

Примеры задач

1. Найти все значения параметров a и b , при которых функция $y = ax + b$ будет являться частным решением уравнения

$$y(y')^2 + (x + 1)y' + y^2 = 9x^2 + 18x - 11.$$

2. Найти все значения параметра k , при которых уравнение

$$(k - 3)y''' + 5xy'' + 2y^k = 0$$

будет уравнением второго порядка.

3. Найти все значения параметра k , при которых уравнение

$$y''' + y'' + (k - 3)y^k = 0$$

будет линейным уравнением.

4. Существуют ли значения параметров α и β , при которых две системы

$$\begin{cases} 2\dot{x} + \dot{y} + 4y - 2t = 0, \\ (\dot{x} + y + \alpha t)^5 + (\dot{y} - x + 7)^\beta + 3t = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

являются эквивалентными?

5. Написать нормальную систему эквивалентную данной:

$$\begin{cases} 3\dot{x} - \dot{y} + 3y + 5x = 0, \\ \dot{x} + 2y - 4t = 0. \end{cases}$$

6. Записать нормальную систему эквивалентную уравнению $y'' = \sin(xy')$.

7. Построить задачу Коши эквивалентную интегральному уравнению

$$x(t) = 3 + \int_1^t s \cos(x(s)) ds.$$

8. Написать интегральное уравнение эквивалентное задаче Коши

$$y' = \sin(xy); \quad y(1) = 2.$$

9. Для задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + 1, \\ x(0) &= 0 \end{aligned}$$

построить последовательные приближения y_1, y_2, y_3 , начиная с $y_0 \equiv 0$.

10. Для некоторого линейного уравнения первого порядка построили последовательные приближения к решению задачи Коши:

$$y_0(x) = 1, \quad y_1(x) = 1 - 2x + \frac{x^2}{2}, \quad y_2(x) = 1 - 2x + \frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3}.$$

Найти это линейное уравнение.

11. Задача Коши:

$$(x - 1)y' = 3y; \quad y(2) = 1$$

имеет два решения $y_1 = (x - 1)^3$, $y_2 = |x - 1|^3$. Объяснить, как это согласуется с теоремой единственности.

12. Для уравнения $y'' = \frac{(y')^2}{y} - 1$ известны два решения: $y_1 = 1 + \sin x$, $y_2 = \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 1\right)^2$ проходящие через точку $(0, 1)$. Как это согласуется с теоремой единственности?

13. Для задачи Коши

$$\dot{x} = tx^2 + 1 - t^2, \quad x(0) = 0$$

проверить выполнение условий глобальной теоремы Коши — Пикара.