

Примеры задач

1. Используя локальную теорему Коши — Пикара, для задачи Коши

$$\dot{x} = x^4 + 3, \quad x(0) = 0$$

указать максимальный интервал существования решения.

2. Найти какой-либо интервал существования решения задачи Коши

$$\dot{x} = x + \frac{1}{2t - 3}; \quad x(0) = 0.$$

3. Для задачи Коши

$$\dot{x} = tx^2 + 1 - t^2, \quad x(0) = 0$$

проверить выполнение условий локальной теоремы Коши — Пикара (в области $(-1, 1) \times (-1, 1)$).

4. Дано уравнение $\dot{x} = 2\sqrt{|x|}$. Построить два различных *продолжения* его решения $x(t)$ заданного формулой

$$x(t) = \begin{cases} -(t + 6)^2, & -8 < t < -6; \\ 0, & -6 \leq t \leq 4; \\ (t - 4)^2, & 4 < t < 7. \end{cases}$$

5. Найти продолжение решения $y_0 = x^3$, $x \in (2; 3)$ уравнения $xy' = 3y$ отличное от него самого.
6. Построить *непродолжаемое* решение задачи Коши

$$\dot{x} = -2x/t, \quad x(1) = 1.$$

7. Уравнение $(x - 1)y' = 5y$ имеет решение $y_0 = |x - 1|^5$, $x \in (-2; 5)$. Какие из следующих решений будут продолжениями y_0 ?

- $y_1 = (x - 1)^5$, $x \in (-7; 7)$.
- $y_2 = |x - 1|^5$, $x \in (-3; 6)$.
- $y_3 = |x - 1|^5$, $x \in (-3; 4)$.

Ответ обосновать в каждом из трех случаев.

8. Привести пример линейного однородного ДУ 3-го порядка с постоянными коэффициентами. Записать его характеристическое уравнение.
9. Найти все значения параметра k , при которых уравнение

$$y'' + (k - 4)(xy'' - y^k) = 0$$

будет линейным.

10. Найти общее решение уравнения $y^{(n)} = 0$.

11. Найти общее вещественное решение уравнения $y^{(4)} - y = 0$.

12. Построить общее (комплексное) решение линейного уравнения с постоянными комплексными коэффициентами

$$y''' - iy'' = 0,$$

13. В каком виде следует искать частное решение уравнения $y^{(5)} - y = 5t^2 \exp t$?

14. Найти общее *вещественное* решение уравнения

$$y'' + 4y' + 20y = 100x.$$

15. Найти все значения a , для которых все решения уравнения

$$y'' - ay' + y = 0$$

стремятся к нулю при $t \rightarrow -\infty$. *Указание:* воспользоваться теоремой Виета.

16. Записать фундаментальную систему решений (ФСР) для уравнения

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Вычислить определитель Вронского решений из ФСР.

17. Функции $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ являются решениями уравнения

$$y'' + y' + xy = 0.$$

Известно значение определителя Вронского этих решений в нуле: $W(y_1, y_2)|_{x=0} = 3$. Найти $W(y_1, y_2)|_{x=2}$.

18. Привести пример промежутка, на котором функции $f_1(x) = |x - 5|$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = 5$ будут являться: а) линейно независимыми; б) линейно зависимыми.

19. Функция $y = x^2 e^{2x}$ является решением линейного однородного уравнения третьего порядка с постоянными коэффициентами. Выписать общее решение этого уравнения.

20. Функция $y = 3e^x + 5e^{4x}$ является решением линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Найти это уравнение.

21. Известно, что функция $y(x) = 4 + 3e^{2x} \cos 3x$ является решением линейного однородного уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами. Найти *минимально возможное* значение n . Выписать соответствующее уравнение наименьшего порядка.

22. Найти хотя бы одно решение $y_0(x) \neq 0$ уравнения $y'' - 8y' + 7y = 0$ такое, что функции $y_0(x)$, $y_1(x) = e^x - 3e^{3x}$, $y_2(x) = e^{3x} + e^{7x}$ будут линейно зависимыми.

23. Известно, что общее решение некоторого линейного уравнения задано формулой

$$y = C_1 e^{(2+3i)x} + C_2 e^{(2-3i)x}.$$

Выделить вещественные решения этого уравнения.

24. Понизить порядок линейного уравнения

$$y''' + 2y'' + 4xy' - 4y = 0,$$

зная частное решение $y_1(x) = x$.