

Фамилия

группа

1	2	3	4	5	6	$\Sigma$
3	4	3	4	2	4	20

Сибирский федеральный университет  
Институт математики и фундаментальной информатики

### Экзаменационная работа по уравнениям математической физики

2018-2019. 3 сессия

Демонстрационный вариант

Всюду ниже  $\Omega \subset E_n$  — ограниченная односвязная область.

1. Дать определения пространств  $C^k(\Omega)$ ,  $\overset{\circ}{C}^k(\Omega)$ ,  $\overset{\circ}{C}^\infty(\Omega)$ ,  $H^1(\Omega)$ ,  $\overset{\circ}{H}^1(\Omega)$ ,  $L_{p,loc}(\Omega)$  с указанием норм и скалярных произведений (если они определены). Какие из этих пространств являются банаховыми, гильбертовыми?

2. Дать определение  $\alpha$ -обобщенной производной. Доказать ее единственность.

3. Найти (по определению) обобщенную производную функции  $f(x) = x|x|$  в области  $\Omega = (-2; 1)$ .

4. Дать определение следа  $f(x)|_{\partial\Omega}$  функции класса  $H^1(\Omega)$ . Найти след  $f(x)|_{\partial\Omega}$  функции  $f(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1, \\ 1/2, & |x| = 1 \end{cases}$  в области  $\Omega = (-1; 1)$ .

5. Сформулировать лемму (неравенство) о следе для функции класса  $H^1(\Omega)$ .

6. Дать определение эквивалентности норм. Доказать эквивалентность норм  $\|u\| = \int_{\Omega} (u^2(x) + |\nabla u(x)|^2) dx$  и

$\|u\|_1 = \int_{\Omega} k(x) |\nabla u(x)|^2 dx$  в пространстве  $\overset{\circ}{H}^1(\Omega)$ . Здесь функция  $k(x)$  измерима по Лебегу и  $0 < k_0 \leq k(x) \leq K$ .