

Программа курса «Дискретная математика» 2015

Лектор: профессор Я.Н.Нужин

1. **Неориентированные графы.** Определение и примеры. Простые графы, понятия смежности и инцидентности. Степень вершины, лемма о рукопожатиях и ее следствие.
2. Специальные графы: пустые, полные, двудольные, полные двудольные, циклические. Вывод числа ребер в полном графе K_n и в полном двудольном графе $K_{n,m}$.
3. Изоморфизм графов, графовые инварианты, группа автоморфизмов графа.
4. Матрицы смежности и инцидентности и их свойства. Связны
5. Операции над графами: объединение, пересечение, разность, дополнение, произведение. Подграфы.
6. Планарные графы, гомеоморфизм, стягивание. Два критерия планарности графа. Укладка графа в пространстве. Теорема о планарности графа, укладываемого на сфере. Укладка конечного графа в трехмерном пространстве.
7. Маршруты в графах: циклический маршрут, цикл, цепь. Связный граф, компоненты связности. Эйлеровы графы, задача о кенигсбергских мостах, критерий эйлеровости. Полуэйлеровы графы, критерий полуэйлеровости.
8. Гамильтоновы и полугамильтоновы графы. Одно достаточное условие гамильтоновости: $d(v) > n/2 - 1$.
9. Плоские графы, грани плоского графа. Теорема Эйлера о плоских графах. Теорема о верхней оценке числа ребер планарного графа. Доказательство непланарности графов K_5 и $K_{3,3}$. Теорема о существовании в планарном графе вершины степени меньше шести.
10. Две теоремы о (геометрически) двойственных графах. Задача о кривой, проходящей через все границы плоской фигуры.
11. Расстояние на графах, диаметр графа, максимальное удаление от вершины, центр графа, радиус графа
12. Деревья и леса, число ребер леса как функция числа вершин и числа компонент связности. Цикломатическое число графа и его свойства, остовное дерево. Перечисление помеченных деревьев.
13. Раскрашивание графов, хроматическое число графа. Теорема об n -раскрашиваемости графа при $d(v) < n$ для всех вершин v . Теорема о 6-раскрашиваемости планарного графа. Гипотеза 4-х красок для графов и карт.
14. Хроматическая функция графа и ее элементарные свойства. Теорема: Хроматическая функция является многочленом от количества цветов. Хроматические многочлены и их свойства.

Образец билета

1. Доказать теорему Эйлера для плоских, необязательно связных, графах.
2. Построить двойственный граф G^* к полному графу G на четырех вершинах?
3. Найти хроматический многочлен $P_G(k)$ и хроматическое число $\chi(G)$ и раскрасить граф G минимальным числом цветов.
4. Найти группу автоморфизмов $\text{Aut}G$ и представить ее подстановками вершин, ответ обосновать.
5. Найти число ребер в полном двудольном графе $K_{n,m}$.