Экзамен 1-й минисессии состоит из двух частей: тест и задачи. Каждая часть оценивается из 10 баллов.

Вопросы теста

1. Дайте определение цепи Маркова.
2. Сформулируйте Марковское свойство.
3. Приведите различные интерпретации цепи Маркова.
4. Какая матрица называется стохастической?
5. Какая цепь называется однородной?
6. Дайте определение несущественного состояния.
7. Дайте определение существенного состояния.
8. Дайте определение сообщающихся состояний.
9. Дайте определение несообщающихся состояний.
10. Дайте определение поглощающего состояния.
11. Дайте определение разложимой цепи.
12. Дайте определение неразложимой цепи.
13. Дайте определение периодического состояния.
14. Дайте определение непериодического состояния.
15. Дайте определение апериодической цепи.
16. Дайте определение возвратного состояния.
17. Дайте определение невозвратного состояния.
18. Дайте определение нулевого состояния.
19. Укажите связь между характеристиками состояния «нулевое» и «возвратное».
20. Сформулируйте критерий возвратности состояния.
21. Приведите классификацию состояний по асимптотическим свойствам.
22. Приведите классификацию состояний по арифметическим свойствам.
23. Сформулируйте теорему о симметричном случайном блуждании.
24. Сформулируйте теорему солидарности.
25. В чем состоит алгебраический метод нахождения стационарного распределения?
26. Дайте определение характеристической матрицы цепи Маркова.
27. Какое распределение называется стационарным?
28. Сформулируйте эргодическую теорему.

Задачи

1. Доказать, что для конечной цепи Маркова состояние возвратно тогда и только тогда, когда оно существенно.
2. Эргодическая цепь Маркова имеет два состояния, известны предельные вероятности p и q. Найти матрицу вероятностей перехода за один шаг.
3. Доказать, что последовательность независимых одинаково распределенных сл.в. образует цепь Маркова.
4. Показать, что у неэргодической марковской цепи может существовать стационарное распределение, причем единственное.
5. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ - независимые случайные величины, $P(\xi_t = 1) = 1 - P(\xi_t = -1) = p$. Является ли цепью Маркова последовательность η_t, если $\eta_t = \xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \ldots \cdot \xi_t$?
6. Дана последовательность независимых одинаково распределенных сл.в., рассматриваемых как цепь Маркова. Найти матрицу переходных вероятностей за n шагов.
7. Доказать, что для конечной цепи Маркова всегда существует стационарное распределение.
8. Доказать, что в неприводимой конечной цепи Маркова не может быть нулевых или невозвратных состояний.

9. Доказать, что если цепь Маркова неприводима и хотя бы один диагональный элемент матрицы переходных вероятностей больше 0, то цепь непериодическая.

10. Доказать, что если цепь Маркова имеет по крайней мере одно несущественное состояние, то она не является эргодической.

11. Доказать, что, если в цепи Маркова состояние ε_j возвратно, то система с вероятностью 1 за бесконечное число шагов бесконечно много раз возвратится в ε_j. Если состояние ε_j невозвратно, то система с вероятностью 1 за бесконечное число шагов лишь конечное число раз возвратится в ε_j.

12. В некоторой области пространства имеются однородные частицы. Состояние изучаемой системы определяется числом частиц в данной области. В течение промежутка времени длиной 1 каждая частица независимо от других может покинуть эту область с постоянной вероятностью q. Кроме того, в области может появиться в течение единицы времени r новых частиц (r = 0, 1, 2,,,,) с вероятностью, определяемой законом Пуассона с параметром λ. Записать вероятность перехода из состояния «5» в состояние «10».

13. Пусть цепь Маркова имеет, по крайней мере, 2 несообщающихся состояния. Доказать, что она не является эргодической.

14. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ - независимые случайные величины, $P(\xi_t = 1) = 1 - P(\xi_t = -1) = p$. Является ли цепью Маркова последовательность η_t, если $\eta_t = \varphi(\xi_t, \xi_{t+1})$, где $\varphi(-1, -1) = 1$, $\varphi(-1, 1) = 2$, $\varphi(1, -1) = 3$, $\varphi(1, 1) = 4$?

15. Доказать, что последовательность попарно независимых сл.в. не обязательно образует цепь Маркова.

Пример билета

1. Дайте определение несущественного состояния.
2. Дайте определение сообщающихся состояний.
3. Приведите классификацию состояний по арифметическим свойствам.
4. Сформулируйте теорему о симметричном случайном блуждании.
5. Какое распределение называется стационарным?

1. Эргодическая цепь Маркова имеет два состояния, известны предельные вероятности p и q. Найти матрицу вероятностей перехода за один шаг.
2. Доказать, что последовательность независимых одинаково распределенных сл.в. образует цепь Маркова.
3. Доказать, что в неприводимой конечной цепи Маркова не может быть нулевых или невозвратных состояний.

На последнем семинаре перед минисессией проводится **контрольная работа**.

Типовые задачи

1. Пусть имеется три карточки с номерами 1, 2, 3. Состоянием системы назовем последовательность номеров этих карточек $i_1i_2i_3$. Предположим, что перемешивание происходит следующим образом: с вероятностями 1/2 состояние $i_1i_2i_3$ переходит в $i_2i_1i_3$ или в $i_1i_3i_2$. Найти матрицу вероятностей перехода и предельные вероятности.

2. В урне находится 2 черных шара и 3 белых шара. Число черных шаров в урне определяет состояние системы. На каждом шагу случайно выбирается один шар из урны, и удаляется, а в урну добавляется шар противоположного цвета. Классифицировать состояния, найти предельные вероятности.