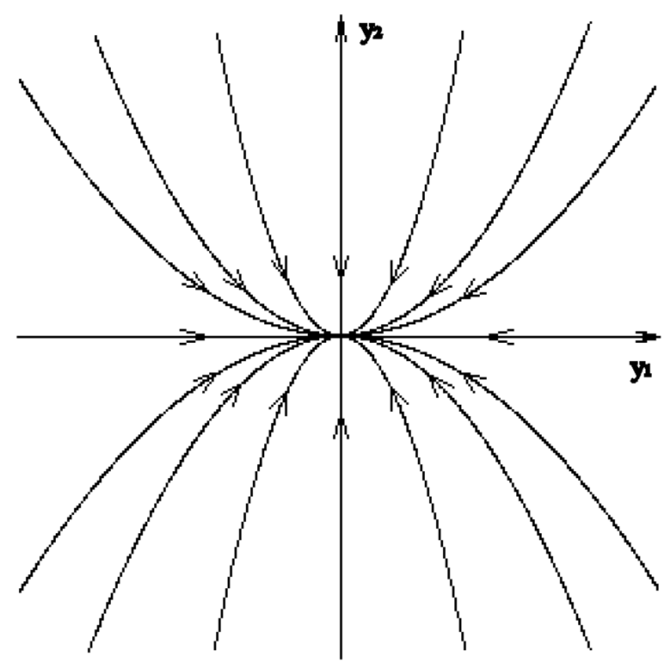
$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы (3) имеет вид

$$y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}$$

Единственное положение равновесия - точка $(0,0)$. Исключая параметр t (при $C_1, C_2 \neq 0$) , получаем явный вид траекторий $y_1 = C\, y_2^{\alpha}$, где $\alpha = \lambda_2 / \lambda_1$.

Стрелочками на рисунке показано направление времени, здесь оно соответствует случаю отрицательных собственных чисел (при положительных направление всех стрелок меняется на обратное).

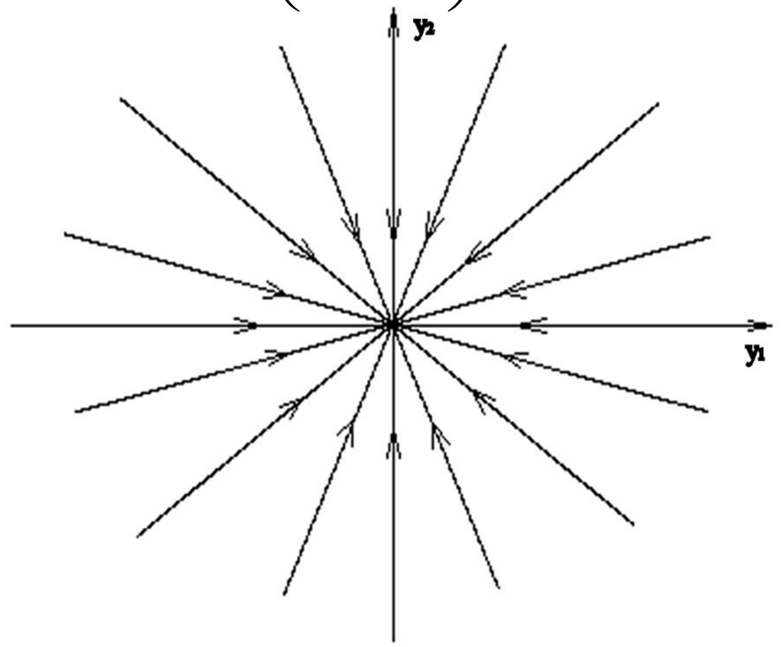


Такое положение равновесия называется **УЗЛОМ**. Согласно доказанных выше теорем, при отрицательных собственных значениях узел является асимптотически устойчивым, а при положительных - вполне неустойчивым.

I.2 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$

В этом случае возможны два варианта вида жордановой матрицы .

а) $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$



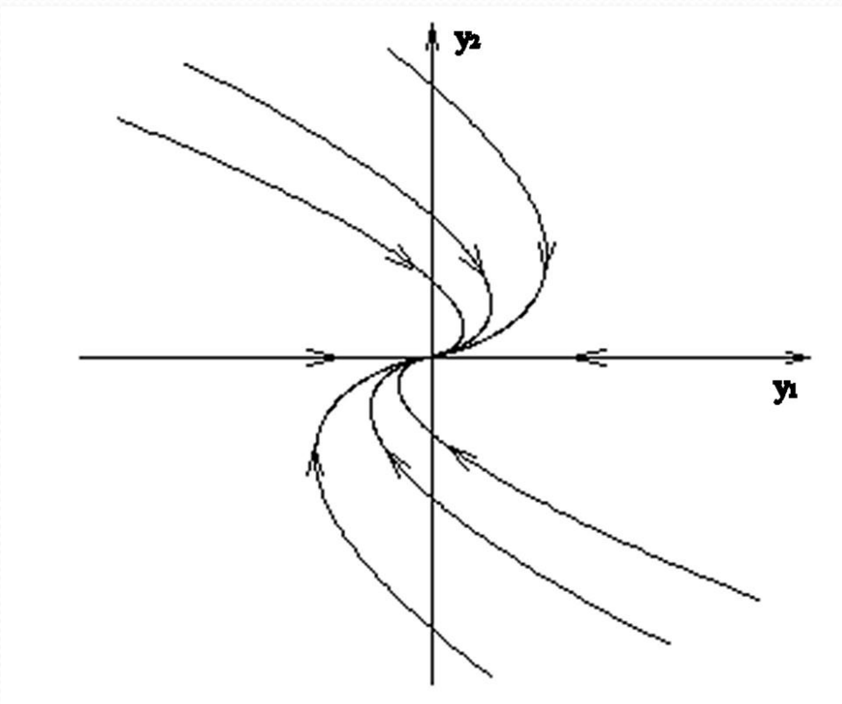
Тогда система (3) имеет общее решение

$$y_1 = C_1 e^{\lambda t}, \quad y_2 = C_2 e^{\lambda t}$$

Исключая, как и выше параметр t (при $C_1, C_2 \neq 0$), получаем явный вид траекторий $y_2 = C\, y_1$, т.е. в этом частном случае траектории прямые.

б) $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

решение системы имеет вид $y_1 = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda t}, \quad y_2 = C_2 e^{\lambda t}$



Введением нового времени $\tau = t + C_1/C_2$ его можно привести к виду

$$y_1 = C\tau e^{\lambda\tau}, \quad y_2 = C e^{\lambda\tau}$$

и $$y_1 = C_1 e^{\lambda\tau}, \quad y_2 = 0.$$

Такие положения равновесия называются ВЫРОЖДЕННЫМИ УЗЛАМИ.

II.Собственные числа разных знаков $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$. Будем считать для определенности $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Тогда жорданова нормальная форма J матрицы A опять имеет однозначный вид

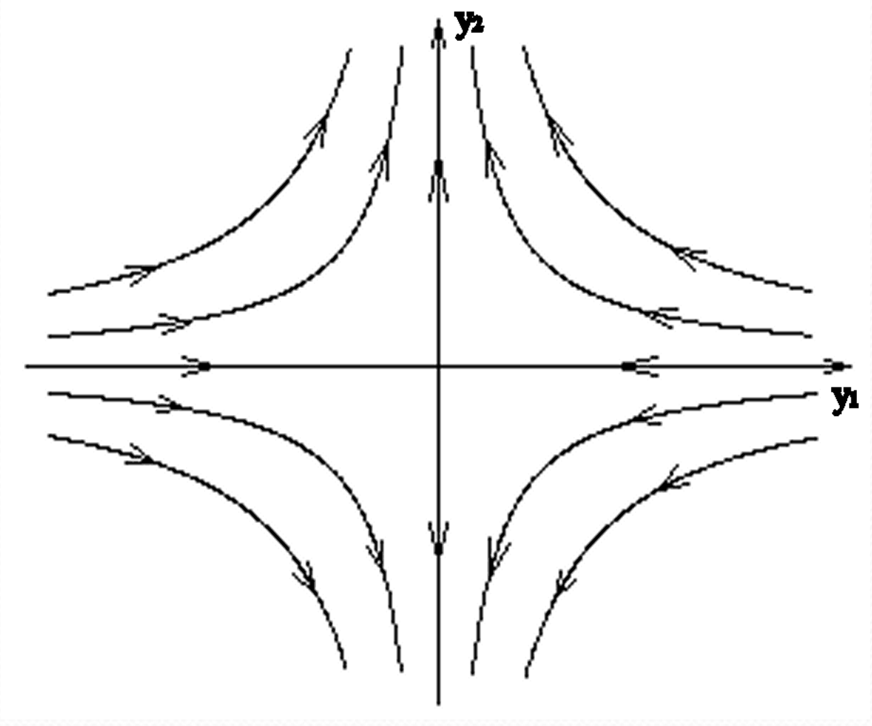
$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы (3) имеет вид

$$y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}$$

Единственное положение равновесия - точка $(0,0)$. Исключая параметр t (при $C_1, C_2 \neq 0$) , получаем явный вид траекторий $y_1 = C\, y_2^{\alpha}$, где $\alpha = \lambda_2/\lambda_1$.

В отличие от рассмотренного выше случая узла, отрицательный показатель α приводит к семейству гипербол (вместо парабол). Такое положение равновесия называется СЕДЛОМ. Оно всегда неустойчиво (хотя и не является вполне неустойчивым).



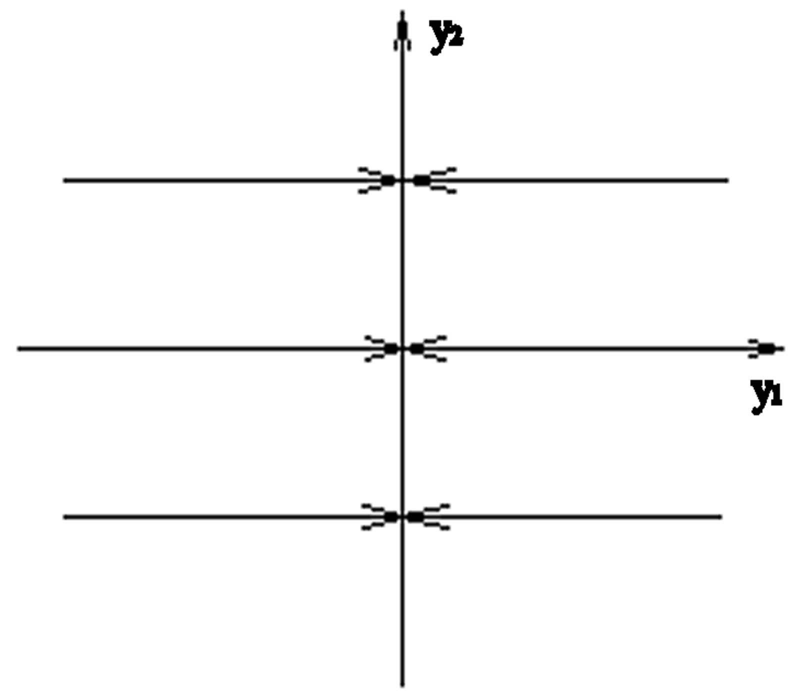
III. Вырожденные случаи. Одно или оба собственных числа равны нулю.

III.1. Только одно из собственных чисел равно нулю.

Пусть для определенности $\lambda_2=0,\ \lambda_1=\lambda\neq 0$. Тогда общее решение имеет вид

$$y_1 = C_1 e^{\lambda t}, \quad y_2 = C_2 .$$

Вся ось y_2 состоит из положений равновесия. Устойчивость всех положений равновесия зависит от знака λ.



III.2. Оба собственных значения равны нулю.

Этот случай разбивается на два подслучая.

a) $J = 0$.

В этом случае вся фазовая плоскость состоит из положений равновесия. Они все устойчивы.

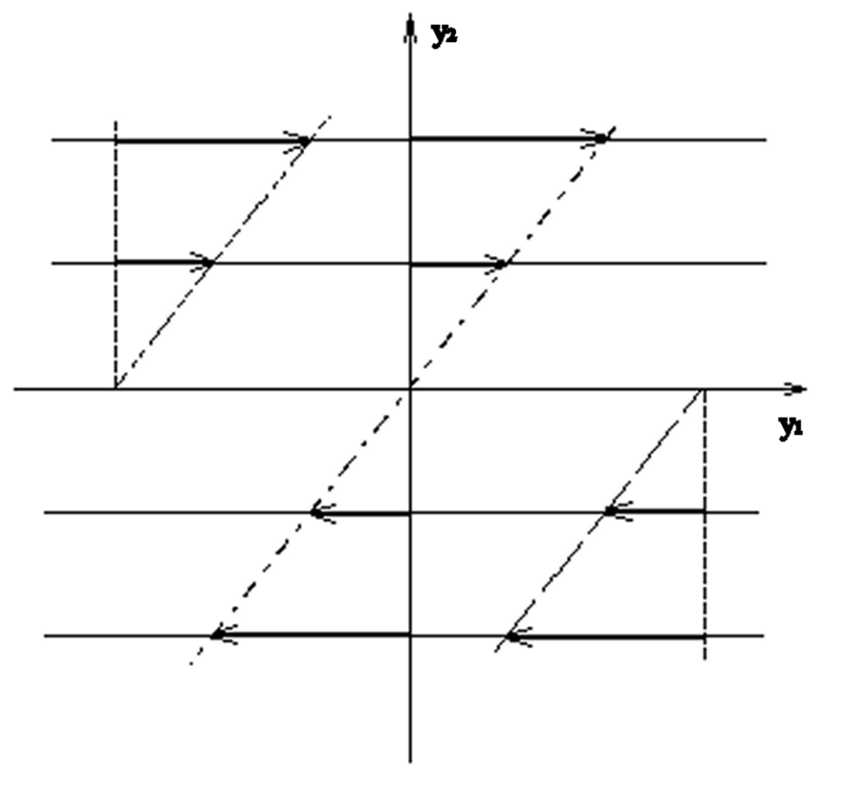
b)

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение имеет вид

$$y_1 = C_1 + C_2 t, \quad y_2 = C_2 .$$

В этом случае вся фазовая плоскость состоит из положений равновесия. Они все устойчивы.



Этот пример показывает, что при нулевых собственных значениях, положения равновесия могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми.

Теперь рассмотрим случай КОМПЛЕКСНЫХ собственных значений. Т.к. матрица A вещественная, ее собственные значения комплексно сопряжены, а значит различны. Общее вещественное решение исходной системы (1)имеет вид

$$x = C\mathbf{h}e^{\lambda t} + \overline{C\mathbf{h}}e^{\bar{\lambda} t}, \qquad (4)$$

где $\mathbf{h}, \overline{\mathbf{h}}$ собственные векторы, соответствующие собственным числам $\lambda, \bar{\lambda}$. Единственное положение равновесия - точка $(0{,}0)$. Обозначим

$$\mu = Re(\lambda), \nu = Im(\lambda).$$

Введем вещественные векторы

$$e_1 = \mathbf{h} + \overline{\mathbf{h}}, \quad e_2 = i(\mathbf{h} - \overline{\mathbf{h}}).$$

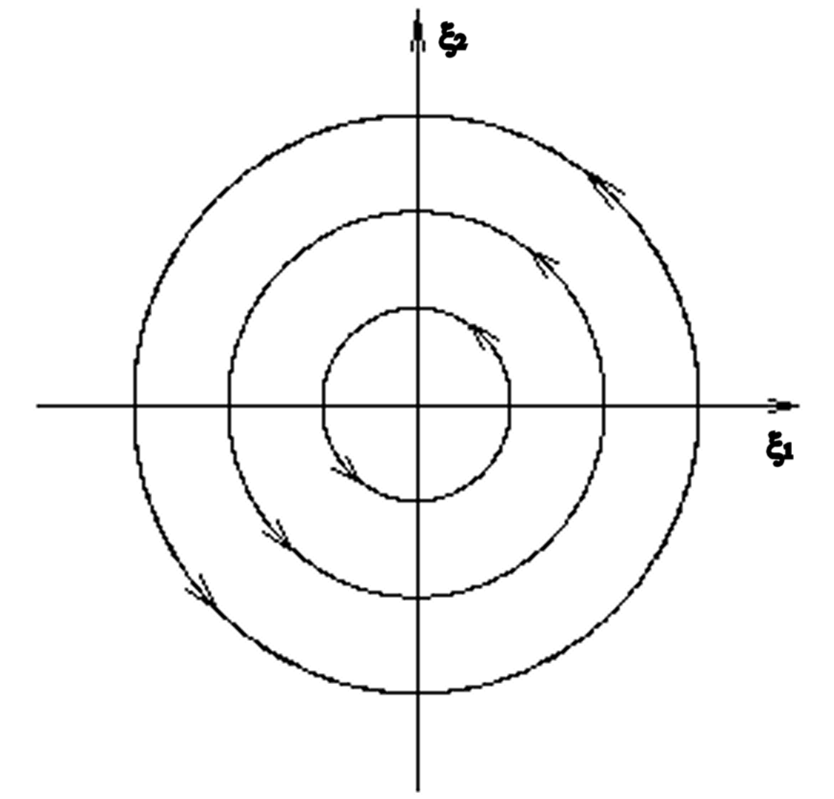
Постоянную C представим в тригонометрическом виде $C = Re^{i\phi}$. Тогда общее решение (4) можно привести к виду $x = \xi_1(t)\mathbf{e}_1 + \xi_2(t)\mathbf{e}_2$,

где

$\xi_1(t) = Re^{\mu t}\cos(\nu t + \phi)$,

$\xi_2(t) = Re^{\mu t}\sin(\nu t + \phi)$

это координаты вектора x в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$. При $\mu=0$ положение равновесия называется ЦЕНТРОМ, оно будет устойчивым.



При $\mu \neq 0$ положение равновесия называется ФОКУСОМ. Если $\mu > 0$ то фокус будет устойчивым, если $\mu < 0$ – неустойчивым.