Уравнения математической физики
1 минисессия

Типовые задачи

Тип уравнений в частных производных второго порядка. Канонический вид. Общее решение.

1. Определить тип уравнения в пространстве E_3
$u_{xx} + 4u_{xz} + u_{yy} + u_{zz} + u_x + u_y = 0.$
2. Определить тип уравнения на плоскости переменных $(x; y)$
$(x^2 - 1)^2 u_{xx} + y^2 u_{yy} + u^2 = 0.$
3. Определить тип уравнения на плоскости переменных $(x; y)$
$(x - 1)u_{xx} + 2\cos\, y\, u_{yy} + u = 0.$
5. Определить тип уравнения на плоскости переменных $(x; y)$
$(x - 1)u_{xx} + 2\cos^2\, y\, u_{yy} + u = 0.$
4. Привести уравнение к каноническому виду
$u_{xx} + 3u_{yy} = u.$
6. Найти общее решение уравнения $u_{xx} = a^2 u_{yy}, u = u(x, y).$
7. Найти общее решение уравнения $u_{xy} = 0, u = u(x, y).$
8. Найти общее решение уравнения $u_{xx} = 0, u = u(x, y).$

Постановка задач

1. Записать формулировку следующих задач:
а) колебание струны с однородными краевыми условиями первого рода;
б) вторая краевая задача для уравнения Пуассона;
в) задача Коши для уравнения теплопроводности.
2. Поставить первую краевую задачу для уравнения теплопроводности $(n-1)$ и дать определение классического решения этой задачи.
3. Поставить вторую краевую задачу для уравнения колебания струны и дать определение классического решения этой задачи.
4. Поставить:
а) вторую краевую задачу для уравнения теплопроводности;
б) третью краевую задачу для уравнения Лапласа;
в) задачу Коши для уравнения колебания мембраны.
5. Поставить первую краевую задачу для уравнения Пуассона в квадрате $[0; 2] \times [0; 2]$ и дать определение классического решения этой задачи.

Теорема единственности решения краевой задачи для уравнения колебания струны

1. Доказать единственность гладкого решения первой краевой задачи для уравнения колебания струны.
2. Доказать единственность решения краевой задачи
$u_{tt} = u_{xx} + f(t, x)$, $(t, x) \in Q_T = \{(t, x)|0 < t < T, 0 < x < \pi\}$,
$u(0, x) = \sin\, x$, $u_t(0, x) = x(\pi - x)$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$,
$u(t, 0) = u(t, \pi) = \sin^2\, t$, $0 \leqslant t \leqslant T$,
в классе $C^2(\overline{Q}_T)$.
3. Доказать единственность в классе $C^2(\overline{Q}_T)$, $Q_T = \{(t, x)|0 < t < T, a < x < b\}$, решения $u(t, x)$ краевой задачи $u_{tt} = u_{xx}$,

$u(0,x) = u_0(x)$, $u_t(0,x) = u_1(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$,
$u_x(t,a) = \varphi(t)$, $u_x(t,b) = \psi(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Метод Фурье для волнового уравнения
1. Сформулировать задачу Штурма-Лиувилля для задачи
$u_{tt} = 3u_{xx}$,
$u(0,x) = \sin\, x$, $u_t(0,x) = 0$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$,
$u(t,0) = u(t,\pi) = 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Найти решение этой задачи Штурма-Лиувилля.
2. Найти в $\overline{Q}_T = \{(t,x) | 0 \leqslant t \leqslant T, 0 \leqslant x \leqslant \pi\}$ решение $u(t,x)$ задачи
$u_{tt} = u_{xx}$,
$u(0,x) = \sin\, 2x$, $u_t(0,x) = \sin\, 5x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$,
$u(t,0) = u(t,\pi) = 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$.
3. Найти в $\overline{Q}_T = \{(t,x) | 0 \leqslant t \leqslant T, 0 \leqslant x \leqslant l\}$ решение $u(t,x)$ задачи
$u_{tt} = 4u_{xx}$,
$u(0,x) = \cos\, \frac{3\pi x}{l}$, $u_t(0,x) = \cos\, \frac{5\pi x}{l}$, $0 \leqslant x \leqslant l$,
$u_x(t,0) = u_x(t,l) = 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Корректность по Адамару
1. Дать определение задачи, корректной по Адамару.
2. Дать определение корректности по Адамару. Привести пример некорректно поставленной задачи. Дать обоснование (указать, что нарушается).
3. Определить, корректна ли (по Адамару) задача:
Найти в классе $C^2(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ решение задачи
$u_t = 4u_{xx}$, $u(0,x) = \cos x$, $x \in [0;\pi]$,
$u(t,0) = \cos t$, $u(t,\pi) = t^2$, $t \in [0;T]$.
4. Определить, является ли корректной по Адамару следующая задача (дать обоснование):
$u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $t > 0$, $0 < x < \pi$,
$u_t(0,x) = \sin^2 x$, $x \in [0;\pi]$,
$u(t,0) = u(t,\pi) = 0$, $t \in [0;T]$.

1	2	3	4	5	6	$\sum$
3	4	3	5	3	2	20

Фамилия Группа

Сибирский федеральный университет

Институт математики и фундаментальной информатики

Экзаменационная работа по уравнениям математической физики

2019-2020. 1 минисессия
Вариант 0

1. Определить тип уравнения на плоскости переменных $(x; y)$
$(x^2-1)^2u_{xx} + y^2u_{yy} + u^2 = 0.$ (3 балла)
2. Записать формулировку следующих задач:
а) краевая задача для уравнения колебания струны с однородными краевыми условиями первого рода;
б) вторая краевая задача для двумерного уравнения Пуассона;
в) задача Коши для многомерного уравнения теплопроводности.
Дать определение классического решения любой одной из поставленных задач. (4 балла)
3. Дать определение корректности задачи по Адамару. Привести пример некорректно поставленной задачи. (3 балла)
4. Сформулировать и доказать теорему единственности гладкого решения первой краевой задачи для уравнения колебания струны. (5 баллов)
5. Записать постановку задачи Штурма-Лиувилля для задачи
$u_{tt} = 4u_{xx}$, $0 < x < 1, 0 < t < T$,
$u(0, x) = u_0(x)$, $u_t(0, x) = u_1(x)$, $u_x(t, 0) = u(t, 1) = 0$.
Найти решение поставленной задачи Штурма-Лиувилля. (3 балла)
6. Найти общее решение уравнения $u_{xy} = 0$. (2 балла)