УДК 519.63

ЧИСЛЕННАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ[1]

Е.В.Кучунова, В.Е.Распопов*

В работе численно решаются задачи идентификации неизвестных коэффициентов, стоящих перед первой производной и в младших членах одномерного параболического уравнения. Рассмотрены случаи, когда неизвестны один или два коэффициента. Предполагается, что искомые коэффициенты зависят только от x. Обратные задачи аналитически сводятся к прямым задачам с нелокальными данными, которые решаются численно с помощью итерационного метода.

Рассмотрим следующие обратные задачи. В области $Q_T = \{(t,x) \mid 0<t<T,\ x\in\Omega\}$, где $\Omega=(0,1)$ найти:

I. функции $u(t.x)$ и $q(x)$, удовлетворяющие условиям:

$$u_t = u_{xx} + \lambda u + q(x)a(t,x) + f(t,x), \quad (t,x)\in Q_T, \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x\in\overline{\Omega}, \tag{2}$$

$$u(t,0) = \mu_1(t), \quad u(t,1) = \mu_2(t), \quad 0\le t\le T, \tag{3}$$

$$u(T,x) = u_1(x), \quad x\in\overline{\Omega}; \tag{4}$$

II. функции $u(t,x)$ и $b(x)$, удовлетворяющие уравнению:

$$u_t = u_{xx} + b(x)u_x + c(x)u + f(t,x), \quad (t,x)\in Q_T, \tag{5}$$

начальному условию (2), краевым условиям (3) и условию переопределения (4);

III. функции $u(t,x)$ и $c(x)$, удовлетворяющие уравнению (5) и условиям (2)-(4);

IV. функции $u(t,x)$, $b(x)$ и $c(x)$, удовлетворяющие уравнению (5), начально-краевым условиям (2), (3) и условиям переопределения:

$$u(t_1,x) = \tilde{u}_1(x), \quad u(t_2,x) = \tilde{u}_2(x), \quad x\in\overline{\Omega}, \quad 0<t_1<t_2\le T, \tag{6}$$

где t_1, t_2 - фиксированные числа.

Считаем, что все функции достаточно гладкие и выполнены все необходимые условия согласования.

В работах [1, 2] для обратной задачи I доказана следующая теорема: Пусть $a(x,t)\in W^{1,0}_{2,\infty}(Q_T)$, $u_1(x)\in W^2_2(\Omega)$. Если выполнены условия: $\lambda\le 0$, $\forall x\in\overline{\Omega}$ $|a(T,x)|\ge\delta>0$,

$$\forall (t,x)\in\overline{Q}_T \quad \frac{a(t,x)}{a(T,x)}\ge 0, \tag{7}$$

[1] Работа выполнена при поддержке ККНФ грант № 12F017C.

$$\forall(t,x)\in \overline{Q}_T \quad \frac{a_t(t,x)}{a(T,x)}\geq 0, \tag{8}$$

тогда решение задачи (1)-(4) существует, единственно и справедлива оценка:

$$\|u\|_{2,Q_T}^{(2,1)}+\|q\|_{2,\Omega}\leq c\|u_1\|_{(2,\Omega)}^{(2)}.$$

Поставленные обратные задачи будем решать численно, предварительно сведя их к прямым задачам для новых неизвестных. Переход к прямым задачам продемонстрируем на примере первой задачи.

Полагая в уравнении (1) $t=T$, принимая во внимание условие переопределения (4), считая что для $\forall x\in\overline{\Omega}\quad |a(T,x)|\geq\delta>0$, находим $q(x)$:

$$q(x)=\frac{u_t(T,x)-u_1''(x)-\lambda u_1(x)-f(T,x)}{a(T,x)}. \tag{9}$$

С найденным $q(x)$ уравнение (1) принимает вид

$$u_t=u_{xx}+\lambda u+\frac{a(t,x)}{a(T,x)}u_t(T,x)+F(t,x), \tag{10}$$

где через $F(t,x)$ обозначили: $F(t,x)=f(t,x)-\dfrac{u_1''(x)+\lambda u_1(x)+f(T,x)}{a(T,x)}a(t,x).$

Продифференцировав (10) по t и введя новую неизвестную по формуле

$$w(t,x)=u_t(t,x), \tag{11}$$

получаем:

$$w_t=w_{xx}+\lambda w+\frac{a_t(t,x)}{a(T,x)}\,w(T,x)+F_t(t,x). \tag{12}$$

Подставляя в (10) $t=0$, учитывая начальное условие (2) и замену (11), имеем:

$$w(0,x)=u_0''(x)+\lambda u_0(x)+\frac{a(0,x)}{a(T,x)}w(T,x)+F(0,x). \tag{13}$$

Новые краевые условия получаем, дифференцируя (3) по t:

$$w(t,0)=\mu_1'(t),\quad w(t,1)=\mu_2'(t),\quad 0\leq t\leq T. \tag{14}$$

Итак, обратную задачу I свели к следующей прямой.

I* В $\overline{Q}_T$ найти функцию $w(t,x)$, удовлетворяющую уравнению (12), нелокальному начальному условию (13) и краевым условиям (14).

Аналогично получаем задачи.

II* В $\overline{Q}_T$ найти функцию $w(t,x)$, удовлетворяющую условиям

$$w_t=w_{xx}+b(x)w_x+c(x)w+f_t(t,x),\quad (t,x)\in Q_T, \tag{15}$$

$$w(0,x)=u_0''(x)+b(x)u_0'(x)+c(x)u_0(x)+f(0,x),\ x\in\overline{\Omega} \tag{16}$$

и краевым условиям (14).

Коэффициент $b(x)$ определяется по формуле:

$$b(x)=\frac{w(T,x)-u_1''(x)-c(x)u_1(x)-f(T,x)}{u_1'(x)}. \tag{17}$$

Ш* В $\overline{Q}_T$ найти функцию $w(t,x)$, удовлетворяющую уравнению (15), нелокальному начальному условию (16) и краевым условиям (14).
Для этой задачи коэффициент $c(x)$ определяется по формуле:

$$c(x)=\frac{w(T,x)-u_1''(x)-b(x)u_1'(x)-f(T,x)}{u_1(x)}. \tag{18}$$

Полагаем, что в формулах (17) и (18) знаменатель не обращается в нуль при $x\in\overline{\Omega}$.

Обратную задачу IV сводим к прямой следующим образом. Подставляя в уравнение (5) значения $t=t_1$ и $t=t_2$ и учитывая условия переопределения (6), имеем:

$$u_t(t_1,x)=\tilde{u}_1''(x)+b(x)\tilde{u}_1'(x)+c(x)\tilde{u}_1(x)+f(t_1,x),$$
$$u_t(t_2,x)=\tilde{u}_2''(x)+b(x)\tilde{u}_2'(x)+c(x)\tilde{u}_2(x)+f(t_2,x).$$

Отсюда находим $b(x)$ и $c(x)$:

$$b(x)=\frac{\tilde{u}_2(x)u_t(t_1,x)-\tilde{u}_1(x)u_t(t_2,x)-R_1(x)}{\tilde{u}_1'(x)\tilde{u}_2(x)-\tilde{u}_2'(x)\tilde{u}_1(x)},\quad c(x)=\frac{\tilde{u}_2'(x)u_t(t_1,x)-\tilde{u}_1'(x)u_t(t_2,x)-R_2(x)}{\tilde{u}_2'(x)\tilde{u}_1(x)-\tilde{u}_1'(x)\tilde{u}_2(x)}, \tag{19}$$

где

$$R_1(x)=u_1''(x)u_2(x)-u_2''(x)u_1(x)+f(t_1,x)u_2(x)-f(t_2,x)u_1(x),$$
$$R_2(x)=u_1''(x)u_2'(x)-u_2''(x)u_1'(x)+f(t_1,x)u_2'(x)-f(t_2,x)u_1'(x).$$

Полагаем, что знаменатель в полученных выражениях не обращается в нуль.
Подставляя (19) в уравнение (5), получаем:

$$u_t=u_{xx}+\frac{\tilde{u}_2(x)u_t(t_1,x)-\tilde{u}_1(x)u_t(t_2,x)-R_1(x)}{\tilde{u}_1'(x)\tilde{u}_2(x)-\tilde{u}_2'(x)\tilde{u}_1(x)}u_x+\frac{\tilde{u}_2'(x)u_t(t_1,x)-\tilde{u}_1'(x)u_t(t_2,x)-R_2(x)}{\tilde{u}_2'(x)\tilde{u}_1(x)-\tilde{u}_1'(x)\tilde{u}_2(x)}u+f. \tag{20}$$

Дифференцируя (20) по t и вводя новую неизвестную по формуле (11), имеем:

$$w_t=w_{xx}+\frac{\tilde{u}_2(x)w(t_1,x)-\tilde{u}_1(x)w(t_2,x)-R_1(x)}{\tilde{u}_1'(x)\tilde{u}_2(x)-\tilde{u}_2'(x)\tilde{u}_1(x)}w_x+\frac{\tilde{u}_2'(x)w(t_1,x)-\tilde{u}_1'(x)w(t_2,x)-R_2(x)}{\tilde{u}_2'(x)\tilde{u}_1(x)-\tilde{u}_1'(x)\tilde{u}_2(x)}w+f_t, \tag{21}$$

Подставляя в (20) значение $t=0$, учитывая замену (11) и начальное условие (2), получаем:

$$w(0,x)=u_0''(x)+\frac{\tilde{u}_2(x)w(t_1,x)-\tilde{u}_1(x)w(t_2,x)-R_1(x)}{\tilde{u}_1'(x)\tilde{u}_2(x)-\tilde{u}_2'(x)\tilde{u}_1(x)}u_0'(x)+$$
$$+\frac{\tilde{u}_2'(x)w(t_1,x)-\tilde{u}_1'(x)w(t_2,x)-R_2(x)}{\tilde{u}_2'(x)\tilde{u}_1(x)-\tilde{u}_1'(x)\tilde{u}_2(x)}u_0+f(0,x). \tag{22}$$

Таким образом, пришли к задаче
IV* В $\overline{Q}_T$ найти функцию $w(t,x)$, удовлетворяющую уравнению (21), нелокальному начальному условию (22) и краевым условиям (14).

Отметим, что прямые задачи I*-IV* содержат следы функции w в уравнениях (12), (15) и (21), а также нелокальные начальные данные (13), (16) и (22). Для задач II*-IV* упомянутые следы функции w содержатся в коэффициентах $b(x)$ и $c(x)$, поэтому эти задачи являются нелинейными.

После того, как функция $w(t,x)$ найдена, исходная неизвестная $u(t,x)$ восстанавливается по формуле:

$$u(t,x)=u_0(x)+\int_0^t w(\tau,x)d\tau,\quad (t,x)\in Q_T, \tag{23}$$

а искомые коэффициенты, соответственно, по формуле (9) – для задачи I, (17) – для задачи II, (18) – для задачи III, (19) – для задачи IV.

Нетрудно показать, что найденные таким образом *u(t,x)* и коэффициенты есть решения исходных обратных задач.

Задачи I*-IV* решаем численно. Для этого в области $\overline{Q}_T$ строим сетку:

$$\overline{\omega}_{h\tau} = \left\{ (t_j, x_i) \middle| t_j = j\tau, x_i = ih, j = \overline{0,M}, i = \overline{0,N} \right\}.$$

Через y_i^n обозначаем значение сеточной функции *y* в узле (t_n, x_i).

Для задачи I* строим следующую разностную схему:

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \frac{y_{i+1}^{n+1} - 2y_i^{n+1} + y_{i-1}^{n+1}}{h^2} + \lambda y_i^n + \frac{a_t(t_n, x_i)}{a(T, x_i)} y_i^M + \varphi_i^n,$$

$$n = \overline{0, M-1}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad \varphi_i^n = F_t(t_n, x_i),$$

$$y_i^0 = u_0''(x_i) + \lambda u_0(x_i) + \frac{a(0, x_i)}{a(T, x_i)} y_i^M + F(0, x_i), \quad i = \overline{0, N}, \tag{24}$$

$$y_0^n = \mu_1'(t_n), \quad y_N^n = \mu_2'(t_2), \quad n = \overline{0, M}.$$

Для остальных задач разностная схема имеет следующий вид:

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \frac{y_{i-1}^{n+1} - 2y_i^{n+1} + y_{i+1}^{n+1}}{h^2} + B_i \frac{y_{i+1}^{n+1} - y_{i-1}^{n+1}}{2h} + C_i y_i^n + \varphi_i^n,$$

$$\text{где } n = \overline{0, M-1}; \quad i = \overline{1, N-1}; \quad \varphi_i^n = f_t(t_n, x_i);$$

$$y_i^0 = u_0''(x_i) + B_i u_0'(x_i) + C_i u_0(x_i) + f(0, x_i), i = \overline{0, N}, \tag{25}$$

$$y_0^n = \mu_1'(t_n), \quad y_N^n = \mu_2'(t_2), \quad n = \overline{0, M},$$

где коэффициенты B_i и C_i задаются в зависимости от решаемой задачи. Считаем, что t_1 соответствует слой с номером M_1, а t_2 – с номером M_2.

Разностные схемы (24) и (25) содержат значения функции у на *M*-м слое по времени в случаях одного неизвестного коэффициента и на M_1-м и M_2-м слоях в случае двух неизвестных коэффициентов. Эти схемы аппроксимируют дифференциальные задачи с порядком $O(h^2 + \tau)$. Полный анализ устойчивости разностных схем провести не удалось, однако получили, что для устойчивости схемы (24) необходимо, чтобы $\tau \le \frac{2}{|\lambda|}$ (в случае $\lambda < 0$).

Разностные задачи решаем итерационным методом, задавая в схемах $\left\{y_i^{(s)M}\right\}_{i=0}^N$ или $\left\{y_i^{(s)M_1}\right\}_{i=0}^N$ и $\left\{y_i^{(s)M_2}\right\}_{i=0}^N$ с предыдущей итерации. На нулевой итерации эти функции задаём в виде линейных функций, удовлетворяющих краевым условиям. Итерационный процесс заканчиваем, когда $\max\limits_{0 \le i \le N} | y_i^{(s)M} - y_i^{(s-1)M} | < \varepsilon$ для задач I* - III* и $\max\limits_{0 \le i \le N} \left| y_i^{(s)M_k} - y_i^{(s-1)M_k} \right| < \varepsilon, \quad k = 1,2$ для задачи IV*, где ε - заранее задано. На каждой итерации на каждом слое по времени решаем систему линейных алгебраических уравнений методом прогонки [3], если выполняется условие устойчивости прогонки, и другим методом в противном случае.

Функцию $u(t,x)$ вычисляем во внутренних узлах сетки $\overline{\omega}_{h\tau}$ по формуле (23), используя составную квадратурную формулу трапеций. Искомые коэффициенты вычисляем на сетке по формулам (9), (17), (18) и (19).

Проведенные вычислительные эксперименты на модельных задачах показали следующие результаты.

Для задачи I если условия (7) и (8) приведенной выше теоремы существования и единственности решения выполнены, то итерационный процесс сходится и сходится к решению исходной задачи за 5-7 итераций. При этом относительные погрешности для $u(t,x)$ и $q(x)$ на рассмотренных тестах при $\tau=0{,}01$, h=0,01, $\varepsilon=10^{-4}$, $\lambda<0$ составляют 0,1%-0,3%. Если нарушено одно из двух условий (7) или (8) теоремы, то итерационный процесс сходится, относительная погрешность для $u(t,x)$ составляет 0,2-0,4%, а для $q(x)$ – 0,3-0,6 %. Наконец, если нарушены оба условия теоремы, то итерационный процесс сходится, но относительная погрешность для $u(t,x)$ составляет 0,3-0,8%, а для $q(x)$ 6-30%, т.е. мы в этом случае, вообще говоря, не приходим к решению исходной задачи.

Далее, для задачи I выбор шага по времени существенно зависит от коэффициента λ, а именно: итерационный процесс сходится, если $\lambda<0$ и $\tau\le\frac{2}{|\lambda|}$. Для остальных задач на рассмотренных тестах итерационный процесс сошелся.

В случае задачи IV* численно исследовалось влияние выбора точек t_1 и t_2, в которых ставятся условия переопределения (6), на сходимость итерационного процесса. Множество значений t_1 и t_2, при которых на рассмотренных тестах итерационный процесс сошелся, представлено на рис.1. Расчеты показали, что наименьшие погрешности получаются, когда $t_1=0{,}5T$ и $t_2=T$.

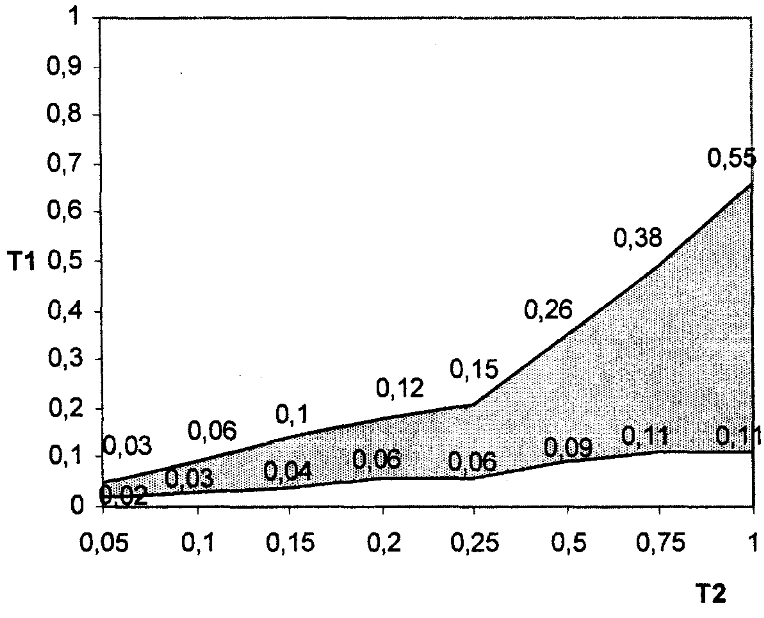

Рис. 1. Область сходимости

На всех рассмотренных тестах во всех задачах при уменьшении шагов сетки в случае, когда итерационный процесс сходится, абсолютные и относительные погрешности убывают.

Например, для задач II-IV, когда $u(t,x)=e^t\sin(x)+x+1$, $b(x)=\cos(x)$, $c(x)=\cos(x)$ результаты расчетов представлены в табл.1.

В табл.1 $\delta u, \delta b, \delta c$ –максимальные по всем узлам сетки относительные погрешности функций $u(t,x)$, $b(x)$ и $c(x)$ соответственно.

Таблица 1

Результаты расчетов при уменьшении шагов разбиения, %

h=τ	δu	Случай одного неизвестного коэффициента		Случай двух неизвестных коэффициентов	
		δb	δc	δb	δc
0,1	0,16	0,77	0,5	4	2
0,01	0,0023	0,013	0,0075	0,09	0,045
0,002	0,0006	0,001	0,001	0,004	0,002
0,001	0,0003	0,0005	0,0006	-	-

Для исследования влияния погрешностей во входных данных проводились расчеты с погрешностями в начальных условиях и в условиях переопределения. Значения функций с внесенной погрешностью задавали следующим образом:

$$\overline{u}_{0i} = u_0(x_i) + \frac{\delta_i}{100} u_0(x_i), \qquad \overline{u}_{1i} = u_1(x_i) + \frac{\delta_i}{100} u_1(x_i), \qquad i = \overline{0, N}.$$

Величины δ_i выбирали случайным образом от нуля до некоторого фиксированного значения δ. Расчеты проводили с δ, изменяющимся от 1 до 3. Вычислительные эксперименты показали, что внесение таких погрешностей во входные данные не влияет на сходимость итерационного процесса, т.е. если итерационный процесс сходится без погрешностей во входных данных, то он сходится и с внесенными погрешностями, причем за то же количество итераций.

При расчетах с внесенной погрешностью в начальное условие получили похожие результаты для всех задач, а именно: $\max\limits_{\substack{0\le i\le N\\ 0\le n\le M}} \Delta u_i^n \le \max\limits_{0\le i\le N} \Delta u_{0i}$, т.е. абсолютная погрешность на всей сетке не превышает заданной на нулевом слое. На рис.2 изображены погрешности функции $u(t,x)$ на сетке при различных значениях t. Жирной линией изображена погрешность, заданная на нулевом слое. Эти результаты получены при расчетах с погрешностью $\delta = 1$.

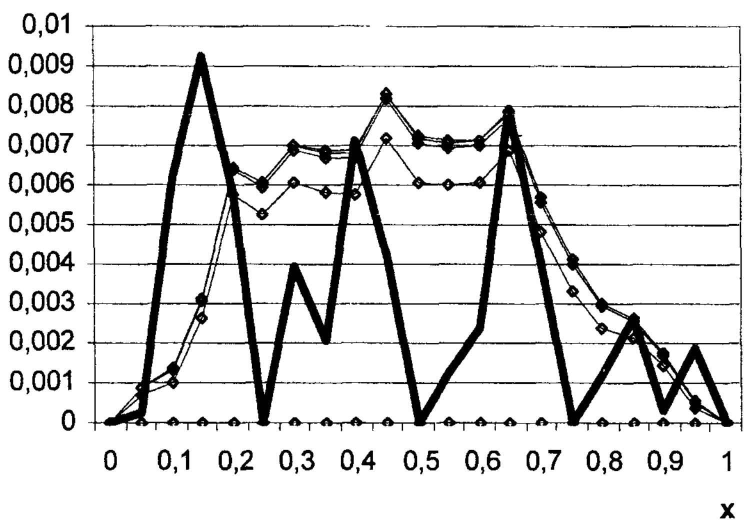

Рис. 2. Абсолютная погрешность

При расчетах с погрешностью в начальных данных полученные относительные погрешности коэффициентов $q(x)$, $b(x)$ и $c(x)$ на сетке близки к нулю.

При расчетах с погрешностью внесенной в условие переопределения получили различные результаты для задач I-III. Для задачи I результаты существенно зависят от выполнения условия (8) теоремы существования и единственности решения.

Так, если функция $a(t,x)$ удовлетворяет условию (8) теоремы, то получаем следующие результаты: $\max\limits_{\substack{0\le i\le N\\0\le n\le M}}\Delta u_i^n \le \max\limits_{0\le i\le N}\Delta u_{1i}$, т.е. абсолютная погрешность на сетке не превышает заданную на верхнем слое, и $\max\limits_{0\le i\le N}\delta q_i < \delta$, т.е. относительная погрешность на сетке функции $q(x)$ не превышает δ. На рис.3. изображены погрешности функции $u(t,x)$ при различных значениях t. Жирной линией показана погрешность на верхнем слое по времени. Эти результаты получены при расчетах с погрешностью в условии переопределения $\delta = 1$.

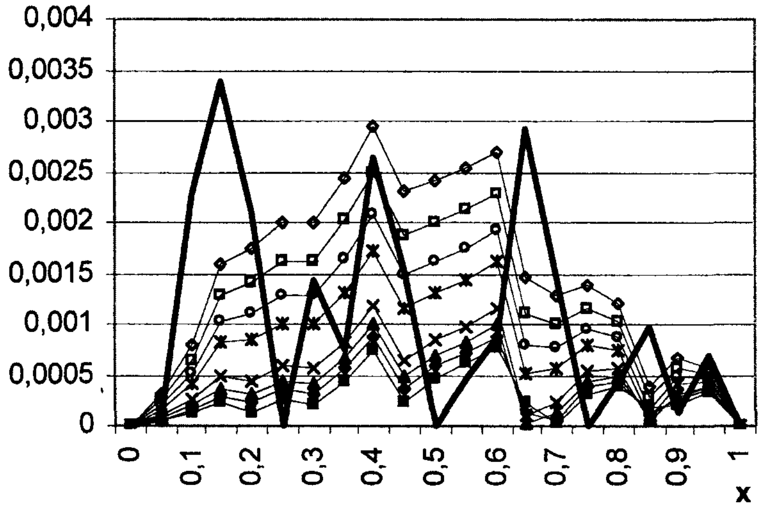

Рис. 3. Абсолютная погрешность

Если же функция $a(t,x)$ не удовлетворяет условию (8), то результаты получаются следующими: $\max\limits_{\substack{0\le i\le N\\0\le n\le M}}\delta u_i^n > \delta$, $\max\limits_{0\le i\le N}\delta q_i \gg \delta$, т.е. погрешность по всем узлам сетки превышает заданную на верхнем слое.

Для задач II и III погрешность функции $u(t,x)$ на сетке не превосходит погрешности, заданной на верхнем слое, а погрешность в вычисленных значениях коэффициентов превосходит внесенную в условие переопределения не больше чем на 1-2%. Полученные результаты показали, что в случае сходимости итерационного процесса предложенный численный метод устойчив относительно погрешностей в начальном условии и условии переопределения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прилепко А.И. Об обратных задачах определения коэффициентов в параболических уравнениях I / А.И.Прилепко, А.Б.Костин // Сибирский математический журнал. - 1992. – Т.33. – №3. - С.145-155.
2. Прилепко А.И. Об обратных задачах определения коэффициентов в параболических уравнениях II / А.И.Прилепко, А.Б.Костин // Сибирский математический журнал. - 1993. – Т.34. – №5. - С.147-162.
3. Самарский А.А. Теория разностных схем / А.А.Самарский - М.: Наука, 1983.

NUMERICAL IDENTIFICATION OF COEFFICIENTS OF THE PARABOLIC EQUATIONS

E.V.Kuchunova, V.E.Raspopov

In this work problems of the identification of unknown coefficients staying before the first derivative and in younger members of one-dimensional parabolic equation are solved numerically. Cases when one or two coefficients are unknown are considered. It is supposed, that required coefficients depend only on x. Inverse problems are analytically reduced to direct problems with non-local data which are solved numerically by the iterative method.ки зрения самого метода получения данного решения.