Программа к экзамену по дифференциальным уравнениям

2013-2014 уч. год

Часть I

1. Определение уравнений и систем ДУ. Порядок системы. Определение решения, общего решения. Примеры.
2. Метод изоклин.
3. Метод ломаных Эйлера.
4. Задача Коши. Контрпримеры несуществования и неединственности решения, несуществования глобального решения.
5. Теорема Коши – Пикара (глобальная).
6. Лемма о нерастягивающей ретракции.

Часть II

1. Локальная теорема Коши-Пикара.
2. Теорема существования и единственности для линейных систем.
3. Сведение уравнения n-го порядка к нормальной системе.
4. Теорема существования и единственности для уравнений n-го порядка.
5. Непрерывная зависимость решений от входных данных. Редукция задач друг к другу.
6. Лемма Гронуоллла – Белмана.
7. Непрерывная зависимость решений от начальных данных. Теорема.
8. Непродожаемые решения.
9. Общее решение линейного однородного уравнения
10. Общее решение линейного однородного уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами (кратные корни).
11. Выделение вещественных решений.
12. Нахождение частного решения линейного неоднородного уравнения с правой частью в виде многочлена.
13. Метод исключения.
14. Общее решение системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами (простые собственные значения)

Вариант 1

1. Найти все значения параметра k, при которых уравнение

$$y'' + (k-4)(x^3y' + y^k) = 0$$

будет линейным.

2. Функция $y_1 = e^{2x}\cos 3x$ является решением линейного однородного уравнения с постоянными вещественными коэффициентами. Найти любое другое решение этого уравнения отличное от $y = C_1e^{2x}\cos 3x$. Ответ обосновать.

3. Уравнение $(x-1)y' = 3y$ имеет решение $y_0 = |x-1|^3$, $x \in (-1;4)$. Какие из следующих решений будут продолжениями y_0?

   - $y_1 = |x-1|^3$, $x \in (-2;5)$.
   - $y_2 = |x-1|^3$, $x \in (-2;3)$.
   - $y_3 = (x-1)^3$, $x \in (-5;5)$.

4. Дана задача Коши:

$$\dot{x} = 9x^2 + 4; \quad x(0) = 0.$$

Найти по локальной теореме Коши — Пикара максимальный (в зависимости от значений a и b) отрезок гарантированного существования решения.

5. Найти хотя бы одну функцию $y_0(x) \not\equiv 0$ такую, что одновременно $y_0(x)$ будет решением уравнения $y'' - 6y' + 5y = 0$ и $y_0(x)$, $y_1(x) = e^x + 3e^{2x}$, $y_2(x) = e^{2x} - e^{5x}$ являются линейно зависимыми функциями.

Вариант 2

1. Найти все значения параметра k, при которых уравнение
$$y'' + (k+2)(x^4 y' - y^k) = 0$$
будет линейным.

2. Функция $y_1 = e^{3x}\sin 5x$ является решением линейного однородного уравнения с постоянными вещественными коэффициентами. Найти любое другое решение этого уравнения отличное от $y = C_1 e^{3x}\sin 5x$. Ответ обосновать.

3. Уравнение $(x+1)y' = 3y$ имеет решение $y_0 = |x+1|^3$, $x \in (-2;3)$. Какие из следующих решений будут продолжениями y_0?
   - $y_1 = |x+1|^3$, $x \in (-1;6)$.
   - $y_2 = |x+1|^3$, $x \in (-3;5)$.
   - $y_3 = (x+1)^3$, $x \in (-4;4)$.

4. Дана задача Коши:
$$\dot{x} = 4x^2 + 9; \quad x(0) = 0.$$
Найти по локальной теореме Коши — Пикара максимальный (в зависимости от значений a и b) отрезок гарантированного существования решения.

5. Найти хотя бы одну функцию $y_0(x) \not\equiv 0$ такую, что одновременно $y_0(x)$ будет решением уравнения $y'' - 4y' + 3y = 0$ и $y_0(x)$, $y_1(x) = 2e^x + e^{2x}$, $y_2(x) = 2e^{2x} + 3e^{3x}$ являются линейно зависимыми функциями.